CÁLCULO EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES EN EL ÁREA TECNOLÓGICA

ISU CENTRAL TÉCNICO

CÁLCULO EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES EN EL ÁREA TECNOLÓGICA

Ing. Miguel Murillo
Ing. Edgar Guamán
MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica del mismo.

© Publicaciones Editorial Grupo Compás
Guayaquil - Ecuador
compasacademico@icloud.com
https://repositorio.grupocompas.com

Diseño de la portada es de: Ariadna Tirado Pereira

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Murillo, M., Guamán, E., Cumbal, H., Castro, J. (2024) CÁLCULO EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES EN EL ÁREA TECNOLÓGICA. Editorial Grupo Compás

© Ing. Miguel Murillo
Ing. Edgar Guamán
MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro

Diseño Gráfico y Diagramación:
Ing. Miguel Murillo
Ing. Edgar Guamán
Diseño de Portada y Banners:
Ing. Juan Carlos Fuertes
Ing. Jacqueline Montesdeoca

ISBN: 978-9942-33-844-0

Revisores:
Dr. Danilo Gortaire Játiva, Ph.D. Universidad Central del Ecuador
MSc. Mónica Mantilla Hidalgo
Escuela Politécnica Nacional
Mgs. Katalina Sarmiento
Instituto Superior Universitario Central Técnico

DEDICATORIA

Dedicado a nuestras familias, que han sido
el pilar fundamental en nuestra formación.

Docentes del Área

AGRADECIMIENTO

Hacemos presente nuestro agradecimiento
a los compañeros del Área de Ciencias Exactas
y a todos quienes colaboraron en la finalización
de esta obra, así como a las autoridades del ISUCT
por hacernos partícipes de este proyecto.

ISU CENTRAL TÉCNICO

CONTENIDO

I CÁLCULO DIFERENCIAL

1 Límites y Continuidad de Funciones 13

1.1 Límite de una función 13

1.2 Cálculo de límites mediante leyes y técnicas algebraicas 18

1.3 Técnicas algebraicas para cálculo de límites indeterminados 23

1.3.1 Ejercicios Propuestos 29

1.4 Definición formal de límite 32

1.4.1 Ejercicios Propuestos 43

1.5 Límites Laterales, Límites Trigonométricos y Límites al Infinito 44

1.5.1 Ejercicios Propuestos 60

1.6 Límites Infinitos 62

1.6.1 Ejercicios Propuestos 66

1.7 Continuidad 68

1.7.1 Ejercicios Propuestos 81

2 Definición y Propiedades de la derivada 85

2.1 Definición y Propiedades 85

2.2 Derivadas de funciones trascendentes 93

2.2.1 Ejercicios Propuestos 100

3 Derivadas Trigonométricas e Hiperbólicas 103

3.1 Derivadas de Funciones Trigonométricas 103

3.2 Derivadas de Funciones Hiperbólicas 114
3.2.1 Ejercicios Propuestos 117

4 Derivadas Inversas, Implícitas y Superiores 119
4.1 Derivadas de Funciones Inversas 119
4.2 Derivadas Implícitas 126
4.3 Derivadas de Orden Superior 130
4.3.1 Ejercicios Propuestos 134

5 Resultados Importantes de Cálculo Diferencial 137
5.1 REGLAS DE HÔSPITAL 148
5.1.1 Ejercicios Propuestos 149

6 Aplicaciones de la Derivada 151
6.1 Aplicaciones de la Derivada al Trazado de curvas 151
6.1.1 Ejercicios Propuestos 157

II CÁLCULO INTEGRAL

7 La integral Indefinida 161
7.1 Funciones primitivas o antiderivadas 161
7.1.1 Ejercicios Propuestos 166
7.2 Integral Indefinida 167
7.2.1 Ejercicios Propuestos 170
7.3 Método de Sustitución 172
7.3.1 Ejercicios Propuestos 174
7.4 Integración por partes 175
7.4.1 Ejercicios Propuestos 178
7.5 Integración Trigonométrica 179
7.5.1 Producto de potencias de senos y cosenos 179
7.5.2 Método de eliminación de raíces cuadradas 181
7.5.3 Integrales de potencias de $\tan(x)$ y $\sec(x)$ 182
7.5.4 Producto de senos y cosenos 185
7.5.5 Ejercicios Propuestos 186
7.6 Integración de Funciones Racionales 188
7.6.1 Ejercicios Propuestos 192
7.7 Método de Sustitución Trigonométrica 193
7.7.1 Ejercicios Propuestos 198

8 Integral Definida 201
8.1 Sumatorias 201
8.1.1 Ejercicios Propuestos 209
8.2 Axioma del Supremo 210
8.2.1 Ejercicios Propuestos 214

8.3 Definición de Integral de Riemann **215**
8.3.1 Ejercicios Propuestos 234
8.4 Teoremas Fundamentales del Cálculo **235**
8.5 Aplicaciones de la Integral Definida **250**
8.5.1 Cálculo del área entre curvas 250
8.5.2 Longitud de arco 254
8.5.3 Ejercicios Propuestos 256

III APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

9 Impresión, Offset y Acabados **263**

10 Mecánica Industrial **287**

11 Mecánica Automotriz **301**

12 Electricidad **313**

13 Electrónica **323**

Bibliografía **341**

INTRODUCCIÓN

Al preparar la presente edición del libro de Cálculo, hemos querido mantener un estilo propio a fin de conservar las fortalezas de las matemáticas. Nuestra meta ha sido, por lo tanto, identificar las mejores características de la presente obra y, al mismo tiempo, atender cuidadosamente las sugerencias de nuestros revisores. Con estos altos estándares de aplicación, hemos construido los ejercicios y aclarado algunos temas de difícil comprensión, *"hemos intentado escribir el libro con tanta claridad y precisión como nos ha sido posible"*. Además, hemos restablecido los contenidos para que sean más lógicos y congruentes con los programas de estudio de mayor difusión. Al revisar esta labor en retrospectiva, nos percatamos de que los muchos conocimientos adquiridos nos han ayudado a crear el texto de cálculo, útil y atractivo para la siguiente generación de estudiantes y docentes del ISUCT.

El presente texto no sólo presenta a los estudiantes los métodos y las aplicaciones del cálculo, sino que plantea también una manera de pensar totalmente lógica y abstracta. A partir de los ejercicios, los ejemplos y el desarrollo de los conceptos que revela la teoría en un lenguaje legible, este libro se centra en el pensamiento y la comunicación de ideas matemáticas. El cálculo tiene gran relación con muchos de los paradigmas claves de las matemáticas y, establece los fundamentos reales para la reflexión precisa y lógica entorno de temas físicos y matemáticos. Nuestro propósito se centra en ayudar a los estudiantes y docentes del ISUCT a alcanzar la madurez matemática necesaria para dominar y aplicar sus conocimientos de manera íntegra. El razonamiento que se deriva de la comprensión de lo analizado en las páginas de esta obra, hace que el esfuerzo que ha implicado su creación valga la pena.

AUTORES

CÁLCULO DIFERENCIAL

1	**Límites y Continuidad de Funciones . . 13**
1.1	Límite de una función
1.2	Cálculo de límites mediante leyes y técnicas algebraicas
1.3	Técnicas algebraicas para cálculo de límites indeterminados
1.4	Definición formal de límite
1.5	Límites Laterales, Límites Trigonométricos y Límites al Infinito
1.6	Límites Infinitos
1.7	Continuidad
2	**Definición y Propiedades de la derivada 85**
2.1	Definición y Propiedades
2.2	Derivadas de funciones trascendentes
3	**Derivadas Trigonométricas e Hiperbólicas 103**
3.1	Derivadas de Funciones Trigonométricas
3.2	Derivadas de Funciones Hiperbólicas
4	**Derivadas Inversas, Implícitas y Superiores 119**
4.1	Derivadas de Funciones Inversas
4.2	Derivadas Implícitas
4.3	Derivadas de Orden Superior
5	**Resultados Importantes de Cálculo Diferencial 137**
5.1	REGLAS DE HÔSPITAL
6	**Aplicaciones de la Derivada 151**
6.1	Aplicaciones de la Derivada al Trazado de curvas

1. Límites y Continuidad de Funciones

1.1 Límite de una función

En está sección se explicará una definición informal del límite de una función real. Sin embargo, cuando ya se tenga la mayor claridad, se definirá de manera formal el límite de una función.

Idea intuitiva de límite

Sea f una función real definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, *excepto posiblemente el mismo punto* x_0. Si $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L, para toda x suficientemente cercana a x_0, por cualquiera de los lados de x_0, pero no iguales a x_0, esto es, que f se aproxima al límite L cuando x se acerca a x_0 y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

el cual se lee como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L". A veces, también se denota $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$.

Está idea no es una definición formal del límite, ya que las frases *como tanto queramos* y *suficientemente cercana* son imprecisas en una estructura matemática. Después de todo es lo bastante clara y nos ayuda a evaluar límites de funciones específicas, en la Sección 1.4 se definirá formalmente el límite de una función, esto permitirá probar propiedades, teoremas y verificar resultados importantes del cálculo de límites de algunas funciones.

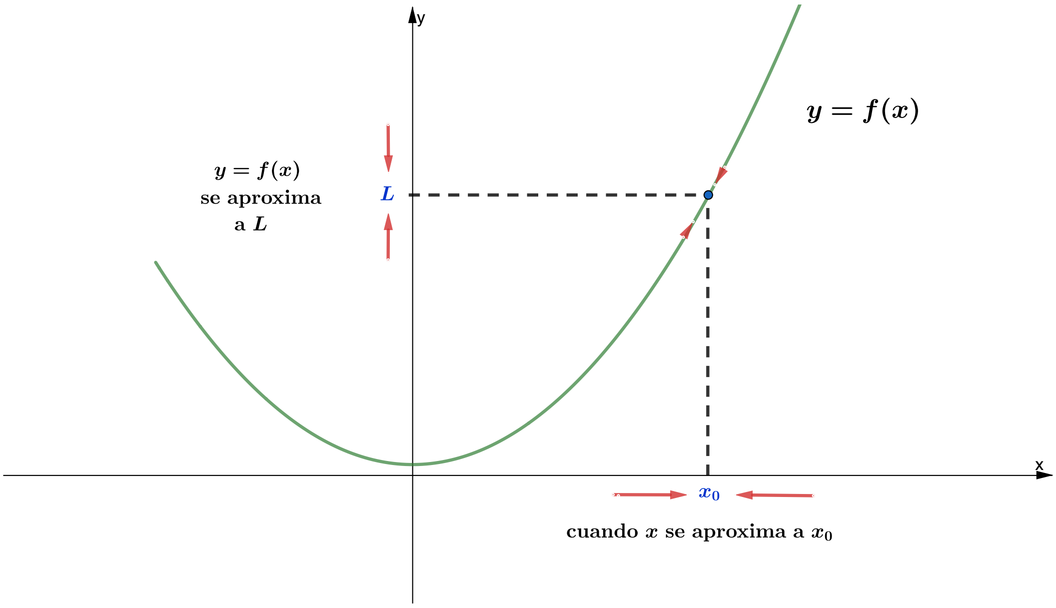


Figura 1.1: Idea del límite de una función

■ **Ejemplo 1.1 — Comportamiento de una función alrededor de un punto.** Analizar el comportamiento de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ al estar cerca de $x = 3$.

Solución:

Observemos que la función f no esta definida en $x = 3$. Así, aplicando descomposición de factores, se tiene

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = x+3, \qquad \text{para } x \neq 3.$$

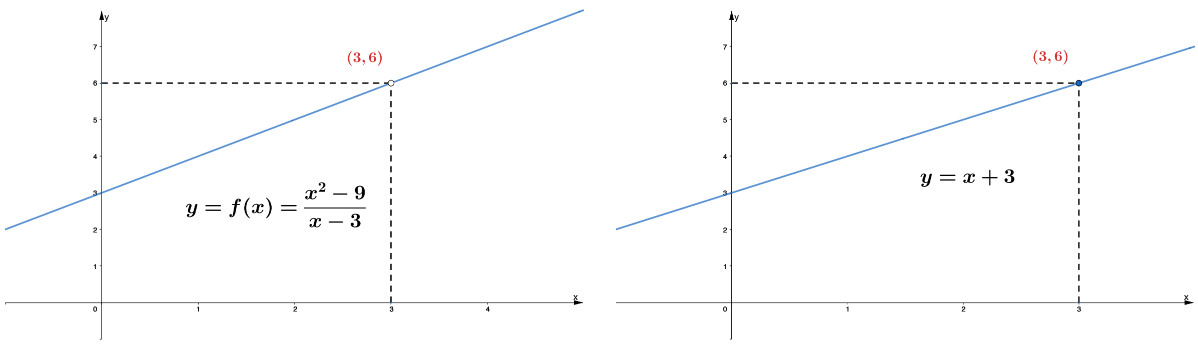


Figura 1.2: La gráfica de f es idéntica a a la recta $y = x+3$ excepto en el punto $x = 3$, donde f no está definida

Por tanto, su gráfica es la recta $y = x+3$ excluyendo el punto $(3,6)$. En la Figura 1.2 se puede observar que el punto $(3,6)$ se lo representa con un círculo vacío, es decir, que $f(3)$ no está definida y es claro que se puede encontrar el valor de $f(x)$ *tan cerca como queramos* de 6, tomando valores *lo suficientemente cercano a* 3. Véase la siguiente Tabla 1.1.

Valores de x **alrededor de** 3	$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3, \quad x\neq 3$
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
2.9999	5.9999
3	——-
3.0001	6.0001
3.001	6.001
3.01	6.01
3.1	6.1

Tabla 1.1: Cuando x está más cerca de 3, $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ parece estar más cerca a 6.

Finalmente, se concluye que el límite de $f(x)$ se acerca a 6 a medida que x se aproxima a 3, y se escribe

$$\lim_{x\to 3} f(x)=6 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

Observación 1.1 El valor del límite, no depende de como esté o no definida la función en el punto a analizar. La Figura 1.3 se muestra las gráficas de tres funciones, analizando cada caso, se tiene

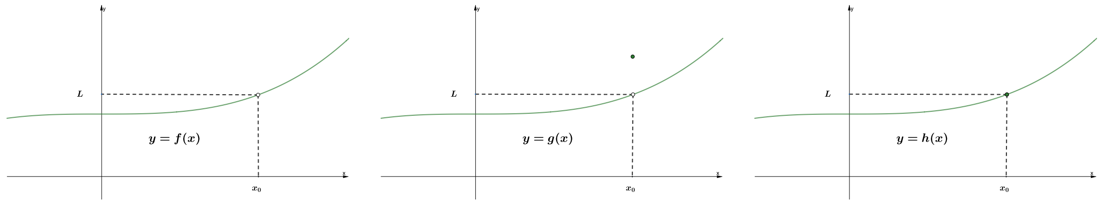
(a) La función f tiene límite cuando $x\to x_0$ a pesar de que la función f no está definida en $x=x_0$.

(b) La función g tiene límite en x_0 a medida que $x\to x_0$, aun cuando $L\neq g(x_0)$.

(c) La función h es la única cuyo límite cuando $x\to x_0$ es igual al valor de la función en $x=x_0$, es decir, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=h(x_0)$.

Está última igualdad en la sección 1.7, relacionaremos con la continuidad de la función.

Nota 1.1 En algunos casos se puede evaluar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ calculando $f(x_0)$. Está afirmación es correcta siempre que no exista algún tipo de restricción en la función en el punto que se quiere obtener el límite.



(a) (b) (c)

Figura 1.3: Es límite cuando $x \to x_0$ para tres casos distintos

■ **Ejemplo 1.2** Determinación de límites evaluando la función en el punto de límite.

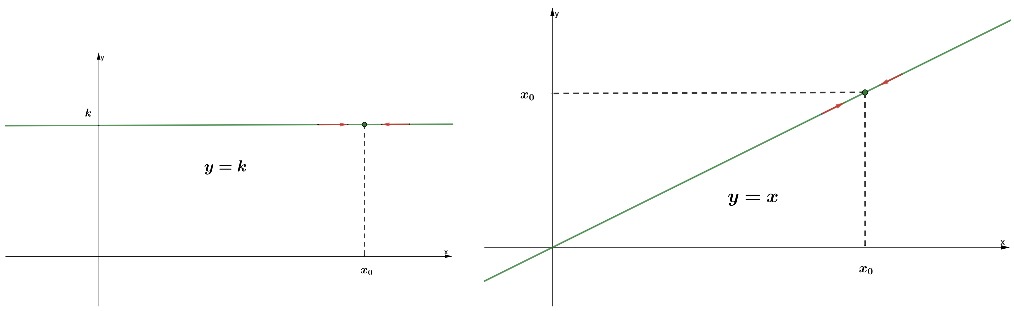
a) $\lim\limits_{x \to -5} (7) = 7.$

b) $\lim\limits_{x \to 2} (7) = 7.$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (x) = 1.$

d) $\lim\limits_{x \to -1} (4x - 7) = -11.$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x-4}{2x-5} = \dfrac{5(0)-4}{2(0)-5} = \dfrac{4}{5}.$



(a) Función Identidad (b) Función Constante

Figura 1.4: Las funciones del Teorema 1.1

Observemos que los límites de las funciones identidad y constante se pueden encontrar por sustitución, lo cuál se enuncia en el siguiente Teorema 1.1.

Teorema 1.1

i) Si f es la *función identidad* dada por $f(x) = x$ y su $dom(f) = \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

ii) Si f es la *función constante* dada por $f(x) = k$ donde $k \in \mathbb{R}$ y su $dom(f) = \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k.$$

La demostración del teorema está realizado en la sección 1.4, donde se utiliza la definición formal del límite de una función real. A continuación, observemos un ejemplo donde se utiliza únicamente tabla de valores para determinar el límite de una función. Mediante el uso de calculadoras se puede obtener diferentes repuestas del límite de una función.

■ **Ejemplo 1.3** Estime el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$.

Solución:

En la siguiente Tabla 1.2 se listan los valores de la función , para varios valores cercanos a $x = 0$.

Valores de x **alrededor de** 0	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}, \quad x \neq 0$
$\pm$ 1	0.1231
$\pm$ 0.5	0.1245
$\pm$ 0.1	0.12498
$\pm$ 0.05	0.12499
$\pm$ 0.01	0.1249998

Tabla 1.2: Cuando x está más cerca de varios valores de 0, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$ parece estar más cerca a 0,125.

Por tanto, a medida que x se acerca a 0, parecen aproximarse a $\dfrac{1}{8}$. Así, se supone que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} = \frac{1}{8}.$$

Por otra parte, supongamos que tomamos valores más pequeños de x, ¿puede ser, que el valor del límite no sea exactamente $\frac{1}{8}$?; esto ocurre por la utilización de calculadoras que no aceptan tantos dígitos, observemos la Tabla 1.3 el valor del límite es 0 cuando x es suficientemente pequeño, entonces ¿ significa que el valor del límite es 0 y no $\frac{1}{8}$?. No, el valor del límite es de $\frac{1}{8}$, como se probara en la sección 1.3. El problema se encuentra que en algunas calculadoras, el valor de $\sqrt{x^2+16}$ está muy cerca de 4 cuando x es muy pequeña, así la calculadora arroja 4.0000, por tal motivo surge ese error.

Valores de x alrededor de 0	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}, \quad x\neq 0$
$\pm\, 0.0005$	0.12500
$\pm\, 0.0001$	0.10000
$\pm\, 0.00005$	0.0000
$\pm\, 0.00001$	0.0000

Tabla 1.3: Cuando x toma valores cercanos a 0, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$ parece estar más cerca a 0.

1.2 Cálculo de límites mediante leyes y técnicas algebraicas

En está sección se presenta teoremas y técnicas algebraicas para calcular límites de funciones polinomiales, racionales y potencias, esto nos ayuda a fortalecer el estudio de la sección 1.1 en la cual se utilizó, solo calculadoras y gráficas para poder determinar el límite. El siguiente resultado nos dice sobre la unicidad de límite, este teorema será demostrado en la Sección 1.4 utilizando la definición formal de límite.

Teorema 1.2 Sea f una función real y si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existe, entonces este es único.

A continuación enunciaremos la leyes fundamentales de los límites.

Teorema 1.3 — Leyes de los límites.
Sea f,g funciones reales y λ es una constante real, tal que

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=K,$$

entonces

i) Regla de la suma: $\displaystyle\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=L+K$

ii) Regla de la diferencia: $\displaystyle\lim_{x\to x_0}(f-g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x)=L-K$

iii) Regla del producto: $\displaystyle\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=LK$

iv) Regla del múltiplo constante: $\displaystyle\lim_{x\to x_0}(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda L$

v) Regla del cociente: $$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{K}, \quad K \neq 0$$

vi) Regla de la potencia: Si r y s son enteros sin factores comunes y $s \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{r/s} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{r/s} = L^{r/s}.$$

siempre y cuando $L^{r/s} \in \mathbb{R}$. (Si s es par, suponer que $L > 0$)

vii) Regla: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = L^K$, con L y K no simultáneamente nulos

Estas leyes pueden expresarse verbalmente como sigue:

i) El límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites.

ii) El límite de la diferencia de dos funciones es la diferencia de sus límites.

iii) El límite del producto de dos funciones es la producto de sus límites.

iv) El límite de una constante multiplicada por una función es la constante por el límite de la función.

v) El límite del cociente de dos funciones es el cociente de sus límites, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de cero.

vi) El límite de una potencia racional de una función es el límite de una función elevado a esa potencia, siempre y cuando está última sea un número real.

vii) El límite de una función elevada a otra función es el límite de la función base elevado al límite de la otra función, siempre cuando no sean simultáneamente cero los valores de los límites.

Observemos que es fácil dar por hecho que las leyes son validas, pero en la sección 1.4 se probará la mayoría de leyes utilizando la definición formal de límite, a continuación utilizaremos las leyes para determinar los límites de funciones polinomiales y racionales.

■ Ejemplo 1.4 — Leyes de los límites.

Dado que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -2$ y $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = 5$. Evaluar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -3} [f(x) - 5g(x)]$,

b) $\lim\limits_{x \to -3} -3f(x)\,g(x)$,

c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x)}{f(x) - 4g(x)}$,

d) $\lim\limits_{x \to -3} [f(x)]^3$.

Solución:

a) En efecto, utilizando las leyes de los límites, se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}[f(x)-5g(x)] &= \lim_{x\to -3} f(x) - \lim_{x\to -3} 5g(x) && \text{Regla de la diferencia}\\
&= \lim_{x\to -3} f(x) - 5\lim_{x\to -3} g(x) && \text{Regla del múltiplo}\\
&= -2-5(5)\\
&= -27.
\end{aligned}
$$

b) En efecto, utilizando las leyes de los límites, se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -3} -3f(x)g(x) &= -3\lim_{x\to -3} f(x)\cdot \lim_{x\to -3} g(x) && \text{Regla del múltiplo y el producto}\\
&= -3(-2)(5)\\
&= 30.
\end{aligned}
$$

c) En efecto, utilizando las leyes de los límites, se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{f(x)-4g(x)} &= \frac{\lim_{x\to -3} f(x)}{\lim_{x\to -3}[f(x)-4g(x)]} && \text{Regla del cociente}\\
&= \frac{-2}{\lim_{x\to -3} f(x) - 4\lim_{x\to -3} g(x)} && \text{Regla de la diferencia y el múltiplo}\\
&= \frac{-2}{-2-4(5)}\\
&= \frac{\cancel{-}2}{\cancel{-}22}\\
&= \frac{1}{11}.
\end{aligned}
$$

d) En efecto, utilizando las leyes de los límites, se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}[f(x)]^3 &= \left[\lim_{x\to -3} f(x)\right]^3 && \text{Regla de la potencia}\\
&= (-2)^3\\
&= -8.
\end{aligned}
$$

Observación 1.2 Por el Teorema 1.1 y la regla de la potencia o producto del Teorema 1.3, se sigue que $\lim_{x\to a} x^2 = \left(\lim_{x\to a} x\right)^2 = a^2$.. Así, se puede generalizar y obtener el siguiente resultado $\lim_{x\to a} x^n = a^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

■ **Ejemplo 1.5** Utilizar las leyes de los límites y la Observación 1.2, para encontrar los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -2}\left(7x^3 - x^2 + 2x\right)$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^5 + x - 1}{2x - 5}$

c) $\lim_{x\to -3}\sqrt{5x^2 - 7}$

d) $\lim_{x\to -1}\left(4x^3 - 7x + 2\right)^{\frac{x^2-1}{2x}}$

Solución:

a) En efecto, utilizando las leyes de los límites y la Observación 1.2, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\left(7x^3 - x^2 + 2x\right) &= \lim_{x\to -2}7x^3 - \lim_{x\to -2}x^2 + \lim_{x\to -2}2x && \text{Regla de la suma y la diferencia}\\
&= 7(-2)^3 - (-2)^2 + 2(-2) && \text{Regla del producto y el múltiplo}\\
&= -64.
\end{aligned}$$

b) En efecto, utilizando las leyes de los límites y la Observación 1.2, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x^5 + x - 1}{2x - 5} &= \frac{\lim_{x\to 2}\left(x^5 + x - 1\right)}{\lim_{x\to 2}(2x - 5)} && \text{Regla del cociente}\\
&= \frac{\lim_{x\to 2}x^5 + \lim_{x\to 2}x - \lim_{x\to 2}1}{\lim_{x\to 2}2x - \lim_{x\to 2}5} && \text{Regla de la suma y la diferencia}\\
&= \frac{(2)^5 + 2 - 1}{2(2) - 5} && \text{Regla del producto y del múltiplo}\\
&= \frac{33}{-1}\\
&= -33.
\end{aligned}$$

c) En efecto, utilizando las leyes de los límites y la Observación 1.2, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}\sqrt{5x^2 - 7} &= \sqrt{\lim_{x\to -3}(5x^2 - 7)} && \text{Regla de la potencia}\\
&= \sqrt{\lim_{x\to -3}5x^2 - \lim_{x\to -3}7} && \text{Regla de la diferencia}\\
&= \sqrt{5(-3)^2 - 7} && \text{Regla del producto y del múltiplo}\\
&= \sqrt{38}.
\end{aligned}$$

d) En efecto, utilizando las leyes de los límites y la Observación 1.2, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}\left(4x^3-7x+2\right)^{\frac{x^2-1}{2x}} &= \left[\lim_{x\to -1}\left(4x^3-7x+2\right)\right]^{\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{2x}} && \text{Regla 7}\\
&= \left[\lim_{x\to -1}4x^3-\lim_{x\to -1}7x+\lim_{x\to -1}2\right]^{\frac{\lim\limits_{x\to -1}x^2-\lim\limits_{x\to -1}1}{\lim\limits_{x\to -1}2x}} && \text{Regla de la suma, diferencia y cociente}\\
&= \left[4(-1)^3-7(-1)+2\right]^{\frac{(-1)^2-1}{2(-1)}} && \text{Regla del producto y del múltiplo}\\
&= (5)^0\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Observamos que en el ejemplo anterior se pudo haber sustituido de manera directa para encontrar el límite de la función. A continuación se presenta el Teorema 1.4 que nos permite calcular límites de algunas funciones por sustitución directa.

Teorema 1.4

i) Si P es la *función polinomial* dada por $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ y su $dom(f)=\mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_0.$$

ii) Si P y Q son funciones polinomiales y $Q(x)\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

■ **Ejemplo 1.6** Calcular el límite de las siguientes funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to -5}x^5+3x^4-2x^2+15=(-5)^5+3(-5)^4-2(-5)^2+15=-1285.$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+7}=\dfrac{(-2)^3+2(-2)^2-(-2)-2}{(-2)^2+7}=\dfrac{0}{11}=0.$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3-4x+x^2-1}{3x^3-2x^2+1}=\dfrac{5(-1)^3-4(-1)+(-1)^2+1}{3(-1)^3-2(-1)^2+1}=\dfrac{-5+4+1+1}{-3-2+1}=-\dfrac{1}{4}.$

Las funciones en las que se puede utilizar el método de sustitución directa, para calcular límites, tienen la característica de ser funciones continuas en $x=x_0$; este tipo de funciones se estudiará en la 1.7. Por otra parte, no todos los límites de funciones reales pueden ser calculados por sustitución directa, en la Sección 1.3 se mostrará técnicas para encontrar límites indeterminados.

1.3 Técnicas algebraicas para cálculo de límites indeterminados

Cuando se evalúa el límite de funciones racionales por sustitución directa, puede suceder que esta función tienda a la forma $\frac{0}{0}$ la misma que se denomina una *forma indeterminada*. En estos casos es necesario desarrollar un análisis más detallado del comportamiento de las funciones para determinar si el límite existe o no. Lo cual se puede realizar mediante técnicas algebraicas para poder levantar la indeterminación, el proceso es eliminar los factores comunes en el numerador y el denominador, y se puede reducir a una fracción simplificada en el cuál no se tenga denominadores iguales a cero, de acuerdo al ejercicio se tendrá que aplicar las técnicas de descomposición factorial y racionalización. El proceso del cálculo de este tipo de límites son justificadas por el Teorema 1.5.

Teorema 1.5

Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq x_0$ y si existen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

■ **Ejemplo 1.7** Utilizando la técnica de descomposición de factores. Evaluar

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}.$$

Solución:

Si evaluamos el límite, se tiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = \frac{2^2-4(2)+4}{2^2-2(2)} = \frac{0}{0}. \quad \text{(Indeterminación)}$$

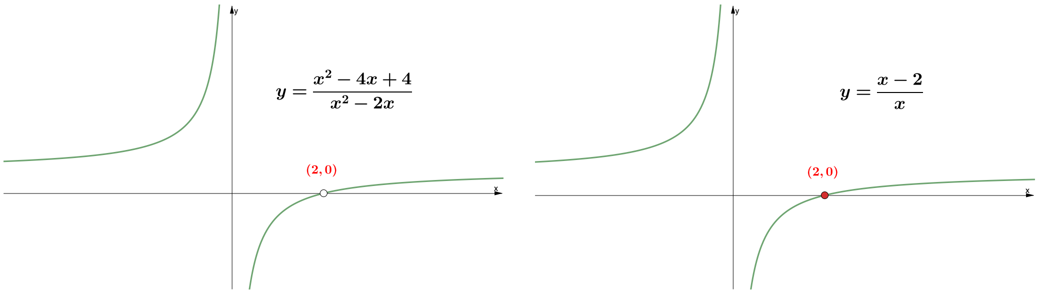
En este caso, debemos descomponer en factores el numerador y denominador de la función, es decir,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} &= \frac{\cancel{(x-2)}(x-2)}{x\cancel{(x-2)}} && \text{Caso de Trinomio y factor común} \\ &= \frac{x-2}{x} && \text{Eliminar } (x-2) \text{ para } x \neq 2 \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Así, $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq 2$ y utilizando el Teorema 1.5, se tiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x} = \frac{2-2}{2} = 0.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = 0$.



(a) (b)

Figura 1.5: Las funciones $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x}$ y $g(x) = \dfrac{x-2}{x}$ tienen el mismo límite cuando $x \to 2$

■ **Ejemplo 1.8** Utilizar racionalización para evaluar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}.$$

Solución:

Si evaluamos el límite, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} = \frac{\sqrt{0^2+16}-4}{0^2} = \frac{0}{0}. \qquad \text{(Indeterminación)}$$

En este caso, debemos aplicar racionalización sobre el numerador de la función, es decir,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4} \\ &= \frac{(x^2+\cancel{16})-\cancel{16}}{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)} \\ &= \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+16}+4)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+16}+4} && \text{Eliminar } x^2 \text{ para } x \neq 0 \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Así, $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq 0$ y utilizando el Teorema 1.5, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+16}+4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0^2+16}-4} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} = \dfrac{1}{8}$.
Observemos que este procedimiento da la respuesta correcta del límite de la función, a diferencia de los resultados ambiguos que se mostraron en el Ejemplo 1.3 de la Sección 1.1.

■ **Ejemplo 1.9** Determinar el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{\sqrt{4+x-x^2}-2}.$$

Solución:

Si evaluamos el límite, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{\sqrt{4+x-x^2}-2} = \frac{\sqrt{4+0+0^2}-2}{\sqrt{4+0-0^2}-2} = \frac{0}{0}. \qquad \text{(Indeterminación)}$$

En este caso, debemos aplicar racionalización sobre el numerador y denominador de la función, es decir,

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{\sqrt{4+x-x^2}-2} &= \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{\sqrt{4+x-x^2}-2} \cdot \frac{\sqrt{4+x+x^2}+2}{\sqrt{4+x+x^2}+2}, && \text{Racionalización sobre el numerador}\\
&= \frac{(\cancel{4}+x+x^2)-\cancel{4}}{\left(\sqrt{4+x-x^2}-2\right)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}\\
&= \frac{x+x^2}{\left(\sqrt{4+x-x^2}-2\right)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)} \cdot \frac{\sqrt{4+x-x^2}+2}{\sqrt{4+x-x^2}+2}, && \text{Racionalización sobre el denominador}\\
&= \frac{(x+x^2)\left(\sqrt{4+x-x^2}+2\right)}{(\cancel{4}+x-x^2-\cancel{4})\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}\\
&= \frac{\cancel{x}(x+1)\left(\sqrt{4+x-x^2}+2\right)}{\cancel{x}(x-1)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}, && \text{Factor común}\\
&= \frac{(x+1)\left(\sqrt{4+x-x^2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}, && \text{Eliminar } x \text{ para } x \neq 0\\
&= g(x).
\end{aligned}$$

Así, $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq 0$ y utilizando el Teorema 1.5, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{\sqrt{4+x-x^2}-2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\left(\sqrt{4+x-x^2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}\\
&= \frac{(0+1)\left(\sqrt{4+0-0^2}+2\right)}{(0-1)\left(\sqrt{4+0+0^2}+2\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{4}}{-\cancel{4}}$$
$$= -1.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{\sqrt{4+x-x^2}-2} = -1.$

■ **Ejemplo 1.10**

a) Si $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{f(x)-7}{x-7} = 1$, encuentre $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$.

b) Si $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x)}{x^2} = -1$, encuentre:

i) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, ii) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x)}{x}$.

Solución:

a) Como $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{f(x)-7}{x-7}$ existe y por el Teorema 1.5, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 7} \frac{f(x)-7}{x-7} &= 1 \\
\lim_{x \to 7} (f(x)-7) &= 1 \cdot \lim_{x \to 7} (x-7) \\
\lim_{x \to 7} f(x) - 7 &= 1 \cdot (7-7) \\
\lim_{x \to 7} f(x) - 7 &= 0 \\
\lim_{x \to 7} f(x) &= 7.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = 7$.

b) i) En efecto, utilizando las leyes de los límites, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -3} \frac{f(x)}{x^2} &= -1 \\
\lim_{x \to -3} f(x) &= -1 \cdot \lim_{x \to -3} x^2 \\
\lim_{x \to -3} f(x) &= -1 \cdot (-3)^2 \\
\lim_{x \to -3} f(x) &= -9.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -9$.

ii) En efecto, utilizando las leyes de los límites, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3} \frac{f(x)}{x^2} &= -1 \\
\lim_{x\to -3} \left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}\right] &= -1 \\
\lim_{x\to -3} \frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to -3} x} &= -1 \\
\lim_{x\to -3} \frac{f(x)}{x} &= -1\cdot \lim_{x\to -3} x \\
\lim_{x\to -3} \frac{f(x)}{x} &= -1\cdot(-3) \\
\lim_{x\to -3} \frac{f(x)}{x} &= 3.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{f(x)}{x} = 3$.

Los siguientes teoremas son de gran utilidad en la teoría de límites, sus demostraciones se encuentran en la sección 1.4.

Teorema 1.6 — Teorema del Sándwich.

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a x_0 (excepto posiblemente en el mismo punto $x = x_0$) y supongamos que

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L.$$

Entonces, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Algunas veces al Teorema del Sándwich se le conoce también como el Principio de Intercalación. En la Figura 1.6 se dice que $f(x)$ se comprime entre $g(x)$ y $h(x)$ cerca de x_0, y si g y h tienen el mismo límite en x_0, entonces f es forzada a tener el mismo límite L en x_0.

Teorema 1.7

Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a x_0 (excepto posiblemente en el mismo punto $x = x_0$) y si los límites de f y g existen cuando x tienden a x_0, entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

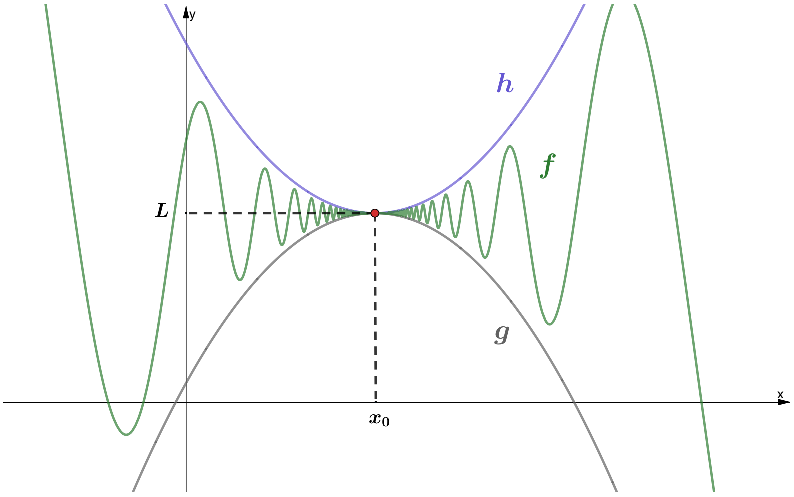


Figura 1.6: La gráfica de f está entre las gráficas de g y h

■ **Ejemplo 1.11 — Aplicación del Teorema del Sándwich.**

Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} 2x^4 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Solución:

Dado que la función coseno es acotada, se tiene

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1.1}$$

Ahora, si multiplicamos $2x^4 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ en la desigualdad (1.1), se tiene

$$-2x^4 \leq 2x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2x^4 \tag{1.2}$$

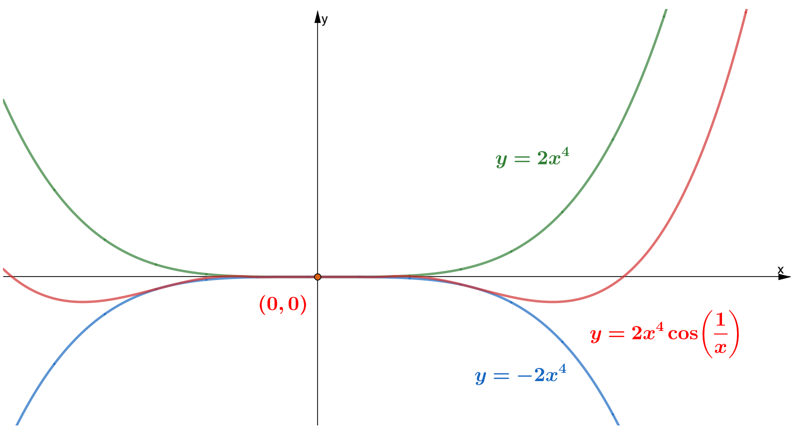


Figura 1.7: La acotación de la función $y = 2x^4 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

también se conoce que,

$$\lim_{x\to 0} -2x^4 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} 2x^4 = 0.$$

Así, aplicando el límite x tiende a 0 en (1.2) y por el Teorema 1.6, se sigue que

$$\lim_{x\to 0} -2x^4 \leq \lim_{x\to 0} 2x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} 2x^4$$
$$0 \leq \lim_{x\to 0} 2x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} 2x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

1.3.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.1 — Estimación de Límites.

1. Sea $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x-\sqrt{5}}$.
   (a) Realizar una tabla de valores de f en los puntos x =2.2, x =2.21, x =2.22, x =2.236 y así sucesivamente con tas las aproximaciones decimales de $\sqrt{5}$. Estime $\lim_{x\to\sqrt{5}} f(x)$.
   (b) Grafique la función f cerca de $x_0 = \sqrt{5}$ y estime los valores de y en la gráfica conforme $x \to \sqrt{5}$, y compare con el literal (a).
   (c) Encuentre $\lim_{x\to\sqrt{5}} f(x)$ algebraicamente.
2. Sea $g(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}$, donde θ es en radianes.
   (a) Realizar una tabla de valores de g en los valores de θ que se acercan $\theta_0 = 0$ por abajo y arriba. Estime $\lim_{\theta\to 0} g(\theta)$.
   (b) Grafique la función g cerca de $\theta_0 = 0$ y compare con el literal (a).
3. Sea $h(x) = \dfrac{x^2-4}{|x|-2}$.
   (a) Realizar una tabla de valores de h en los valores de x que se acercan $x_0 = -2$ por abajo y arriba. Estime $\lim_{x\to -2} h(x)$.
   (b) Grafique la función h cerca de $x_0 = -2$ y compare con el literal (a).
   (c) Encuentre $\lim_{x\to -2} h(x)$ algebraicamente.

4. Sea $F(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$.

   (a) Realizar una tabla de valores de F en los valores de x que se acercan $x_0 = 1$ por abajo y arriba. ¿Parece que F tiene límite cuando $x \to 1$?. De ser así, ¿cuál es dicho límite?. Si su respuesta negativo, justifique por qué.

   (b) Grafique la función F cerca de $x_0 = 1$ y compare con el literal (a).

5. Sea $G(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{2 - |x|}$.

   (a) Realizar una tabla de valores de G en los valores de x que se acercan $x_0 = -2$ por abajo y arriba. Estime $\lim\limits_{x \to -2} G(x)$.

   (b) Grafique la función G cerca de $x_0 = -2$ y compare con el literal (a).

   (c) Encuentre $\lim\limits_{x \to -2} G(x)$ algebraicamente.

Cálculo de límites utilizando las Leyes y Teoremas

6. Suponga que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 7$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = -3$. Encuentre,

   (a) $\lim\limits_{x \to c} (5f(x) - 3g(x))$

   (b) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)\, g(x)}{2}$

   (c) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{7\, f(x)}{2\, f(x) - g(x)}$

   (d) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{7f(x) + 3g(x) - 4}$.

7. Suponga que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -2$. Encuentre,

   (a) $\lim\limits_{x \to a} (2f(x) + g(x))$

   (b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^3$

   (c) $\lim\limits_{x \to a} 4\, f(x)\, g(x)$

   (d) $\lim\limits_{x \to a} \left(1 - \dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$

8. Suponga que $\lim\limits_{x \to -1} p(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to -1} q(x) = 0$, y $\lim\limits_{x \to -1} r(x) = -4$. Encuentre,

   (a) $\lim\limits_{x \to -1} (3\, p(x) + q(x) - r(x))$

   (b) $\lim\limits_{x \to -1} 2\, p(x)\, q(x)\, r(x)$

   (c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-4\, p(x) - 5\, q(x)}{r(x)}$.

9. Encuentre los límites solicitados evaluando la función en el punto de límite.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2}{4x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-1}{3x-3}$

(c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{sen}(x)$ (d) $\lim\limits_{\theta\to -\pi} \dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{2-\pi}$

(e) $\lim\limits_{x\to -2} \left(3x^3-4x^2+7\right)$ (f) $\lim\limits_{t\to \frac{3}{2}} 2t\,(3t+4)$

(g) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[5]{2x^3-x^2+x-16}$ (h) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5}{\sqrt{5h+1}+1}$

(i) $\lim\limits_{y\to -4} \dfrac{y-4}{y^2-5y+4}$ (j) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-4}{\sqrt{7h+9}+3}$

(k) $\lim\limits_{z\to 0} (3z^2-4)^{\frac{2}{3}}$ (l) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x+1}\right)^{\frac{2x^2+x-1}{3x}}$.

10. Calcular los siguientes límites, utilizando las técnicas algebraicas.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x^3+3x^2}{3x^4+16x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{x^n-y^n}{x-y}$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

(e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-24x+48}{x-4}$ (f) $\lim\limits_{y\to \sqrt{3}} \dfrac{3-y^2}{3-\sqrt{y^2+6}}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$ (h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

(i) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{3+y}-\dfrac{1}{3}\right)$ (j) $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{\sqrt{z^2+12}-4}{z-2}$

(k) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{3-\sqrt{x^2+9}}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x+x^2}-3}{\sqrt{9+x-x^2}-3}$.

11. En los siguientes ejercicios calcular $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, para

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$

(b) $f(x) = 3x^2-1$.

12. Si $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)+2}{x+2} = 3$, encuentre $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

13. Si $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{f(x)}{3x^2} = 2$, encuentre

(i) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$

(ii) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{f(x)}{x}$.

14. Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq 3$ y que

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} h(x) = -7.$$

¿Puede concluirse algo cerca de los valores de f, g y h en $x = 3$? ¿Es posible que $f(x) = 0$? ¿Es posible que $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$?. Justifique su respuesta.

15. Si $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ para $x \in [-1,1]$ y $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ para $x < -1$ y $x > 1$, ¿En que puntos c se puede encontrar $\lim_{x\to c} f(x)$? ¿Que se puede decir respecto al límite en esos puntos?.

16. (a) Grafique $g(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, para estimar $\lim_{x\to 0} g(x)$ acercándose al origen tanto como sea necesario.
    (b) Pruebe el resultado que obtuvo en el literal (a).

17. (a) Grafique $h(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$, para estimar $\lim_{x\to 0} h(x)$ acercándose al origen tanto como sea necesario.
    (b) Pruebe el resultado que obtuvo en el literal (a).

1.4 Definición formal de límite

La idea intuitiva de límite explicada en la Sección 1.1 es imprecisa para la demostración de resultados importantes, porque las frases como *"x es suficientemente cercano a x_0"* y *"$f(x)$ se acerca como queramos a L"* es muy ambiguo. A partir de la definición formal de límite estaremos en la capacidad de probar con rigurosidad leyes, teoremas y resultados importante de límites de funciones que serán muy utilizados en el estudio del cálculo.

Definición 1.1 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función ($A \subset \mathbb{R}$), se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es un número real L y se escribe

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

esto significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Está en la definición formal del límite, la cuál se utilizará en está sección por eso se debe comprender muy bien su significado de forma geométrica.

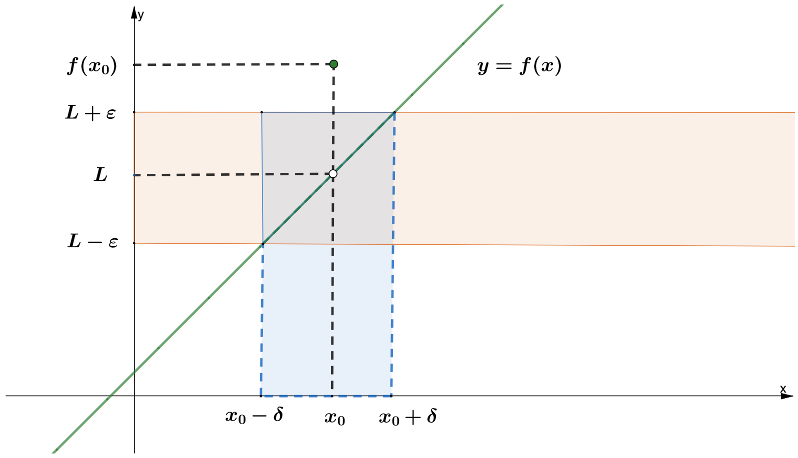


Figura 1.8: La relación entre δ y ε en la Definición de Límite 1.1

Observación 1.3

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x)-L) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)-L|\,.$$

Nota 1.2 La definición formal de límite no explica como hallar el límite de una función, pero nos permite comprobar si el cálculo de un límite es correcto.

■ **Ejemplo 1.12** Probar aplicando la definición que $\lim_{x\to -1}(7x+5) = -2$. Además, calcular el máximo δ que corresponde en cada caso, el valor $\varepsilon = \frac{1}{3}$ y $\varepsilon = 0{,}01$.

Solución:

Se debe probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < |x-(-1)| = |x+1| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-(-2)| = |(7x+5)+2| < \varepsilon.$$

En efecto, encontremos a partir de lo que debemos probar el δ correspondiente en términos de ε. Así,

$$|(7x+5)+2| = |7x+7| = 7|x+1| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \qquad |x+1| < \frac{\varepsilon}{7},$$

es decir, elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$.

En consecuencia, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{7} > 0$ tal que $0 < |x+1| < \delta$, entonces

$$|(7x+5)+2| = |7x+7| = 7|x+1| < 7\delta = \cancel{7}\frac{\varepsilon}{\cancel{7}} = \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim_{x \to -1} (7x+5) = -2$.

i) Si $\varepsilon = \frac{1}{3}$, entonces el δ correspondiente es:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{7} = \frac{\frac{1}{3}}{7} = \frac{1}{21}.$$

ii) Si $\varepsilon = 0{,}01$, entonces el δ correspondiente es:

$$\delta = \frac{0{,}01}{7} = \frac{\frac{1}{100}}{7} = \frac{1}{700}.$$

Observemos que el valor $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ no es el único que satisface que $0 < |x+1| < \delta$ implique $|(7x+5)+2| < \varepsilon$. Cualquier δ positivo menor también cumple la Definición 1.1, en general no se exige encontrar el mejor δ positivo, sino simplemente uno que demuestre el límite.

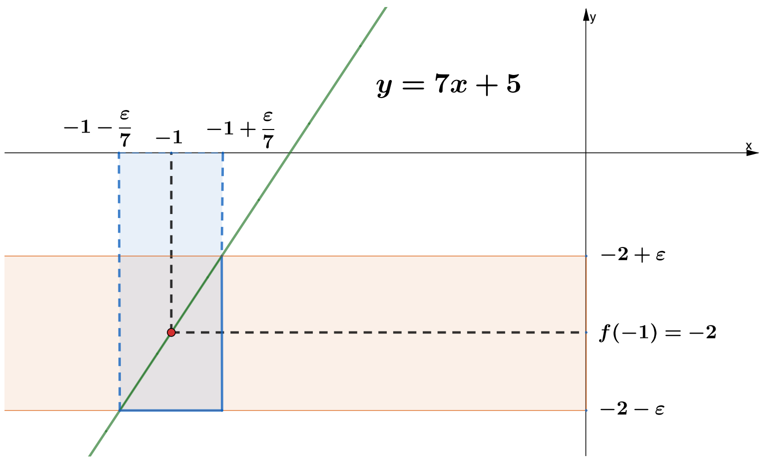


Figura 1.9: Interpretación geométrica del $\lim_{x \to -1} (7x+5) = -2$

■ **Ejemplo 1.13** Probar aplicando la definición de límite que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{6(x-3)} = 1.$$

Solución:

Se debe probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$,

$$0 < |x-3| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x^2-9}{6(x-3)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2-9}{6(x-3)}-1\right| &= \left|\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{6\cancel{(x-3)}}-1\right|, && \text{puesto que } x\neq 3\\
&= \left|\frac{x+3-6}{6}\right|\\
&= \frac{|x-3|}{6}\\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

se sigue que $0<|x-3|<6\varepsilon$. Por consiguiente, elegimos $\delta=6\varepsilon$.

En consecuencia, para todo $\varepsilon>0$, existe un $\delta=6\varepsilon>0$ tal que $0<|x-3|<\delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2-9}{6(x-3)}-1\right| &= \frac{|x-3|}{6}, && \text{puesto que } x\neq 3\\
&< \frac{\delta}{6}\\
&= \frac{\cancel{6}\varepsilon}{\cancel{6}}\\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{6(x-3)}=1$.

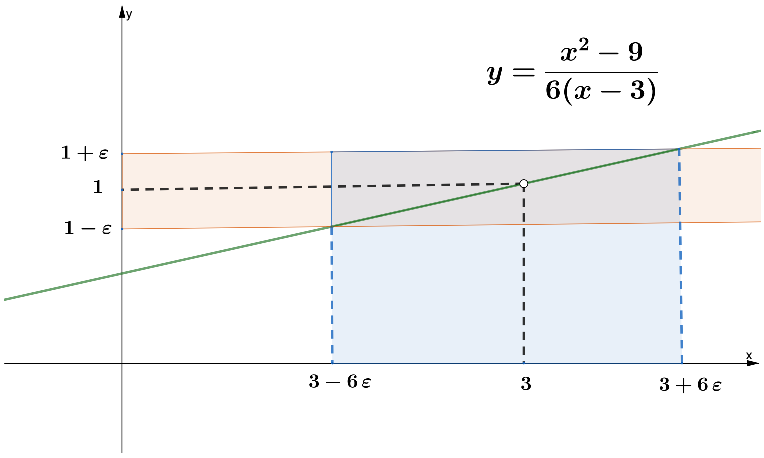


Figura 1.10: Interpretación geométrica del $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{6(x-3)}=1$

■ **Ejemplo 1.14** Probar aplicando la definición de límite que:

$$\lim_{x\to -2} x^2 = 4.$$

Solución:

Se debe probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < |x-(-2)| = |x+2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2-4| < \varepsilon.$$

Así, $|x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| \cdot |x-2|$. Note que, si podemos encontrar una constante $C > 0$ tal que $|x-2| < C$, entonces

$$|x^2-4| = |x+2| \cdot |x-2| < C\,|x+2|$$

$$\Rightarrow \qquad |x+2| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Ahora, podemos encontrar la constante C si restringimos algún intervalo centrado en -2. De hecho, estamos interesados soló en valores de x cercanos a -2, así que es lógico suponer que los valores están separados del centro a una distancia de 1, es decir,

$$\begin{aligned} |x+2| &< 1 \\ -1 < x+2 &< 1 \\ -5 < x-2 &< -3 \\ 3 < 2-x &< 5, \end{aligned}$$

se sigue que $|2-x| = |x-2| < 5$ y por tanto, $C = 5$. Pero hay dos restricciones sobre $|x+2|$, las cuales son:

$$|x+2| < 1 \qquad \text{y} \qquad |x+2| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Para asegurarnos de que ambas desigualdades satisfacen, elegimos $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/5\}$.
En consecuencia, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/5\}$ tal que $0 < |x+2| < \delta$, entonces $|x+2| < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow |x-2| < 5$. Además, también tenemos $|x+2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ y se tiene

$$|x^2-4| = |x+2| \cdot |x-2| < \frac{\varepsilon}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to -2} x^2 = 4$.

■ **Ejemplo 1.15** Probar aplicando la definición de límite que:

$$\lim_{x \to 1} \left(x^2 - x + 3\right) = 3.$$

Solución:

Se debe probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(x^2 - x + \cancel{3}) - \cancel{3}| = |x^2 - x| < \varepsilon.$$

Así, $|x^2 - x| = |x(x-1)| = |x| \cdot |x-1|$. Note que, si podemos encontrar una constante $C > 0$ tal que $|x| < C$, entonces

$$|x^2 - x| = |x| \cdot |x-1| < C\,|x-1|$$
$$\Rightarrow \qquad |x-1| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Ahora, podemos encontrar la constante C si restringimos algún intervalo centrado en 1. Así,

$$|x-1| < 1$$
$$-1 < x-1 < 1$$
$$0 < x < 2,$$

se sigue que $|x| < 2$ y por tanto, $C = 2$. Pero hay dos restricciones sobre $|x-1|$, las cuales son:

$$|x-1| < 1 \qquad \text{y} \qquad |x-1| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De lo cual, elegimos $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/2\}$.

En consecuencia, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/2\}$ tal que $0 < |x-1| < \delta$, entonces $|x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow |x| < 2$. Además, también tenemos $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y se tiene

$$|x^2 - x| = |x| \cdot |x-1| < \cancel{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{2}} = \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - x + 3\right) = 3$.

Demostración de teoremas mediante definición de límite

Muy poco se emplea la definición de límite para verificar límites específicos como los explicados en los anteriores ejemplos. Sin embargo, el propósito real de la definición es comprobar teoremas generales como los enunciados en las secciones anteriores, para que los cálculos de límites específicos puedan simplificarse. En los siguientes ejemplos probaremos algunos teoremas de las anteriores secciones.

■ **Ejemplo 1.16 — Demostración del Teorema 1.1.**

Probar que:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$,
ii) $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$, donde k es constante real.

Demostración.

i) Sea $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |x - x_0| < \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

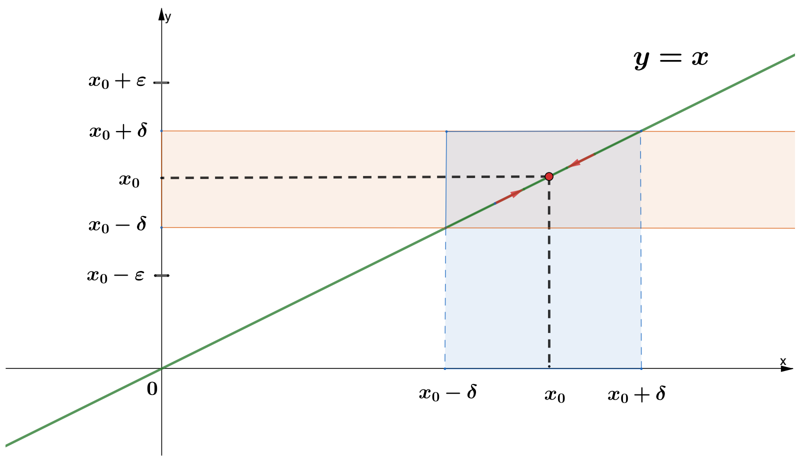


Figura 1.11: Interpretación geométrica del $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

ii) Sea $\varepsilon > 0$, elegimos cualquier $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |k - k| = 0 < \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$, donde $k \in \mathbb{R}$.

■

■ **Ejemplo 1.17 — Demostración del Teorema 1.2.**

Sea f una función real y si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existe, entonces este es único.

Demostración.

Sea $L, M \in \mathbb{R}$, supongamos que $L \neq M$. Además, que el límite de f cuando x tiende x_0 no es único,

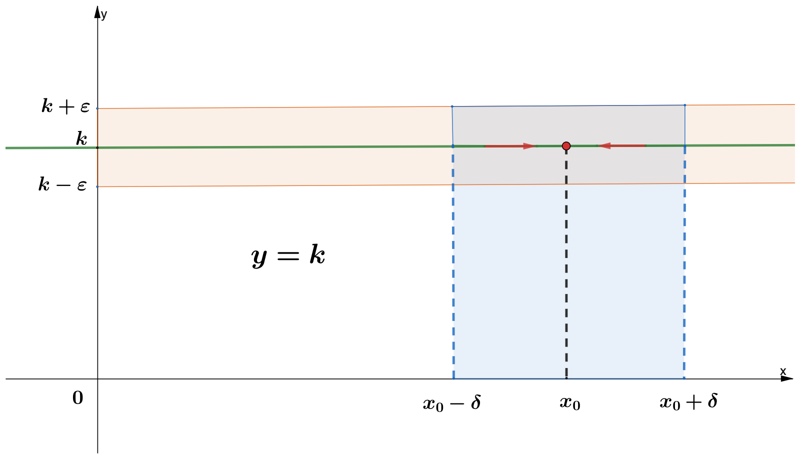


Figura 1.12: Interpretación geométrica del $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$

es decir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = M.$$

Esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe δ_1, $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |L - M| &= |L - f(x) + f(x) - M|, && \forall x \in \mathbb{R} \\ &\leq |L - f(x)| + |f(x) - L|, && \text{Desigualdad triangular en } \mathbb{R} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

tomando $\varepsilon \to 0$ se sigue que, $|L - M| = 0$. Por tanto, $M = L$ lo cuál contradice lo supuesto. En consecuencia, si el límite de f cuando $x \to x_0$ existe entonces este es único. ■

■ Ejemplo 1.18 — Ley de la Suma - Teorema 1.3.

Dado que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = K$, probar que

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L + K.$$

Demostración.

Se debe probar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |(f(x) + g(x)) - (L + K)| < \varepsilon.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + K)| &= |f(x) - L + g(x) - K| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - K|. && \text{Desigualdad Triangular} \end{aligned}$$

Necesitamos que cada término, sea menor que $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Luego, como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, es decir, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De la misma forma, como $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = K$, es decir, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |g(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, elegimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$.

En consecuencia, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + K)| &= |f(x) - L| + |g(x) - K| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + K$. ■

■ Ejemplo 1.19 — Ley del Producto - Teorema 1.3.

Dado que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = K$, probar que

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = LK.$$

Demostración.

Se debe probar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)\, g(x) - LK| < \varepsilon.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
|f(x)\,g(x)-LK| &= |f(x)\,g(x)-L\,g(x)+L\,g(x)-LK| \\
&= |[f(x)-L]\,g(x)+L\,[g(x)-K]| \\
&\leq |[f(x)-L]\,g(x)|+|L\,[g(x)-K]| && \text{Desigualdad Triangular} \\
&= |f(x)-L|\cdot|g(x)|+|L|\cdot|g(x)-K|.
\end{aligned}$$

Así,

$$|f(x)\,g(x)-LK| \leq |f(x)-L|\cdot|g(x)|+|L|\cdot|g(x)-K|. \tag{1.3}$$

Necesitamos que cada término de **ecuación**, sea menor que $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Luego, como $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=K$, es decir, existe $\delta_1>0$ tal que

$$0<|x-x_0|<\delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |g(x)-K|<\frac{\varepsilon}{2\,(1+|L|)}.$$

Además, existe un $\delta_2>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta_2$, entonces $|g(x)-K|<1$, se sigue que

$$|g(x)|=|g(x)-K+K|\leq|g(x)-K|+|K|\leq 1+|K|. \tag{1.4}$$

Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, esto es, existe $\delta_3>0$ tal que

$$0<|x-x_0|<\delta_3 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2\,(1+|K|)}.$$

De esta manera, elegimos $\delta=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$.

En consecuencia, para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(x)\,g(x)-LK| &\leq |f(x)-L|\cdot|g(x)|+|L|\cdot|g(x)-K| && \text{por (1.3)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2\cancel{(1+|K|)}}\cdot\cancel{(1+|K|)}+|L|\cdot\frac{\varepsilon}{2\,(1+|L|)} && \text{por (1.4)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=LK$. ■

■ **Ejemplo 1.20 — Demostración del Teorema 1.6.**

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a x_0 (excepto posiblemente en el mismo punto $x = x_0$) y supongamos que

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Entonces, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Demostración.

Se debe probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y como $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$, es decir, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |g(x) - L| < \varepsilon$$

se sigue que,

$$\begin{aligned} |g(x) - L| &< \varepsilon \\ -\varepsilon < g(x) - L &< \varepsilon \\ L - \varepsilon < g(x) &< L + \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Además, como $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$, es decir, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |h(x) - L| < \varepsilon$$

se sigue que,

$$\begin{aligned} |h(x) - L| &< \varepsilon \\ -\varepsilon < h(x) - L &< \varepsilon \\ L - \varepsilon < h(x) &< L + \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.6}$$

En consecuencia, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, entonces

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon, \qquad \text{por (1.5) y (1.6)}$$

$$\Rightarrow \qquad L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$
$$|f(x)-L| < \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. ■

■ Ejemplo 1.21 — Demostración del Teorema 1.7.

Dado que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = K$, y si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a x_0 (excepto posiblemente en el mismo punto $x = x_0$). Probar que $L \leq K$.

Demostración.

Utilicemos el método de Reducción al Absurdo, esto es, supongamos que $L > K$ y utilizando la ley de la diferencia del Teorema 1.3,

$$\lim_{x\to x_0} (g(x) - f(x)) = K - L.$$

En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |(g(x)-f(x))-(K-L)| < \varepsilon.$$

Luego, como $L > K$ entonces $L-K > 0$ y tomando $\varepsilon = L-K$ en particular, y $\delta > 0$, se tiene

$$0 < |x-x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |(g(x)-f(x))-(K-L)| < L-K.$$

Así,

$$(g(x)-f(x))-(K-L) < |(g(x)-f(x))-(K-L)| < L-K$$
$$\Rightarrow \qquad g(x)-f(x) < \cancel{L}-\cancel{K}+(\cancel{K}-\cancel{L})$$
$$g(x) < f(x).$$

Por tanto, $g(x) < f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga x_0, de lo cual esto contradice que $f(x) \leq g(x)$. Finalmente, $L \leq K$. ■

1.4.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.2 — Definición Formal de Límite.

1. Demostrar aplicando la Definición 1.1 que $\lim_{x\to -2}(3x+2) = -4$. Determinar el máximo δ que corresponde en cada caso, el valor de $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ y $\varepsilon =$0.0001.

2. Demostrar aplicando la Definición 1.1 (encontrando δ en términos de ε) que:

   (a) $\lim_{x\to 3}(-7x+10) = -11$

   (b) $\lim_{x\to 8}(-x+9) = 1$

   (c) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{5}x+6\right) = \frac{29}{5}$

   (d) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{2(x-4)} = 4$

   (e) $\lim_{x\to 3}(x^2-4) = 5$

   (f) $\lim_{x\to 0}(x^2+3x-4) = -4$

   (g) $\lim_{x\to -2}\sqrt{1-4x} = 3$

   (h) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1.$

1.5 Límites Laterales, Límites Trigonométricos y Límites al Infinito

En está sección enunciaremos un teorema que relaciona la existencia del límite de una función real a partir de los *límites laterales* que son aquellos que se dan solamente cuando x se aproxima únicamente por la izquierda a x_0 (es decir, $x < x_0$) o únicamente por la derecha a x_0 (es decir, $x > x_0$). También, se probará el límite fundamental trigonométrico y se analizará el comportamiento del límite de funciones cuando x tiende al más o menos infinito.

Límites Laterales

Para que el límite de una función f exista cuando x tiende a x_0, debe estar definido ha ambos lados de x_0, es decir, que los valores de $f(x)$ deben aproximarse a L cuando x se aproxima a x_0, a estos límites ordinarios se llaman **bilaterales**. Se puede tener funciones que no tengan límite bilateral, pero pueden tener un límite lateral.
Si x se aproxima a x_0 por la derecha lo cual se denota $x \to x_0^+$, es un *límite lateral derecho*. Por otro lado, si x se aproxima a x_0 por la izquierda lo cual se denota $x \to x_0^-$, es un *límite lateral izquierdo*. A continuación, definimos los límites laterales de manera formal.

Definición 1.2 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función ($A \subseteq \mathbb{R}$).

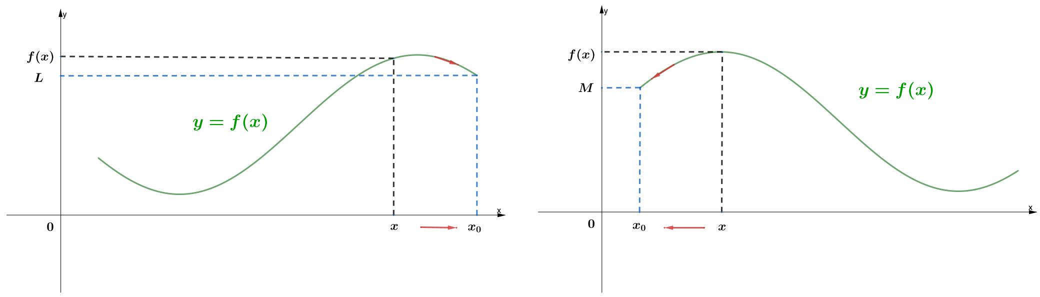
a) **Límite lateral derecho**: Se dice el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la derecha (significa que $x > x_0$) es L y se denota $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, es decir, si para todo $\varepsilon > 0$, existe

$\delta > 0$ tal que para todo $x > x_0$,

$$0 < x - x_0 < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

b) **Límite lateral izquierdo:** Se dice el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda (significa que $x < x_0$) es M y se denota $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = M$, es decir, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x < x_0$,

$$0 < x_0 - x < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - M| < \varepsilon.$$



a) b)

Figura 1.13: Interpretación geométrica de la Definición 1.2

Observación 1.4 Los límites laterales tienen las mismas propiedades del Teorema 1.3 en la Sección 1.2. Además, los límites laterales satisfacen los siguientes teoremas: Teorema 1.4 de las funciones polinomiales y racionales, Teorema 1.6 del Sándwich y el Teorema 1.7.

A continuación, presentamos un Teorema 1.8 que relaciona la existencia de límite de una función con sus límites laterales.

Teorema 1.8 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función $(A \subseteq \mathbb{R})$. Si $f(x)$ tiene límite cuando x tiende a x_0 si y soló si existen los límite laterales izquierdo y derecho y además estos límites laterales son iguales, en otras palabras,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

■ Ejemplo 1.22

Analizar la Figura 1.14 que es un semicírculo correspondiente a la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ donde $x \in [-3, 3]$.

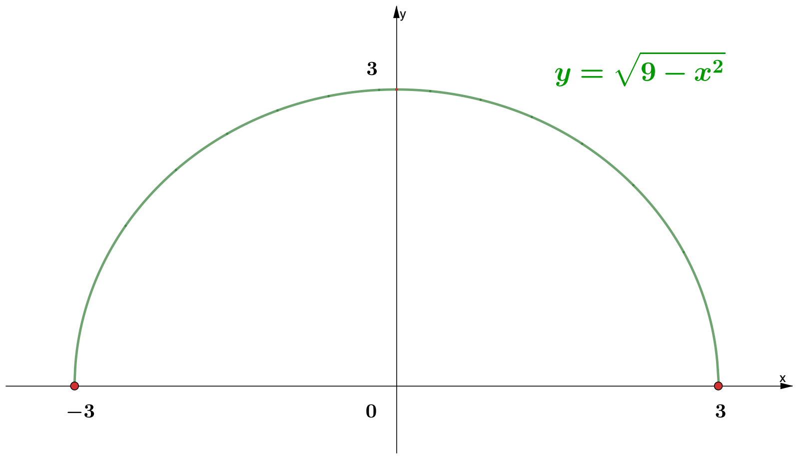


Figura 1.14: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Solución: En efecto, analizamos los límites en los puntos $x = -3$ y $x = 3$, se tiene

$$\lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0.$$

Observemos que no existe el límite lateral izquierdo en $x = -3$, debido a que la función f no está definida en esos puntos. De la misma forma, no existe el límite lateral derecho en $x = 3$.
Por tanto, por el Teorema 1.8 no existe los límites bilaterales: $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{9 - x^2}$ y $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{9 - x^2}$.

■ Ejemplo 1.23

Analizar la gráfica de la función f en todos los puntos de x.

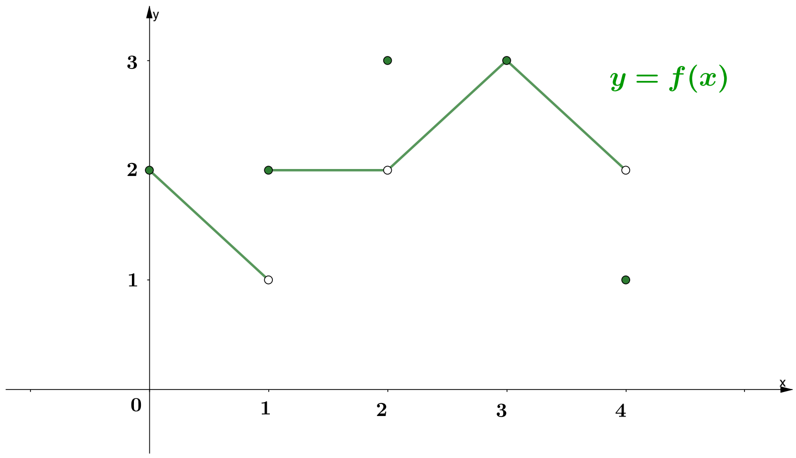


Figura 1.15: Gráfica de una función por partes

Solución: Observando la Figura 1.15 se puede determinar lo siguiente:

- En $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$. Pero, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existen, debido a que la función no está definida cuando $x<0$.
- En $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$, aunque $f(1)=2$. Además, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$ y por el Teorema 1.8, se sigue que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe, debido a que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
- En $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$. Por el Teorema 1.8 el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$, aunque $f(2)=3$.
- En $x=3$: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=3$.
- En $x=4$: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=2$, aunque $f(4)=1$. Pero, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ no existen, debido a que la función no está definida cuando $x>4$.

Observemos que en otro punto x_0 en $[0,4]$, la función f tiene límite y es $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

■ **Ejemplo 1.24** Sea $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, para todo $x\neq 0$. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?.

Solución: Observemos la representación gráfica de la función que se indica en la Figura 1.16.

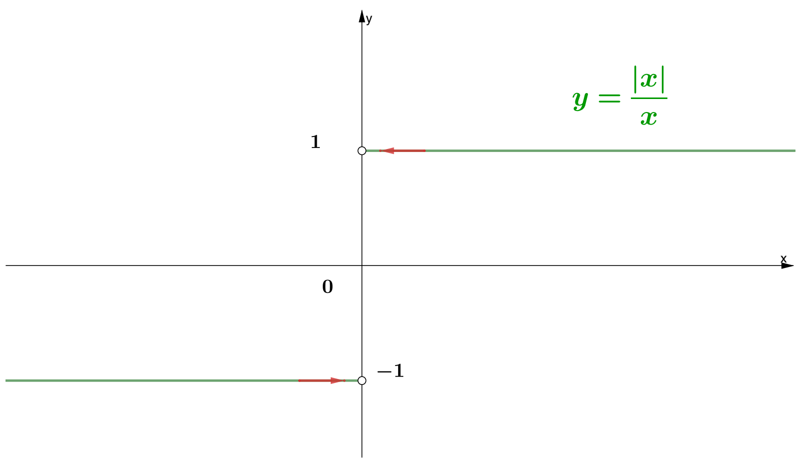


Figura 1.16: Gráfica de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

Así,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1,$$

puesto que $x > 0$ y en ese caso $|x| = x$. Ahora, si $x < 0$ entonces $|x| = -x$, se sigue que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, entonces por el Teorema 1.8 no existe el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

■ **Ejemplo 1.25** Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{si } x \geq 2 \\ 2x + b, & \text{si } x < 2 \end{cases}$, donde a y b son constantes. Para que exista el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. ¿Qué relación debe haber entre a y b?.

Solución: Primero determinemos los límites laterales en $x = 2$, se tiene

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(x^2 + a\right) = 2^2 + a = 4 + a.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x + b) = 2(2) + b = 4 + b.$$

Luego, para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ por el Teorema 1.8 debe cumplirse que,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

$$\cancel{4} + a = \cancel{4} + b$$

$$a = b.$$

■ **Ejemplo 1.26** Aplicando la Definición 1.2. Probar que $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Solución: Se debe probar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x > 0$,

$$0 < x < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon.$$

Así, $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon$, entonces $x < \varepsilon^2$. Por consiguiente, elegimos $\delta = \varepsilon^2$.

En consecuencia, sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon^2 > 0$ tal que $0 < x < \delta$, entonces $0 < x < \varepsilon^2$, se obtiene $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

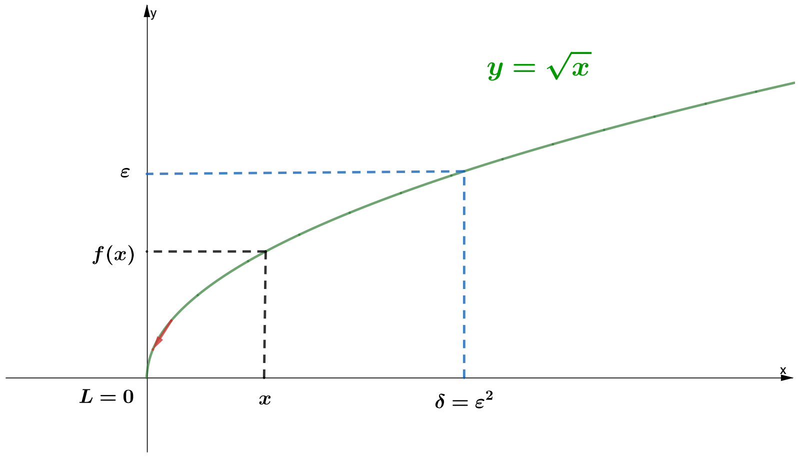


Figura 1.17: Interpretación geométrica del $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Observación 1.5 Las funciones que se ha presentado han tenido algún tipo de límite en el punto a analizar. Sin embargo, existen funciones que no tienen límites laterales, por ejemplo la función $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, para todo $x \neq 0$. No tiene límite cuando x se aproxima a cero en su entorno, observamos en la Figura 1.18 que los valores de $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ se repiten periódicamente en -1 y 1 cuando x se aproxima a cero. Por tanto, la función ”y” no tiene límites laterales izquierdo o derecho en $x = 0$.

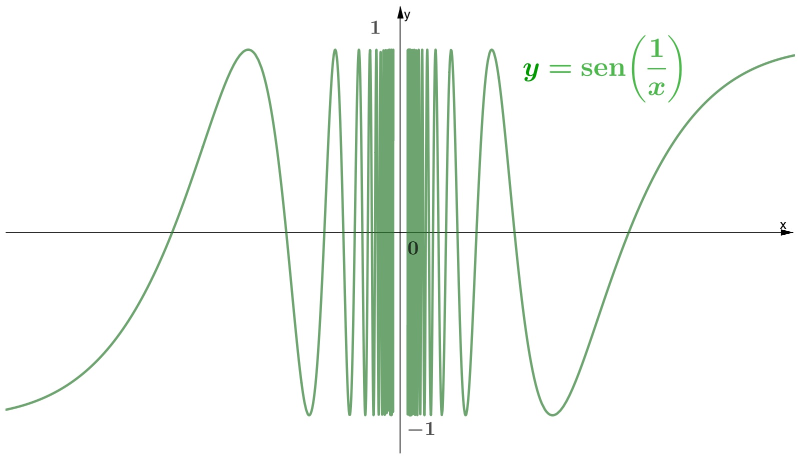


Figura 1.18: Gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Límites Trigonométricos

En está sección estudiaremos el $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}$, con θ medido en radianes. A este límite se le conoce como el *límite fundamental trigonométrico*. Observemos en la Figura 1.19 que cuando θ tiende a 0 el límite es 1y podemos confirmarlo algebraicamente mediante el Teorema 1.6 del

Sándwich.

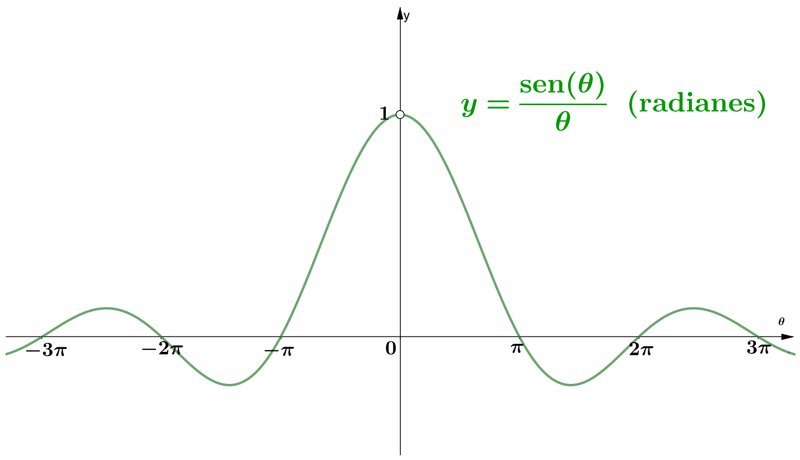


Figura 1.19: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\theta}$

Teorema 1.9

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ en radianes})$$

Demostración. Primero probaremos el siguiente resultado: Si $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, entonces

$$0 < \cos(\theta) < \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)}. \tag{1.7}$$

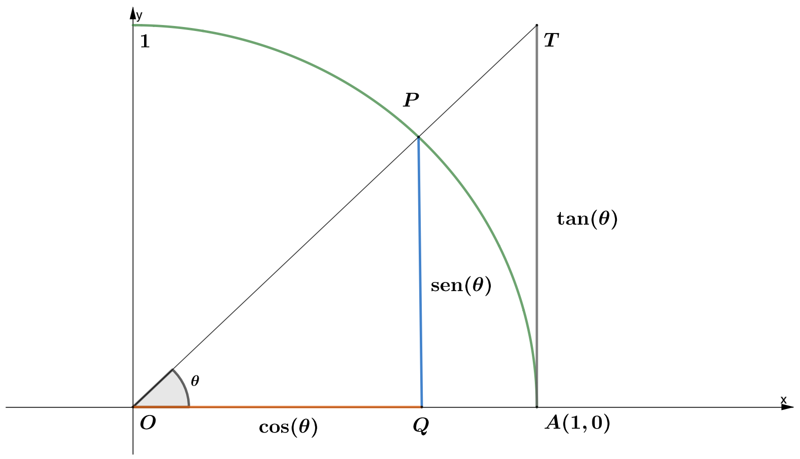


Figura 1.20: La figura para la prueba del Teorema 1.9

En efecto, utilizando conceptos de geometría y considerando la cuarta parte del círculo trigonométrico de radio 1. Observamos las regiones en la Figura 1.20, OQP, OAP y OAT. Luego, comparando el área de las tres regiones, se tiene

$$\text{Área } \Delta OQP < \text{área del sector } OAP < \text{área } \Delta OAT.$$

Además, podemos expresar estás áreas en términos de θ, se sigue que

$$\begin{aligned}
\text{Área } \Delta OQP &= \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}\cos(\theta)\cdot\text{sen}(\theta).\\
\text{Área del sector } OAP &= \frac{\text{arco} \cdot \text{radio}}{2}\\
&= \frac{(\text{radio} \cdot \text{ángulo en radianes}) \cdot \text{radio}}{2}\\
&= \frac{(1\cdot\theta)\cdot 1}{2}\\
&= \frac{\theta}{2}.\\
\text{Área } \Delta OAT &= \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}(1)(\tan(\theta)) = \frac{1}{2}\tan(\theta).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
&\cancel{\frac{1}{2}}\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta) < \cancel{\frac{1}{2}}\theta < \cancel{\frac{1}{2}}\tan(\theta)\\
\Rightarrow \quad &\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta) < \theta < \tan(\theta).
\end{aligned}$$

Como, $\text{sen}(\theta) > 0$ y $\cos(\theta) > 0$ en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y dividiendo la anterior desigualdad para $\text{sen}(\theta)$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\cos(\theta) < \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)}\\
\Rightarrow \quad &\cos(\theta) < \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)}, \qquad \forall\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.
\end{aligned}$$

Por tanto, se ha probado (1.7). Observemos que, si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, también se cumple que,

$$\cos(\theta) < \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

En efecto, si $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, entonces $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ y utilizando (1.7), se tiene

$$\cos(-\theta) < \frac{\text{sen}(-\theta)}{-\theta} < \frac{1}{\cos(-\theta)}.$$

Puesto que, $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ y $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$, se obtiene

$$\cos(\theta) < \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)}, \qquad \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\tag{1.8}$$

Finalmente, de (1.7) y (1.8), se sigue que, si $0 < |\theta| < \dfrac{\pi}{2}$, entonces

$$\cos(\theta) < \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)} \tag{1.9}$$

Aplicando el límite cuando θ tiende a 0 en (1.9) y por el Teorema 1.6, se tiene

$$\begin{gathered}\lim_{\theta\to 0} \cos(\theta) < \lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos(\theta)} \\ 1 < \lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < 1.\end{gathered}$$

Por tanto, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1$. ■

■ **Ejemplo 1.27** Utilizando el límite fundamental trigonométrico $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1$. Probar que

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(7x)}{3x} = \frac{7}{3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen}(x)} = 1$

d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0.$

Solución:

a) En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(7x)}{3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{7 \cdot \text{sen}(7x)}{7 \cdot 3x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{7}{3} \cdot \frac{\text{sen}(7x)}{7x} \\ &= \frac{7}{3} \lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta}, && \text{Sustituyendo } \theta = 7x \\ &= \frac{7}{3}(1) \\ &= \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

b) En efecto, utilizando la identidad del cociente $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \\
&= 1 \cdot \left(\frac{1}{1}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

c) En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} \\
&= \frac{1}{1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

c) Primero evaluamos el límite para observar si es indeterminado,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{\cos(0)-1}{0} = \frac{0}{0}. \qquad \text{(Indeterminado)}$$

Ahora, encontremos una función equivalente, entonces

$$\begin{aligned}
f(h) = \frac{\cos(h)-1}{h} &= \frac{\cos(h)-1}{h} \cdot \frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1} \\
&= \frac{\cos^2(h)-1}{h\,(\cos(h)+1)} \\
&= -\frac{\operatorname{sen}^2(h)}{h\,(\cos(h)+1)}, \qquad \text{Identidad Pitagórica } \operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1 \\
&= g(h).
\end{aligned}$$

Así, $f(h) = g(h)$ cuando $h \neq 0$ y utilizando el Teorema 1.5, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2(h)}{h\,(\cos(h) + 1)} \\
&= -\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \frac{\operatorname{sen}(h)}{\cos(h) + 1} \\
&= -(1) \cdot \left(\frac{0}{1+1}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = 0.$

Observación 1.6 El límite fundamental trigonométrico se lo aplica siempre que el argumento de la función trigonométrica, como la expresión que aparece en el denominador tiendan a cero para tendiendo hacia un valor finito o infinito.

Límites al infinito

En está sección utilizaremos el símbolo infinito (∞), para poder describir el comportamiento de la función cuando los valores sobrepasan en su dominio o rango a cualquier cota finita. Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$, se puede observar la Figura 1.21 que cuando se analiza valores de x positivos muy grandes, se tiene que $\dfrac{1}{x}$ se hace muy pequeña, de la misma forma cuando x es valor negativo y su magnitud es grande, se tiene que $\dfrac{1}{x}$ se hace muy pequeña. Por tanto, el límite de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando x tiende a más o menos infinito ($\pm\infty$) es cero.

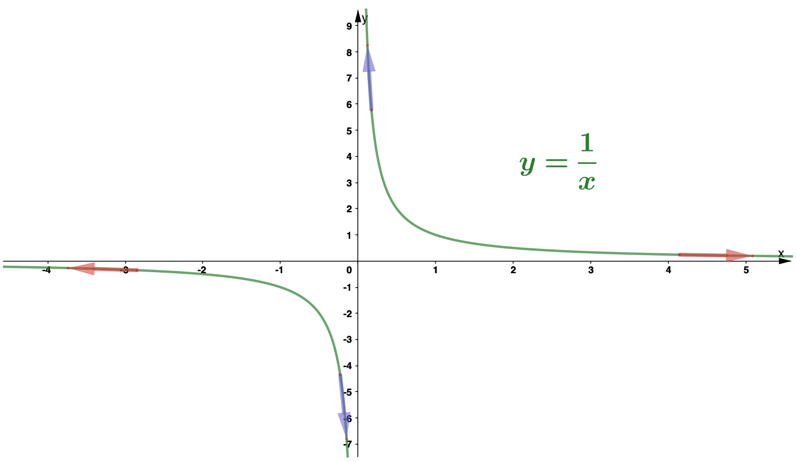


Figura 1.21: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Definición 1.3 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función con $A \subseteq \mathbb{R}$.

i) Decimos que $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende al más infinito y se denota

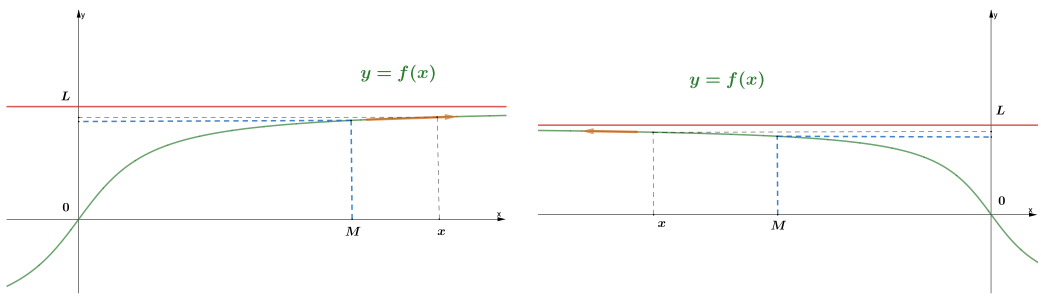
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo x,si $x > M$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

ii) Decimos que $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende al menos infinito y se denota

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M < 0$ tal que para todo x, si $x < M$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.



i) ii)

Figura 1.22: Interpretación geométrica de la Definición 1.3

■ **Ejemplo 1.28**

Utilizando la Definición 1.3. Probar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Demostración. Se deber probar que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$x > M \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

Puesto que, $x > 0$ se tiene $\frac{1}{x} < \varepsilon$, entonces $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Por consiguiente, elegimos $M = \frac{1}{\varepsilon}$.
En efecto, sea $\varepsilon > 0$, existe $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ tal que $x > M$, entonces

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. ■

Observación 1.7 Los siguientes límites son de las funciones constante y la recíproca de la identidad cuando tiende más o menos infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{1.10}$$

Estos límites van ser de gran importancia, para el cálculo de límites al infinito. A continuación, mencionamos las reglas de los límites al infinito que tienen propiedades similares a la de los límites finitos.

Teorema 1.10 [Ley de los límites cuando $x \to \pm\infty$]
Sea f, g funciones reales y λ es una constante real, tal que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = K,$$

entonces

i) Regla de la suma: $\lim_{x\to\pm\infty} (f+g)(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L+K$

ii) Regla de la diferencia: $\lim_{x\to\pm\infty} (f-g)(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L-K$

iii) Regla del producto: $\lim_{x\to\pm\infty} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = LK$

iv) Regla del múltiplo constante: $\lim_{x\to\pm\infty} (\lambda\cdot f)(x) = \lambda \cdot \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lambda L$

v) Regla del cociente: $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)} = \dfrac{L}{K},\ K \neq 0$

vi) Regla de la potencia: Si r y s son enteros sin factores comunes y $s \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = \left(\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right)^{r/s} = L^{r/s}.$$

siempre y cuando $L^{r/s} \in \mathbb{R}$. (Si s es par, suponer que $L > 0$)

vii) Regla: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right]^{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)} = L^K$, con L y K no simultáneamente nulos o infinitos.

Estas propiedades son similares al Teorema 1.3 de la sección 1.2 y se los utiliza de la misma forma. Además, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ para $p > 0$, esto se lo demuestra utilizando la ley de la potencia.

■ **Ejemplo 1.29**

Utilizando las leyes de los límites del Teorema 1.10. Encontrar los siguientes límites

(a) $\lim_{x\to-\infty} \left(7 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 7 - \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x}$ Regla de la diferencia

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to-\infty} 7 - 2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} && \text{Regla del múltiplo}\\
&= 7-2(0) && \text{Por (1.10)}\\
&= 7.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(b)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x}+4\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x}+\lim_{x\to+\infty}4 && \text{Regla de la Suma y la diferencia}\\
&= 3\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)-7\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}4 && \text{Regla del múltiplo}\\
&= 3(0)(0)-7(0)+4 && \text{Regla del producto y por (1.10)}\\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Técnicas algebraicas para cálculo de límites indeterminados

Cuando se evalúa límite de una función racional o con radicales, puede suceder que esta tienda una forma $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ o $+\infty-\infty$ la misma que se denomina una forma indeterminada. Para el cálculo de este tipo de límites tenemos que dividir el numerador y denominador entre la mala mayor potencia de x en el denominador, y de acuerdo al ejercicio se tendrá que aplicar técnicas de racionalización.

■ **Ejemplo 1.30** Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3+2x^2+x}{3x^3-4x+3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{11x^2-4x+3}{3x^3-4x+1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x-3}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)$

Solución:

a) Si evaluamos el límite, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3+2x^2+x}{3x^3-4x+3}=\frac{+\infty}{+\infty}. \qquad \text{(Indeterminación)}$$

Por está razón procedemos como sigue,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3+2x^2+x}{3x^3-4x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{7x^3+2x^2+x}{x^3}}{\dfrac{3x^3-4x+3}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{7 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$$
$$= \frac{7+0+0}{3-0+0}$$
$$= \frac{7}{3}.$$

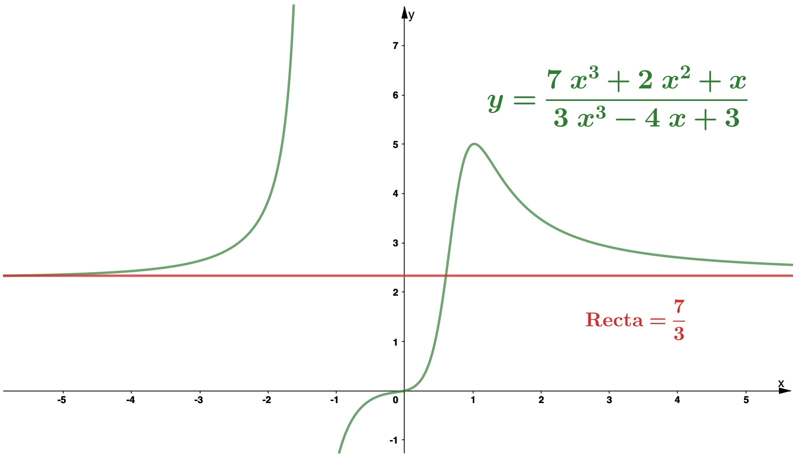


Figura 1.23: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{7x^3 + 2x^2 + x}{3x^3 - 4x + 3}$

b) Si evaluamos el límite, se tiene

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{11x^2 - 4x + 3}{3x^3 - 4x + 1} = \frac{+\infty}{-\infty}. \qquad \text{(Indeterminación)}$$

Por está razón procedemos como sigue,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{11x^2 - 4x + 3}{3x^3 - 4x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{11x^2 - 4x + 3}{x^3}}{\dfrac{3x^3 - 4x + 1}{x^3}}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{11}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$
$$= \frac{0-0+0}{3-0+0}$$
$$= 0.$$

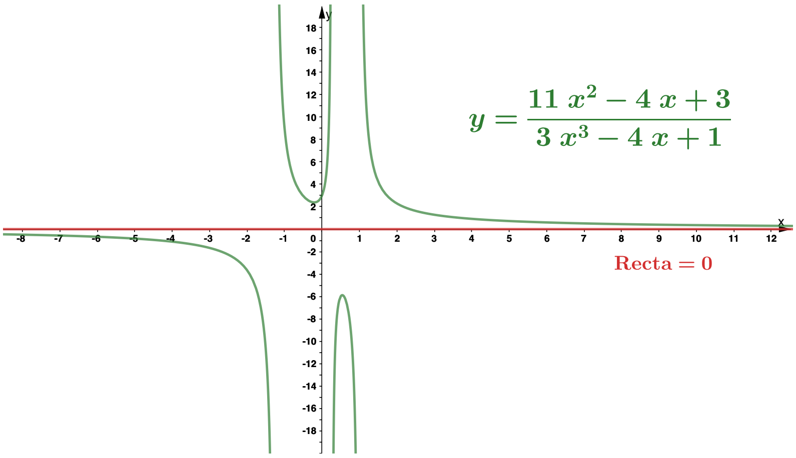


Figura 1.24: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{11x^2 - 4x + 3}{3x^3 - 4x + 1}$

c) Si evaluamos el límite, se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x - 3} \right) = +\infty - \infty. \qquad \text{(Indeterminación)}$$

Notemos, $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x - 3} \right)$, en este caso, debemos aplicar racionalización, es decir,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x - 3} \right) \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x - 3} \right)}{\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x - 3} \right)} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x - 1 - (\cancel{x^2} - 7x - 3)}{\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x - 3} \right)} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x - 3}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x - 3}}{x}}, \qquad \text{pues } x > 0 \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}}} \\
&= \frac{5 + 0}{\sqrt{1 - 0 - 0} + \sqrt{1 - 0 - 0}} \\
&= \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

d) Si evaluamos límite, se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - x \right) = +\infty - \infty \qquad \text{(Indeterminación)}$$

En este caso, debemos aplicar racionalización, es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-3x-\cancel{x^2}}{\left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x}+x}{x}}, \qquad \text{pues } x>0\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}\\
&= \frac{-3}{\sqrt{1+0}+1}\\
&= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

1.5.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.3 — Límites Laterales.

1. Si $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$, hallar $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ ¿Existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$?
2. Calcular $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$ y $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$ ¿Existe $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$? Además, realizar la gráfica de la función f definida por $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$.
2. Calcular $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ y $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.
3. Calcular $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x-4}{|x-4|}$ y $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{|x-4|}{|x-4|}$.
5. Si $f(x)=[3x]$ (la función parte entera de $3x$), hallar $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x)$. Además, calcula $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.
6. (a) Grafique $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\neq2\\ 0, & \text{si } x=2\end{cases}$.

   (b) Encuentre $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

(c) ¿$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe? Si es así, ¿Cuál es? Si su respuesta es negativa, explique por qué.

7. Encuentre los siguientes límites laterales

(a) $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

(b) $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{6h^2+13h+7}}{h}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{2x}(x-2)}{|x-2|}$

(d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{2x}(x-2)}{|x-2|}$.

8. Calcular

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x > 0 \\ x, & \text{si } x \le 0 \end{cases}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{si } x \le 3 \\ (x-3)^2, & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

9. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x^2+a, & \text{si } x \ge 1 \\ 7x+b, & \text{si } x < 1 \end{cases}$ donde a y b son constantes. Para que exista el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ¿Qué relación debe haber entre a y b?

10. Demostrar aplicando la Definición 1.2 que

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|} = 1$.

Límites Trigonométricos

11. Calcular los siguientes límites

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x-2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} 6x^2 \cot(x) \csc(2x)$

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}} \dfrac{\tan^2(x)-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\tan(x)-7\operatorname{sen}(x)}{2x}$

(i) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\tan(\theta))}{\operatorname{sen}(\theta)}$

(j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(4x)\cot(7x)}{x\cot(5x)}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x^2+x^2\operatorname{sen}(x)}{2x^2}$.

Límites al Infinito

12. Calcular los siguientes límites

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3x^2-2x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{200x}{x^2+2}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+5)^3(x-7)^2}{2x^5-4}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^5+3x^7+x^8}{4x^3-7x^8}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{2x+7}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5x^2+5}-\sqrt{7x^2-6}}{\sqrt[4]{3x^4+2}}$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2-x+1}-2x\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$

(k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen}(x)}{2x+3-3\operatorname{sen}(x)}$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x+\operatorname{sen}(x)}{x+\cos(x)}$.

1.6 Límites Infinitos

En está sección se analizará que sucede cuando las funciones toman valores muy grandes en magnitud es decir se dirigen al más o menos infinito ($\pm\infty$). Observemos la Figura 1.25 a medida que nos acercamos a x_0 por la derecha o por la izquierda, el valor de $f(x)$ se hace cada vez más grande. En realidad, se puede tener que $f(x)$ se mantenga mayor que cualquier número positivo que se desee, en este caso $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, pero esto no quiere decir que existe el límite ya que más infinito ($+\infty$) no es un número real, *porque sus valores son arbitrariamente grandes en valor absoluto y negativos.*

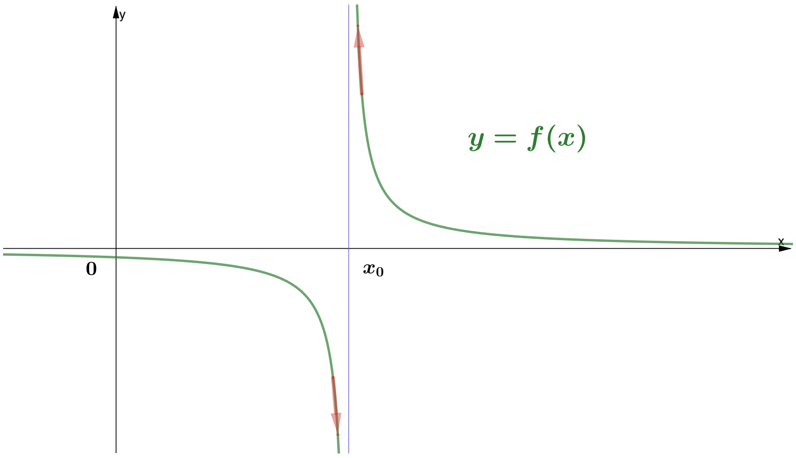


Figura 1.25: Análisis de la función cuando $x \to x_0$

Definición 1.4 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función con $A \subseteq \mathbb{R}$.

i) Decimos que $f(x)$ tiende al más infinito cuando x se aproxima a x_0, y se denota

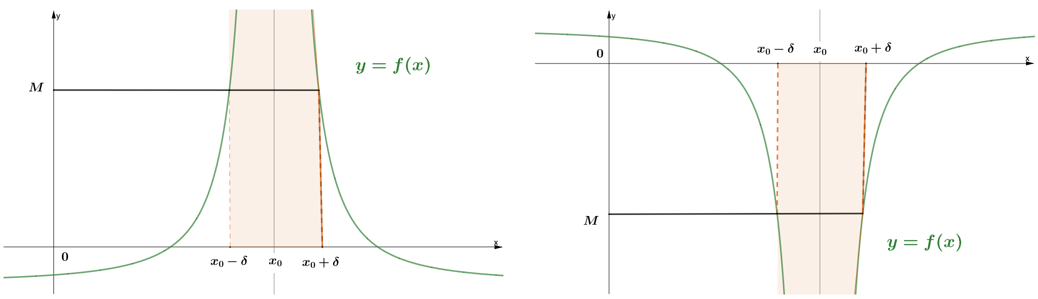
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

si para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) > M$.

ii) Decimos que $f(x)$ tiende al menos infinito cuando x se aproxima a x_0, y se denota

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

si para todo $M < 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) < M$.



i) ii)

Figura 1.26: Interpretación geométrica de la Definición 1.4

Observación 1.8 Como en el caso de límites finitos, podemos definir en este caso límites por la izquierda y por la derecha que son similares a la Definición 1.4.

Ahora, veamos la siguiente definición sobre límites infinitos, cuando $x \to \pm\infty$.

Definición 1.5 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función con $A \subseteq \mathbb{R}$.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si y solo si para todo $M > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo x, si $x > N$ entonces $f(x) > M$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si y solo si para todo $M < 0$, existe $N > 0$ tal que para todo x, si $x > N$ entonces $f(x) < M$.

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si y solo si para todo $M > 0$, existe $N < 0$ tal que para todo x, si $x < N$ entonces $f(x) > M$.

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si y solo si para todo $M < 0$, existe $N < 0$ tal que para todo x, si $x < N$ entonces $f(x) < M$.

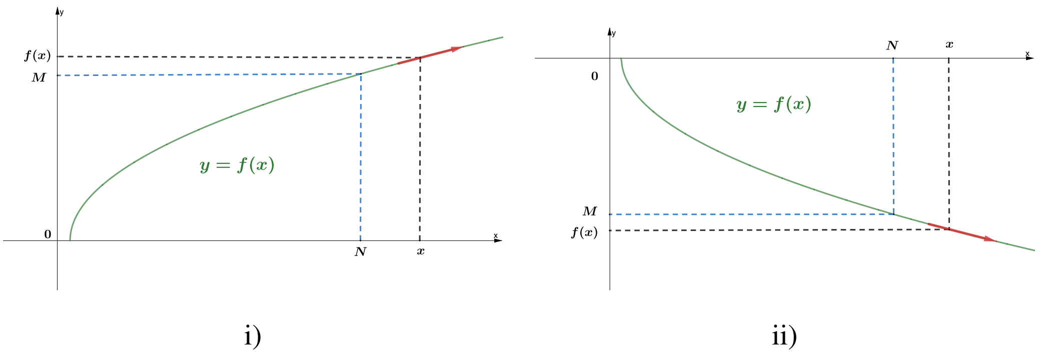


Figura 1.27: Interpretación geométrica de la Definición 1.5

■ **Ejemplo 1.31**

Aplicando la Definición 1.4. Probar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Demostración. Se debe probar que, para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x, si $0 < |x-0| < \delta$, entonces $\dfrac{1}{x^2} > M$.

Así, $x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{1}{M}}$, por consiguiente, elegimos $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$.

En efecto, sea $M > 0$, existe $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}} > 0$ tal que si $|x| < \delta$, entonces

$$|x| < \sqrt{\frac{1}{M}} \quad \Rightarrow \quad x^2 < \frac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > M.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. ■

■ **Ejemplo 1.32 — Límites laterales infinitos.**

Encuentre $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2}$.

Solución: Observando la gráfica de $y = \frac{1}{x-2}$ (Figura 1.28). Por tanto, el comportamiento de los valores cuando se acera a 2, se tiene

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

También, se puede pensar en número $x-2$ y su recíproco.

- Cuando $x \to 2^-$, se tiene $(x-2) \to 0^-$ y $\dfrac{1}{x-2} \to -\infty$.
- Cuando $x \to 2^+$, se tiene $(x-2) \to 0^+$ y $\dfrac{1}{x-2} \to +\infty$.

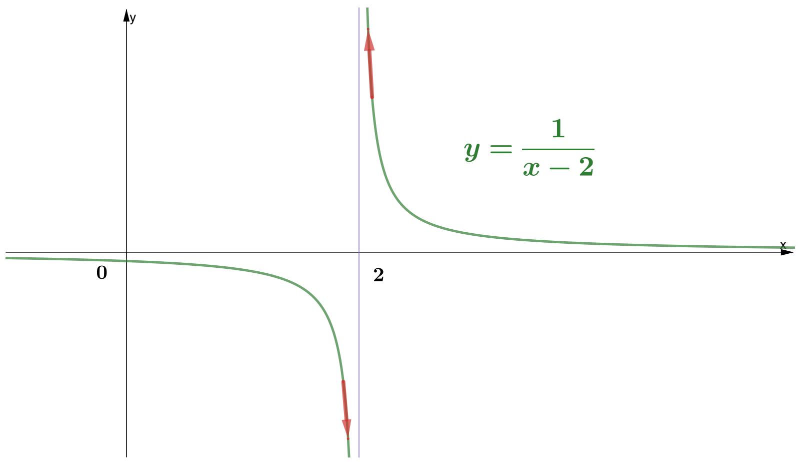


Figura 1.28: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

■ **Ejemplo 1.33 — Límites bilaterales infinitos.**

Analizar el comportamiento del $g(x) = \dfrac{1}{(x+4)^2}$ alrededor de $x = -4$.

Solución: Observando la gráfica de $g(x) = \dfrac{1}{(x+4)^2}$ (Figura 1.29). Como el comportamiento de la función $y = \dfrac{1}{x^2}$ cuando $x \to 0$ es que los valores son muy grandes, es decir, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. También, se puede pensar que cuando $x \to -4$, se tiene $(x+4) \to 0$ entonces $(x+4)^2 \to 0$ y $\dfrac{1}{(x+4)^2} \to +\infty$. Por tanto,

$$\lim_{x\to -4} \frac{1}{(x+4)^2} = +\infty$$

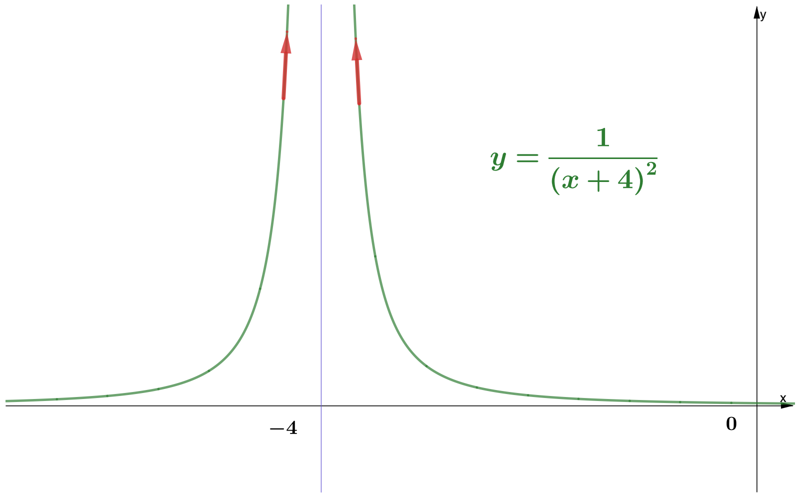


Figura 1.29: Gráfica de la función $g(x) = \dfrac{1}{(x+4)^2}$

■ **Ejemplo 1.34** Evaluar los siguientes límites y observar que las funciones racionales pueden comportarse de distintas formas cerca de los ceros del denominador.

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x+3} = 0.$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}.$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 3^+} \frac{x-4}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-4}{(x-3)(x+3)} = -\infty,$ Los valores son negativos para $x > 3$, x cerca de 3.

(d) $\displaystyle \lim_{x\to 3^-} \frac{x-4}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-4}{(x-3)(x+3)} = +\infty,$ Los valores son positivos para $x > 3$, x cerca de 3.

(e) $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{x-4}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-4}{(x-3)(x+3)}$ no existe. Por los incisos (c) y (d)

(f) $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{(x-3)^3} = \lim_{x\to 3} \frac{-\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{3}}} = \lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x-3)^2} = -\infty.$

Observemos que en los literales (a) y (b), el efecto del cero en el denominador en $x = 3$ se cancela, ya que el numerador también es cero. Así, existe un límite finito. Pero en el literal (f) no se elimina completamente, debido que el denominador todavía es cero.

1.6.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.4 — Límites Infinitos.

1. Encuentre los siguientes límites

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{5x^{\frac{5}{2}}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3}{2x}$

(c) $\lim\limits_{x\to -7^-} \dfrac{3x}{x+7}$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4}{(x-3)^4}$

(e) $\lim\limits_{x\to -7^-} \dfrac{3x}{2x+14}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2}{(x+1)^2\,(x+2)}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4}{5x^{\frac{1}{5}}}$

(h) $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(\theta)$

(i) $\lim\limits_{\theta\to 0} (3-2\cot(\theta))$

(j) $\lim\limits_{\theta\to 0^-} (2+3\csc(\theta))$.

2. Encuentre el lím $\dfrac{1}{x^2-9}$ cuando

(a)$x\to 3^+$ (b)$x\to 3^-$

(c)$x\to -3^+$ (d)$x\to -3^-$

3. Encuentre el lím $\dfrac{2x}{x^2-4}$ cuando

(a)$x\to 2^+$ (b)$x\to 2^-$

(c)$x\to -2^+$ (d)$x\to -2^-$

4. Encuentre el lím $\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{x}\right)$ cuando

(a)$x\to 0^+$ (b)$x\to 0^-$

(c)$x\to \sqrt[3]{2}$ (d)$x\to 1$

5. Encuentre el lím $\dfrac{x^2-3x+2}{3x^3-12x}$ cuando

(a)$x\to 2^+$ (b)$x\to -2^+$

(c)$x\to 0^-$ (d)$x\to 1^+$

¿Que puede decirse acerca del límite conforme $x\to 0$?

6. Encuentre el lím $\left(\dfrac{1}{x^{\frac{2}{5}}}+\dfrac{2}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\right)$ cuando

(a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 0^-$

(c) $x \to 2^-$ (d) $x \to 2^+$

7. Encuentre el lím $\left(\dfrac{3}{x^{\frac{1}{5}}} - \dfrac{5}{(x-3)^{\frac{7}{3}}}\right)$ cuando

(a) $x \to 0^+$ (b) $x \to 0^-$

(c) $x \to 2^+$ (d) $x \to 1^-$

8. Demostrar aplicando la Definición 1.4 que

(a) $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \infty$

(c) $\lim\limits_{x\to 4} -\dfrac{3}{(x-4)^2} = -\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{1}{(x+6)^4} = +\infty$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

(g) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ (h) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$

(i) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{4-x^2} = +\infty$

1.7 Continuidad

En está sección se realizará el estudio de una propiedad muy importante de las funciones denominada continuidad. Intuitivamente, la continuidad de una función $y = f(x)$ significa que si x es próximo a un punto x_0, entonces $f(x)$ está muy cercano de $f(x_0)$ como tanto queramos, observar la Figura 1.30. En la gráfica de una función continua, no se representa con saltos bruscos. También una función continua carece de puntos aislados.

Definición 1.6 — Continuidad Puntual. Una función f se dice que es continua en un punto $x = x_0$ de su dominio si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observación 1.9 La continuidad de una función f en el punto $x = x = 0$ implica que se cumple las tres condiciones siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe.
2. La función está definida en $x = x_0$, es decir, existe $f(x_0)$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Así, una función no cumple una de estas tres condiciones en $x = x_0$, se dice que f es discontinua en

$x = x_0$. Además, recalcamos que el hecho de que para hablar de la continuidad de una función es un punto $x = x_0$, está debe estar necesariamente definida en x_0.

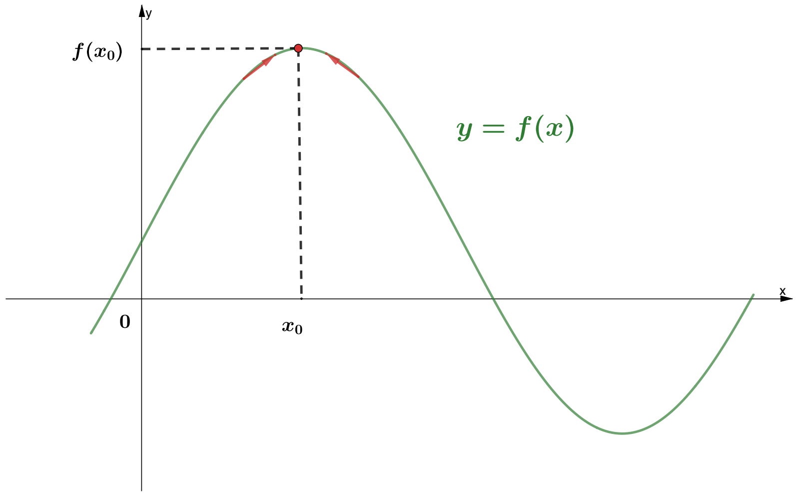


Figura 1.30: Análisis de la continuidad en el punto $x = x_0$

Observación 1.10 La continuidad de una función podemos definir de la siguiente manera, diremos que una función f es continua en el punto x_0, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x, si $0 \leq |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

■ **Ejemplo 1.35**

1. La función constante es continua en todo punto.

   Solución: En efecto, si $f(x) = k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

   (a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} k = k$.

   (b) $f(x_0) = k$.

   De (a) y (b) se sigue que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Por tanto, f es continua en x_0.

2. La función identidad es continua en todo punto.

   Solución: En efecto, si $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

   (a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

   (b) $f(x_0) = x_0$.

   De (a) y (b) se sigue que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Por tanto, f es continua en $x = x_0$.

El siguiente Teorema 1.11, constituye una herramienta o un método que nos permite construir funciones continuas a partir de funciones elementales que acabamos de ver, es decir, las combinaciones algebraicas de funciones continuas son continuas, siempre y cuando estén definidas, esto es, que son continuas en su dominio.

Teorema 1.11 — Propiedades de funciones continuas.

Si f, g son funciones continuas en $x = x_0$, entonces las combinaciones siguientes son continuas en un punto x_0.

1. Sumas: $f + g$
2. Diferencias: $f - g$
3. Productos: $f \cdot g$
4. Múltiplos constantes: λf, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$
5. Cocientes: $\dfrac{f}{g}$, siempre y cuando $g(x_0) \neq 0$
6. Potencias: $f^{r/s}$, siempre y cuando esté definida en un intervalo abierto que contenga x_0, donde r y s son enteros sin factores comunes y $s \neq 0$.

Casi todos los resultados del Teorema 1.11 pueden probarse a partir de las leyes de los límites del Teorema 1.3, sección 1.2. Por ejemplo, para probar la propiedad de la suma, se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) && \text{Regla de la suma Teorema 1.3} \\
&= f(x_0) + g(x_0) \\
&= (f+g)(x_0).
\end{aligned}
$$

Por tanto, $f + g$ es continua.

■ **Ejemplo 1.36**

(a) *Funciones Polinomiales*: $P(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ es continua, puesto que $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ de acuerdo al Teorema 1.4 de la sección 1.2.

(b) *Funciones Racionales:* Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios continuos, entonces la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es continua siempre que este definida en $Q(x_0) \neq 0$, según la regla del cociente del Teorema 1.11. Por tanto, para encontrar los puntos de discontinuidad de una función racional (es decir, aquellos puntos en donde la función no es continua), se debe determinar los valores para los cuales el denominador se anula.

■ **Ejemplo 1.37**

1. Si f es la función real definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, está es continua para todo $x \neq 0$, ya que en $x = 0$ es un punto de discontinuidad.

2. Determinar todos aquellos puntos en los que la función f definida por $f(x) = \dfrac{2x}{3x^4+1}$ es discontinua.

   Solución: Como f es una función racional, entonces sus puntos de discontinuidades son aquellos donde $3x^4+1=0$, pero está ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$, es decir, no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que $3x^4+1=0$, en consecuencia f es una función continua en todo $\mathbb{R}$.

3. Sea f una función real definida por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Determinar en que puntos f es continua.

   Solución: Como f es una función racional, entonces f no es continua en el punto x tal que $x-1=0$, esto es, f es discontinua en $x=1$. Por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

4. Sea f una función definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$ no está definida para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que $x-1<0$, es decir, para $x<1$. Ahora, si $x_0 \geq 1$, se tiene $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x-1}=\sqrt{x_0-1}=f(x_0)$, entonces f es continua para todo $x \geq 1$.

El siguiente Teorema 1.12 nos hace referencia sobre la continuidad de funciones inversas.

Teorema 1.12 La inversa de una función continua, si existe, es continua.

Por ejemplo, la función exponencial es continua y la función inversa de la exponencial es la función logaritmo que también es continua.

Continuidad Lateral

Definición 1.7

i) **Continuidad por derecha**: Decimos que f es continua en x_0 por la derecha si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

ii) **Continuidad por izquierda**: Decimos que f es continua en x_0 por la izquierda si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Observación 1.11 f es continua en x_0 si y solo si f es continua por la izquierda y por la derecha en x_0.

■ Ejemplo 1.38

1. Sea f la función parte entera de x definida por $f(x)=[x]$. ¿Es continua la función f en $x=1$?

   Solución: Como $f(x)=[1]=1$. Ahora, veamos si el límite existe, se tiene

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0.$$

Así, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe. Por tanto, la función f no es continua en $x=1$.

Veamos si existe continuidad lateral:

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, se sigue que f es continua por la derecha en $x_0 = 1$. y puesto que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq f(1)$, f no es continua por la izquierda en $x_0 = 1$.(Figura 1.31)

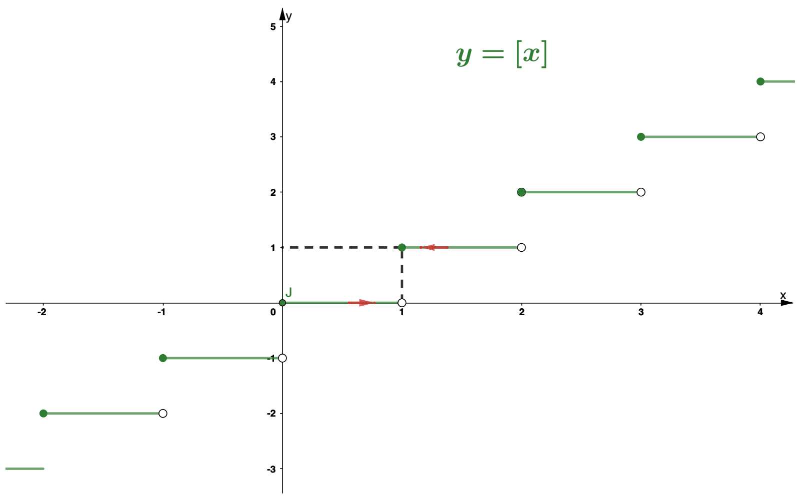


Figura 1.31: Gráfico de la función parte entera $f(x) = [x]$

2. Analizar la continuidad en $x=-3$ de la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3}, & \text{si } x \neq -3 \\ 0, & \text{si } x = -3 \end{cases}$.

   Solución: En efecto, $f(-3) = 0$, es decir, $f(-3)$ existe. Por otra parte,

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = \lim_{x\to -3}(x-3) = -6.$$

   En consecuencia, $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ existe.

   Así, $\lim\limits_{x\to -3} f(x) \neq f(-3)$, se sigue que f no es continua en $x=-3$.

   Veamos si existe continuidad lateral:

   Como $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -6 \neq f(-3)$ y $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -6 \neq f(-3)$, se sigue que f no es continua en $x_0 = -3$ ni por la derecha ni por la izquierda.

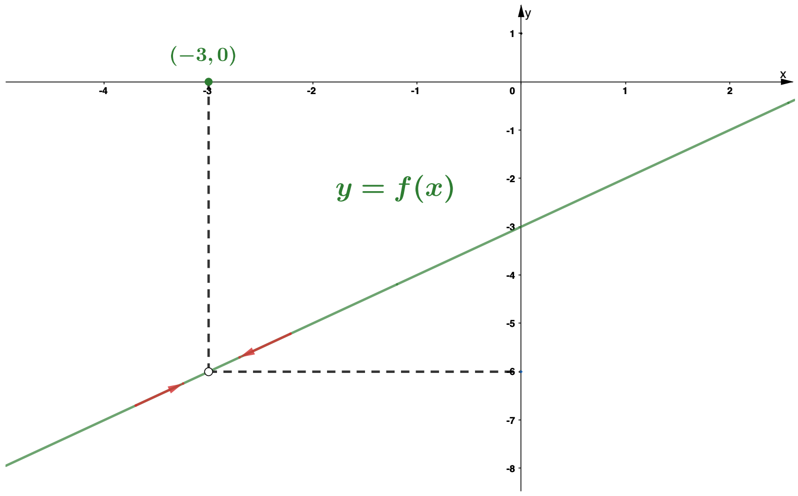


Figura 1.32: Gráfico de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3}, & \text{si } x \neq -3 \\ 0, & \text{si } x = -3 \end{cases}$

Observación 1.12 Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe y es finito, pero $f(x_0)$ no existe o si existe tal que $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, se puede definir o redefinir la función f en x_0 de tal manera que ella sea continua tomando $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Cuando esto es posible se dice que la función f tiene una **discontinuidad evitable**. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ no existe, tiene una **discontinuidad inevitable**.

■ **Ejemplo 1.39**
Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x+a}$, para $x \neq -a$. Analizar si f tiene discontinuidad evitable o no en $x_0 = -a$.

Solución: En efecto, $f(-a)$ no está definida. Además,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -a} f(x) &= \lim_{x\to -a} \frac{x^2-a^2}{x+a} \\ &= \lim_{x\to -a} \frac{(x-a)\cancel{(x+a)}}{\cancel{x+a}} \\ &= \lim_{x\to -a} (x-a) \\ &= -2a.\end{aligned}$$

Consecuentemente, f tiene una *discontinuidad evitable* en $x_0 = -a$, puesto que $\lim\limits_{x\to -a} f(x)$ existe. Ahora, f será continua en $x = -a$, si se define $f(-a) = -2a$. Por tanto, se puede definir

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x+a}, & \text{si } x \neq -a \\ -2a, & \text{si } x = -a \end{cases}$$

esta función g es continua en todo $\mathbb{R}$.

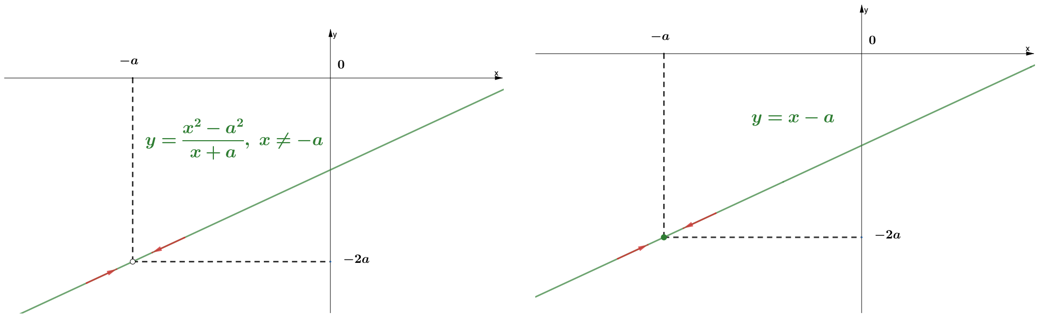


Figura 1.33: Gráfico de las funciones f y su extensión g

■ **Ejemplo 1.40**

Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{si } x \geq 1 \\ 3-2x, & \text{si } x < 1 \end{cases}$. Analizar si f tiene discontinuidad evitable o no en $x_0 = 1$.

Solución: En efecto, $f(1) = 4$, es decir, $f(1)$ existe. Luego,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3-2x) = 3-2(1) = 1.$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x+1) = 3(1)+1 = 4.$$

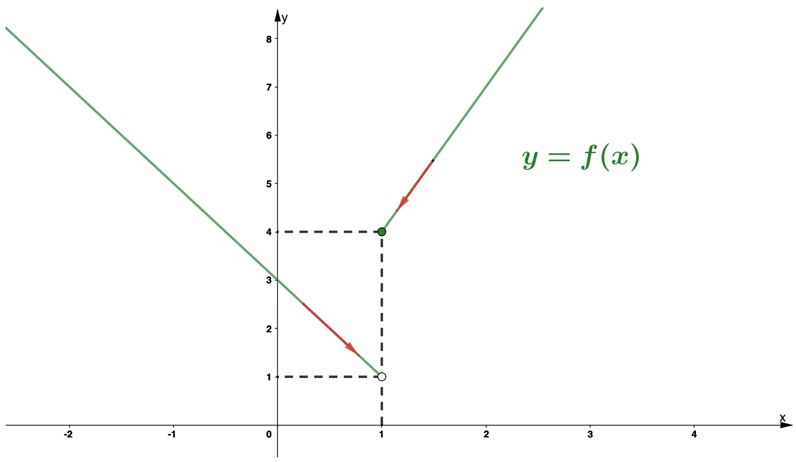


Figura 1.34: Gráfico de la función f

Así, $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, se sigue que, $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.
Consecuentemente, f tiene una *discontinuidad inevitable* en $x_0 = 1$, puesto que existe un **salto finito**, entre los límites laterales.

Veamos si existe continuidad lateral:

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, se tiene que f es continua por la derecha en $x_0 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq f(1)$, se sigue que, f no es continua por la izquierda en $x_0 = 1$.

Teoremas sobre funciones continuas

Teorema 1.13 — Composición de funciones continuas.

Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g\circ f$ es continua en x_0.

Demostración. En efecto,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ x_0 & \longrightarrow & f(x_0) & \longrightarrow & (g\circ f)(x_0) = g\left(f(x_0)\right) \end{array}$$

Se debe probar que $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = (g\circ f)(x_0)$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$0 \leq |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$, como g es continua en x_0, se sigue que, $\lim\limits_{x\to x_0} g(y) = g\left(f(x_0)\right)$, es decir, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 \leq |y - f(x_0)| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |g(y) - g\left(f(x_0)\right)| < \varepsilon. \tag{1.11}$$

De la misma forma, f es continua en x_0 se sigue que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, es decir, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 \leq |x - x_0| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \delta_1. \tag{1.12}$$

En consecuencia, elegimos $\delta = \delta_2$ y utilizando (1.11) y (1.12), se tiene

$$\begin{aligned} 0 \leq |x - x_0| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \\ &\Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon. \qquad\qquad \text{con } y = f(x) \end{aligned}$$

Así, $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = (g\circ f)(x_0)$. Por tanto, $g\circ f$ es continua en x_0. ∎

Observemos que la composición de dos funciones o más funciones continuas es otra función continua.

■ **Ejemplo 1.41**

1. La función h definida por $h(x) = \left(3x^2 + 2x - 1\right)^{\frac{5}{2}}$ es continua.

Solución: En efecto, h es continua puesto que se puede expresar como la composición de dos funciones continuas, que son $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ y $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$, con $h = f \circ g$.

2. La función h definida por $h(x) = \operatorname{sen}\left(x^2\right)$ es continua.

   Solución: En efecto, h es continua puesto que se puede expresar como la composición de dos funciones continuas, que son $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x^2$, con $h = f \circ g$.

Teorema 1.14

Si f es continua en L y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(L)$.

Observación 1.13 La igualdad $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(L)$, podemos escribirla de la siguiente forma

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

Demostración del Teorema 1.14.

En efecto, como $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$, es decir, dado $\varepsilon' > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |g(x) - L| < \varepsilon'.$$

Además, como f es continua en L, se sigue que, $\lim\limits_{y \to L} f(y) = f(L)$, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo x,

$$0 \leq |y - L| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |f(y) - f(L)| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, elegimos $\varepsilon' = \delta_2$ y $\delta = \delta_1$.

En consecuencia, sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq |x - x_0| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - L| < \delta_2 \\ &\Rightarrow \quad |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon. \qquad \text{con } y = g(x) \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(L)$. ■

Además, si no se supone la continuidad de f en L, entonces no se tiene necesariamente que

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

■ **Ejemplo 1.42**

Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq L \\ 1, & \text{si, } x = L \end{cases}$ y $g(x) = \dfrac{L}{x_0}x$. Observemos la Figura 1.35,

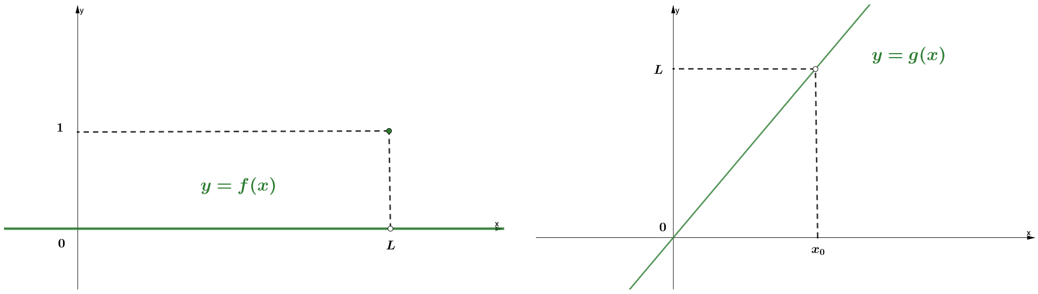


Figura 1.35: Gráfico de las funciones f y g

En efecto, si $f(g(x)) = f\left(\dfrac{L}{x_0}x\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq x_0 \\ 1, & \text{si, } x = x_0 \end{cases}$ y es fácil ver que, $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = 0$, pero $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ y $f\left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right) = f(L) = 1$, es decir, que $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) \neq f\left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right)$. Esto sucede porque f no es continua en L.

Definición 1.8

Se dice que f es continua en un intervalo $[a,b]$ si y solo si f es continua en cada punto de $[a,b]$. En a y b se considera continuidad por la derecha y por la izquierda respectivamente.

Definición 1.9 — Función Acotada.

Una función f se dice acotada en $[a,b]$, si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a,b]$.

Observación 1.14

$$|f(x)| \leq M \quad \iff \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

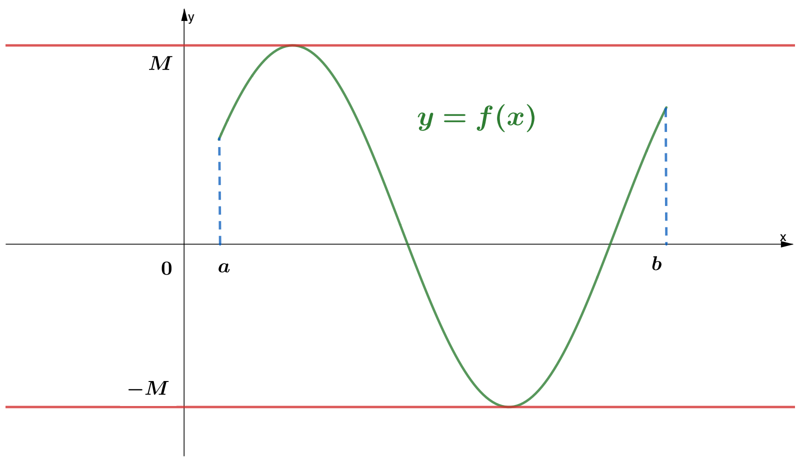


Figura 1.36: Interpretación geométrica de la Definición 1.9

■ Ejemplo 1.43

1. Si f es la función definida por $f(x) = \cos(x)$, entonces f es acotada.

   Solución: En efecto, se conoce que $|f(x)| = |\cos(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, f es acotada.

2. La función g definida por $g(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$, entonces g es acotada.

   Solución: En efecto, se conoce que $x^4 \geq 0$, entonces $x^4+1 \geq 1$ de donde, $0 < \dfrac{1}{x^4+1} \leq 1$, es decir, que $|g(x)| = \left|\dfrac{1}{x^4+1}\right| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso basta tomar $M = 1$, para que g sea acotada.

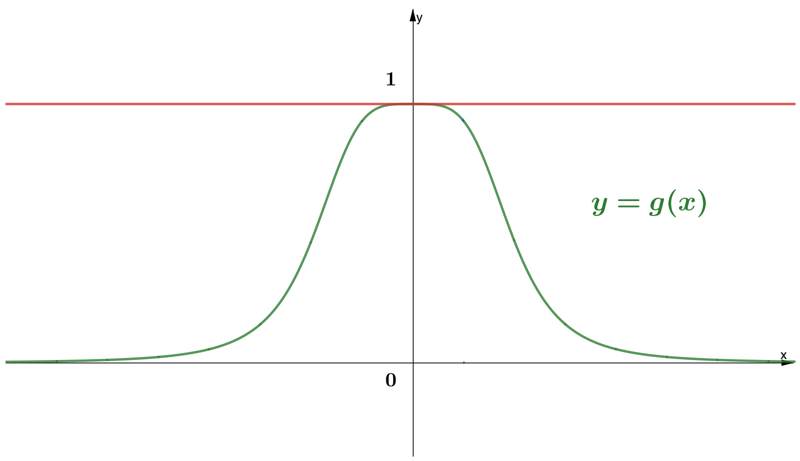


Figura 1.37: Gráfico de la función $g(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$

Los siguientes teoremas sobre funciones continuas en intervalos, tienen propiedades que las hacen particularmente útiles en matemática y sus aplicaciones, a continuación se presentan sus enunciados, las demostraciones de los teoremas se puede encontrar en cualquier texto de Análisis Matemático.

Teorema 1.15

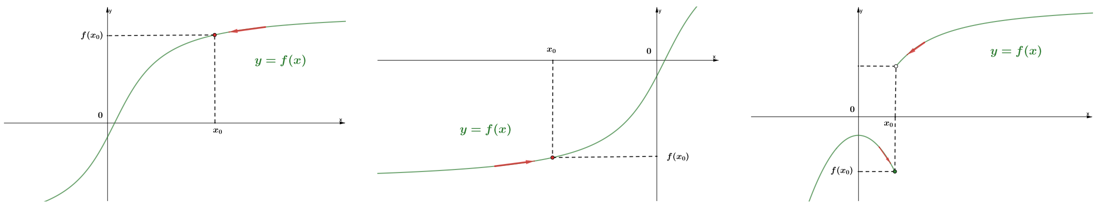
Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es acotada en $[a,b]$.

Teorema 1.16 — Weierstrass.

Si f es continua en $[a,b]$, entonces f toma sus valores máximos y mínimos en $[a,b]$, es decir, que existen $c, d \in [a,b]$ tales que $f(c) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ y $f(d) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Teorema 1.17 — Conservación del signo para funciones continuas.

Sea f continua en x_0. Si $f(x_0) \neq 0$, existe un intervalo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x_0)$, para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.



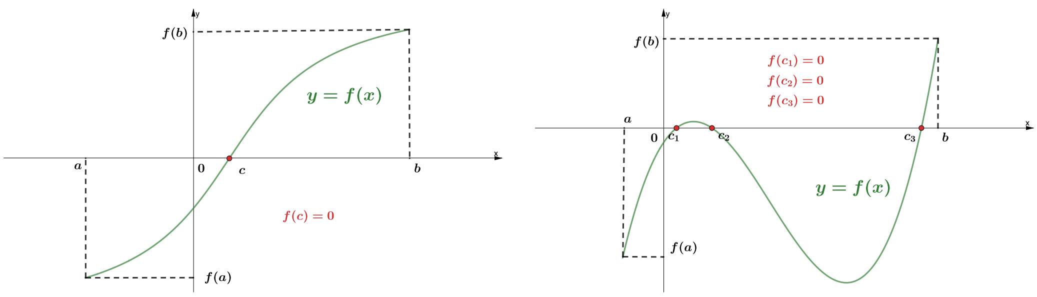
(a) (b) (c)

Figura 1.38: Interpretación geométrica del Teorema 1.17

Note que, si f no es continua en x_0 (Figura 1.38 (c)), la afirmación del Teorema 1.17 no se cumple, pues es valido para funciones continuas.

Teorema 1.18 — Bolzano.

Sea f continua en $[a,b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe $a < c < b$ tal que $f(c) = 0$.



(a) (b)

Figura 1.39: Interpretación geométrica del Teorema 1.18

Nota 1.3 El Teorema no dice que existe un único c, sino que al menos existe uno, es decir, pueden haber varios valores de c para los que $f(c) = 0$. En la Figura 1.39 explica la Interpretación geométrica del Teorema del Bolzano 1.18.

Teorema 1.19 — Valor intermedio de Darboux.

Sea f continua en $[a,b]$. Si $f(a) \neq f(b)$, entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

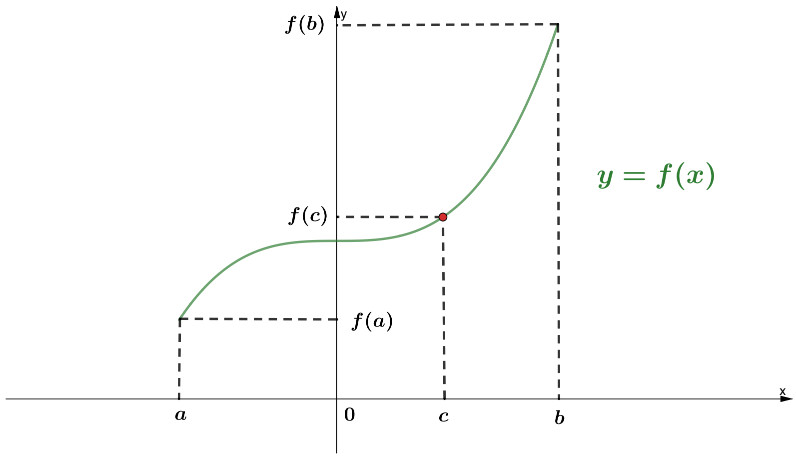


Figura 1.40: Interpretación geométrica del Teorema 1.19

Demostración. Supongamos que $f(a) \leq f(b)$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \alpha < f(b)$. Consideramos la función g definida por $g(x) = f(x) - \alpha$. Entonces, g es continua en $[a,b]$, debido a que f es continua en $[a,b]$, se tiene

$$g(a) = f(a) - \alpha < 0 \qquad \text{y} \qquad g(b) = f(b) - \alpha > 0.$$

Es decir, que la función g satisface las condiciones del Teorema de Bolzano 1.18, entonces existe $a < c < b$ tal que $g(c) = 0$. Pero, $g(c) = f(c) - \alpha = 0$, de donde $f(c) = \alpha$. ■

Teorema 1.20

Si f y g son funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y se verifica que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, entonces existe un número $c \in \,]a,b[$ tal que $f(c) = g(c)$.

■ Ejemplo 1.44 — Aplicación del Teorema de Bolzano 1.18.

Demostrar que existe por los menos una raíz para la ecuación $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ en el intervalo $[2,3]$.

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, entonces f es continua, se tiene

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 1 = -3 < 0$$
$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 + 1 = 1 > 0.$$

Así, $f(2)$ y $f(3)$ tienen distinto signo. Por el Teorema de Bolzano 1.18 aplicando a la función f existe $c \in \,]2,3[$ tal que $f(c) = 0$. De esta forma, se ha probado que existe por lo menos una raíz de la ecuación dada.

Nota 1.4 Se dice que un número real x_0 es una raíz real de la ecuación $f(x) = 0$, si $f(x_0) = 0$.

También, decimos que una raíz real de una ecuación ha sido separada, si se ha encontrado un intervalo $[a,b]$ que contiene está raíz y ninguna otra. Este proceso de ir separando las raíces, utilizando varias veces el Teorema de Bolzano 1.18, se puede encontrar dichas raíces con la aproximación que se desee, en el cuál se puede aplicar métodos numéricos como por ejemplo, el método de Newton.

1.7.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.5 — Continuidad.

1. Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$ ¿Para que valores de x es continua la función f?
2. Indicar donde es discontinua la función f definida por
$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x < 0 \\ 2, & \text{si } x = 0 \\ x^2+4, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
y realizar la gráfica de la función f.
3. Sea h la función definida por
$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1, & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{4}, & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 3, & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$
Analizar si la función h es continua o discontinua en los puntos $x = 1$ y $x = 2$. Además, realizar la representación gráfica de h.
4. Dada la función $g(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{si } x < 2 \\ 5, & \text{si } x = 2 \\ x^2+4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$, estudiar la continuidad de dicha función en $x = 2$.
5. Sea la función $f(x) = x - [3x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Realizar la representación gráfica de f y encontrar todos sus puntos de discontinuidad.

6. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

7. Representar gráficamente la función e indicar algún punto de discontinuidad

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2-1, & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

8. Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{si } x < 1 \\ x^2+4, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x+9, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   (a) Realizar un gráfico de la función f.
   (b) ¿Es f continua en $x=1$? ¿Y en $x=2$? ¿Es continua en los demás puntos? ¿Es continua por la izquierda en $x=1$? ¿ Es continua por la derecha en $x=1$?

9. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+b, & \text{si } x \leq c \\ sen(x+2), & \text{si } x > c \end{cases}$$

   (a) Calcula $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.
   (b) Para que exista el límite de f en $x=c$, ¿Qué deben ser los $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$?
   (c) Para f sea continua en c, ¿Qué condición debe cumplirse?

10. Encontrar los puntos de discontinuidad de las funciones definidas como a continuación se indican

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ (b) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

(c) $f(x)=\dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1}$ (d) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

(e) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ (f) $f(x)=|x^2-1|$

(g) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & \text{si } x\leq 2 \\ 2x-6, & \text{si } x>2 \end{cases}$ (h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x+1}, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

(i) $f(x)=\dfrac{x\tan(x)}{x^2+1}$ (j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{1+\operatorname{sen}^2(x)}$

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax, & \text{si } x\leq 2 \\ a-x^2, & \text{si } x>2 \end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{si } x\leq 2 \\ 4-ax^2, & \text{si } x>2 \end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2, & \text{si } x>0 \\ ax+b, & \text{si } 0\leq x<1 \\ 3, & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$

12. Si $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$, defina $f(2)$ de tal manera que f sea continua en $x=2$.

13. Sea $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$ ¿Es posible definir $f(-2)$ de tal amnera que f sea continua en $x=-2$?

14. Si $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$, defina $f(4)$ de tal manera que f sea continua en $x=4$.

15. Si $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, defina $f(1)$ de tal manera que f sea continua en $x=1$.

16. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $g(x)=x-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-x}$ y decir si en alguno de ellos la *discontinuidad es evitable*.

17. Probar que las funciones definidas como a continuación se indican son continuas.

(a) $\sqrt[3]{2x+5}$ (b) e^{x^2-2x+1}

(c) $\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)+1}$ (d) $\cos(\sqrt{x})$

(e) $\tan(x^3+1)$ (f) $\operatorname{sen}(\cos(x))$

(g) $\operatorname{sen}^2(x^2-4x)$

18. Con ayuda del Teorema de Bolzano 1.18, separar las raices reales de cada una de las siguientes ecuaciones.
    (a) $x^3-15x+1=0$
    (b) $2x^3-2x^2-2x+1=0$
    (c) $x(x-1)^2-1=0$
    (d) $2x^4-14x^2+14x-1=0$

19. Sea $f(x)=x^3+x^2-x$. Demuestre que existe c tal que $f(c)=50$.
20. Demuestre que el polinomio $3x^4-x^2-10$ se anula en algún punto comprendido en el intervalo $[1,2]$.
21. Sea $f(x)=x^2$, $a=1$ y $b=2$. Demostrar que el Teorema del Valor Intermedio 1.19 es válido en este caso. Encontrar para cada número α tal que $f(a)\leq\alpha\leq f(b)$ todos los x correspondientes.
22. Demostrar que la ecuación $2\operatorname{sen}(x)=x$ tiene tres raíces (x está medido en radianes).

2. Definición y Propiedades de la derivada

2.1 Definición y Propiedades

En esta sección se presenta la definición formal de la derivada como el límite de un cociente incremental. Posteriormente se exhibe las propiedades básicas de la derivada, sintetizadas en un teorema, el mismo que se lo demuestra.

Definición 2.1 Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función, se dice que f es derivable en $x_0\in(a,b)$ si y solo si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe. A este límite de existir, se lo denomina la derivada de la función f en el punto x_0, y se lo denota como sigue:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{2.1}$$

Note que, al tomar $x=x_0+h$ se tiene $h=x-x_0$ de donde al hacer $h\longrightarrow 0$ entonces $x\longrightarrow x_0$, luego en (2.1) se tiene que

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{2.2}$$

En consecuencia (2.2) también se lo puede tomar como definición de la derivada de f en $x_0\in(a,b)$. Por la unicidad del límite, se sigue que, si la derivada en un punto existe ésta es única. Además si f es derivable en cada $x\in(a,b)$, entonces se dice que f es derivable en todo (a,b).

Así mismo de la teoría de límites, se sabe que: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ existe si, y solo si $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, en consecuencia se concluye que $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe si, y solo si $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. A estos dos últimos límites se los llama derivada por derecha y derivada por izquierda, notándose como $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ respectivamente.

Luego $f'(x_0)$ existe si, y solo si las derivadas por derecha e izquierda de x_0, existen y $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

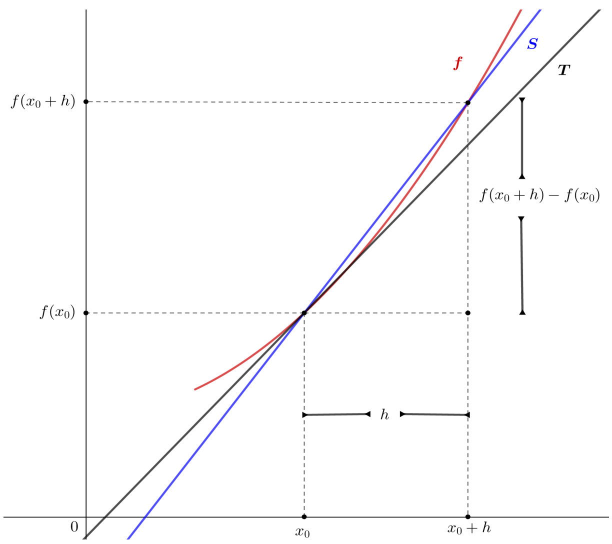


Figura 2.1: Definición de derivada.

Notación 2.1. *A la derivada de una función f en un punto $x_0 \in (a,b)$ se denota como: $f'(x_0)$, $D_xf(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ o $\dfrac{dy}{dx}$. En este trabajo se denotará como $f'(x_0)$ y posteriormente para la derivada implícita se tomará la notación de Leibniz, $\dfrac{dy}{dx}$.*

A continuación se presentan algunos ejemplos de cálculo de la derivada a partir de la definición de esta como el límite de un cociente incremental.

■ **Ejemplo 2.1** Si $f(x) = x^2+5x-3$ con $Dom(f) = \mathbb{R}$, determine su derivada, utilizando la definición.

Solución.

Como $f(x+h) = (x+h)^2+5(x+h)-3$, entonces utilizando la definición de derivada tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+5x+5h-3-(x^2+5x-3)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2+5x+5h-3-x^2-5x+3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2+5h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h+5)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x+h+5 \\
&= 2x+5.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 2.2** Utilizando la definición derive la siguiente función, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Solución. Note que, $f(x+h) = \dfrac{x+h}{x+h+1}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x+1)-x(x+h+1)}{h(x+1)(x+h+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+x+xh+h-x^2-xh-x}{h(x+1)(x+h+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(x+h)(x+h+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+1)(x+h+1)} \\
&= \frac{1}{(x+1)(x+0+1)} \\
&= \frac{1}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 2.3** Utilizando la definición, halle la derivada de la siguiente función $f(x) = \sqrt{5x-8}$

Solución. Observe que $f(x+h) = \sqrt{5(x+h)-8}$. De donde

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)-8}-\sqrt{5x-8}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)-8}-\sqrt{5x-8}}{h} \left(\frac{\sqrt{5(x+h)-8}+\sqrt{5x-8}}{\sqrt{5(x+h)-8}+\sqrt{5x-8}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{5(x+h)-8}\right)^2 - \left(\sqrt{5x-8}\right)^2}{h\left(\sqrt{5(x+h)-8}+\sqrt{5x-8}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{5x+5h-8-5x+8}{h\left(\sqrt{5(x+h)-8}+\sqrt{5x-8}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h\left(\sqrt{5(x+h)-8}+\sqrt{5x-8}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\left(\sqrt{5(x+h)-8}+\sqrt{5x-8}\right)}\\
&= \frac{5}{\left(\sqrt{5(x+0)-8}+\sqrt{5x-8}\right)}\\
&= \frac{5}{2\sqrt{5x-8}}
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 2.4** Utilizando la definición, derive la siguiente función $f(x)=\sqrt{5-3x}$

Solución. En efecto, note que $f(x+h)=\sqrt{5-3(x+h)}$, luego se sigue que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-3(x+h)}-\sqrt{5-3x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-3(x+h)}-\sqrt{5-3x}}{h}\left(\frac{\sqrt{5-3(x+h)}+\sqrt{5-3x}}{\sqrt{5-3(x+h)}+\sqrt{5-3x}}\right)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{5-3(x+h)}\right)^2-\left(\sqrt{5-3x}\right)^2}{h\left(\sqrt{5-3(x+h)}+\sqrt{5-3x}\right)}\\
&= \frac{5-3x-3h-5+3x}{h\left(\sqrt{5-3(x+h)}+\sqrt{5-3x}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h\left(\sqrt{5-3(x+h)}+\sqrt{5-3x}\right)}\\
&= \frac{-3}{\left(\sqrt{5-3(x+h)}+\sqrt{5-3x}\right)}\\
&= \frac{-3}{\left(\sqrt{5-3(x+0)}+\sqrt{5-3x}\right)}\\
&= \frac{-3}{2\sqrt{5-3x}}
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 2.5** Halle la derivada de la siguiente función, utilizando su definición $f(x)=\dfrac{5x-2}{x-3}$

Solución. En primer lugar, note que $f(x+h)=\dfrac{5(x+h)-2}{x+h-3}$. De donde se tiene

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{5(x+h)-2}{x+h-3} - \dfrac{5x-2}{x-3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(5x+5h-2)(x-3)-(5x-2)(x+h-3)}{h(x-3)(x+h-3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5x^2+5hx-2x-15x-15h+6-5x^2-5hx+15x+2x+2h-6}{h(x-3)(x+h-31)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-13h}{h(x-3)(x+h-3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-13}{(x-3)(x+h-3)} \\
&= \frac{-13}{(x-3)(x+0-3)} \\
&= \frac{-13}{(x-3)^2}
\end{aligned}
$$

Teorema 2.1 Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in (a,b)$ entonces f es continua en x_0.

Demostración. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(x_0)\cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

Luego $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, lo cual indica que f es continua en x_0. ∎

Teorema 2.2 Sean f y g funciones derivables en $x \in (a,b)$. Entonces se verifica las siguientes propiedades:

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

b) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

c) $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

d) Si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

e) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, si $g(x) \neq 0$.

Demostración.

a) En efecto tenemos

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}
$$

b) Para la diferencia se tiene

$$
\begin{aligned}
(f-g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-g(x+h)-f(x)+g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= f'(x)-g'(x).
\end{aligned}
$$

c) En el caso del producto, se prosigue a continuación

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] g(x) + \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] f(x+h) \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \lim_{h\to 0} g(x) + \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \lim_{h\to 0} f(x+h) \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x). \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Note que en (2.3) se aplica el Teorema (2.1), para concluir que $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.

d) Antes de verificar este ítem, mostremos el siguiente resultado.

Si f es continua en x_0 y $g(x_0) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$, para todo x que verifica $|x-x_0| < \delta$. Así mismo, si $g(x_0) < 0$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $g(x) < 0$, para todo x que cumple $|x-x_0|<\delta$.

En efecto, si $g(x_0)>0$, entonces como g es continua en x_0, para $\varepsilon>0$, existe $\delta(\varepsilon)>0$ tal que, para todo x, si

$$|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon. \tag{2.4}$$

Luego como $g(x_0)>0$, entonces al tomar $\varepsilon=g(x_0)$ en (2.4) se sigue que, si

$$\begin{aligned}
|x-x_0|<\delta &\Longrightarrow |g(x)-g(x_0)|<g(x_0)\\
&\Longrightarrow -g(x_0)<g(x)-g(x_0)<g(x_0)\\
&\Longrightarrow -g(x_0)+g(x_0)<g(x)-g(x_0)+g(x_0)<g(x_0)+g(x_0)\\
&\Longrightarrow 0<g(x)<2g(x_0)\\
&\Longrightarrow g(x)>0.
\end{aligned}$$

Así mismo, si $g(x_0)<0$ y como g es continua en x_0, entonces se verifica (2.4) y al tomar $\varepsilon=-g(x_0)$ tenemos que, si

$$\begin{aligned}
|x-x_0|<\delta &\Longrightarrow |g(x)-g(x_0)|<-g(x_0)\\
&\Longrightarrow g(x_0)<g(x)-g(x_0)<-g(x_0)\\
&\Longrightarrow g(x_0)+g(x_0)<g(x)-g(x_0)+g(x_0)<-g(x_0)+g(x_0)\\
&\Longrightarrow 2g(x_0)<g(x)<0\\
&\Longrightarrow g(x)<0.
\end{aligned}$$

Así entonces, de este resultado se sigue que existe algún $\delta>0$ tal que $g(x_0+h)\neq 0$, para $|x_0+h-x_0|=|h|<\delta$, por lo tanto $\frac{1}{g}(x_0+h)$ tiene sentido para h suficientemente pequeño, en consecuencia se sigue que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)-g(x_0+h}{hg(x_0)g(x_0+h)}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}\\
&= -g'(x_0)\cdot\frac{1}{[g(x_0)]^2},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

en (2.5) se ha usado el Teorema (2.1), el cual garantiza $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$.

e) Para este ítem se tiene,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x) \\
&= f'(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x) + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) && (2.6)\\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right) && (2.7)\\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, && (2.8)
\end{aligned}$$

donde (2.6) es consecuencia del ítem c), mientras que (2.7) es producto del ítem d) del teorema en curso. ∎

Un resultado imprescindible es el siguiente teorema, el mismo que nos permitirá derivar funciones mucho más complicadas en las cuales no es suficiente las propiedades anteriores, dicho teorema de denomina regla de la cadena; la escencia de este resultado es permitir derivar una composición de funciones.

Teorema 2.3 (Regla de la Cadena)

Sea g derivable en x_0 y f derivable en $g(x_0)$ entonces $f\circ g$ es derivable en x_0 y se verifica $(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Demostración. En efecto, definimos la función Ψ como sigue:

$$\Psi(h) := \begin{cases} \dfrac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}, & \text{si } g(x_0+h)-g(x_0)\neq 0 \\ f'(g(x_0)) & \text{si } g(x_0+h)-g(x_0) = 0. \end{cases}$$

Se sabe que f es derivable en $g(x_0)$, por lo tanto se verifica $\lim\limits_{j\to 0}\dfrac{f(g(x_0)+j)-f(g(x_0))}{j} = f'(g(x_0))$.

Luego por la definición de límite, se sigue que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta'(\varepsilon) > 0$ tal que,

$$si,\ \ 0<|j|<\delta' \Longrightarrow \left|\frac{f(g(x_0)+j)-f(g(x_0))}{j} - f'(g(x_0))\right| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Por otro lado, como g es derivable en x_0, entonces por el Teorema (2.1), g es continua en x_0, por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que para todo h,

$$si,\ \ |h|<\delta \Longrightarrow |g(x_0+h)-g(x_0)| < \delta'. \tag{2.10}$$

Luego para h, cualquiera tal que $|h| < \delta$, si $k = g(x_0+h) - g(x_0) \neq 0$ entonces

$$\Psi(h) = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} = \frac{f(g(x_0)+j) - f(g(x_0))}{j},$$

así de (2.10) se sigue que $|j| < \delta'$ y por lo tanto de (2.9) se concluye que $|\Psi(h) - f'(g(x_0))| < \varepsilon$.
Por otro lado, si $g(x_0+h) - g(x_0) = 0$, entonces $\Psi(h) = f'(g(x_0))$, de donde $|\Psi(h) - f'(g(x_0))| < \varepsilon$, lo cual es equivalente a $\lim\limits_{h\to 0} \Psi(h) = f'(g(x_0))$, por lo tanto Ψ es continua en 0.
Ahora, si $h \neq 0$ entonces $\dfrac{f(g(x_0+h) - f(g(x_0)))}{h} = \Psi(h)\dfrac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$, luego

$$\begin{aligned}
(fog)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h) - f(g(x_0)))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \Psi(h)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \Psi(h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= f'(g(x_0))g'(x_0).
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.6** Si $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3}{6x^2 - x + 3}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Halle la derivada de dicha función, utilizando las propiedades de la derivada.

Solución. Utilizando la propiedad de la derivada de un cociente, se tiene:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x^3 - 5x^2 + 3)'(6x^2 - x + 3) - (2x^3 - 5x^2 + 3)(6x^2 - x + 3)'}{(6x^2 - x + 3)^2} \\
&= \frac{(6x^2 - 10x)(6x^2 - x + 3) - (2x^3 - 5x^2 + 3)(12x - 1)}{(6x^2 - x + 3)^2} \\
&= \frac{36x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 60x^3 + 10x^2 - 30x - 24x^4 + 2x^3 + 60x^3 - 5x^2 - 36x + 3}{(6x^2 - x + 3)^2} \\
&= \frac{12x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 66x + 3}{(6x^2 - x + 3)^2}.
\end{aligned}$$

2.2 Derivadas de funciones trascendentes

En esta sección se establecen las derivadas de algunas funciones importantes, las cuales son de gran valor en el estudio del Cálculo; en general se presentan en todo problema relacionado con las ingenierías, tecnologías y en otras ramas del conocimiento donde se necesite, sin falta, de la matemática.
En los siguientes, lemas presentamos varias reglas de derivación de varios tipos de funciones,

posteriormente se resume en los resultados en una tabla para su utilización oportuna.

Lema 2.4 Si f es una función constante $f(x)=k$, entonces $f'(x)=0$.

Demostración.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0.$$

■

Lema 2.5 Si f es una función identidad, es decir $f(x)=x$, para todo $x\in(a,b)$, entonces $f'(x)=1$.

Demostración.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

■

Lema 2.6 Sea $f(x)=x^n$, para todo $x\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{Z}$. Entonces $f'(x)=nx^{n-1}$.

Demostración. Para probar este resultado, es importante recordar el Binomio de Newton, el cual es: $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. Para esta prueba se toma $a=x$ y $b=h$, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k-x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}x^nh^0+\binom{n}{1}x^{n-1}h^1+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\sum\limits_{k=3}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k-x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\sum\limits_{k=3}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k-x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\sum\limits_{k=3}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}\right]
\end{aligned}$$

$$= nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}(0) + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(0)^{k-1}$$
$$= nx^{n-1}.$$

■

Lema 2.7 Si $f(x) = \sqrt{x}$, para todo $x > 0$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Demostración. Se obtiene la derivada de la función raíz cuadrada a través de la definición de derivada, como sigue

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \left[\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Note que la tercera igualdad arriba se verifica, pues el producto de dos numeradores es una diferencia de cuadrados. ■

Lema 2.8 Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Demostración. Este caso es parecido al anterior, lo distinto resulta en la multiplicación de una elemento adecuado con el fin de formar una diferencia no de cuadrados sino de cubos, este proceso se denomina racionalización.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \left[\frac{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left[(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2\right]} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+0})^2 + \sqrt[3]{x+0}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

■

Observación 2.1 En general, por las propiedades de potenciación y radicación, toda raíz se puede escribir como una potencia, luego su derivada se obtiene aplicando el Lema 2.6, para todo $n \in \mathbb{R}$. En general, se deberá tomar en cuenta que $x > 0$.

■ **Ejemplo 2.7** Halle la derivada de la siguiente función $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.

Solución. En efecto, como $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$, entonces aplicando el Lema 2.6, se tiene

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{\frac{3-5}{5}} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}.$$

■ **Ejemplo 2.8** Halle la derivada de la siguiente función $f(x) = \sqrt[7]{x}$.

Solución. En efecto, como $f(x) = \sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$, entonces aplicando el Lema 2.6, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{7}x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7}x^{\frac{1-7}{7}} = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7x^{\frac{6}{7}}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}.$$

Otras funciones sumamente importantes son la exponencial y la logarítmica, por lo que a continuación se obtienen sus derivadas, cuyas demostraciones dependen del límite algebraico fundamental, el cual es: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Lema 2.9 Sea $a > 0$ y si $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Demostración. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} \\ &= a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora se analiza el límite en (2.11); para lo cual se define, $\Psi := a^h - 1$, observe que, si $h \to 0$ entonces $\Psi \to 0$, esto se usará posteriormente. Por lo pronto se tiene que

$$\Psi = a^h - 1 \Longrightarrow a^h = \Psi + 1$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \ln(a^h) = \ln(\Psi + 1) \\
&\Longrightarrow h\ \ln(a) = \ln(\Psi + 1) \\
&\Longrightarrow h = \frac{\ln(\Psi + 1)}{\ln(a)}. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Aquí es necesario la observación anterior, en la cual, si $h \to 0$ entonces $\Psi \to 0$, ya que esto nos permite cambiar la variable del límite original por uno equivalente utilizando además (2.12), como se muestra a continuación.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)}{h} &= \lim_{\Psi\to 0} \frac{\Psi}{\dfrac{\ln(\Psi+1)}{\ln(a)}} \\
&= \lim_{\Psi\to 0} \frac{\ln(a)}{\dfrac{1}{\Psi}\cdot \ln(\Psi+1)} \\
&= \lim_{\Psi\to 0} \frac{\ln(a)}{\ln(\Psi+1)^{\frac{1}{\Psi}}} \\
&= \frac{\ln(a)}{\ln\left\{\lim\limits_{\Psi\to 0}(\Psi+1)^{\frac{1}{\Psi}}\right\}} \qquad (2.13) \\
&= \frac{\ln(a)}{\ln(e)} \qquad (2.14) \\
&= \ln(a), \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

donde (2.13) es producto de la continuidad del logaritmo, mientras que (2.14) es consecuencia del límite algebraico fundamental. Finalmente, al sustituir (2.15) en (2.11) se concluye que $f'(x) = (a^x)' = a^x \ln(a)$. ■

Observación 2.2 Una particularización importante del lema anterior, se tiene al tomar: $a = e$, donde e es la base de los logaritmos neperianos, en tal caso, se sigue que $f'(x) = (e^x)' = e^x \ln(e) = e^x$.

Lema 2.10 Sea $a > 0$ y $f(x) = \log_a(x)$, para todo $x > 0$; entonces se verifica que $f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a(e)$.

Demostración. En efecto, para $a > 0$ y $x > 0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\log_a \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] \\
&= \log_a \left[\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} && (2.16) \\
&= \log_a [e]^{\frac{1}{x}} && (2.17) \\
&= \frac{1}{x} \log_a(e).
\end{aligned}
$$

Note que (2.16) se verifica nuevamente por la continuidad del logaritmo; mientras que (2.17) es consecuencias del límite algebraico fundamental. ■

Observación 2.3 Una particularización importante, del lema precedente, se establece al tomar: $a = e$, en tal caso $f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$, de donde su derivada resulta: $f'(x) = [\ln(x)]' = \frac{1}{x}\ln(e) = \frac{1}{x}$.

A continuación se presenta una tabla de resumen, con las derivadas de funciones trascendentales, mismas que en adelante se considerarán inmediatas.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	e^x	e^x
x^n	nx^{n-1}	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x}\log_a e$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$		

Tabla 2.1: Derivadas de funciones trascendentales.

Combinando las derivadas de las funciones trascendentales y utilizando el teorema de las propiedades, se puede obtener derivadas de funciones mas complicadas. Así se presentan algunos ejemplos.

■ **Ejemplo 2.9** Si $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$, para $x \neq 0,\ -1$. Determine $f'(x)$, utilizando las propiedades de la derivada.

Solución. En primer lugar, utilizando un poco de álgebra se tiene que:

$$f(x) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{\dfrac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

Ahora, al aplicar la propiedad de la derivada de una división se sigue

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1(x+1) - x(1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 2.10** Si $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$, para $x > 0$. Halle la derivada de dicha función, utilizando las propiedades y derivadas de funciones trascendentales.

Solución. En efecto, utilizando la propiedad de la derivada de un cociente se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'(1+\sqrt{x}) - x(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{1+\sqrt{x} - x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{x} + 2x - x}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 2.11** Si $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$, para todo $x \neq 0$. Determine la derivada de esta función, utilizando las propiedades de la derivada.

Solución. Utilizando la propiedades de la derivada de un cociente, se sigue que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} + \frac{(2)'x^2 - 2(x^2)'}{(x^2)^2} + \frac{(3)'x^3 - 3(x^3)'}{(x^3)^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{2(2x)}{x^4} - \frac{3(3x^2)}{x^6} \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 2.12** Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(2,4)$.

Solución. Por hipótesis se tiene que la pendiente de la recta es $m = 2$, luego esta es la misma pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto $(2,4)$. Se procede a obtener la deriva general de f. En efecto, se tiene:

$$f'(x) = 2x + a.$$

Luego, $m = f'(2) = 2(2) + a = 4 + a$. Ahora como $m = 2$, entonces

$$4 + a = 2 \Longrightarrow a = 2 - 4 = -2.$$

Finalmente, por hipótesis se tiene que $f(2) = 4$, y por otro lado $f(2) = 2^2 + a(2) + b = 4 - 2(2) + b = 4 - 4 + b = b$; entonces, igualando las dos ecuaciones se concluye que $b = 4$.

2.2.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 2.1 Hallar la derivada de las siguiente funciones utilizando la definición.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

b) $f(x) = \dfrac{4x - 7}{x^2 - 3x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{2x^3 - 5x + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 - 1}{3x^3 - 1}$

e) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

f) $f(x) = x - \sqrt{x} + 2x^2 + 3$

g) $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 - x + x^2 - x^3}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 3}$

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{3x^2 - 5x + 1}}$

j) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1 - x^3 + x^5}}{x^2 - 3}$.

Ejercicio 2.2 Aplicando las propiedades y la regla de la cadena, derive las siguientes funciones.

a) $f(x) = (5x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5)^{11}$

b) $f(x) = \left(\dfrac{x^4 - 2x}{3x - 2}\right)^7$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-7x^3 + 5x^2 - 4}{2x^2 - 4x - 1}}$

d) $f(x) = (10x^4 - 8x^2 + 5x - 3)^{2020}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^6 - x^5 + x^4 - 1}{(5x-3)^2}}$

f) $f(x) = \left(\dfrac{9x^5 - 8x^4 + 6x^2 - 9}{x^4 + 5x^2 - 4}\right)^{2001}$

Ejercicio 2.3 Suponiendo la existencia de las siguientes funciones en dominios apropiados, determine su derivada a través de su definición.

a) $f(x) = 3x^2 + \frac{2}{3}x - 7.$

b) $f(x) = \frac{5x+2}{x^3}.$

c) $f(x) = (3x+2)^2.$

d) $f(x) = \frac{3x}{2x+5}.$

e) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}.$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{2}{3} + 3x}.$

g) $f(x) = \frac{25+x}{x^3}.$

Ejercicio 2.4 Suponiendo que las funciones logarítmicas siguientes están bien definidas, determine su derivada utilizando las propiedades y la regla de la cadena.

a) $f(x) = \ln(2x-3).$

b) $f(x) = \ln(5x-3)^3.$

c) $f(x) = \ln(\sqrt{3x+5})^3.$

d) $f(x) = a \ \log_2(7x).$

e) $f(x) = x \ \ln(2-3x).$

f) $f(x) = x \ \ln(5x+7) - 8x.$

g) $f(x) = x^2 [\ln(x)]^3.$

h) $f(x) = 5 \ \ln\left(\sqrt{3x^2+9} + x\right) + \frac{x}{4}\sqrt{3x^2-9}.$

i) $f(x) = 2 \ \ln\left[\frac{\sqrt{8+9x^2} - 10}{2x}\right] + \sqrt{17+18x^2}.$

j) $f(x) = \frac{x}{5}\sqrt{3x^2+16} - 2\ln\left(\sqrt{x^2+16} - x\right).$

k) $f(x) = \frac{2 \ \log(x^2+11)}{3\sqrt{x^2+16}}.$

l) $f(x) = \frac{3 \ \ln(\sqrt{3x^2+1} + 5x)}{8} + \frac{5x(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{6} - \frac{3x\sqrt{5x^2+8}}{9}.$

o) $f(x) = 25 \ \log(10x).$

m) $f(x) = \frac{\ln(1-x)^{1-x} + \ln(x+1)^{x+1}}{2}$

n) $f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x+1} + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right].$

Ejercicio 2.5 Si $f(x) = e^{x-2} + 3x + 2$, determine $g'(9)$, sabiendo que $g(x) = f^{-1}(x)$.

Ejercicio 2.6 Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con segunda derivada contínua inclusive. Si $f(tx) = t^2 f(x)$, para todo $x, t \in \mathbb{R}$. Demuestre que $f(x) = \frac{1}{2} D^2 f(0) \cdot x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.7 Utilizando las propiedades y la regla de la cadena, determine las derivadas de las siguientes funciones exponenciales, asumiendo que las mismas existen.

a) $f(x) = ae^{-2x}$.

b) $f(x) = -3pe^{-2x}$.

c) $f(x) = \frac{3}{7} qe^{2-x^2}$.

d) $f(x) = -2axe^{2-x^2}$.

e) $f(x) = \frac{9x}{4e^{8x^2-8}}$.

f) $f(x) = e^{8-8x^2}\left(1 - 16x^2\right)$.

g) $f(x) = 3^{x^2} + 5x$.

h) $f(x) = 3x^2 - 2x \ \ \ln(10)$.

i) $f(x) = 100^{5-x}$.

j) $f(x) = -15^{5-x} \ln(20)$.

k) $f(x) = b^{\ln(ax+c)}$.

l) $f(x) = b^{\ln(x-a)} \ln\left(\frac{b}{x-a}\right)$.

m) $f(x) = 7^{x+10}$.

n) $f(x) = 9^{x+1} \ln(7x - 10)$

ñ) $f(x) = (3e^{-2x})^{\frac{2}{x}}$

3. Derivadas Trigonométricas e Hiperbólicas

Es de notar la gran importancia que tienen las funciones trigonométricas e hiperbólicas en aplicaciones reales, como por ejemplo en el análisis espectral de Fourier como herramienta para el procesamiento de series de tiempo aplicadas a sismos o análisis del clima.

3.1 Derivadas de Funciones Trigonométricas

En esta subsección, se obtiene las derivadas de las seis funciones trigonométricas como son el seno, el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante. Se sabe que,

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\
\cot(x) &= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\
\sec(x) &= \frac{1}{\cos(x)} \\
\csc(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}
\end{aligned}$$

Por tal circunstancia, se procede a obtener las derivadas del seno y del coseno a partir de la definición de derivada; mientras las derivadas del resto de funciones trigonométricas se las obtiene utilizando las propiedades de la derivada, en función del seno y coseno.

Lema 3.1 Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x) = \cos(x)$.

Demostración. En efecto, al utilizar la definición de derivada, se tiene:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+h+x}{2}\right)}{h} \qquad (3.1) \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}}\right]\cdot \lim_{h\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] \\
&= 1\cdot\cos\left(\lim_{h\to 0}\left[x+\frac{h}{2}\right]\right) \qquad (3.2) \\
&= \cos(x).
\end{aligned}
$$

De donde (3.1) es consecuencia de la conocida identidad trigonométrica: $\operatorname{sen}(\alpha)-\operatorname{sen}(\beta) \equiv 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$; mientras que (3.2) se justifica por la continuidad del coseno. ∎

Lema 3.2 Sea $f(x) = \cos(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

Demostración. De la definición de derivada, se tiene:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+h-x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+h+x}{2}\right)}{h} \qquad (3.3) \\
&= -\lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}}\right]\cdot \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] \\
&= -1\cdot\operatorname{sen}\left(\lim_{h\to 0}\left[x+\frac{h}{2}\right]\right) \qquad (3.4) \\
&= -\operatorname{sen}(x).
\end{aligned}
$$

Note que (3.3) es consecuencia de la identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) \equiv -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

mientras que (3.4) es producto de la continuidad del seno. ∎

Ahora las derivadas de las funciones trigonométricas faltantes, son consecuencia de los dos lemas anteriores y de las propiedades de la derivada de una función. Estos resultados se recojen en el siguiente lema.

Lema 3.3 Se supone la existencia de las siguientes funciones trigonométricas en sus dominios correspondientes.

a) Si $f(x) = \tan(x)$, entonces $f'(x) = \sec^2(x)$

b) Si $f(x) = \cot(x)$, entonces $f'(x) = -\csc^2(x)$

c) Si $f(x) = \sec(x)$, entonces $f'(x) = \tan(x) \cdot \sec(x)$

d) Si $f(x) = \csc(x)$, entonces $f'(x) = -\cot(x) \cdot \csc(x)$

Demostración. Supongamos que las funciones trigonométricas existen en sus dominios siguientes, entonces

a) Como $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, entonces al aplicar la propiedad de la derivada de una cociente se sigue que:

$$\begin{aligned}
f'(x) = [\tan(x)]' &= \frac{[\operatorname{sen}(x)]' \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,[\cos(x)]'}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,[-\operatorname{sen}(x)]}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= \sec^2(x).
\end{aligned}$$

b) Para este ítem, observe que $f(x) = \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$, luego utilizando las propiedades se tiene:

$$\begin{aligned}
f'(x) = [\cot(x)]' &= \frac{[\cos(x)]' \operatorname{sen}(x) - \cos(x)\,[\operatorname{sen}(x)]'}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \frac{-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\,[\cos(x)]}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= -\frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= -\csc(x).
\end{aligned}$$

c) En este caso, se tiene $f(x) = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, luego

$$\begin{aligned}
f'(x) = [\sec(x)]' &= \frac{[1]'\cos(x) - (1)\,[\cos(x)]'}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{(0)\,\text{sen}(x) - [-\,\text{sen}(x)]}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)}\\
&= \tan(x)\cdot\sec(x).
\end{aligned}$$

d) Finalmente para este literal se tiene, $f(x) = \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$, de donde:

$$\begin{aligned}
f'(x) = [\csc(x)]' &= \frac{[1]'\,\text{sen}(x) - 1\,[\text{sen}(x)]'}{\text{sen}^2(x)}\\
&= \frac{-\cos(x)}{\text{sen}^2(x)}\\
&= -\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} \cdot \frac{1}{\text{sen}(x)}\\
&= -\cot(x)\cdot\csc(x).
\end{aligned}$$

■

Por facilidad, para la utilización posterior, estos resultados se resumen en la siguiente tabla.

$f(x)$	$f'(x)$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\,\text{sen}(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\sec(x)$	$\tan(x)\sec(x)$
$\csc(x)$	$-\cot(x)\csc(x)$

Tabla 3.1: Derivadas de funciones trigonométricas.

Ahora, combinando las derivadas de funciones trascendentes, trigonométricas y las propiedades;

es posible extender el espectro de funciones de las cuales se puede obtener sus derivadas.

■ **Ejemplo 3.1** Halle la derivada de la siguiente función, $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x+\operatorname{sen}(x)}}$

Solución. En efecto, de las propiedades de la derivada se tiene,

$$f'(x) = \frac{-\left\{1 + \dfrac{2(1+\cos(x))}{(x+\operatorname{sen}(x))^2}\right\}}{\left\{x - \dfrac{2}{x+\operatorname{sen}(x)}\right\}^2} = \frac{\dfrac{(x+\operatorname{sen}(x))^2+2+2\cos(x)}{(x+\operatorname{sen}(x))^2}}{\left[\dfrac{x^2+x\operatorname{sen}(x)-2}{x+\operatorname{sen}(x)}\right]^2}$$
$$= -\frac{(x+\operatorname{sen}(x))^2+2\cos(x)+2}{(x^2+x\operatorname{sen}(x)-2)^2}$$

■ **Ejemplo 3.2** Determine la derivada de la función que se da a continuación, $f(x) = 4x^2\cos(x)$

Solución. A partir de las propiedades vistas, se sigue,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\left[2x\cos(x) + x^2(-\operatorname{sen}(x))\right] \\ &= 8x\cos(x) - 4x^2\operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.3** Calcule la derivada de la función, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)-1}{\cos(x)+1}$

Solución. Usando las propiedades de la derivada se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)\left[\cos(x)+1\right] - \left[\operatorname{sen}(x)-1\right](-\operatorname{sen}(x))}{\left[\cos(x)+1\right]^2} \\ &= \frac{\cos^2(x)+\cos(x)+\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}(x)}{\left[\cos(x)+1\right]^2} \\ &= \frac{1+\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\left[\cos(x)+1\right]^2} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.4** La función f está definida por: $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \le c, \\ ax+b & \text{si } x > c, \end{cases}$

Halle a y b de tal forma que $f'(c)$ exista

Solución. Sabemos que la derivada en un punto existe, si y solo si las derivadas laterales en dicho punto existe, por lo tanto

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a(c+h)+b-\operatorname{sen}(x)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0^+}\left(a+\frac{ac+b-\operatorname{sen}(c)}{h}\right)\\
&= a+\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{ac+b-\operatorname{sen}(c)}{h}\right)
\end{aligned}
$$

De donde, como el denominador tiende a cero,entonces la fracción tiende a infinito, excepto si el numerador es cero, en tal caso el límite existe y vale cero.Luego como los límites laterales entonces, necesariamente $ac+b-\operatorname{sen}(c)=0$, en consecuencia $f'_+(c)=a$. Po otro lado,

$$
\begin{aligned}
f'_-(x) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(c+h)-\operatorname{sen}(c)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{c+h-c}{2}\right)\cos\left(\frac{c+h+c}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]\cdot \lim_{h\to 0^-}\cos\left(c+\frac{h}{2}\right)\\
&= \cos(c)
\end{aligned}
$$

Ahora como $f'(c)$ existe, entonces necesariamente $f'_+(c)=f'_-(c)$, luego igualando las dos ecuaciones se tiene que $a=\cos(c)$. Finalmente del hecho, $ac+b-\operatorname{sen}(c)=0$, se sigue que: $b=\operatorname{sen}(c)-ac=\operatorname{sen}(c)-c\cos(c)$.

Derivar las siguientes funciones en dominios donde tenga sentido, utilizando los teoremas de la propiedades y la regla de la cadena.

■ **Ejemplo 3.5** Halle la derivada de la siguiente función, $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)\operatorname{sen}^2(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$

Solución. De las propiedades y teoremas precedentes se sigue,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos(x^2)2x\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{sen}(x^2)2\operatorname{sen}(x)\cos(x))(1+\operatorname{sen}(x))-\operatorname{sen}(x^2)\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)}{[1+\operatorname{sen}(x)]^2}\\
&= \frac{(2x\operatorname{sen}^2(x)\cos(x^2)+\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(x^2))(1+\operatorname{sen}(x))-\cos(x)\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(x^2)}{[1+\operatorname{sen}(x)]^2}.
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 3.6** Determine la derivada de la siguiente función, $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)}$.

Solución. En efecto,

$$
f'(x)=\frac{\cos(x)\ln(x)-\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{\ln^2(x)}
$$

$$= \frac{x\cos(x)\ln(x) - \operatorname{sen}(x)}{x\ln^2(x)}.$$

■ **Ejemplo 3.7** Calcule la derivada de la función, $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos(2x))$.

Solución. Se tiene, en efecto que,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\operatorname{sen}(\cos(2x)) \cdot \cos(\cos(2x))(-\operatorname{sen}(2x))(2) \\ &= -4\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(\cos(2x))\cos(\cos(2x)). \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.8** Determine la derivada de la siguiente función, $f(x) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(x)+1}{1-\operatorname{sen}(x)}}$.

Solución. De los teoremas anteriores se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(x)+1}{1-\operatorname{sen}(x)}}} \frac{\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x)) - (-\cos(x))\left[\operatorname{sen}(x)+1\right]}{[1-\operatorname{sen}(x)]^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)+1}} \frac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos(x)}{[1-\operatorname{sen}(x)]^2} \\ &= \frac{\cos(x)\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)+1}\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}(1-\operatorname{sen}(x))} \\ &= \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}(1-\operatorname{sen}(x))} \\ &= \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x)}(1-\operatorname{sen}(x))} \\ &= \frac{1}{1-\operatorname{sen}(x)}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.9** Calcule la derivada de la función, $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(\ln(2x))}$

Solución. Note que $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(\ln(2x))} = [\operatorname{sen}(\ln(2x))]^{\frac{1}{2}}$, de donde al derivar tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\ln(2x))\right]^{-\frac{1}{2}}\cos(\ln(2x))\frac{1}{2x} \cdot 2 \\ &= \frac{\cos(\ln(2x))}{2x\sqrt{\operatorname{sen}(\ln(2x))}}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.10** Halle la derivada de la función, $f(x) = e^{\operatorname{sen}(2x)}$

Solución. Usando la derivada de la exponencial, del seno y la regla de la cadena se tiene,

$$f'(x) = 2\cos(2x)e^{\operatorname{sen}(2x)}.$$

■ **Ejemplo 3.11** Halle la derivada de la función, $f(x) = \csc^2(x) + \sec^2(x)$

Solución. Utilizando las derivadas de funciones trigonométricas y la regla de la cadena, se tiene,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2\csc(x)\csc(x)\cot(x) + 2\sec(x)\sec(x)\tan(x) \\
&= -2\csc^2(x)\cot(x) + 2\sec^2(x)\tan(x) \\
&= -2\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} + 2\frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{2\operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)} - \frac{2\cos(x)}{\operatorname{sen}^3(x)} \\
&= \frac{2(\operatorname{sen}^4(x) - \cos^4(x))}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^3(x)} \\
&= \frac{2\left[\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)\right]\left[\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)\right]}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^3(x)} \\
&= \frac{-2\left[\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\right]}{\frac{8\operatorname{sen}^3(x)\cos^3(x)}{8}} \\
&= \frac{-16\cos(2x)}{\operatorname{sen}^3(2x)}
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.12** Determine la derivada de la función, $f(x) = \cos(\pi x^3)$

Solución. De la derivada del coseno y regla de la cadena se tiene,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname{sen}(\pi x^3)(3\pi x^2) \\
&= 3\pi x^2 \operatorname{sen}(\pi x^3).
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.13** Determine la derivada de la función, $f(x) = \tan^3\left(\frac{x}{2}\right)$

Solución. En efecto, derivando la la tangente y usando la regla de la cadena se tiene,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.14** Calcule la derivada de, $f(x) = \sec(2x^3 + x)$.

Solución. Por la regla de la cadena se tiene,

$$f'(x) = \sec(2x^3 + x)\tan(2x^3 + x)(6x^2 + 1)$$

■ **Ejemplo 3.15** Determine la derivada de la función, $f(x) = 4\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Solución. En efecto, se tiene que,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}\right) \\ &= 4\cos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \frac{8}{(x+1)^2}\cos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.16** Calcule la derivada de la función, $f(x) = \sec(x^3)\cos(4x)$.

Solución. Usando las derivadas de funciones trigonométricas, propiedades y la regla de la cadena se sigue,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x^3)3x^2\cos(4x) - \mathrm{sen}(4x)4\,\mathrm{sen}(x^3) \\ &= 3x^3\cos(x^3)\cos(4x) - 4\,\mathrm{sen}(4x)\,\mathrm{sen}(x^3). \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.17** Determine la derivada de la función, $f(x) = x^4\sec^3(2x) + 5x\csc^4(x^3) - 6\cot^2\left(\frac{x}{\pi}\right)$

Solución. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3\sec^3(2x) + x^4 3\sec^3(2x)\sec(2x)\tan(2x) + 5\csc^4(x^3) + 5x4\csc^3(x3) \\ &\quad -\csc(x^3)\cot(x^3)(3x^2) - 6\cdot 2\cot\left(\frac{x}{\pi}\right)\left(-\csc^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)\left(\frac{x}{\pi}\right) \\ &= 4x^3\sec^3(2x) + 6x^4\sec^3(2x)\tan(2x) + 5\csc^4(x^3) - 60x^3\csc^4(x^3)\cot(x^3) \\ &\quad + \frac{12}{\pi}\cot\left(\frac{x}{\pi}\right)\csc^2\left(\frac{x}{\pi}\right). \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.18** Derive la siguiente función, $f(x) = \tan\left(\dfrac{2}{x\sqrt{x-2}}\right)$.

Solución. Por propiedades de la derivada se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec^2\left(\frac{2}{x\sqrt{x-2}}\right)\left(\frac{-2\sqrt{x-2} - \frac{2x}{2\sqrt{x-2}}}{x^2(x-2)}\right) \\ &= \frac{-4x+4}{x^2\sqrt{(x-3)^3}}\sec^2\left(\frac{2}{x\sqrt{x-2}}.\right) \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.19** Derive la función, $f(x) = \csc\sqrt{5\pi - 3x}$.

Solución. Se tiene que,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\csc(\sqrt{5\pi - 3x})\cot\left(\sqrt{5\pi - 3x}\right)\left(\frac{-3}{2\sqrt{5\pi - 3x}}\right) \\ &= \frac{3\csc(\sqrt{5\pi - 3x}) - \cot(\sqrt{5\pi - 3x})}{2\sqrt{5\pi - 3x}} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.20** Derive la función, $f(x) = \sec^2(x-2)\tan(x-2)$.

Solución. En efecto, se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sec(x-2)\sec(x-2)\tan(x-2)\tan(x-2) + \sec^2(x-2)\sec^2(x-2) \\ &= 2\sec^2(x-2)\tan^2(x-2) + \sec^4(x-2) \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.21** Determine la derivada de la función, $f(x) = \ln(\sec(2x))$.

Solución. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2 \\ &= 2\cot(2x). \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.22** Derive la función, $f(x) = \ln(\tan(3x))$.

Solución. Por la regla de la cadena, se sigue,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\tan(3x)}\sec^2(3x) \cdot 3 \\ &= \frac{3\sec^2(3x)}{\tan(3x)}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.23** Halle la derivada de, $f(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen}(2x)}$.

Solución. Por las propiedades de la derivada se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x[\sec(2x)] - 2e^x[\cos(2x)]}{\operatorname{sen}^2(2x)} \\ &= \frac{e^x[\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)]}{\operatorname{sen}^2(2x)} \\ &= e^x\left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^2(2x)} - 2\frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}\right] \\ &= e^x[\csc(2x) - 2\csc(2x)\cot(2x)] \end{aligned}$$

$$= e^x \csc(2x)\left[1 - 2\cot(2x)\right].$$

■ **Ejemplo 3.24** Derive la función, $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{2x}}}$

Solución. En efecto, se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{2x}}}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1 - \sqrt{2x}}} \cdot \frac{-2}{2\sqrt{2x}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2x}\sqrt{1 - \sqrt{2x}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{2x}}}}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.25** Derive la siguiente función, $f(x) = \operatorname{sen}^3\left(\sqrt{\cos(x) + 5}\right)$.

Solución. Por la regla de la cadena se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\cos(x) + 5}\right)\cos\left(\sqrt{\cos(x) + 5}\right) \cdot \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{\cos(x) + 5}}\right) \\ &= \frac{-3\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\cos(x) + 5}\right)\operatorname{sen}\left(2\sqrt{\cos(x) + 5}\right)}{4\sqrt{\cos(x) + 5}} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.26** Derive la función, $f(x) = \operatorname{sen}^3(\cos^2(x)) + \operatorname{sen}^2(\cos^3(x))$.

Solución. Usando la regla de la cadena y las derivadas de funciones trigonométricas, se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\operatorname{sen}^2(\cos^2(x))\cos(\cos^2(x))\left[-2\cos(x)\operatorname{sen}(x)\right] \\ &\quad + 2\operatorname{sen}(\cos^3(x))\cos(\cos^3(x))\left[-3\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)\right] \\ &= -3\operatorname{sen}(2x)\cos(\cos^2(x))\operatorname{sen}^2(\cos^2(x)) - 3\operatorname{sen}(2x)\cos(x)\operatorname{sen}(\cos^3(x))\cos(\cos^3(x)) \\ &= -3\operatorname{sen}(2x)\left[\cos(\cos^2(x))\operatorname{sen}^2(\cos^2(x)) + \cos(x)\operatorname{sen}(\cos^3(x))\cos(\cos^3(x))\right]. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.27** Halle la derivada de la función, $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(-\cos(7x)))$.

Solución. En efecto, tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(-\cos(7x))) \cdot \cos(-\cos(7x)) \cdot \operatorname{sen}(7x) \cdot 7 \\ &= -7\operatorname{sen}(7x) \cdot \cos(-\cos(7x)) \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(-\cos(7x))). \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.28** Calcule la derivada de la función, $f(x) = \ln(x)\ln^2(\ln(6x))$.

Solución. De la regla de la cadena, seguimos que,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x}\cdot \ln^2(\ln(6x)) + 2\ln(x)\ln(\ln(6x))\cdot \frac{1}{\ln(6x)}\cdot\frac{6}{6x}\\
&= \frac{1}{x}\cdot \ln(\ln(6x))\left(\ln(\ln(6x)) + \frac{2\ln(x)}{\ln(6x)}\right).
\end{aligned}
$$

3.2 Derivadas de Funciones Hiperbólicas

En este apartado,se establece las definiciones del seno hiperbólico y coseno hiperbólico, posteriormente se obtienen sus derivadas correspondientes, con el fin de establecer a partir de estas últimas las derivadas del resto de funciones hiperbólicas.

Definición 3.1 Se define la función seno hiperbólico, notado por senh, como sigue:

$$
\text{senh} = \begin{cases} \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \quad \text{senh}(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}
$$

Definición 3.2 Se define la función coseno hiperbólico, notado por cosh, como:

$$
\text{senh} = \begin{cases} \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \quad \cosh(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}
$$

Observación 3.1 Se establece a continuación una relación útil e importante.

$$
\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\
&= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\
&= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Definición 3.3 Se establece el resto de funciones hiperbólicas.

a. Tangente Hiperbólica, se nota mediante tanh y se define como:
$\tanh(x) := \dfrac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

b. Cotangente Hiperbólica, se nota mediante coth y se define como:
$\coth(x) := \dfrac{\cosh(x)}{\text{senh}(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{x|\,\text{senh}(x) = 0\}$.

c. Secante Hiperbólica, se nota mediante sech y se define como:
$\text{sech}(x) := \dfrac{1}{\cosh(x)} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

d. Cosecante Hiperbólica, se nota mediante *csch* y se define como:

$$csch(x) := \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \{x | \operatorname{senh}(x) = 0\}$$

En la siguiente proposición, se presentan las derivadas de todas las funciones hiperbólicas, definidas anteriormente; sus demostraciones están dadas en función de las propiedades de la derivada vista en secciones anteriores de este capítulo.

Proposición 3.4 Se considera las siguientes funciones definidas en sus dominios correspondientes.

1) Si $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, entonces $f'(x) = \cosh(x)$.

2) Si $f(x) = \cosh(x)$, entonces $f'(x) = \operatorname{senh}(x)$.

3) Si $f(x) = \tanh(x)$, entonces $f'(x) = \operatorname{sech}^2(x)$.

4) Si $f(x) = \coth(x)$, entonces $f'(x) = -\operatorname{csch}^2(x)$.

5) Si $f(x) = \operatorname{sech}(x)$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$.

5) Si $f(x) = \operatorname{csch}(x)$, entonces $f'(x) = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)$.

Demostración. **1)** Aplicando la derivada de un cociente se tiene:

$$f'(x) = (\operatorname{senh}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left[e^x - (-e^{-x})\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

2) Por la regla de la derivada de un cociente se tiene:

$$f'(x) = (\cosh(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[e^x + (-e^{-x})\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x).$$

3) Aplicando la derivada de un cociente se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) = (\tanh(x))' &= \left(\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}\right)' \\ &= \frac{[\operatorname{senh}(x)]' \cosh(x) - \operatorname{senh}(x)\,[\cosh(x)]'}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \operatorname{sech}^2(x). \end{aligned}$$

4) Por la derivada de un cociente se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) = (\coth(x))' &= \left(\frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}\right)' \\ &= \frac{[\cosh(x)]' \operatorname{senh}(x) - \cosh(x)\,[\operatorname{senh}(x)]'}{\operatorname{senh}^2(x)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{senh}^2(x)-\cosh^2(x)}{\operatorname{senh}^2(x)}\\
&= -csch^2(x).
\end{aligned}
$$

5) De forma similar, por la derivada de un cociente se tiene:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = (\operatorname{sech}(x))' &= \left(\frac{1}{\cosh(x)}\right)'\\
&= \frac{[1]'\cosh(x) - 1\,[\cosh(x)]'}{\cosh^2(x)}\\
&= \frac{-\operatorname{senh}(x)}{\cosh^2(x)}\\
&= -csch(x)\tanh(x)
\end{aligned}
$$

6) Finalmente, por la derivada de un cociente se tiene:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = (csch(x))' &= \left(\frac{1}{\operatorname{senh}(x)}\right)'\\
&= \frac{[1]'\operatorname{senh}(x) - 1\,[\operatorname{senh}(x)]'}{\operatorname{senh}^2(x)}\\
&= \frac{-\cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)}\\
&= -csch(x)\coth(x).
\end{aligned}
$$

■

■ **Ejemplo 3.29** Considere la existencia de la siguiente función en un dominio apropiado, $f(x) = \tanh(x) - \cos(x)\cosh(x) + \dfrac{x^4-2x^2-3}{\operatorname{sech}(x)}$. Determine su derivada

Solución. Usando las propiedades de la derivada se tiene:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= [\tanh(x)]' - [\cos(x)\cosh(x)]' + \left[\frac{x^4-2x^3-3}{\operatorname{sech}(x)}\right]'\\
&= \operatorname{sech}^2(x) - [-\operatorname{sen}(x)\cosh(x) + \cos(x)\operatorname{senh}(x)]\\
&\quad + \left(\frac{(4x^3-6x^2)\operatorname{sech}(x) - (x^4-2x^3-3)(-\operatorname{sech}(x)\tanh(x))}{\operatorname{sech}^2(x)}\right)\\
&= \operatorname{sech}^2(x) + \operatorname{sen}(x)\cosh(x) - \cos(x)\operatorname{senh}(x)\\
&\quad + \frac{4x^3-6x^2+(x^4-2x^3-3)\tanh(x)}{\operatorname{sech}(x)}
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 3.30** Determine la derivada de la siguiente función suponiendo que existe la misma.
$f(x) = csch(x)\ln(x) - \dfrac{\tanh(x)}{\sqrt{x}}$

Solución. En efecto, usando las propiedades de la derivada se tiene:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [csch(x)\ln(x)]' - \left(\frac{\tanh(x)}{\sqrt{x}}\right)' \\
&= -csch(x)\coth(x)\ln(x) + \frac{csch(x)}{x} - \left(\frac{\operatorname{sech}^2(x)\sqrt{x} - \dfrac{\tanh(x)}{2\sqrt{x}}}{x}\right) \\
&= -csch(x)\coth(x)\ln(x) + \frac{csch(x)}{x} - \frac{2x\ \operatorname{sech}^2(x) - \tanh(x)}{2x\sqrt{x}} \\
&= -csch(x)\coth(x)\ln(x) + \frac{csch(x)}{x} - \frac{\operatorname{sech}^2(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\tanh(x)}{2\sqrt{x^3}}
\end{aligned}$$

3.2.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 3.1 Halle las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln[\operatorname{sen}(2x)]$

b) $f(x) = 7\ \ \ln[\tan(3x)]$

c) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2[\tan(x) - 5x^5\operatorname{sen}(x)]}$

d) $f(x) = \ln\left[\dfrac{\cos^5(x^2)}{\operatorname{sen}^2(x^3) - 2x\ \tan(x)}\right]$

e) $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt[3]{\cos^2(x)}}{\csc(x^2) - \tan(x^2)}$

f) $f(x) = \operatorname{sen}^2[\tan\sqrt{x} - \cos(x^2 + 2x+)]$

g) $f(x) = \dfrac{\ln[\cos(x)] - x\ln[\operatorname{sen}(x)]}{1 - \cos^2(x)}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 - 7x + 5\operatorname{sen}(x)}{x^5 - 3x^3 + \sec(x)}$

i) $f(x) = \dfrac{\log_a[\operatorname{sen}(ax) - \cos(ax)]}{e^{\tan^2(ax) - \operatorname{sen}^2(ax)}}$

j) $f(x) = \ln[\operatorname{sen}(x^3) - \csc(x^2)]^{1-\cot^2(x)}$

k) $f(x) = \sec(x^2 + \sqrt{2}x - 3) - \tan^2(5x^3)$

l) $f(x) = \dfrac{1 - \csc^2(\sqrt{x})}{1 + 2x + 5\operatorname{sen}^2(x)}$

m) $f(x) = a^{\frac{\operatorname{sen}^2(x) - 6\operatorname{sen}(x) + 9}{9\cos^2(x) - 6\cos(x) + 1}}$

n) $f(x) = \dfrac{\ln[x\operatorname{sen}^2(x) - \cos(x)]}{x^2\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}$

o) $f(x) = \csc\left(\dfrac{\cos(x) - 2\tan(x)}{1 - \operatorname{sen}^2(x)}\right)$

p) $f(x) = \sqrt{\tan(x) - \tan^2(x) - \cos(x^2)}$

q) $f(x) = \sqrt{\ln(\operatorname{sen}^2(x)) + \cos(\sqrt{x^2 - 5x})}$

r) $f(x) = \operatorname{sen}(2\sqrt{x})\cos(2\sqrt{x}) - \operatorname{sen}^2(x)$

s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(\operatorname{sen}(x) - \cos(x))}}{\sqrt[3]{\ln(\operatorname{sen}(x)) - \cos(x)}}$

t) $f(x) = \dfrac{a^{\sqrt{\operatorname{sen}(x) - \csc(x)}}}{\tan(x) - 7\operatorname{sen}(x) + 8x}$.

Ejercicio 3.2 Derive las siguientes funciones.

a) $g(x) = \cosh^3(x^2 - 5x + 4) - \dfrac{1}{\operatorname{senh}(x^3)}$

b) $g(x) = \tanh(\sqrt{x}) - csch(\coth(x^2))$

c) $g(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x^3 - 2x + 1)}{csch^2(1 + 2x - x^2)}$

d) $g(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \operatorname{senh}(x) + \cosh^{(}x)}}{\operatorname{senh}^2(x) - \operatorname{sech}(x)}$

e) $g(x) = \dfrac{e^{[\operatorname{senh}(x) + 2\cosh(x)]}}{\sqrt{\tanh(x^2) + \operatorname{sech}^2(x)}}$

f) $g(x) = \dfrac{5x^3 - 7x + 9}{\sqrt[3]{\coth(x) - 2\operatorname{senh}(x)}}$

g) $g(x) = \ln\left[\dfrac{2\operatorname{senh}(x^3 - 1)}{\cosh(x) + \tanh(x) - e^x}\right]$

h) $g(x) = \dfrac{\cosh(\sqrt{x}) - \ln(x)^{\operatorname{senh}(x)}}{1 + x + x^2}$

i) $g(x) = csch^2(\log(x - x^2)) + \tanh(\sqrt{x})$

j) $g(x) = \sqrt{x}\operatorname{senh}^3(x) + \sqrt{\operatorname{sech}(x)}$

Ejercicio 3.3

Dadas las siguientes funciones reales $f(x) = \sqrt{\operatorname{senh}(x) + \cot(x)}$ y $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{\cos(3x) + \operatorname{senh}(x)}}{2x + 5}$.

Determine:

a) $(f \circ g)'(x)$ y $(g \circ f)'(x)$.

b) $(f \circ g)'\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

c) $(f' \circ g)(x)$ y $(f \circ g')(x)$.

d) $\sqrt{f'(1)} - \ln[(g' \circ f)(-1)]$.

e) $\dfrac{\ln(f'(0) + 1)}{\cosh(g'(0) - 1)}$.

4. Derivadas Inversas, Implícitas y Superiores

En este capítulo, se analiza las derivadas de algunos tipos de funciones no consideradas anteriormente como son: derivadas de funciones inversas, implícitas y en general de orden superior.

4.1 Derivadas de Funciones Inversas

En este apartado se presenta el teorema de la derivada de la función inversa, que posteriormente será de gran utilidad para obtener las derivadas de una gran variedad de funciones inversas como las trigonométricas.

Teorema 4.1 Sea f una función biyectiva continua y derivable en x_0. Si $f'(x_0) \neq 0$ entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$, cumpliéndose la siguiente igualdad:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Demostración. Tome ξ un elemento del dominio de f cercano a x_0, entonces como f es biyectiva, existe y, tal que $\xi = f^{-1}(y)$.

Además $y_0 = f(x_0)$ lo que es equivalente a $x_0 = f^{-1}(y_0)$, en consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{\xi - x_0}{f(\xi) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\dfrac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}}, \end{aligned}$$

de esta última igualdad al sacar el límite, se obtiene

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{\xi\to x_0} \frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi - x_0}} \Longrightarrow (f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Longrightarrow (f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

■

A continuación se presenta una proposición donde se obtiene las derivadas de algunas funciones trigonométricas inversas.

Proposición 4.2 Sea $x \in (-1,1)$ entonces:

i) $\operatorname{arc\,sen}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

i) $\operatorname{arc\,cos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

i) $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración.

i) Por el Teorema 4.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,sen}'(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arc\,sen}(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Note que por la identidad trigonométrica fundamental, se tiene que:

$$[\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x))]^2 + [\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))]^2 = 1 \Longrightarrow x^2 + \cos^2(\operatorname{arc\,sen}(x)) = 1$$

$$\Longrightarrow \cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) = \sqrt{1-x^2}, \tag{4.2}$$

al sustituir (4.2) en (4.1) se concluye

$$\operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

ii) Por el Teorema 4.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,cos}'(x) &= \frac{1}{\cos'(\operatorname{arc\,cos}(x))} \\ &= \frac{1}{-\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos}(x))}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Note que por la identidad trigonométrica fundamental, se tiene que:

$$\begin{aligned}[\text{sen}(\arccos(x))]^2+[\cos(\arccos(x))]^2=1 &\Longrightarrow [\text{sen}(\arccos(x))]^2+x^2=1\\ &\Longrightarrow \text{sen}(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}, \qquad (4.4)\end{aligned}$$

al sustituir (4.4) en (4.3) se concluye

$$\arccos'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ \forall x\in(-1,1).$$

iii) Por el Teorema 4.1 se tiene que

$$\begin{aligned}\arctan'(x)&=\frac{1}{\tan'(\arctan(x))}\\ &=\frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}. \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Note que por la identidad conocida $\sec^2(x)-\tan^2(x)=1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}[\sec(\arctan(x))]^2-[\tan(\arctan(x))]^2=1 &\Longrightarrow [\sec(\arctan(x))]^2-x^2=1\\ &\Longrightarrow \sec^2(\arctan(x))=1+x^2, \qquad (4.6)\end{aligned}$$

al sustituir (4.6) en (4.5) se concluye

$$\arctan'(x)=-\frac{1}{1+x^2}, \ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

■

■ **Ejemplo 4.1** Derive la siguiente función, $f(x)=\arctan(x^3)$

Solución. Por la regla de la cadena se tiene,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{1+(x^3)^2}\cdot 3x^2\\ &=\frac{3x^2}{1+x^6}\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.2** Calcule la derivada de la siguiente función, $f(x)=\operatorname{arc\,sec}(r^2x^3)$

Solución. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{|r^2x^3|\sqrt{(r^2x^3)2-1}} \cdot 3r^2x^2 \\ &= \frac{3}{|x|\sqrt{r^4x^6-1}}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.3** Halle la derivada de, $f(x) = \dfrac{\arctan(x+1)}{\ln(x-1)}$

Solución. Usando la regla de la cadena, propiedades de la derivada y los teoremas precedentes tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{1+(x+1)^2} \cdot \ln(x-1) - \dfrac{1}{x-1} \cdot \arctan(x+1)}{\ln^2(x+1)} \\ &= \frac{(x-1)\ln(x-1) - (x^2+2x+2)\arctan(x+1)}{(x-1)(x^2+2x+2)\ln^2(x-1)} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.4** Halle la derivada de la función, $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(2\ln(x^2))}{\ln(x^2)}$

Solución. en efecto se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-[2\ln(x^2)]^2}} \cdot \dfrac{4x}{x^2} \cdot \ln(x^2) - \operatorname{arc\,sen}(2\ln(x^2))\dfrac{2x}{x^2}}{[\ln(x^2)]^2} \\ &= \frac{4\ln(x^2) - 2\operatorname{arc\,sen}(2\ln(x^2))\sqrt{1-4\ln^2(x^2)}}{x\ln^2(x^2)\sqrt{1-4\ln^2(x^2)}} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.5** Calcule la derivada de, $f(x) = \arccos\left(\dfrac{e^2}{\sqrt{2x}}\right)$

Solución. Por la regla de la cadena se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{e^2}{\sqrt{2x}}\right)^2}} \cdot \frac{-e^2\dfrac{2}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x})^2} \\ &= \frac{e^2}{2x\sqrt{2x}\sqrt{\dfrac{2x-e^4}{2x}}} \\ &= \frac{e^2\sqrt{2x}}{2x\sqrt{2x}\sqrt{2x-e^4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^2}{2x\sqrt{2x-e^4}}$$

■ **Ejemplo 4.6** Derive la siguiente función, $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\pi - x^2)$

Solución. En efecto tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(\pi-x^2)^2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{-2x}{\sqrt{1-(\pi-x^2)^2}} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.7** Derive la función, $f(x) = \cot^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)$

Solución. Se sigue de la regla de la cadena y teoremas precedentes que,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{1+\left(\frac{b}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-b}{x^2}\right) \\ &= \frac{b}{x^2\left(\frac{x^2+b^2}{x^2}\right)} \\ &= \frac{b}{x^2+b^2} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.8** Derive la función, $f(x) = \csc^{-1}\left(\frac{a}{bx}\right)$.

Solución. En efecto se sigue que,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\left|\frac{a}{bx}\right|\sqrt{\left(\frac{a}{bx}\right)^2-1}}\left(\frac{-ab}{(bx)^2}\right) \\ &= \frac{1}{\left|\frac{a}{bx}\right|\sqrt{\frac{a^2-b^2x^2}{(bx)}}}\left(\frac{a}{bx^2}\right) \\ &= \frac{a}{(bx^2)\,\frac{|a|}{|bx|}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2x^2}}{|bx|}} \\ &= \frac{ab^2x^2}{|a|bx^2\sqrt{a^2-b^2x^2}} \\ &= \frac{ab}{|a|\sqrt{a^2-b^2x^2}} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.9** Determine la derivada de la función, $f(x) = \sec^{-1}\left[(ax+b)^2\right]$.

Solución. Por la regla de la cadena se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(ax+b)^2\sqrt{(ax+b)^4-1}} \cdot 2\,(ax+b)\cdot a \\ &= \frac{2a}{(ax+b)\sqrt{(ax+b)^4-1}}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.10** Calcule la derivada de la función, $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(x))$.

Solución. Tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}} \cdot \cos(x) \\ &= \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x)}} \\ &= \frac{\cos(x)}{\cos(x)} = 1. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.11** Determine la derivada de la función, $f(x) = \arctan(\ln(x)) + \ln(\arctan(x))$

Solución. Por las propiedades precedentes se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\ln^2(x)} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{x\left[1+\ln^2(x)\right]} + \frac{1}{[1+x^2]\arctan(x)} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.12** Derive la función, $f(x) = \operatorname{arc}\cos(-2x)$

Solución. Por la regla de la cadena se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-(-2x^2)^2}} \cdot (-2) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.13** Derive la función, $f(x) = \operatorname{arc}\cot^4(x^3)$

Solución. En efecto, tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\operatorname{arc}\cot^3(x^3)\left(\frac{-3x^2}{1+(x^3)^2}\right) \\ &= \frac{-12x^2\operatorname{arc}\cot^3(x^3)}{1+x^6} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.14** Derive la función, $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

Solución. Por las propiedades anteriores se sigue,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2}} \cdot \left[\frac{-1(-1)}{(1-x)^2}\right] \\
&= \frac{1}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{(1-x)^2-1}{(1-x)^2}}} \\
&= \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-2x+x^2-1}} \\
&= \frac{1}{(1-x)\sqrt{x(x-2)}}
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.15** Determine la derivada de la función, $f(x) = \arctan(x^2\sqrt{9x-9})$.

Solución. Por la regla de la cadena se tiene,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left[x^2\sqrt{9x-9}\right]^2}\left(2x\sqrt{9x-9}+x^2\frac{9}{2\sqrt{9x-9}}\right) \\
&= \frac{1}{1+x^4(9x-9)}\left(\frac{4x^2(9x-9)+9x^2}{2\sqrt{9x-9}}\right) \\
&= \frac{36x^3-27x^2}{2(9x^5-9x^4+1)\sqrt{9x-9}} \\
&= \frac{3x^2(4x-3)}{2(9x^5-9x^4+1)\sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.16** Calcule la derivada de la función, $f(x) = \operatorname{arc\,csc}(ax^2-2bx+3c)\operatorname{arc\,sec}(x)$

Solución. En efecto, tenemos,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{|ax^2-2bx+3c|\sqrt{(ax^2-2bx+3c)^2-1}} \cdot (2ax-2b) \\
&= \frac{-2x+2b}{|ax^2-2bx+3c|\sqrt{(ax^2-2bx+3c)^2-1}}
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.17** halle la derivada de la función, $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{\ln(1-x)}\right)$.

Solución. Por la regla de la cadena y los teoremas precedentes se sigue que,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{\ln(1-x)}\right)}\left(\frac{\ln(1-x)-(x+1)\cdot\dfrac{-1}{1-x}}{\ln^2(1-x)}\right)\\
&= \frac{\ln(1-x)}{x+1+\ln(1-x)}\cdot\left(\frac{(1-x)\ln(1-x)+x+1}{(1-x)\ln^2(1-x)}\right)\\
&= \frac{\ln(1-x)^{1-x}+x+1}{\ln(1-x)^{1-x}\left[\ln(1-x)+x+1\right]}.
\end{aligned}
$$

4.2 Derivadas Implícitas

Hasta este punto hemos trabajado con funciones explícitas, es decir con aquellas funciones las cuales una variable se puede escribir en función de la otra como por ejemplo $xy-\cos(x)\operatorname{sen}(3x)=\ln(x)$ de donde se puede despejar de forma sencilla la variable y en función de x como, $y=\dfrac{\cos(x)\operatorname{sen}(3x)+\ln(x)}{x}$, en tal caso a la variable y se la nota como $y=f(x)$, por lo que se tiene la función explícita:
$f(x)=\dfrac{\cos(x)\operatorname{sen}(3x)+\ln(x)}{x}$.
Sin embargo existen funciones que no se pueden expresar de forma sencilla en función únicamente de la variable independiente, a este tipo de funciones las denominamos implícitas, un ejemplo de ello es la siguiente:
$\ln(\operatorname{sen}(x^2+\sqrt{xy})-\tan(x+\sqrt{y})=x^{y^2}-\operatorname{senh}(6y-\sqrt{x})$.
De manera formal tenemos la siguiente definición.

Definición 4.1 Sea $f:A\subset\mathbb{R}\longrightarrow B\subset\mathbb{R}$, se dice que f es una función implícita si en $\Psi(x,y)=0$ al hacer $y=f(x)$, se cumple la siguiente igualdad $\Psi(x,f(x))=0$, para todo $x\in A$.

El método por el cual se obtiene la derivada de esta función $\Psi(x,y)=0$, se denomina derivada implícita y su fundamento radica en la regla de la cadena.

Así también se puede utilizar la regla de la cadena con la notación de Leibniz, como sigue: Si $y=y(x)$ y a su vez $z=f(y)$, entonces $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{df}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$.

En los siguientes ejemplos, se considera a y como una función de x, por lo tanto se obtiene las derivadas implícitas de las funciones en los dominios donde tenga sentido dichas funciones.

■ **Ejemplo 4.18** Determine $\frac{dy}{dx}$, a partir de la ecuación: $\sec^2(x)+\csc^2(y)=4$

Solución. En efecto, mediante derivación implícita, se tiene:

$$\begin{aligned}
2\sec(x)\sec(x)\tan(x) - 2\csc(y)\csc(y)\cot(y)\frac{dy}{dx} &= 0 \\
-2\csc(y)\csc(y)\cot(y)\frac{dy}{dx} &= -2\sec(x)\sec(x)\tan(x) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sec^2(x)\tan(x)}{\csc^2(y)\cot(y)}.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.19** Determine $\frac{dy}{dx}$, a partir de la ecuación: $\sec^2(y) + \cot(x+y) = \tan^2(x)$.

Solución. Se tiene

$$\begin{aligned}
2\sec^2(y)\tan(y)\frac{dy}{dx} + \left[-\csc^2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\right] &= 2\tan(x)\sec^2(x) \\
2\sec^2(y)\tan(y)\frac{dy}{dx} - \csc^2(x+y) - \csc^2(x+y)\frac{dy}{dx} &= 2\tan(x)\sec^2(x) \\
\left[2\sec^2(y)\tan(y) - \csc^2(x+y)\right]\frac{dy}{dx} &= 2\tan(x)\sec^2(x) + \csc^2(x+y) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2\tan(x)\sec^2(x) + \csc^2(x+y)}{2\sec^2(y)\tan(y) - \csc^2(x+y)}
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.20** Determine, $\frac{dy}{dx}$, a partir de la ecuación: $\tan(x+y) = e^{\frac{x}{y}}$

Solución. Se tiene

$$\begin{aligned}
\sec^2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) &= e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right) \\
y^2\sec^2(x+y) + y^2\sec^2(x+y)\frac{dy}{dx} &= ye^{\frac{x}{y}} - xe^{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx} \\
\left[y^2\sec^2(x+y) + xe^{\frac{x}{y}}\right]\frac{dy}{dx} &= ye^{\frac{x}{y}} - y^2\sec^2(x+y) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{ye^{\frac{x}{y}} - y^2\sec^2(x+y)}{y^2\sec^2(x+y) + xe^{\frac{x}{y}}}
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.21** Determine $\dfrac{dy}{dx}$, a partir de la ecuación:
$\tan(y^2) - x\ln(y) = \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$

Solución. Se tiene

$$\begin{aligned}
\sec^2(y^2)2y\frac{dy}{dx} - \ln(y) - \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\left(\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right) \\
\left[\frac{2y^2\sec^2(y)^2 - x}{y}\right]\frac{dy}{dx} - \ln(y) &= \frac{(\sqrt{y})^2}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx}\right)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{2y^2\sec^2(y^2)-x}{y}\right]\frac{dy}{dx}-\ln(y)=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}-\frac{x}{2y\sqrt{x(1-x)}}\frac{dy}{dx}$$

$$\left\{\frac{2y^2\sec^2(y^2)-x}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{2y\sqrt{x(1-x)}}\right\}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}+\ln(y)$$

$$\left\{\frac{2\sqrt{x(1-x)}\,[2y^2\sec^2(y^2)-x]+x}{2y\sqrt{x(1-x)}}\right\}\frac{dy}{dx}=\frac{1+2\ln(y)\sqrt{x(1-x)}}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\left[1+2ln(y)\sqrt{x(1-x)}\right]}{2\sqrt{x(1-x)}\,[2y^2\sec^2(y^2)-x]+x}$$

■ **Ejemplo 4.22** Determine $\dfrac{dy}{dx}$, a partir de la ecuación: $\text{sen}(x+y)=e^{\frac{x}{y}}$.

Solución. Se tiene

$$\cos(x+y)\left[1+\frac{dy}{dx}\right]=e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)$$

$$\cos(x+y)+\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$\left(\cos(x+y)+\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-\cos(x+y)$$

$$\left(\frac{y^2\cos(x+y)+xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\frac{x}{y}}-y\cos(x+y)}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{\frac{x}{y}}-y^2\cos(x+y)}{y^2\cos(x+y)+xe^{\frac{x}{y}}}$$

■ **Ejemplo 4.23** Determine $\dfrac{dy}{dx}$, a partir de la ecuación: $\arctan(x+y)=x$

Solución. Se tiene

$$\frac{1}{1+(x+y)^2}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=1$$

$$\frac{1}{1+(x+y)^2}+\frac{1}{1+(x+y)^2}\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{1}{1+(x+y)^2}\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{1+(x+y)^2}$$

$$\frac{1}{1+(x+y)^2}\frac{dy}{dx}=\frac{1+(x+y)^2-1}{1+(x+y)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=(x+y)^2.$$

■ **Ejemplo 4.24** Determine $\dfrac{dy}{dx}$, sabiendo que $y=\text{sen}(t)\cos(t)$ y además $x=\text{sen}^{-1}(t)$.

Solución. Primero obtenemos $\dfrac{dy}{dx}$, como sigue

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t)\cos(t) - \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(t) = \cos(2t). \tag{4.7}$$

Por otro lado, se aclara $\dfrac{dx}{dt}$ como sigue

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{4.8}$$

Luego de (4.7) y (4.8) y aplicando la regla de la cadena con la notación de Leibniz, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \cos(2t)\sqrt{1-t^2}$$

■ **Ejemplo 4.25** Determine $\dfrac{dy}{dx}$, a partir de la ecuación: $ye^y = e^{x+1}$

Solución. En efecto, se procede a derivar

$$\begin{aligned} e^y\frac{dy}{dx} + ye^y\frac{dy}{dx} &= e^{x+1} \\ (e^y + ye^y)\frac{dy}{dx} &= e^{x+1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{x+1}}{e^y(1+y)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{x-y+1}}{1+y} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.26** Determine $\dfrac{dy}{dx}$, a partir de la ecuación: $y = [\tan(\cos(x))]^{\ln(5x)}$

Solución. En primer lugar, se extrae logaritmo natural a ambos lados de la ecuación anterior, como se ve a continuación

$$\ln(y) = \ln\left([\tan(\cos(x))]^{\ln(5x)}\right) \Rightarrow \ln(y) = \ln(5x)\ln[\tan(\cos(x))],$$

donde la última igualdad de arriba, es consecuencia de las propiedades de logaritmo.Luego derivando a esta ecuación se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{5}{5x}\ln[\tan(\cos(x))] + \ln(5x)\frac{1}{\tan(\cos(x))}\sec^2(\cos(x))[-\operatorname{sen}(x)] \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{\tan(\cos(x))\ln[\tan(\cos(x))] - x\operatorname{sen}(x)\ln(5x)\sec^2(\cos(x))}{x\tan(\cos(x))} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left\{\tan(\cos(x))\ln\left[\tan(\cos(x))\right] - x\,\mathrm{sen}(x)\ln(5x)\sec^2(\cos(x))\right\}}{x\tan(\cos(x))}$$

■ **Ejemplo 4.27** Determine $\frac{dy}{dx}$, sabiendo que $y = a(\cos(t) + t\,\mathrm{sen}(t))$ y además $x = a(\mathrm{sen}(t) - t\cos(t))$.

Solución. Primero obtenemos $\frac{dy}{dt}$, como sigue

$$\frac{dy}{dt} = a(-\,\mathrm{sen}(t) + \mathrm{sen}(t) + t\cos(t)) = at\cos(t). \tag{4.9}$$

Por otro lado, se obtiene $\frac{dx}{dt}$, derivando de la siguiente forma

$$\frac{dx}{dt} = a(\cos(t) - \cos(t) + t\,\mathrm{sen}(t)) = at\,\mathrm{sen}(t). \tag{4.10}$$

En consecuencia de (4.9), (4.10) y utilizando la regla de la cadena en la notación de Lebniz se concluye

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = at \quad \cos(t)\cdot\frac{1}{at \quad \mathrm{sen}(t)} = \frac{\cos(t)}{\mathrm{sen}(t)} = cot(t).$$

4.3 Derivadas de Orden Superior

En este apartado se dará la notación para derivadas de órdenes superiores, que serán de gran utilidad para resolver una infinidad de problemas relacionados con el ámbito de la ingeniería y tecnologías.

Definición 4.2 Se dice que $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función $n-veces$ derivable si existen $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{(iv)}(x),\ f^{(v)}(x),\ldots,f^{(n)}(x)$, donde f' se denomina la primera derivada, f'' la segunda derivada. f''' la tercera derivada, $f^{(iv)}$ la cuarta derivada, as'i sucesivamente hasta $f^{(n)}$ que representa la $n-esima$ derivada o derivada de orden n.

En la notación de Leibniz se tiene que, si $y = f(x)$ entonces:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$
$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$
\begin{aligned}
f^{(iv)}(x) &= \frac{d^4 f}{dx^4} = \frac{d^4 y}{dx^3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n}
\end{aligned}
$$

Se expone algunos ejemplos de aplicación.

■ **Ejemplo 4.28** La siguiente expresión, $f(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 5t^4 + 10$ representa la posición de una partícula en función del tiempo. Determine la derivada de la aceleración de la partícula en función del tiempo. Además halle la aceleración cuando $t = 2s$.

Solución. En efecto la primera derivada de la posición se denomina velocidad de la partícula, la cual resulta

$$v(t) = f'(t) = \frac{df}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 20t^3.$$

Ahora la primera derivada de la velocidad o segunda derivada de la posición representa la aceleración en función del tiempo, esto es:

$$a(t) = v'(t) = f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 60t^2,$$

note que la función anterior establece la aceleración, de donde se puede obtener la aceleración para $t = 2s$, en efecto

$$a(2) = -\frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}2\right) - 60(2)^2 = -240m/s^2.$$

Finalmente al obtener la primera derivada de la aceleración o de forma equivalente la tercera derivada de la posición se obtiene la derivada de la aceleración en función del tiempo, es decir:

$$b(t) = a'(t) = \frac{d^3 f}{dx^3} = -\frac{\pi^3}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 120t.$$

■ **Ejemplo 4.29** Si f es tres veces derivable y $f'(x) \neq 0$, la derivada de Schwarz de f en x se define como,

$$\mathscr{D}f(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right).$$

a) Demuestre que $\mathscr{D}(f\circ g) = [\mathscr{D}f\circ g]\,(g')^2+\mathscr{D}g$.

b) Pruebe que si $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $ad-bc\neq 0$, entonces $\mathscr{D}f=0$. En consecuencia $\mathscr{D}(f\circ g) = \mathscr{D}g$.

Solución.

a) En efecto, tenemos

$$(f\circ g)'(x) = (f'\circ g)(x)g'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}(f\circ g)''(x) &= \left[f'(g(x))g'(x)\right]' = \left[(f'\circ g)(x)g'(x)\right]'\\ &= (f'\circ g)'(x)g'(x)+(f'\circ g)(x)g''(x)\\ &= (f''\circ g)(x)g'(x)g'(x)+(f'\circ g)(x)g''(x)\\ &= (f''\circ g)(x)(g'(x))^2+(f'\circ g)(x)g''(x)\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}(f\circ g)'''(x) &= (f''\circ g)'(g')^2+(f''\circ g)\cdot 2g'g''+(f'\circ g)'g''(x)+(f'\circ g)g''\\ &= (f'''\circ g)(g')^3+2g'g''(f''\circ g)+(f''\circ g)g'g''+(f'\circ g)g'''\\ &= (f'''\circ g)(x)(g'(x))^3+3g'(x)g''(x)(f''\circ g)(x)+(f'\circ g)(x)g'''(x).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Luego de (4.11), (4.12) y (4.13), se sigue que

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(f\circ g)(x) &= \frac{(f\circ g)''(x)}{(f\circ g)'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{(f\circ g)''(x)}{(f\circ g)'(x)}\right)^2\\ &= \frac{(f'''\circ g)(x)(g'(x))^3+3g'(x)g''(x)(f''\circ g)(x)+(f'\circ g)(x)g'''(x)}{f'(g(x))g'(x)}\\ &\quad -\frac{3}{2}\left[\frac{(f''\circ g)(x)(g'(x))^2+(f'\circ g)(x)g''(x)}{f'(g(x))g'(x)}\right]^2\\ &= \frac{(f'''\circ g)(g')^2}{(f'\circ g)}+\frac{3g''(f''\circ g)}{(f'\circ g)}+\frac{g'''}{g'}-\frac{3}{2}\left[\frac{(f''\circ g)g'}{(f'\circ g)}+\frac{g''}{g'}\right]^2\\ &= \frac{(f'''\circ g)(x)(g'(x))^2}{(f'\circ g)(x)}+\frac{3g''(x)(f''\circ g)(x)}{(f'\circ g)(x)}+\frac{g'''(x)}{g'(x)}-\frac{3}{2}\frac{(f''\circ g)^2(x)\,[g'(x)]^2}{[(f'\circ g)(x)]^2}\\ &\quad -\frac{3g''(x)(f''\circ g)(x)}{(f'\circ g)(x)}-\frac{3}{2}\frac{(g''(x))^2}{(g'(x))^2}\\ &= \left\{\frac{(f'''\circ g)(x)\,[g'(x)]^2}{(f'\circ g)(x)}-\frac{3}{2}\frac{(f''\circ g)^2(x)\,[g'(x)]^2}{(f'\circ g)^2(x)}\right\}+\frac{g'''(x)}{g'(x)}-\frac{3}{2}\left[\frac{g''(x)}{g'(x)}\right]^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{(f''' \circ g)(x)}{(f' \circ g)(x)} - \frac{3}{2} \frac{(f'' \circ g)^2(x)}{(f' \circ g)^2(x)} \right\} \left[g'(x)\right]^2 + \left\{ \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{g''(x)}{g'(x)}\right]^2 \right\} \\
&= \{\mathscr{D}f(g(x))\} \left[g'(x)\right]^2 + \{\mathscr{D}g(x)\} \\
&= (\mathscr{D}f \circ g)(x) \left[g'(x)\right]^2 + \mathscr{D}g(x).
\end{aligned}
$$

b) Por hipótesis se tiene que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ y $ad - bc \neq 0$, de donde

$$
f'(x) = \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}. \tag{4.14}
$$

$$
f''(x) = -\frac{(ad-bc)2c(cx+d)}{(cx+d)^4} = \frac{2c(bc-ad)}{(cx+d)^3}. \tag{4.15}
$$

Finalmente de (4.14) y (4.15) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}(f \circ g)(x) &= [\mathscr{D}f \circ g](x) \left[g'(x)\right]^2 + \mathscr{D}g(x) \\
&= 0 \left[g'(x)\right]^2 + \mathscr{D}g(x) \\
&= \mathscr{D}g(x).
\end{aligned}
$$

Encuentre las derivadas de orden superior siguientes:

■ **Ejemplo 4.30** Determine $f^{(iv)}$, sabiendo que $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$.

Solución. Se obtiene la primera derivada, utilizando la regla de la cadena

$$
f'(x) = 3\cos(3x).
$$

Ahora se calcula la segunda derivada a partir de la primera derivada

$$
f''(x) = -9\operatorname{sen}(3x)
$$

Posteriormente la tercera derivada, como sigue

$$
f'''(x) = -27\cos(3x)
$$

Finalmente a partir de la tercera derivada anterior, se obtiene la derivada cuarta

$$f^{(iv)}(x) = 81\,\text{sen}(3x).$$

■ **Ejemplo 4.31** Determine f''', sabiendo que $f(x) = \tan(x)$.

Solución. Se obtiene la primera derivada, utilizando la regla de la cadena

$$f'(x) = \sec^3(x).$$

Ahora se calcula la segunda derivada a partir de la primera derivada

$$f''(x) = 2\sec(x)\tan(x)\sec(x) = 2\sec^2(x)\tan(x).$$

Finalmente la tercera derivada se obtiene a partir de la segunda derivada anterior, como sigue

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2\left[2\sec^2(x)\tan(x)\tan(x) + \sec^2(x)\sec^2(x)\right] \\ &= 4\sec^2(x)\tan^2(x) + 2\sec^4(x) \\ &= 2\sec^2(x)\left[2\tan^2(x) + \sec^2(x)\right]. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.32** Determine f'', sabiendo que $f(x) = \text{sen}(3x^4)$.

Solución. Se obtiene la primera derivada, utilizando la regla de la cadena

$$f'(x) = \cos(3x^4)\left[12x^3\right] = 12x^3\cos(3x^4).$$

Finalmente se calcula la segunda derivada a partir de la primera derivada, como sigue

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12\left[3x^2\cos(3x^4) - x^3\,\text{sen}(3x^4)\cdot(12x^3)\right] \\ &= 36x^2\left[\cos(3x^4) - 4x^4\,\text{sen}(3x^4)\right]. \end{aligned}$$

4.3.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 4.1 Halle las derivadas de las siguientes funciones.

$a)$ $f(x) = \text{arc sen}\left(\sqrt{\cos(x) - x^3}\right)$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1 - 2x + x^3}{2x - 5}\right)$

$c)\ f(x) = \dfrac{\sqrt{\arctan(x^2)}}{x + \operatorname{arc\,sen}(x)}$

$d)\ f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left[\operatorname{arc\,cos}\left(\sqrt[3]{x^2 - 5x + 2}\right)\right]$

$e)\ f(x) = \dfrac{1 - 8x + 6x^3}{\sqrt{\arctan(x) + \operatorname{arc\,sec}(x)}}$

$f)\ g(x) = \dfrac{e^{\operatorname{arc\,sen}(x^2+5x-1)}}{\cos(x) - \operatorname{arc\,cos}(x)} + x^4 - 5x$

$g)\ f(x) = \dfrac{\ln\left(\cot^{-1}(x + \operatorname{sen}(x))\right) - x^2}{e^{\operatorname{sen}(x)} - \cosh(x)}$

$h)\ f(x) = \operatorname{senh}(\operatorname{arc\,cos}(x)) - \dfrac{5 + 2x + x^2}{csc^{-1}(x^2 + 1)}$

$i)\ f(x) = \dfrac{\log(\operatorname{sen}(x) + x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 + 5\ln(\operatorname{senh}(x)) + 3}}$

$j)\ f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^3 - 5x + \cos(x)}{e^x + \tanh(x)}\right)$

Ejercicio 4.2 Determine $\dfrac{dy}{dx}$, de las siguientes funciones implícitas.

$a)\ \operatorname{sen}(xy) + \sqrt{5x - y^2 + \cos(x)} = \tan(xy)$

$b)\ \tan(y) - \ln(\operatorname{sen}(x - y)) = xy^2$

$c)\ \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(xy)}{\cosh(xy)} = \tanh(xy) + \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt[3]{y}\right)$

$d)\ xy = \dfrac{\operatorname{senh}(x + 5y - 3xy)}{\operatorname{arc\,sen}(x) - \sqrt{\cos(xy)}}$

$e)\ \sqrt{x^3 + xy - y^2} = \operatorname{sen}(\sqrt{x - 2y^2})$

$f)\ \cos(y) - \tan(xy) = \dfrac{2x^3 + 5xy}{\operatorname{arc\,sen}(xy)}$

$g)\ \dfrac{3xy^2 - 5x^y \operatorname{sen}(x) - y}{2y - 3xy + 5x^2} = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{y})$

$h)\ \cosh^{-1}(xy) = \tan(xy) - \operatorname{sen}^{-1}(y)$

$i)\ \dfrac{\cos(x - y) - \tanh(y)}{5xy - y^3} = \dfrac{\sqrt{xy}}{x + y}$

$j)\ \operatorname{senh}^{-1}(x + 2y - 5) = \sqrt{2y + x}$

Ejercicio 4.3 Halle $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$, dadas las siguientes funciones.

$a)\ f(x) = \operatorname{sen}(x - \sqrt{x})$

$b)\ f(x) = \ln(x + \cos(x)) - \sqrt{2x^2 - 5}$

$c)\ f(x) = \dfrac{x + 5x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - \ln(cosh(x))}$

$d)\ f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)} - \tan(x) + 5x^3$

Ejercicio 4.4 Dada la función $f(x) = \dfrac{\cos(x) - \cosh(x) + \tan(x)}{x^2 + \ln(x) - \sqrt{x}}$, determine $f'(x)$, $f''(x)$, $f'(\pi)$ y $f''(1)$.

Ejercicio 4.5 Sean las funciones $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(x) - \ln(x))$ y $g(x) = \sqrt{\cos(x) + x^2}$, determine $\dfrac{d^2}{dx^2}(f \circ g)$.

Ejercicio 4.6 Halle las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, suponiendo que las funciones están bien definidas en un dominio adecuado.

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x}+x)$

b) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{8\pi}{x}}+3x^2\right)$

c) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(8ax)\cdot\operatorname{arc\,cos}(8bx)$

d) $f(x) = \dfrac{\arctan(x+1)}{\ln(\sqrt{x}-1)}$

e) $f(x) = \operatorname{arc\,csc}(x^2-3x-10)$

f) $f(x) = \tan^{-1}(x^2-\pi)$

g) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}(x)}{e^{-x}}$

h) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x})-\operatorname{arc\,cos}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

i) $f(x) = \cos^{-1}(ax^2+bx+c)$

j) $f(x) = (\arctan(\sqrt{x}-5x))^4$

k) $f(x) = 3x^2\operatorname{arc\,sec}(x)$

l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\operatorname{arc\,sen}(x^2-1)}}{e^{x^2}-3}$

m) $f(x) = \dfrac{\arctan(x-5)}{\sqrt{x}}$

n) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(1-x)}{\ln(1+x)}$

o) $f(x) = x^2-\operatorname{arc\,sen}(x)+\operatorname{arc\,cos}(\sqrt{x})$

p) $f(x) = \arctan(x^3-5x^2+2x-3)$

q) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x^2+1)}{\operatorname{arc\,cos}(x+1)}$

r) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sec}(x^2)}{1+\operatorname{arc\,sen}(2x)}-\tanh\left(\dfrac{2x-1}{x+5}\right).$

Ejercicio 4.7 Determine $\dfrac{dy}{dx}$, de las siguientes funciones implícitas.

a) $\dfrac{x-y}{e^{xy}} = \operatorname{arc\,sen}(x-y).$

b) $\dfrac{y}{x} = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right).$

c) $\ln(xy) = 5+\operatorname{arc\,cos}(5x-y).$

d) $x^5y^3-5y^2-\sqrt{2x} = \cos(x+y^3)-\cot(\sec(xy)).$

e) $-\dfrac{\ln(\operatorname{sen}(y^3)-7x)+\tan(x^3y-4y^5)}{x^2y^3-4xy^2-y+3} = 0.$

f) $-7xy^7+5x^2y^6-5x^3y^5+6x^4y^3-\cos(x)y^2+21\tan(xy)-\arctan(\sqrt{xy^3}) = 0.$

Ejercicio 4.8 Demuestre que la derivada $m-$ésima de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ resulta $f^{(n)}(x) = (-1)^m\dfrac{m!}{x^{m+1}}$, donde m es un número natural cualquiera. Suponga que la función es m veces derivable.

Ejercicio 4.9 Demuestre que la derivada $m-$ésima de la función $f(x) = \dfrac{x+\alpha}{\alpha-x}$ resulta $f^{(m)}(x) = \dfrac{2\alpha(m!)}{(\alpha-x)^{m+1}}$. Donde m es un cualquier valor natural y $\alpha\in\mathbb{R}$, con $x\neq\alpha$.

5. Resultados Importantes de Cálculo Diferencial

En esta sección se prueban los resultados más profundos del cálculo diferencial, siendo el más importante el conocido como Teorema del Valor Medio para Derivadas; esto se probará como una consecuencia del Teorema de Rolle, para finalmente establecer el Teorema del Valor Medio de Cauchy el cual es una generalización de los anteriores.

Definición 5.1 Sea $f : I \subseteq A \to \mathbb{R}$ una función, donde $A = Dom(f)$. Entonces un elemento $x_0 \in I$ se dice que es punto máximo de f sobre I si $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in I$. Además al valor $f(x_0)$, se lo denomina el valor máximo de f sobre A.
Así mismo se dice que $x_0 \in I$ es punto mínimo de f sobre I, si $-f$ alcanza su punto máximo en $x_0 \in I$.

Note que la existencia de un punto máximo o mínimo no garantiza que dicho punto sea único. Para ejemplificar este hecho, observe la Figura 5, donde $I = (a, b)$.

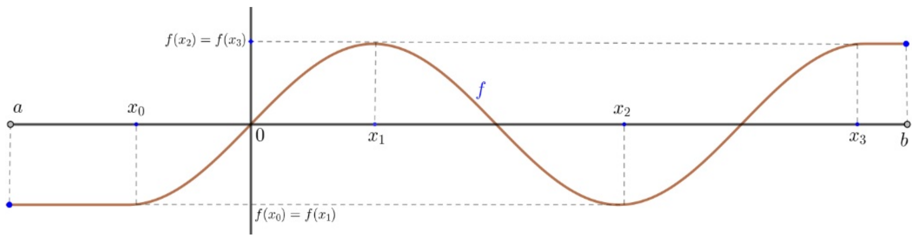


Figura 5.1: El máximo o mínimo, en general no es único.

referencia 5 En este caso tenemos que $x_0 \neq x_2$, pero $f(x_0) = f(x_2)$ y corresponde al valor mínimo de f sobre $I=(a,b)$. Así mismo $x_1 \neq x_3$, pero $f(x_1)=f(x_3)$ corresponde al valor máximo de la función f sobre $I=(a,b)$. Por lo tanto para este ejemplo, existe más de un punto máximo (y mínimo), pero a lo más un único valor máximo (y mínimo).

Definición 5.2 Sea $f: I\subseteq A \to \mathbb{R}$ una función, se dice que $x_0 \in I$ es un máximo local (o mínimo local) de f sobre I, si existe algún $\delta>0$ tal que x_0 es un máximo (o mínimo) de f sobre $I\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Definición 5.3 Sea $f: I\subseteq A \to \mathbb{R}$ una función. Entonces a todo valor $x\in I$ tal que verifique, $f'(x)=0$, se denomina punto singular; en tal caso a $f(x)$ se lo llama valor singular de f sobre I.

Teorema 5.1 Sea $f: I=(a,b)\to\mathbb{R}$ una función. Si $x_0\in(a,b)$ es un punto máximo (o mínimo) y si f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0)=0$.

Demostración. Sea $h>0$ tal que $h<\text{mín}\{|x_0-a|,|x_0-b|\}$. Entonces para todo $x\in(x_0-h,x_0)$, se tiene que $x<x_0 \Leftrightarrow x-x_0<0$, además como x_0 es máximo se sigue que

$$
\begin{aligned}
f(x_0)\geq f(x) &\Longrightarrow f(x)-f(x_0)\leq 0\\
&\Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0\\
&\Longrightarrow \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0\\
&\Longrightarrow f'_-(x_0)\geq 0. \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

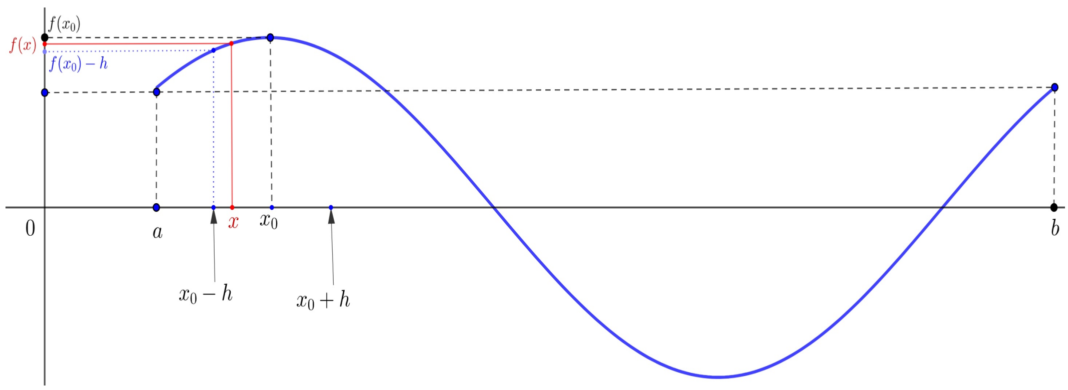


Figura 5.2: Derivable en x_0.

Así mismo, para todo $x\in(x_0,x_0+h)$ se tiene que $x_0<x\Leftrightarrow x-x_0>0$, además como x_0 es máximo entonces

$$\begin{aligned}
f(x_0) \geq f(x) &\Longrightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0 \\
&\Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\
&\Longrightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\
&\Longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

De (5.1) y (5.2) se tiene que $f'(x_0) = 0$, pues, por hipótesis, f es derivable en x_0. ■

Teorema 5.2 Sea $f : I \subseteq A \to \mathbb{R}$ una función, donde $A = Dom(f)$. Si f tiene un máximo local (o mínimo local) en $x_0 \in I$ y si f es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.

Demostración. Efectivamente, como f tiene un máximo local en $x_0 \in I$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ahora tomando h tal que $0 < h < \delta$ y aplicando el Teorema 5.1, al intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ se tiene que $f'(x_0) = 0$.
De forma similar si x_0 es un mínimo local. ■

Observación 5.1 Es importante notar que el recíproco del Teorema 5.2, en general es falso. Así por ejemplo, se tiene la función $f(x) = x^5$, de donde $f'(x) = 5x^4$ como indica la Figura 5.3 En consecuencia $f'(0) = 0$, pero $x = 0$ no es punto máximo ni punto mínimo de f sobre $\mathbb{R}$.
En conclusión, no todo punto singular es máximo o mínimo.

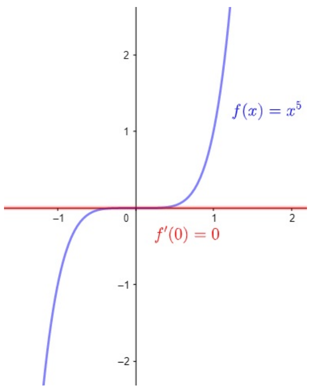


Figura 5.3: La función $f(x) = x^5$ y su derivada en cero, $f'(0) = 0$.

Teorema 5.3 (Teorema de Rolle)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el cerrado $[a, b]$, y derivable en el abierto (a, b), si

además $f(a) = f(b)$ entonces existe almenos un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demostración. Como f es continua en $[a,b]$, entonces sabemos que es acotada superior e inferiormente, por lo tanto existe un valor máximo y un valor mínimo sobre $[a,b]$.

Luego, sea $x_0 \in (a,b)$ el punto máximo de f sobre (a,b) y como f es derivable en x_0 entonces por el Teorema 5.1, se tiene que $f'(x_0) = 0$.

Así mismo, si $x_1 \in (a,b)$ es punto mínimo de f sobre (a,b) y como f es derivable en x_1, entonces nuevamente por el Teorema 5.1, se sigue que $f(x_1) = 0$.

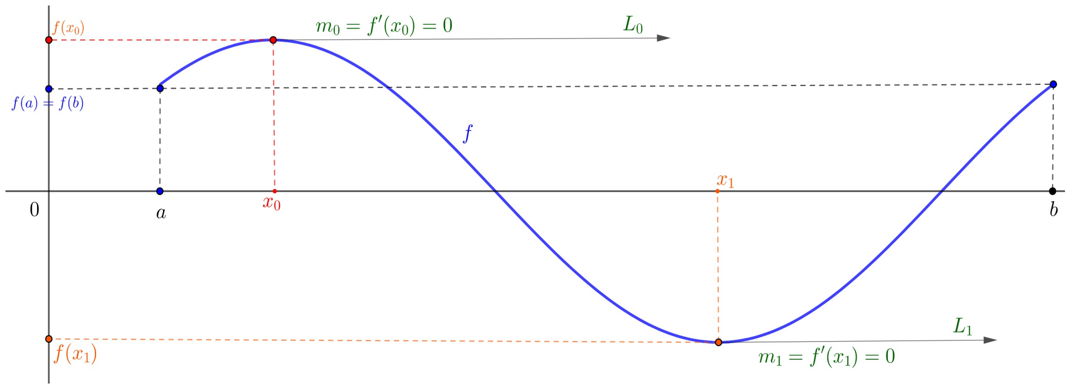


Figura 5.4: Teorema de Rolle

Ahora queda el caso en que los puntos máximo y mínimo sean los extremos de $[a,b]$, luego $f(a) = f(b)$, entonces los valores máximo y mínimo de f sobre $[a,b]$ son iguales, en consecuencia f es una función constante sobre $[a,b]$, por lo tanto para todo $x \in (a,b)$, se tiene que $f'(x) = 0$. ■

■ **Ejemplo 5.1** Determine los puntos en el intervalo $[-1,1]$, en los cuales la función $f(x) = -5x^3 + 5x - 1$ tiene pendiente cero.

Solución. Note que, $f(-1) = -5(-1)^3 + 5(-1) - 1 = -1$ y $f(1) = -5(1)^3 + 5(1) - 1 = -1$, de donde $f(-1) = f(1) = 1$, además como f es polinomio de grado tres, entonces es continuo en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$; por lo que se verifica las hipótesis del Teorema de Rolle 5.3, esto implica que existe al menos un $c \in [-1,1]$ tal que $f'(c) = 0$, es decir, como $f'(x) = -15x^2 + 5$ se sigue que,

$$
\begin{aligned}
f'(c) = 0 &\Longrightarrow -15c^2 + 5 = 0 \\
&\Longrightarrow c^2 = \frac{-5}{-15} \\
&\Longrightarrow |c| = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in [-1,1].$$

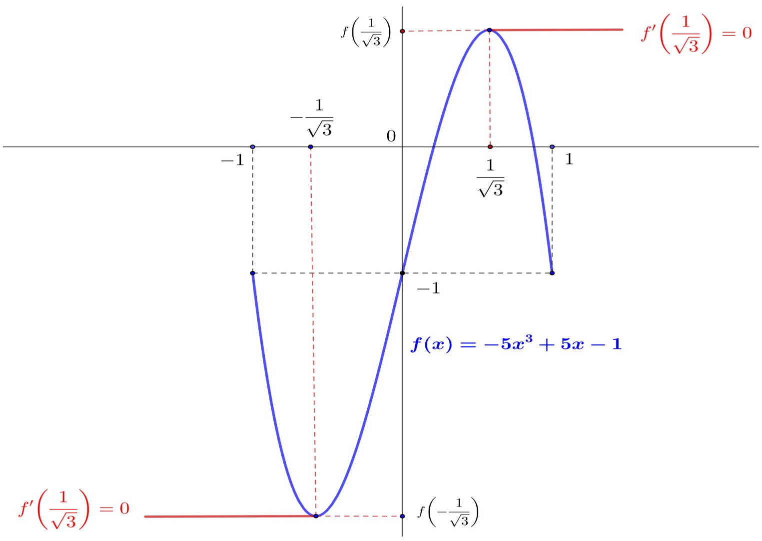


Figura 5.5: Función $f(x) = -5x^3 + 5x - 1$

■ **Ejemplo 5.2** Determine los puntos en el intervalo $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$, en los cuales la función $f(x) = 2x^2 - \sqrt[3]{2x^2} + \frac{1}{4}$ tiene pendiente cero.

Solución. Si bien es cierto que la función $f(x) = 2x^2 - \sqrt[3]{2x^2} + \frac{1}{4}$ es continua en $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$, sin embargo al derivar esta función se tiene,

$$f'(x) = 4x - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 4x - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}},$$

observe que existe un problema en el punto $x = 0$, verifiquemos si existe $f'(x)$ en este punto, en efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left[4x - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\right] \\ &= -\infty,\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \left[4x - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\right] \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

por lo que $\lim_{x \longrightarrow 0} f'(x)$ no existe en $x = 0$, luego f no es derivable en este punto. Consecuentemente, f no es derivable en $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ por lo que no se puede utilizar el Teorema de Rolle, y como se observa en la Figura 5, la función f, tiene un pico en $x = 0$, que indica que no es derivable en ese punto.

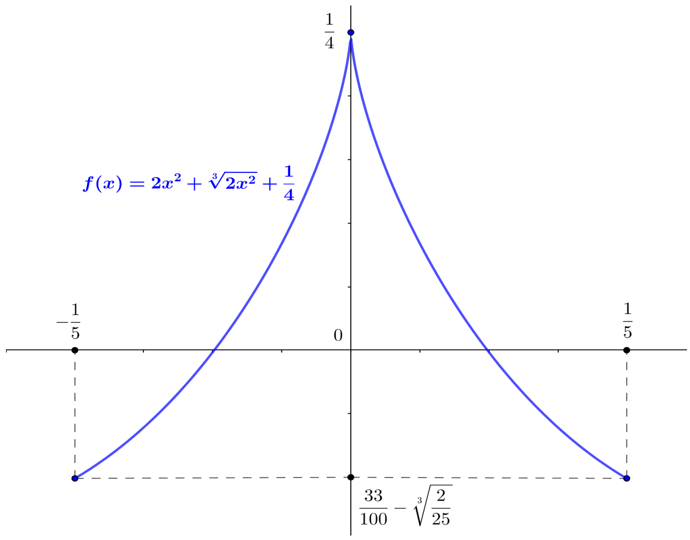


Figura 5.6: Función $f(x) = 2x^2 - \sqrt[3]{2x^2} + \frac{1}{4}$

Ahora se presenta uno de los resultados más importantes y profundos del Cálculo Diferencial, su importancia radica en el hecho de que a partir de la derivada de una función se puede obtener información acerca de la función.

Teorema 5.4 (Teorema del Valor Medio)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en (a, b), entonces existe almenos un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostración. En efecto, como $b \neq a$, entonces podemos obtener la ecuación de la recta L, la cual resulta

$$
\begin{aligned}
y - y_0 = m(x - x_0) &\iff y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \\
&\iff y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).
\end{aligned}
$$

Note que "y" depende de x, por lo tanto para todo $x \in [a, b]$ se puede definir la siguiente función $g(x) := y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.

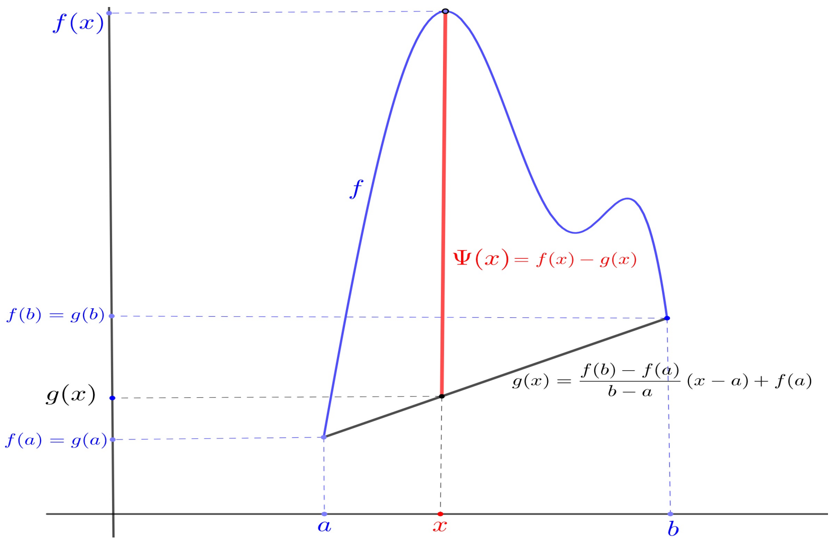


Figura 5.7: Definición de Ψ.

Por otro lado, se define la función Ψ, la cual geométricamente representa la distancia entre f y g para cada valor $x \in [a,b]$; esto es:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &:= f(x) - g(x), \quad \forall x \in [a,b] \\ \Psi(x) &:= f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a).\end{aligned}$$

Por hipótesis f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), también g es continua en el mismo dominio y derivable en el abierto, puesto que se trata de una función polinómica; en consecuencia Ψ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Además se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) - f(a) = 0, \quad y \\ \Psi(b) &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(a) = 0.\end{aligned}$$

Luego Ψ verifica las hipótesis del Teorema 5.3, por lo tanto existe algún $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$\begin{aligned}\Psi(x_0) = 0 &\Longrightarrow f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \\ &\Longrightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\end{aligned}$$

■

Lema 5.5 Sea f una función continua definida en un intervalo, tal que $f'(x) = 0$, para todo x en dicho intervalo. Entonces f es una función constante en todo el intervalo.

Demostración. En efecto, sean a y b dos puntos cualquiera en el intervalo donde está definida la función, con $a < b$ y $a \neq b$, entonces por el Teorema 5.4 (Teorema del Valor Medio), existe $x \in (a,b)$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5.3}$$

Pero por hipótesis se tiene que $f'(x) = 0$ para todo x en el intervalo; entonces en (5.3) se tiene

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Longrightarrow f(b) = f(a),$$

es decir que el valor de f en dos puntos cualquiera del intervalo son iguales, en consecuencia f es constante en todo el intervalo. ■

Lema 5.6 Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a,b)$. Entonces existe algún $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) - g(x) = k$, para todo $x \in [a,b]$.

Demostración. En efecto, por hipótesis para todo $x \in (a,b)$, se verifica

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(x) &\Longrightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \\ &\Longrightarrow (f-g)'(x) = 0, \end{aligned}$$

luego por el Lema 5.5, existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $(f-g)(x) = k \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = k$. ■

Ahora se presenta un resultado que generaliza el Teorema del Valor Medio para derivadas.

Teorema 5.7 (Teorema del Valor Medio de Cauchy)
Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en todo su dominio y derivables en (a,b). Entonces existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(x_0) = [g(b) - g(a)]f'(x_0). \tag{5.4}$$

Si $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x_0) \neq 0$ entonces (5.4) se puede escribir como sigue:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{5.5}$$

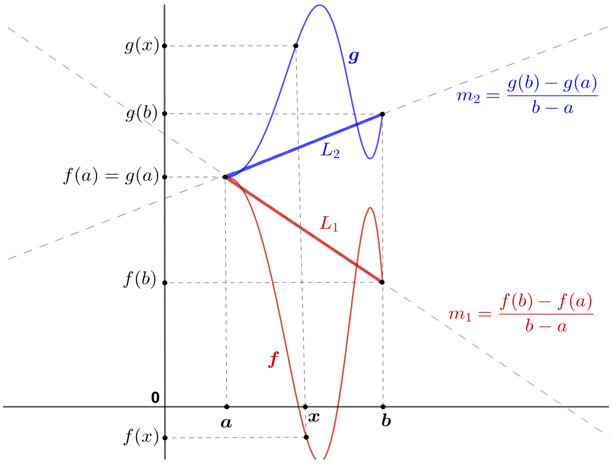


Figura 5.8: f y g funciones continuas, L_1 y L_2 rectas.

Demostración. En efecto si f y g son funciones continuas, como se observa en la Figura 5 y cosiderando $b \neq a$ entonces a dichas funciones se las multiplica por las constantes $[g(b)-g(a)]$ y $[f(b)-f(a)]$ respectivamente, con la finalidad que d_1 y d_2 sean iguales, como se ve en la Figura 5.

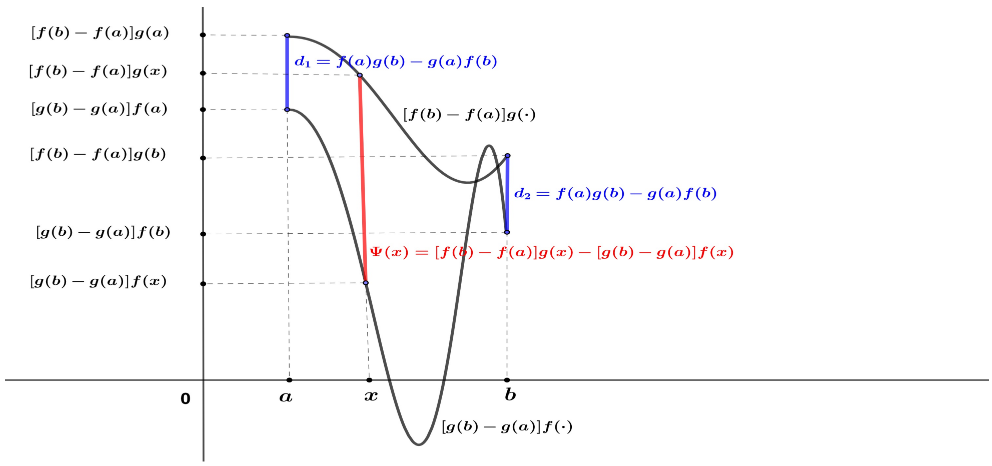


Figura 5.9: Transformación de las funciones f y g.

Luego se define la función

$$\Psi(x) := [g(b)-g(a)]f(x)-[f(b)-f(a)]g(x), \quad \forall x \in [a,b],$$

la misma que es derivable en (a,b).

Geométricamente esta función representa la distancia entre $[g(b)-g(a)]f(x)$ y $[f(b)-f(a)]g(x)$, para todo $x \in [a,b]$.

Ahora observe que,

$$\Psi(a) = [g(b) - g(a)]f(a) - [f(b) - f(a)]g(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$
$$\Psi(b) = [g(b) - g(a)]f(b) - [f(b) - f(a)]g(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

por lo tanto se tiene que $\Psi(a)\Psi(b)$, como se distingue en la Figura 5.

Note que la función Ψ, verifica las condiciones del Teorema de Rolle, en consecuencia existe algún $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$\begin{aligned}\Psi'(x_0) = 0 &\Longrightarrow [g(b) - g(a)]f'(x_0) - [f(b) - f(a)]g'(x_0) = 0\\ &\Longrightarrow [g(b) - g(a)]f'(x_0) = [f(b) - f(a)]g'(x_0).\end{aligned}$$

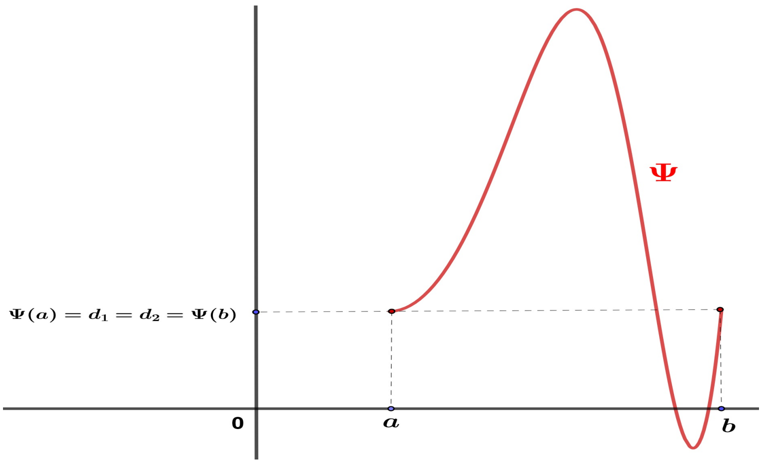


Figura 5.10: La funciónΨ.

Finalmente, si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x_0) = 0$ se sigue de la última igualdad arriba que, $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. ■

Observación 5.2 Como $a \neq b$ en (5.5) del Teorema 5.7, se tiene que

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Lo cual geométricamente establece que existe al menos un punto $x_0 \in (a,b)$ tal que la razón entre las pendientes de las rectas tangentes s f y a g en dicho punto es igual a la razón entre las pendientes de las rectas secantes L_1 y L_2 de las funciones f y g, como se ve en la Figura 5.

■ **Ejemplo 5.3** Considere el intervalo $[1,2]$ y las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^3$, definidas en dicho intervalo. Determine el valor $x_0 \in (1,2)$ de tal forma que la razón entre las pendientes de las derivadas sea igual a la razón entre las pendientes de las rectas secantes a las funciones f y g que pasan por los puntos extremos 1 y 2.

Solución.
Para $f(x) = x^2 + 1$ se tiene

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 + 1 = 2 \\ f(2) &= 2^2 + 1 = 5. \end{aligned}$$

De forma similar, para $g(x) = x^3$ se sigue que

$$\begin{aligned} g(1) &= 1^3 = 1 \\ g(2) &= 2^3 = 8. \end{aligned}$$

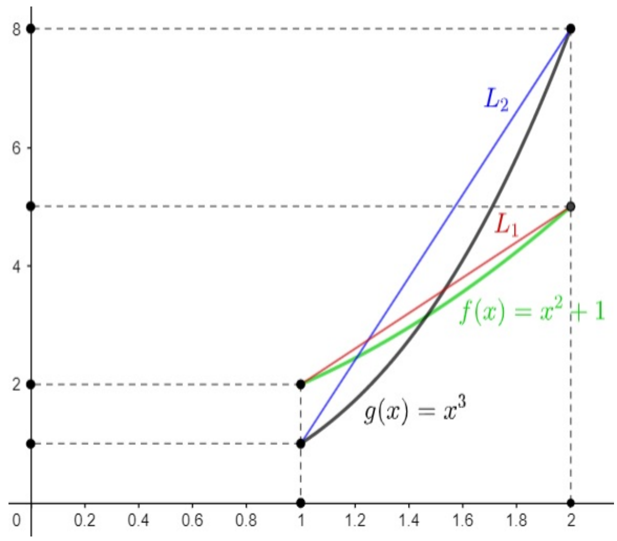


Figura 5.11: Correspondiente al ejemplo.

Además $g'(x) = 3x^2$, por lo tanto $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (1,2)$ y como $g(1) = 1 \neq 8 = g(2)$, entonces por el Teorema del Valor Medio de Cauchy, existe algún $x_0 \in (1,2)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} &\Longrightarrow \frac{2x_0}{3x_0^2} = \frac{5-2}{8-1} \\ &\Longrightarrow \frac{2}{3x_0} = \frac{3}{7} \\ &\Longrightarrow 14 = 9x_0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x_0 = \frac{14}{9}.$$

Note que $m_1 = \dfrac{5-2}{2-1} = 3$ y $m_2 = \dfrac{8-1}{2-1} = 7$, luego como $x_0 = \dfrac{14}{9}$ entonces

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{2\left(\frac{14}{9}\right)}{3\left(\frac{14}{9}\right)^2} = \frac{2}{3\left(\frac{14}{9}\right)} = \frac{3}{7} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Así para $x_0 = \dfrac{14}{9}$, se verifica que $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{m_1}{m_2}$, véase la Figura 5.

5.1 REGLAS DE HÔSPITAL

En este apartado se analiza unos resultados sobre límites conocidos como las Reglas de Hôspital. Esto está basado en resolver problemas de indeterminaciones de las formas $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^∞, 0^0, ∞^0. Por lo que se tiene el primer resultado siguiente.

Teorema 5.8 Sean f y g funciones reales definidas en una vecindad de x_0, excepto quizá en el mismo punto x_0. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0$, con $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ y si además existe $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, que verifica la igualdad siguiente,

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Consideremos dos casos.

i) Si $x_0 < \infty$ y $f(x_0) = g(x_0) = 0$, entonces en el intervalo $[x_0, x]$ las funciones f y g son continuas y derivables en el abierto (x_0, x), por lo que verifica las hipótesis del Teorema 5.7, en consecuencia existe $\hat{x} \in (x_0, x)$ tal que

$$[f(x) - f(x_0)]g'(\hat{x}) = [g(x) - g(x_0)]f'(\hat{x}) \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\hat{x})}{g'(\hat{x})}$$
$$\Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\hat{x})}{g'(\hat{x})},$$

note que si $x \longrightarrow x_0$ entonces $\hat{x} \longrightarrow x_0$, de donde se sigue que,

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\hat{x} \longrightarrow x_0} \frac{f'(\hat{x})}{g'(\hat{x})} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ii) Si $x_0 = \infty$, entonces considerando el cambio de variable $x_0 = \dfrac{1}{y}$, se reduce al caso anterior $i)$, es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \\
&= \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{\left[f\left(\frac{1}{y}\right)\right]'}{\left[g\left(\frac{1}{y}\right)\right]'} \\
&= \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)} \\
&= \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 5.9 Sean f y g funciones reales definidas en una vecindad de x_0, excepto quizá en el mismo punto x_0. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \infty$, con $g(z) \neq 0$, $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in (x_0, x]$ y si además existe $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, que verifica la igualdad siguiente,

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.1.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 5.1 Determine los intervalos (en caso de existir) en los cuales se puede aplicar el Teorema del Valor Medio, de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(\pi x)}$	*b*) $f(x) = \dfrac{2\pi x}{\cos(x)}$
c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$	*d*) $f(x) = \dfrac{1}{2x^3}$
e) $f(x) = \log(4x - 7)$	*f*) $f(x) = \operatorname{sen}(2x) - \cos(x)$

Ejercicio 5.2 Determine los valores c, que verifican el Teorema del Valor Medio en las funciones

dadas para cada intervalo correspondiente.

a) $f(x) = x^3 - 2x + 4,\ sobre\ [-3,3]$

b) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right),\ sobre\ [0,4]$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1},\ sobre,\ [0,2]$

d) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3},\ sobre\ [-1,2]$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) - 2\cos(2x),\ sobre\ [-\pi,\pi]$

f) $f(x) = \ln(5x^2 - 3),\ sobre\ [1,3].$

Ejercicio 5.3 Se sabe que un vehículo que se traslada de Quito a Guayaquil describe su posición a través de la función $r(t) = 5t^3 - 7t^2 + 2t - 3$, donde t representa el tiempo. Además, conociendo que se demora 6 horas en su recorrido y que la rapidez media es de 90 $\frac{km}{h}$, determine exactamente el tiempo en el cual la rapidez instantánea del vehículo coincidió con la rapidez media.

Ejercicio 5.4 Demuestre el Teorema 5.9.

Ejercicio 5.5 Demuestre que $|\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$.

Ejercicio 5.6 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \geq -1$, demuestre que $\sqrt[n]{1+x} < 1 + \dfrac{x}{n}$.

Ejercicio 5.7 Sean $\eta = \dfrac{p}{q} < 1$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ utilizando el teorema del valor medio, demuestre que $(x+y)^\eta < x^\eta + y^\eta$.

Ejercicio 5.8 Explique la razón por la cual no es posible aplicar el Teorema del Valor Medio a la función $f(x) = |2x - 3|$ en el intervalo $[1,2]$.

Ejercicio 5.9 Utilizando las reglas de Hôspital, calcule los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^{\sqrt{\ln(x)}}\left(\sqrt{\ln(x)}\right)^x}{(\sqrt{x})^{\ln(x)}(\ln(x))^{\sqrt{x}}}$

b) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \alpha} \frac{\sqrt{2\alpha^3 x - x^4} - \alpha\sqrt[3]{\alpha^2 x}}{\alpha - \sqrt[4]{\alpha x^3}}$

c) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{xe^x - 4 + 2e^x - 2x}{1 + x\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}(\pi x)}$

d) $\displaystyle f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(3x)\cot(2x)}{\ln(\cos x)}$

e) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \pi/2} \frac{2(e^{\cos x} + x - 1) - \pi}{\ln(\operatorname{sen}(-3x))}$

f) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \tan x} - \sqrt{1 + \tan x}}{\operatorname{sen}(2x)}$

g) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 3\pi} \frac{1 + \tan\left(\frac{x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

h) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \pi/2} \frac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sec x}$

i) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\tanh x}{tan^{-1} x}$

j) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\tan^{-1} x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}}{\coth^{-1} x - \frac{1}{x}}.$

6. Aplicaciones de la Derivada

6.1 Aplicaciones de la Derivada al Trazado de curvas

En esta sección se establece el trazado de curvas utilizando el criterio de la primera y segunda derivada así como las definiciones de tipos de funciones vistas en el capítulo anterior.

Definición 6.1 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es convexa si para todo $x_1, x_2 \in [a,b]$, se tiene que el segmento de recta que une $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$ queda sobre la gráfica de f.

Observación 6.1 Note que el segmento que une $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$ es la recta cuya gráfica está dada por la expresión analítica $h(x)$, como sigue:

$$h(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1), \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$

Observe que, para todo $x \in [a,b]$, esta recta queda encima de f, como indica la Figura 6.1, por lo tanto

$$\begin{aligned} h(x) > f(x) &\Longrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) > f(x) \\ &\Longrightarrow \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right](x - x_1) > f(x) - f(x_1) \\ &\Longrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}. \end{aligned}$$

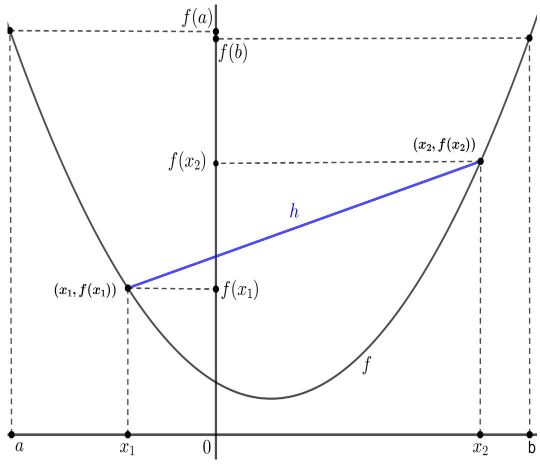


Figura 6.1: Función convexa.

Así, es posible establecer una definición equivalente a la anterior.

Definición 6.2 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función, se dice que f es convexa en $[a,b]$ si para $x_1,x_2\in[a,b]$ con $x_1<x<x_2$ se verifica $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Definición 6.3 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función, se dice uqe f es cóncava en $[a,b]$, si para $x_1,x_2\in[a,b]$ con $x_1<x<x_2$, se cumple que $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}>\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Proposición 6.1 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en todo su dominio y derivable en (a,b).

1) Si $f'(x)>0$, para todo $x\in(a,b)$, entonces f es creciente en $[a,b]$.

2) Si $f'(x)<0$, para todo $x\in(a,b)$, entonces f es decreciente en $[a,b]$.

Demostración. **1)** Sean $x_1,x_2\in[a,b]$ con $x_1<x_2$ entonces por hipótesis f es continua en $[x_1,x_2]$ y derivable en (x_1,x_2) por lo tanto aplicando el Teorema 5.4 (Teoerema del Valor Medio), seguimos que existe algún $x\in(x_1,x_2)$ tal que

$$(x_2-x_1)f'(x)=f(x_2)-f(x_1)\Longrightarrow f'(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{6.1}$$

Además, nuevamente por hipótesis $f'(x)>0$, pata todo $x\in(a,b)$ entonces de (6.1) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0 &\Longrightarrow f(x_2)-f(x_1)>0 \\ &\Longrightarrow f(x_2)>f(x_1),\end{aligned} \tag{6.2}$$

donde (6.2) se verifica, pues $x_1<x_2\Longrightarrow x_2-x_1>0$.

2) Así mismo, sean $x_1,x_2\in[a,b]$ con $x_1<x_2$ entonces aplicando el Teorema 5.4 (Teorema del

Valor Medio), sabemos que existe algún $x \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{6.3}$$

Por otro lado, como $f'(x) < 0$, para todo $x \in [a,b]$, entonces de (6.3) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 &\Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \qquad (6.4) \\ &\Longrightarrow f(x_2) < f(x_1), \end{aligned}$$

donde (6.4) se cumple, pues $x_2 - x_1 > 0$. ■

Para localizar los puntos máximos o mínimos de una función f definida en $[a,b]$, es necesario analizar tres tipos de puntos en dicho intervalo.

1) Los puntos singulares de f en $[a,b]$; estos puntos singulares se los suele también denominar puntos críticos.

2) Los extremos a y b.

3) Los puntos $x \in (a,b)$ tales que f no sea derivable en los mismos.

Observación 6.2 Se establece el siguiente esquema para el análisis de los puntos singulares. Supongamos que f es una función continua en un intervalo determinado tal que existe ξ en dicho intervalo, con $f'(\xi) = 0$, es decir ξ es un punto singular, entonces

a) Si $f'(x) > 0$, para $x < \xi$ y $f'(x) < 0$ para $x > \xi$, entonces ξ es un máximo local.

b) Si $f'(x) < 0$, para $x < \xi$ y $f'(x) > 0$ para $x > \xi$, entonces ξ es un mínimo local.

c) Si $f'(x) > 0$ para $x < \xi$ y para $x > \xi$ o si $f'(x) < 0$ para $x < \xi$ y para $x > \xi$, entonces ξ no es ni máximo ni mínimo local.

La observación se establece en la siguiente Gráfica(PONER)111. Para trazar gráficas es importante determinar:

1) Los puntos singulares de f.

2) El valor de f en los puntos singulares.

3) El signo de f' en las regiones entre los puntos singulares.

4) El valor de x, tales que $f(x) = 0$.

5) El comportamiento de f cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Teorema 6.2 (Criterio de la Segunda Derivada)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que existe $\xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = 0$ y si además existe $f''(x)$, para todo $x \in (a,b)$.

1) Si $f''(\xi) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en ξ.

2) Si $f''(\xi) < 0$, entonces f tiene un máximo local en ξ.

Demostración. Como $f''(x)$ existe para todo $x \in (a,b)$ entonces

$$\begin{aligned} f''(\xi) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(\xi+h) - f'(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(\xi+h)}{h}, \end{aligned}$$

se tiene la última igualdad arriba, puesto que por hipótesis $f'(\xi) = 0$.

1) Para el efecto, si

$$\begin{aligned} f''(\xi) > 0 &\Longrightarrow \frac{f'(\xi+h)}{h} > 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} f'(\xi+h) > 0, & \text{para } h > 0 \; suficientemente \; chico \\ f'(\xi+h) < 0, & \text{para } h < 0, suficientemente \; chico. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego por la Proposición 6.1, se tiene que f es creciente en un intervalo a la derecha de ξ y es decreciente en un intervalo a la izquierda de ξ, por lo tanto, ξ es un mínimo local de f.

2) Para este caso, si

$$\begin{aligned} f''(\xi) > 0 &\Longrightarrow \frac{f'(\xi+h)}{h} < 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} f'(\xi+h) < 0, & \text{para } h > 0 \; suficientemente \; chico \\ f'(\xi+h) > 0, & \text{para } h < 0, suficientemente \; chico, \end{cases} \end{aligned}$$

nuevamente por la Proposición 6.1, f tiene un máximo local en ξ. ∎

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función y $\xi \in (a,b)$ es un punto singular, es decir $f'(\xi) = 0$, entonces puede suceder que $f''(\xi) = 0$, en tal circunstancia no se garantiza nada respecto a ξ puede ser máximo o mínimo local, o a su vez puede no ser ni máximo ni mínimo local.

■ **Ejemplo 6.1** Sea $f(x) = x^3 - 1$, determine los puntos singulares, los puntos máximos y mínimos locales en caso de existir.

Solución.

Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$, además f es continua en $\mathbb{R}$, por lo tanto al derivar se obtiene $f'(x) = 3x^2$; luego si $f'(x) = 0$ de donde $3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$. Así $x = 0$ es un punto singular.

Ahora obteniendo la segunda derivada, $f''(x) = 6x$ e igualando a cero se sigue que, $6x = 0 \Longrightarrow x = 0$, entonces no es posible aplicar el Teorema 6.2, es decir no se garantiza nada respecto a la naturaleza del punto singular.

Note que para $f'(\varphi) > 0$ para todo $\varphi < h$ con $h < 0$ suficientemente pequeño. Además $f'(\varphi) > 0$ para todo $\varphi > h$, con $h > 0$ suficientemente pequeño. Luego por el ítem c) de la Observación 6.2, se concluye que $x = 0$ no es máximo local ni mínimo local, como se lo puede observar en la Figura 6.1.

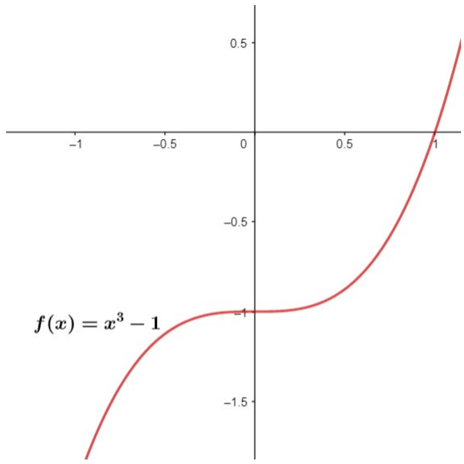


Figura 6.2: Función cúbica

■ **Ejemplo 6.2** Analice la naturaleza de la siguiente función y realice su gráfica.

$$f(x) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$$

Solución. Primero se procede a obtener la primera y segunda derivada de la función f. Esto es,

$$f'(x) = \frac{7}{2}x^2 - 3x - 2 \tag{6.5}$$

$$f''(x) = 7x - 3 \tag{6.6}$$

Ahora, se obtiene los puntos críticos, esto se obtiene igualando la primera derivada (6.5) a cero, es decir

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{7}{2}x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\implies x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\left(\dfrac{7}{2}\right)(-2)}}{2\left(\dfrac{7}{2}\right)}$$

$$\implies x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{7}$$

$$\implies x_1 = \frac{3-\sqrt{37}}{7} \quad \vee \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{7}.$$

Así, x_1 y x_2 son los puntos críticos; es necesario determinar la naturaleza de estos puntos, en consecuencia utilizando la segunda derivada (6.6) se tiene,

$$f''(x_1) = f\left(\frac{3-\sqrt{37}}{7}\right) = 7\left(\frac{3-\sqrt{37}}{7}\right) - 3 = -\sqrt{37} < 0$$

luego, por el Criterio de la segunda derivada, Teorema 6.2, se concluye que en $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{37}}{7}$ existe un máximo local.

De forma similar, se tiene,

$$f''(x_2) = f\left(\frac{3+\sqrt{37}}{7}\right) = 7\left(\frac{3+\sqrt{37}}{7}\right) - 3 = \sqrt{37} > 0,$$

por lo que en $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{37}}{7}$, existe un mínimo local debido al Teorema 6.2.

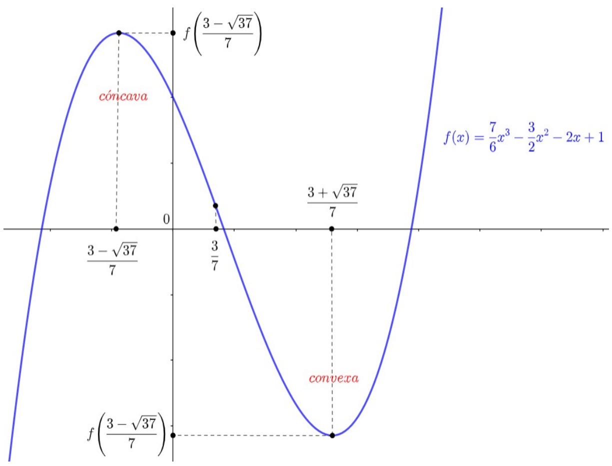


Figura 6.3: Propiedades geométricas de la función $f(x) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$.

Como $Dom(f) = \mathbb{R}$ y según los resultados de los puntos críticos, se tiene que en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{37}}{7}\right]$ la función f es creciente. En el intervalo $\left(\dfrac{3-\sqrt{37}}{7}, \dfrac{3+\sqrt{37}}{7}\right)$ la función es decreciente y finalmente en el intervalo $\left[\frac{3+\sqrt{37}}{7}, +\infty\right)$ es creciente.

Teorema 6.3 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que existe $f''(\xi)$ con $\xi \in (a,b)$. Entonces tenemos

a) Si f tiene un mínimo local en ξ, entonces $f''(\xi) \geq 0$.

b) Si f tiene un máximo local en ξ, entonces $f''(\xi) \leq 0$.

Demostración. **a)** Consideremos a ξ un mínimo local de f.

Supongamos que $f''(\xi) < 0$ en tal circunstancia, por el Teorema 6.2, se seguie que ξ es un máximo local de f, por lo tanto ésta debe ser una función constante, de donde $f''(\xi) = 0$, siendo esto contradictorio.

b) Si ξ es un máximo local de f y suponemos que $f''(\xi) > 0$, entonces por el Teorema 6.2 se sigue que ξ es a la vez un mínimo local de f, por lo tanto ésta es una función constante, en consecuencia $f''(\xi) = 0$, lo cual es contradictorio. ∎

6.1.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 6.1 Determine las asíntotas, puntos críticos, los intervalos de monotonía, los valores extremos locales, puntos de inflexión, concavidad y gráfica de cada una de las funciones siguientes:

$a)\ f(x) = e^x \cos(x)$	$b)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{5}x + 1$
$c)\ f(x) = -\sqrt{x} + x^3 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{x}$	$d)\ f(x) = -\frac{5}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{7}{2}$
$e)\ f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 5$	$f)\ f(x) = \text{sen}(x) - \frac{1}{\cos(x)}$
$g)\ f(x) = \ln(x) - \frac{1}{\text{sen}(x)}$	$h)\ f(x) = x^3 \text{sen}(x)$
$i)\ f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{e^x}$	$j)\ f(x) = \cos(2x) + \text{sen}(x)$
$k)\ f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4$	$l) f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{2x+7}}$
$m)\ f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-5x+1}{x-7}}$	$n) f(x) = \sqrt{\frac{-2x+3}{x^2-6x+9}}$
$o)\ f(x) = \frac{5x^3}{7x^2+3}$	$p) f(x) = \frac{4x^3+x^2-2x}{3x^3-12}$

Ejercicio 6.2 Se construirá una ventana rectangular coronada con un triángulo equilátero. En la parte rectangular se usará un vidrio que deja pasar el doble de luz por metro cuadrado que el vidrio que se usará en la parte triangular. Si el perímetro de la ventana es de 15 metros, determine las dimensiones que debe tener la ventana que deja pasar el máximo de luz.

Ejercicio 6.3 Una hoja rectangular de perímetro 36 cm y de dimensiones ”x” por ”y” cm se rota en torno al lado de medida ”y” para generar el cilindro que se muestra en la Figura 6.4. ¿Qué valores de ”x” e ”y” harán que el cilindro generado, tenga el mayor volumen.?

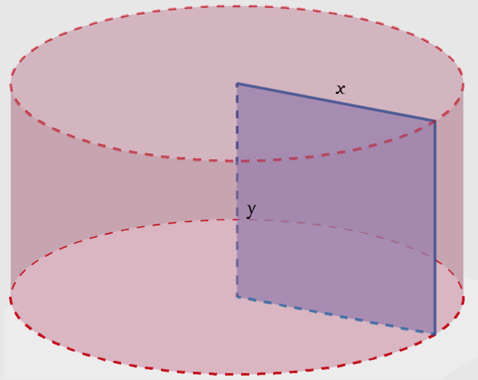


Figura 6.4: Cilindro de mayor volumen

Ejercicio 6.4 Determine la distancia más corta entre el punto $(-1,\pi)$ y la curva de ecuación $y = 3sen(2x)$.

Ejercicio 6.5 Determine la distancia más corta entre el punto $(2,3)$ y la curva de ecuación $y = e^{5x-1}$.

Ejercicio 6.6 Determine las dimensiones del cono circular recto de volumen de mínimo volumen que contiene una esfera de radio $r = \sqrt{2}$ m.

Ejercicio 6.7 Halle las dimensiones del rectángulo cuya área sea mayor, dado que el perímetro es de 10 m.

II

CÁLCULO INTEGRAL

7 La integral Indefinida 161

7.1 Funciones primitivas o antiderivadas
7.2 Integral Indefinida
7.3 Método de Sustitución
7.4 Integración por partes
7.5 Integración Trigonométrica
7.6 Integración de Funciones Racionales
7.7 Método de Sustitución Trigonométrica

8 Integral Definida 201

8.1 Sumatorias
8.2 Axioma del Supremo
8.3 Definición de Integral de Riemann
8.4 Teoremas Fundamentales del Cálculo
8.5 Aplicaciones de la Integral Definida

ISU CENTRAL TÉCNICO

7. La integral Indefinida

7.1 Funciones primitivas o antiderivadas

En está sección se estudiará como recuperar la función a partir de su derivada, debido a que existen muchos problemas que requieren que recuperemos una función a partir del conocimiento de su derivada, es decir, de su tasa o relación de cambio. Por ejemplo, suponga que conocemos la función velocidad de un objeto que cae desde una altura inicial y que necesitamos conocer su altura en cualquier instante de tiempo. De esta manera, se generaliza esta idea con la siguiente Definición 7.1.

Definición 7.1 Una función F es una **antiderivada** o **primitiva** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

El proceso de recuperar una función $F(x)$ a partir de su derivada $f(x)$ se denomina *antiderivación*. Utilizamos letras mayúsculas, como F para representar una antiderivada de una función f; G representa la antiderivada de g y así sucesivamente.

■ **Ejemplo 7.1**

1. Sea $f(x) = 3x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En esfecto, una primitiva de f es $F(x) = x^3$; puesto que $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.
2. Sea $g(x) = \cos(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto, una primitiva de g es $G(x) = \text{sen}(x)$; puesto que $G'(x) = \cos(x) = g(x)$.

3. Sea $h(x) = \pi$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto, una primitiva de h es $H(x) = \pi x$.
4. Si $j(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $J(x) = \arctan(x)$ es una primitiva de la función j; puesto que $J'(x) = j(x)$.

Observación 7.1 Mencionamos **una primitiva** y no **la primitiva** o **la antiderivada**, debido a que si F es una primitiva de f, entonces $F+C$ es también una primitiva de f, donde C es una constante. Desde el punto geométrico, la función definida por $y = F(x)+C$ es una traslación en la dirección del Eje y del gráfico de la función definida por $y = F(x)$ es una cantidad C, si $C > 0$ entonces la traslación será hacia arriba, ahora si $C < 0$ entonces la traslación es hacia abajo como se puede observar en la Figura 7.1. Está translación no cambia la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la función primitiva. De esta manera, se tiene el siguiente Teorema 7.1.

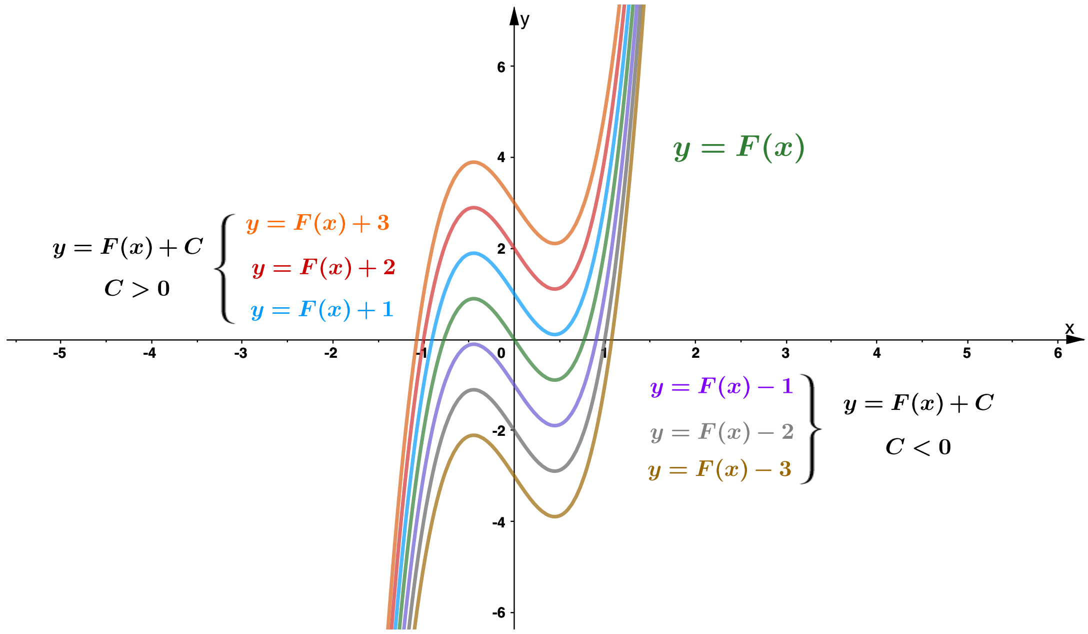


Figura 7.1: La función $y = F(x)$, con sus traslaciones hacía arriba $(C > 0)$ y abajo $(C < 0)$.

Teorema 7.1

Si F es una antiderivada o primitiva de f en un intervalo I. Entonces, la antiderivada más general de f en I es $F(x)+C$, donde C es una constante arbitraria.

Realizando la comparación de distintas primitivas de la función observamos que estas difieren en una constante, esto se lo puede expresar en el siguiente Teorema 7.2.

Teorema 7.2 Sean G y H antiderivadas de f en $]a,b[$, entonces $G-H$ es una función constante.

Demostración.

Se debe probar que $G-H$ es constante, es decir, $(G-H)'(x)=0$, para todo $x\in\,]a,b[$.

En efecto, como G y H son antiderivadas de f en $]a,b[$, esto es, $G'(x)=f(x)$ y $H'(x)=f(x)$, para todo $x\in\,]a,b[$. Así

$$(G-H)'(x)=G'(x)-H'(x)=f(x)-f(x)=0, \qquad \forall x\in\,]a,b[\,.$$

Por tanto, $G-H$ es constante en $]a,b[$. ■

Es posible seleccionar una primitiva en particular de esta familia, si se asigna un valor específico a C. A continuación se presenta un ejemplo que muestra cómo hacer tal asignación.

■ Ejemplo 7.2

Determine una antiderivada de $f(x)=3x^2$, que verifique $F(1)=-1$.

Solución:

En efecto, la antiderivada de f es $F(x)=x^3+C$, donde C es una constante real.

Ahora, utilizando la condición que $F(1)=-1$, se tiene

$$F(1)=(1)^3+C=1+C.$$

Puesto que, $F(1)=-1$ entonces $1+C=-1$ esto implica que $C=-2$. Por consiguiente, $F(x)=x^3-2$, para todo $x\in\mathbb{R}$ es la antiderivada que satisface $F(1)=-1$.

Observe que dicha asignación para C selecciona la curva particular de la familia de curvas $y=x^3+C$ que pasa por el punto (1,-1) en el plano.

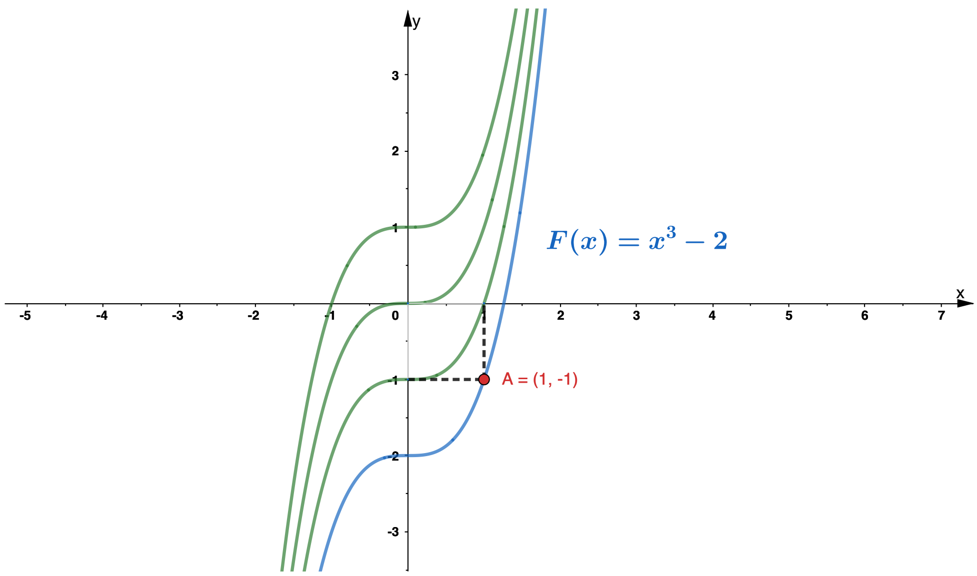


Figura 7.2: Ejemplo de una antiderivada definida en un punto

En la siguiente Tabla 7.1 se presenta las fórmulas de antiderivadas de funciones importantes.

	Función	Antiderivada General
1.	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C, \ \ n \neq -1$
2.	$\operatorname{sen}(kx)$	$-\frac{1}{k}\cos(kx)+C$
3.	$\cos(kx)$	$\frac{1}{k}\operatorname{sen}(kx)+C$
4.	$\sec^2(kx)$	$\frac{1}{k}\tan(kx)+C$
5.	$\csc^2(kx)$	$-\frac{1}{k}\cot(kx)+C$
6.	$\sec(kx)\tan(kx)$	$\frac{1}{k}\sec(kx)+C$
7.	$\csc(kx)\cot(kx)$	$-\frac{1}{k}\csc(kx)+C$
	k es una constante distinta de cero	

Tabla 7.1: Fórmulas de Antiderivadas

Observemos que las reglas de la Tabla 7.1 son fáciles de comprobar derivando la fórmula de la antiderivada general para obtener la función de la izquierda.

■ **Ejemplo 7.3** Determine la antiderivada general de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^7$,
b) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$,
c) $h(x)=\operatorname{sen}(9x)$,
d) $i(x)=\cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$.

Solución:

a) Utilizando la Tabla 7.1 la regla 1, se tiene

$$f(x)=x^7 \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{7+1}x^{7+1}+C=\frac{1}{8}x^8+C.$$

b) Utilizando la Tabla 7.1 la regla 1, se tiene

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{-\frac{3}{2}}.$$

Así,

$$G(x) = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-3\frac{3}{2}+1} + C = -2x^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{-2}{\sqrt{x}} + C.$$

c) Utilizando la Tabla 7.1 la regla 2, se tiene

$$h(x) = \operatorname{sen}(9x) \quad \Rightarrow \quad H(x) = -\frac{1}{9}\cos(9x) + C.$$

d) Utilizando la Tabla 7.1 la regla 3, se tiene

$$i(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad I(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) + C = \frac{2}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) + C.$$

Mediante las reglas de diferenciación se puede obtener reglas de las antiderivadas. Por ejemplo, suma, diferencia de antiderivadas o multiplicar por una constante, de esta manera se tiene la siguiente Tabla 7.2

	Función	**Antiderivada General**
1. Regla del múltiplo constante:	$kf(x)$	$kF(x)+C$, k es una constante
2. Regla del negativo:	$-f(x)$	$-F(x)+C$
3. Regla de la suma o diferencia:	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

Tabla 7.2: Reglas de linealidad para antiderivadas

Las reglas de la Tabla 7.2 son de la misma forma fáciles de probar. Observe que la regla 2 es un caso especial, para $k = -1$ en la regla 1.

■ **Ejemplo 7.4** Determine la antiderivada general de las siguientes funciones:

1. $g(x) = -\frac{2}{\sqrt{x^3}} + 7\operatorname{sen}(9x)$.

   Solución: En efecto, utilizando la regla de la suma y múltiplo de una constante de la Tabla 7.2, se sigue que

$$\begin{aligned} g(x) &= -2\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) + 7\operatorname{sen}(9x) \\ \Rightarrow \quad G(x) &= -2\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) + 7\left(-\frac{1}{9}\cos(9x)\right) + C \\ G(x) &= \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{7}{9}\cos(9x) + C. \end{aligned}$$

2. $f(x) = \dfrac{7x^5 - 3x^2 - 15}{x^2}$.

Solución: Primero observemos que f se lo puede escribir de la siguiente forma, $f(x) = 7x^3 - 3 - 15x^{-2}$. Ahora, aplicando las reglas de la Tabla 7.2, se tiene

$$F(x) = \frac{7}{4}x^4 - 3x - \frac{15}{-1}x^{-1} + C$$
$$F(x) = \frac{7}{4}x^4 - 3x + \frac{15}{x} + C,$$

donde F es la antiderivada de f, puesto que $F'(x) = f(x)$.

7.1.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 7.1

Determine la antiderivada general de las siguientes funciones y verifique las respuestas utilizando la derivada.

1. (a) $\frac{3}{4}x$	(b) $3x^2$	(c) $2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$
2. (a) $-7x^{-2}$	(b) $-4x^{-4}$	(c) $-\frac{1}{2}x^{-2} + 3x^{-4} - \frac{5}{2}$
3. (a) $-\frac{1}{5}x^{-5}$	(b) $\frac{x^{-3}}{2} + x^6$	(c) $2x^6 - \frac{x^{-5}}{4} + 2x^{-3} + 3$
4. (a) $\frac{3}{x^2}$	(b) $\frac{7}{x^3}$	(c) $4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$
5. (a) $\frac{3}{4}x^3$	(b) $-\frac{3}{x^3}$	(c) $\frac{3}{7}x^3 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2}x$
6. (a) $-\frac{3}{2}\sqrt{x}$	(b) $-4\sqrt[3]{x^2}$	(c) $2\sqrt{x} - \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}$
7. (a) $\frac{4}{3}\sqrt[5]{x}$	(b) $\frac{2}{3\sqrt[7]{x}}$	(c) $-3\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[7]{x}} - \frac{9}{2}$
8. (a) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{4}}$	(b) $-4x^{-\frac{1}{5}}$	(c) $\frac{7}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{5}} + \frac{3}{2}x + 1$
9. (a) $-\frac{1}{3}\sqrt[5]{x^3}$	(b) $-\frac{4}{5x^{\frac{2}{3}}}$	(c) $-2\sqrt[5]{x^3} - \frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}} - \frac{3}{2}$
10. (a) $\frac{4}{3}\sqrt[5]{x}$	(b) $\frac{2}{3\sqrt[7]{x}}$	(c) $-3\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[7]{x}} - \frac{9}{2}$
11. (a) $-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	(b) $\frac{2}{3}\operatorname{sen}(x)$	(c) $\pi\operatorname{sen}(-\pi x) - 4\operatorname{sen}(x)$
12. (a) $\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$	(b) $-\pi\cos(\pi x)$	(c) $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{\pi}{2}\cos(\pi x)$

13. (a) $\dfrac{3}{4}\sec^2(x)$ (b) $\dfrac{1}{3}\sec^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$ (c) $-\sec^2\left(\dfrac{2x}{3}\right)$

14. (a) $\dfrac{1}{2}\csc^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (b) $\dfrac{\pi}{4}\csc^2\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$ (c) $-4\csc^2(2x)$

15. (a) $\dfrac{1}{2}\csc(x)\cot(x)$ (b) $-\dfrac{1}{5}\csc\left(\dfrac{1}{5}x\right)\cot\left(\dfrac{1}{5}x\right)$ (c) $-\dfrac{\pi}{2}\csc\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$

16. (a) $\dfrac{1}{4}\sec(4x)\tan(4x)$ (b) $-\pi\sec\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ (c) $-3\sec(3x)\tan(3x)$

17. (a) $\dfrac{1}{2}\sec\left(\sqrt{2}x\right)\tan\left(\sqrt{2}x\right)$ (b) $\dfrac{1}{3}\csc\left(\sqrt{3}x\right)\cot\left(\sqrt{3}x\right)$ (c) $-\dfrac{1}{2}\csc^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$

18. (a) $\dfrac{7x^5-3x^3-4}{x^2}$ (b) $\dfrac{x^2\sec^2(x)-7x^3+3}{x^2}$

Determine la antiderivada de las funciones tal que verifique la condición inicial.

19. $f(x)=2x,\ \text{si } F(1)=4.$

20. $f(x)=-x,\ \text{si } F(-1)=1.$

21. $f(x)=2x-7,\ \text{si } F(2)=0.$

22. $f(x)=7x^2-5x+3,\ \text{si } F(-1)=0.$

23. $f(x)=3x^{-2/3}+1,\ \text{si } F(-1)=-5.$

24. $f(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}},\ \text{si } F(4)=0.$

25. $f(x)=1+\cos(2x),\ \text{si } F(0)=4.$

26. $f(x)=-\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right),\ \text{si } F(0)=0.$

27. $f(x)=8x+\sec^2(x),\ \text{si } F(0)=1.$

7.2 Integral Indefinida

En está sección se introducirá un símbolo para denotar al conjunto de todas las antiderivadas o primitivas de una función f, de lo cuál se obtiene la siguiente definición

Definición 7.2 — Integral Indefinida.
El conjunto de todas las antiderivadas o primitivas de f es la **integral indefinida** de f respecto a x, y se denota,

$$\int f(x)\,dx, \quad \text{o simplemente} \quad \int f.$$

Es decir, $\displaystyle\int f=\int f(x)\,dx=F(x)+C$, donde F es una antiderivada tal que $F'=f$.

Observación 7.2

- El símbolo $\displaystyle\int$ es el **signo de integral**. La función f es el integrando y x es la variable de integración.

- La letra x que aparece en $\int f(x)\,dx$ no tiene significado especial y se le conoce como la variable **muda**, así, se tiene

$$\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt = \int f(u)\,du = \int f(z)\,dz.$$

Puesto que cada fórmula derivación nos proporciona de manera inmediata antiderivadas por los resultados en la sección 7.1, se puede elaborar una tabla de integrales indefinidas.
A continuación se presenta algunas antiderivadas elementales:

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \forall n \neq -1.$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C = \ln K|x|, \quad K > 0.$
3. $\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
4. $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
5. $\int e^{ax}\,dx = \dfrac{1}{a}e^{ax} + C.$
6. $\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
7. $\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
8. $\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C.$
9. $\int \csc^2(x)\,dx = \cot(x) + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}(x) + C.$
12. $\int -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) + C.$

Observación 7.3

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$
2. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x).$

Proposición 7.3 $\int$ es un operador lineal, es decir,

1. $\int f \pm g = \int f \pm \int g.$
2. $\int \alpha f = \alpha \int f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Demostración.

1. Sean $F+C_1=\int f$ y $G+C_2=\int g$. Entonces, $F'=f$ y $G'=g$, se sigue que

$$(f\pm g)=(F\pm G)'.$$

Luego, $(F\pm G)$ es la antiderivada de $(f\pm g)$, esto es,

$$\int f\pm g=\int f\pm\int g.$$

2. Sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\int f=F+C$. Entonces, $F'=f$ en consecuencia $(\alpha F)'=\alpha f$. Así,

$$\begin{aligned} \alpha F &= \int \alpha f \\ \Rightarrow \quad \int \alpha f &= \alpha\int f. \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 7.5** Determinar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \left[\cos(x)+x^5+2e^x\right]dx$,

b) $\int \left[7x^6-3x^2+2x-4\right]dx$,

c) $\int \left(\sqrt{x}-e^x\right)dx$,

d) $\int \left(2\sec^2(x)-\dfrac{3}{1+x^2}\right)dx$.

Solución:

Utilizando las fórmulas anteriores y la Proposición 7.3, se sigue que

$$\text{a)}\ \int\left[\cos(x)+x^5+2e^x\right]dx=\int\cos(x)\,dx+\int x^5\,dx+\int 2e^x\,dx$$
$$=\int\cos(x)\,dx+\int x^5\,dx++2\int e^x\,dx+C$$
$$=\operatorname{sen}(x)+\frac{x^6}{6}+2e^x+C.$$

$$\text{b)}\ \int\left[7x^6-3x^2+2x-4\right]dx=\int 7x^6\,dx-\int 3x^2\,dx+\int 2x\,dx-\int 4\,dx$$
$$=7\int x^6\,dx-3\int x^2\,dx+2\int x\,dx-4\int dx$$
$$=x^7-x^3+x^2-4x+C.$$

$$\text{c)}\ \int\left(\sqrt{x}-e^x\right)dx=\int\sqrt{x}\,dx-\int e^x\,dx$$
$$=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int e^x\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - e^x + C.$$

d) $$\int \left(2\sec^2(x) - \frac{3}{1+x^2}\right) dx = \int 2\sec^2(x)\,dx - \int \frac{3}{1+x^2}\,dx$$
$$= 2\int \sec^2(x)\,dx + 3\int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= 2\tan(x) - 3\arctan(x) + C.$$

7.2.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 7.2 Determine la antiderivada más general o la integral indefinidad. Verifique la respuesta mediante derivación.

1. $\int (x-1)\,dx$
2. $\int (7-4x)\,dx$
3. $\int \left(3w^2 + \frac{w}{3}\right) dw$
4. $\int (8t^7 - 4t^3)\,dt$
5. $\int \left(2x^3 - 5x + 7\right) dw$
6. $\int (1 - x^2 - 3x^5)\,dt$
7. $\int \left(-\frac{2}{x^4} + x^5 - \frac{1}{3}\right) dx$
8. $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{3}{x^4} + 3x\right) dx$
9. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$
10. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$
11. $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy$
12. $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) dy$
13. $\int \left(\frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2}\right) dt$
14. $\int \left(\frac{4+\sqrt{t}}{t^3}\right) dt$
15. $\int -2\cos(t)\,dt$
16. $\int -5\,\mathrm{sen}(t)\,dt$
17. $\int -3\csc^2(x)\,dx$
18. $\int \left(-\frac{\sec^2(x)}{3}\right) dx$
19. $\int \left(\frac{\csc(\theta)\cot(\theta)}{2}\right) d\theta$
20. $\int \left(\frac{2}{5}\sec(\theta)\tan(\theta)\right) d\theta$
21. $\int \left(\mathrm{sen}(2x) - \csc^2(x)\right) dx$
22. $\int \left(2\cos(2x) - 3\,\mathrm{sen}(3x)\right) dx$
23. $\int \left(\frac{1+\cos(4t)}{2}\right) dt$
24. $\int \left(\frac{1-\cos(6t)}{2}\right) dt$
25. $\int \left(1 + \tan^2(\theta)\right) d\theta$

    $\left(\textbf{Sugerencia:} 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)\right)$
26. $\int \left(2 + \tan^2(\theta)\right) d\theta$
27. $\int \cot^2(x)\,dx$
28. $\int \left(1 - \cot^2(x)\right) dx$

$\left(\textbf{Sugerencia:} 1+\cot^2(x)=\csc^2(x)\right)$

29. $\displaystyle\int \cos(\theta)\left(\tan(\theta)+\sec(\theta)\right)d\theta$

30. $\displaystyle\int \frac{\csc(\theta)}{\csc(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)}\,d\theta$

VERIFICACIÓN DE FÓRMULAS DE ANTIDERIVADAS

Utilice la derivación para verificar las siguientes fórmulas.

31. $\displaystyle\int (5x-1)^2\,dx = \frac{(5x-1)^3}{15}+C$
32. $\displaystyle\int (4x+3)^{-2}\,dx = -\frac{(4x+3)^{-1}}{4}+C$
33. $\displaystyle\int \sec^2(3x-1)\,dx = \frac{1}{3}\tan(3x-1)+C$
34. $\displaystyle\int \csc^2\left(\frac{x-3}{2}\right)dx = -2\cot\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$
35. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x+1}+C$
36. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{x}{x+1}+C$

Determine si cada una de las siguientes fórmulas es cierta o falsa y argumente el porqué de su respuesta.

37. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(x)+C$
38. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x)\,dx = -x\cos(x)+C$
39. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x)\,dx = -x\cos(x)+\operatorname{sen}(x)+C$
40. $\displaystyle\int \tan(\theta)\sec^2(\theta)\,d\theta = \frac{\sec^3(\theta)}{3}+C$
41. $\displaystyle\int \tan(\theta)\sec^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\tan^2(\theta)+C$
42. $\displaystyle\int \tan(\theta)\sec^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\sec^2(\theta)+C$
43. $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx = \sqrt{x^2+x+C}$
44. $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx = \sqrt{x^2+x}+C$
45. $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+C$

7.3 Método de Sustitución

El método de sustitución para integrales se lo plantea mediante el siguiente **Teorema**

Teorema 7.4 — Cambio de Variable. Si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)\,du = \int (f\circ g)(x)\cdot g'(x)\,dx$$

o, equivalente

$$\int f = \int (f\circ g)\cdot g'$$

Demostración. Sea F una antiderivada de f, es decir, $F'(u) = f(u)$.
Como $u = g(x)$, entonces $F(u) = (F\circ g)(x)$. Ahora, utilizando la regla de la cadena, se tiene

$$(F\circ G)'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x).$$

Por tanto, $(F\circ g)$ es una antiderivada de $f(g(x))\cdot g'(x)$, es decir,

$$F(u) = \int f(u)\,du \quad \text{y} \quad (F\circ g) = \int (f\circ g)\cdot g'.$$

Puesto que, $F(u) = (F\circ g)(x)$ entonces

$$\int f(u)\,du = \int (f\circ g)(x)\cdot g'(x)\,dx.$$

■

■ **Ejemplo 7.6** Determinar las siguientes integrales utilizando el método de sustitución:

1. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx.$
   Solución: Sea $u = \operatorname{sen}(x)$, entonces $du = cos(x)\,dx$. Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{du}{1+u^2} &= \arctan(u)+C\\ &= \arctan(\operatorname{sen}(x))+C.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\right)dx.$

Solución: Sea $u = \arctan(x)$, entonces $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Así,

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\right) dx &= \int e^u\, du \\ &= e^u + C \\ &= e^{\arctan(x)} + C.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \tan(x)\, dx$

   Solución: Primero observe que $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, se tiene

$$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\, dx.$$

   Por consiguiente, $u = \cos(x)$ entonces $du = -\operatorname{sen}(x)\, dx$

$$\begin{aligned}\int \tan(x)\, dx &= \int -\frac{1}{u}\, du \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos(x)| + C \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos(x)}\right| + C \\ &= \ln|\sec(x)| + C.\end{aligned}$$

   Por tanto, $\displaystyle\int \tan(x)\, dx = \ln|\sec(x)| + C.$

4. $\displaystyle\int \sec(x)\, dx$

   Solución: Utilizando el siguiente artificio, se tiene

$$\int \sec(x)\, dx = \int \frac{\sec(x)\,(\sec(x)+\tan(x))}{\sec(x)+\tan(x)}\, dx.$$

   Por consiguiente, $u = \sec(x)+\tan(x)$ entonces $du = \big(\sec(x)\cdot\tan(x)+\sec^2(x)\big)\, dx$. Así,

$$\begin{aligned}\int \sec(x)\, dx = \int \frac{1}{u}\, du &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C.\end{aligned}$$

5. $\int (ax+b)^n\, dx$, con $n \neq -1$.

Solución: Sea $u = ax+b$, entonces $du = a\,dx$. Así,

$$\int (ax+b)^n \, dx = \int u^n \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$
$$= \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$$

6. $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3}\, dx.$

Solución: Sea $u = 3x-7$, entonces $du = 3\,dx$

$$\int \sqrt[5]{(3x-7)^3}\, dx = \int u^{3/5} \cdot \frac{du}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\frac{u^{3/5+1}}{\frac{3}{5}+1}$$
$$= \frac{1}{3}\frac{(3x-7)^{8/5}}{\frac{8}{5}} + C$$
$$= \frac{1}{3}\frac{(3x-7)^{8/5}}{\frac{8}{5}} + C$$
$$= \frac{5}{24}(3x-7)^{8/5} + C.$$

7. $\int x^5 \sqrt{1+x^2}\, dx.$

Solución: Sea $u = 1+x^2$, entonces $du = 2x\,dx$

$$\int x^5 \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \sqrt{u}(u-1)^2 \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}(u^2-2u+1)\, du$$
$$= \frac{1}{2}\int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})\, du$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} - 2\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right) + C$$
$$= \frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

8. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C.$

7.3.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 7.3

Determine las siguientes integrales indefinidas, utilizando el método de sustitución.

1. $\displaystyle\int \frac{18x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{sen}(x)}{\sqrt{5-3\,\cos(x)}}\,dx.$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x}\left(\sqrt{3x}-5\right)}.$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x-\sqrt{2x}}.$
5. $\displaystyle\int \cot(4-5x)\,dx.$
6. $\displaystyle\int \csc(3\pi x-7)\,dx.$
7. $\displaystyle\int \frac{\cos\left(7-\ln(x)\right)}{3x}\,dx.$
8. $\displaystyle\int \sec\left(\frac{t}{3}\right)\,dt.$
9. $\displaystyle\int 3x^2\sec(x^3-4)\,dx.$
10. $\displaystyle\int 5^{2\theta}\,d\theta.$
11. $\displaystyle\int \frac{e^{2\theta}}{2}\csc(e^{2\theta}-2)\,d\theta.$
12. $\displaystyle\int \frac{e^{3\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt.$
13. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}.$
14. $\displaystyle\int \frac{2}{x(1-4\ln^2(x))}\,dx.$
15. $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{w}}}{2\sqrt{w}}\,dw.$
16. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$
17. $\displaystyle\int \frac{2^{\ln(x)}}{2x}\,dx.$
18. $\displaystyle\int \frac{7}{x\sqrt{21x^2-1}}\,dx.$
19. $\displaystyle\int \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx.$

7.4 Integración por partes

En está sección, mostraremos otro método de integración en el cual se relaciona la regla del producto de la derivada, de esta manera se enuncia la siguiente proposición.

Proposición 7.5 — Fórmula de Integración por partes. Sean u y v dos funciones de x. Entonces,

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

o equivalente

$$\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v.$$

Demostración. Notemos primero que,

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Luego, utilizando la **Proposición de linealidad**, se tiene

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

y despejando, se concluye que

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx.$$

■

Observación 7.4 Usualmente la fórmula de integración por partes se escribe de manera más compacta como

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du,$$

donde $dv = v'(x)\,dx$ y $du = u'(x)\,dx$.

■ **Ejemplo 7.7** Determinar las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

1. $\int x e^x\,dx$.

   Solución:

   Sean $\begin{cases} u = x & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^x\,dx & \Rightarrow \quad v = e^x \end{cases}$. Entonces,

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C.$$

2. $\int \ln(x)\,dx$.

   Solución:

   Sean $\begin{cases} u = \ln(x) & \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & \Rightarrow \quad v = x \end{cases}$. Entonces,

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C.$$

3. $\int x^2 e^x\,dx$.

   Solución:

   Sean $\begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow \quad du = 2xdx \\ dv = e^x\,dx & \Rightarrow \quad v = e^x \end{cases}$. Entonces,

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x.$$

   Utilizando el resultado de la integral anterior, se tiene

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\,[xe^x - e^x] + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

4. $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx.$

Solución:

Sean $\begin{cases} u = \operatorname{sen}(x) & \Rightarrow & du = \cos(x)dx \\ dv = e^x\,dx & \Rightarrow & v = e^x \end{cases}$. Entonces,

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x cos(x)\,dx. \tag{7.1}$$

Aplicando de nuevo integración por partes para $\displaystyle\int e^x \cos(x)\,dx.$

Realizando $\begin{cases} u = \cos(x) & \Rightarrow & du = -\operatorname{sen}(x)\,dx \\ dv = e^x\,dx & \Rightarrow & v = e^x \end{cases}$, se tiene

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) - \int e^x\,(-\operatorname{sen}(x))\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx. \tag{7.2}$$

Reemplazando (7.1) en (7.2), se tiene

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx &= e^x \operatorname{sen}(x) - \left[e^x \cos(x) + \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx\right] \\ &= e^x \operatorname{sen}(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx + \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx &= e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + K \\ 2\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx &= e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + K \\ \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx &= \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + C. \end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int (\ln(x))^2\,dx.$

Solución:

Sean $\begin{cases} u = (\ln(x))^2 & \Rightarrow & du = 2\,\dfrac{\ln(x)}{x}dx \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{cases}$. Entonces,

$$\int (\ln(x))^2\,dx = x(\ln(x))^2 - \int \cancel{x}\,\frac{\ln(x)}{\cancel{x}}\,dx\,dx = x(\ln(x))^2 - 2\int \ln(x).$$

Utilizando el resultado de la integral anterior, se tiene

$$\int (\ln(x))^2\,dx = x(\ln(x))^2 - 2(x\ln(x) - x) + C.$$

6. $\displaystyle\int e^{\text{sen}^2(x)}\,\text{sen}(4x)\,dx.$

   Solución:

   Primero observemos que,

$$\int e^{\text{sen}^2(x)}\,\text{sen}(4x)\,dx = 2\int e^{\text{sen}^2(x)}\,\text{sen}(2x)\cos(2x)\,dx.$$

   Realizando $\begin{cases} u = \cos(2x) & \Rightarrow \quad du = -2\,\text{sen}(2x)dx \\ dv = e^{\text{sen}^2(x)}\,\text{sen}(2x)dx & \Rightarrow \quad v = e^{\text{sen}^2(x)} \end{cases}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int e^{\text{sen}^2(x)}\,\text{sen}(4x)\,dx &= 2e^{\text{sen}^2(x)}\cos(2x) - 2\int -2e^{\text{sen}^2(x)}\,\text{sen}(2x)\,dx \\
&= 2e^{\text{sen}^2(x)}\cos(2x) + 4\int e^{\text{sen}^2(x)}\,\text{sen}(2x)\,dx \\
&= 2e^{\text{sen}^2(x)}\cos(2x) + 4e^{\text{sen}^2(x)} + C \\
&= 2e^{\text{sen}^2(x)}(\cos(2x)+2) + C.
\end{aligned}$$

7.4.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 7.4

Resolver las siguientes integrales por el método de integración por partes.

1. $\displaystyle\int x\cos\left(\frac{x}{3}\right)\,dx$
2. $\displaystyle\int t^2\,\text{sen}(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int \omega\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\,d\omega$
4. $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int x^2\ln(x)\,dx$
6. $\displaystyle\int t\ln(t)\,dt$
7. $\displaystyle\int \tan^{-1}(x)\,dx$
8. $\displaystyle\int \text{sen}^{-1}(y)\,dy$
9. $\displaystyle\int 2x\sec^2(x)\,dx$
10. $\displaystyle\int 6t\sec^2(t)\,dt$
11. $\displaystyle\int x^4\,\mathrm{e}^x\,dx$
12. $\displaystyle\int p^3\,e^{-p}\,dp$
13. $\displaystyle\int (x^2-7x)\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$
14. $\displaystyle\int (r^2+r+1)\,e^{2r}\,dr$
15. $\displaystyle\int t^3\,\mathrm{e}^{3t}\,dt$
16. $\displaystyle\int \theta^2\,\text{sen}(2\theta)\,d\theta$
17. $\displaystyle\int 2x\,\text{sen}^{-1}(x^2)\,dx$
18. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\text{sen}(x)\,dx$
19. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}\cos(2x)\,dx$
20. $\displaystyle\int e^{-2x}\,\text{sen}(5x)\,dx$

Realizar las siguientes integrales utilizando el método de sustitución e integración por partes.

21. $\int e^{\sqrt{4x+8}}\,dx$

22. $\int y\sqrt{1-y}\,dy$

23. $\int x\tan^2(x)\,dx$

24. $\int \ln(x+x^2)\,dx$

25. $\int \operatorname{sen}(\ln(x))\,dx$

26. $\int z(\ln z)^2\,dz$

7.5 Integración Trigonométrica

En está sección se realizara el estudio de las integrales trigonométricas, en la cual incluye combinaciones algebraicas de las seis funciones trigonométricas básicas. El objetivo es expresar en funciones del seno y coseno, pero con frecuencias es más sencillo hacerlo con otras funciones, por ejemplo:

$$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C.$$

La idea principal es utilizar las integrales trigonométricas para transformar las integrales en integrales más sencillas de trabajar.

7.5.1 Producto de potencias de senos y cosenos

Analizamos el siguiente tipo de integral:

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx,$$

donde m y n son enteros no negativos (positivo o cero). Ahora, consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Si m es impar, entonces $m = 2k+1$ para $k \in \mathbb{N}$ y utilizamos las identidad $\operatorname{sen}^2(x) = 1-\cos^2(x)$. Así, $\operatorname{sen}^m(x) = \operatorname{sen}^{2k+1}(x) = \left(\operatorname{sen}^2(x)\right)^k \operatorname{sen}(x) = \left(1-\cos^2(x)\right)^k \operatorname{sen}(x)$. Luego, combinamos en la integral el $\operatorname{sen}(x)$ con dx y tenemos $\operatorname{sen}(x)\,dx$ que es igual $-d(\cos(x))$.

Caso 2: Si m es par y n es impar, entonces elegimos $n = 2k+1$ para $k \in \mathbb{N}$ y utilizamos la identidad trigonométrica $\cos^2(x) = 1-\operatorname{sen}^2(x)$. Así,

$$\begin{aligned}\cos^n(x) = \cos^{2k+1}(x) &= (\cos^2(x))^k \cdot \cos(x)\\ &= (1-\operatorname{sen}^2(x))^k \cdot \cos(x).\end{aligned}$$

Luego, combinamos el $\cos(x)$, que está solo, con dx, y hacemos $\cos(x)\,dx$ es igual a $d(\operatorname{sen}(x))$.

Caso 3: Si m y n son pares, entonces sustituimos por las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

para reducir el integrando a uno con potencia menores de $\cos(2x)$.

■ **Ejemplo 7.8** Determinar las siguientes integrales trigonométricas por los casos anteriores.

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)\,dx.$

   Solución:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)\,dx &= \int \operatorname{sen}^4(x)\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)\,dx\\ &= \int (\operatorname{sen}^2(x))^2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)\,dx\\ &= \int (1-\cos^2(x))^2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)\,dx.\end{aligned}$$

   Haciendo $u=\cos(x)$, entonces $du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)\,dx = \int (1-u^2)^2u^2(-du) &= -\int (1-2u^2+u^4)u^2\,du\\ &= -\int (u^2-2u^4+u^6)\,du\\ &= -\frac{u^3}{3}+2\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+C\\ &= -\frac{\cos^3(x)}{3}+\frac{2}{5}\cos^5(x)-\frac{\cos^7(x)}{7}+C.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)\,dx$

   Solución:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)\,dx &= \int \operatorname{sen}^4(x)\cos^2(x)\cos(x)\,dx\\ &= \int \operatorname{sen}^4(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))\cos(x)\,dx.\end{aligned}$$

   Haciendo $u=\operatorname{sen}(x)$, entonces $du=\cos(x)\,dx$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)\,dx = \int u^4(1-u^2)\,du &= \int (u^4-u^6)\,du\\ &= \frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+C\end{aligned}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7(x)}{7} + C.$$

3. $\int \operatorname{sen}^6(x)\,dx.$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^6(x)\,dx &= \int \left(\operatorname{sen}^2(x)\right)^3 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos(2x))\right]^3 dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left[1-3(1)^2\cos(2x)+3(1)(\cos(2x))^2-(\cos(2x))^3\right] dx \\
&= \frac{1}{8}\left[x-3\int\cos(2x)\,dx+3\int\cos^2(2x)\,dx-\int\cos^3(2x)\right] dx, \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} u=2x \\ \frac{du}{2}=dx \end{array} \\
&= \frac{1}{8}\left[x-\frac{3}{2}\int\cos(u)\,du+3\int\cos^2(2x)\,dx-\int\cos^3(2x)\right] \\
&= \frac{x}{8}-\frac{3}{16}\operatorname{sen}(u)+\frac{3}{8}\int\frac{1}{2}(1+\cos(4x))\,dx-\frac{1}{8}\int\cos^3(2x)\,dx \\
&= \frac{x}{8}-\frac{3}{16}\operatorname{sen}(2x)+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\operatorname{sen}(4x)-\frac{1}{16}\int\cos^3(u)\,du \\
&= \frac{x}{8}-\frac{3}{16}\operatorname{sen}(2x)+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\operatorname{sen}(4x)-\frac{1}{16}\int\cos(u)\left(1-\operatorname{sen}^2(u)\right) du \\
&= \frac{x}{8}-\frac{3}{16}\operatorname{sen}(2x)+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\operatorname{sen}(4x)-\frac{1}{16}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x)+C \\
&= \frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+\frac{3}{64}\operatorname{sen}(4x)+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x)+C.
\end{aligned}$$

4. $\int \cos^4(x)\,dx.$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \cos^4(x)\,dx = \int \left(\cos^2(x)\right)^2 dx &= \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int\left(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\left[x+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{sen}(2x)+\int\cos^2(2x)\,dx\right] \\
&= \frac{x}{4}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1+\cos(4x))\,dx \\
&= \frac{x}{4}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x)+C \\
&= \frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+C.
\end{aligned}$$

7.5.2 Método de eliminación de raíces cuadradas

Cuando una expresión trigonométrica que tenga raíces cuadradas, utilizamos la identidad trigonométrica $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ para eliminar sus raíces cuadradas.

■ **Ejemplo 7.9** Determinar la siguiente integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\cos(6x)}\,dx.$$

Solución:

Para eliminar la raíz cuadrada utilizamos la identidad

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \quad \text{o} \quad 1+\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta).$$

En nuestro caso elegimos $\theta = 3x$, esto se transforma en

$$1+\cos(6x) = 2\cos^2(3x).$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\cos(6x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2\cos^2(3x)}\,dx &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2(3x)}\,dx \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} |\cos(3x)|\,dx, \quad \text{con} \quad \begin{array}{l}\cos(3x) \geq 0 \\ \text{en } \left[0, \frac{\pi}{6}\right]\end{array} \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,dx \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}[1-0] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

7.5.3 Integrales de potencias de $\tan(x)$ y $\sec(x)$

En esta parte se conoce como integrar la tangente, la secante y sus cuadrados. Para integrar potencias mayores, utilizamos las identidades $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ y $\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1$ e integramos por partes, cuando sea necesario para reducir las potencias grandes o potencias menores.

■ **Ejemplo 7.10** Calcular las siguientes integrales

1. $\int \tan^4(x)\,dx$.

   Solución:

$$\int \tan^4(x)\,dx = \int \tan^2(x)\cdot\tan^2(x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \tan^2(x)\cdot\left(\sec^2(x)-1\right)\,dx\\
&= \int \tan^2(x)\cdot\sec^2(x)\,dx - \int \tan^2(x)\,dx\\
&= \int \tan^2(x)\cdot\sec^2(x)\,dx - \int \sec^2(x)\,dx + \int\,dx.
\end{aligned}
$$

En la primera integral utilizamos la integración por sustitución,

$$u=\tan(x) \quad \Rightarrow \quad du=\sec^2(x)\,dx$$

entonces,

$$\int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C.$$

Por tanto,

$$\int \tan^4(x)\,dx = \frac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x + C.$$

2. $\int \tan^6(x)\sec^4(x)\,dx.$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\int \tan^6(x)\sec^4(x)\,dx &= \int \tan^6(x)\sec^2(x)\cdot\sec^2(x)\,dx\\
&= \int \tan^4(x)(1+\tan^2(x))\cdot\sec^2(x)\,dx\\
&= \int (\tan^6(x)+\tan^8(x))\cdot\sec^2(x)\,dx, \quad \text{hacemos } u=\tan(x) \Rightarrow du=\sec^2(x)\,dx\\
&= \int (u^6+u^8)\,du\\
&= \frac{u^7}{7}+\frac{u^9}{9}+C\\
&= \frac{\tan^7(x)}{7}+\frac{\tan^9(x)}{9}+C.
\end{aligned}
$$

3. $\int \tan^5(x)\sec^7(x)\,dx.$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\int \tan^5(x)\sec^7(x)\,dx &= \int (\tan^2(x))^2\tan(x)\cdot\sec^6(x)\sec(x)\,dx\\
&= \int (\sec^2(x)-1)^2\sec^6(x)\cdot\tan(x)\sec(x)\,dx, \quad \text{hacemos } \begin{array}{l} u=\sec(x)\\ du=\tan(x)\sec(x)\,dx \end{array}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \int (u^2-1)^2 u^6\,du \\
&= \int (u^4-2u^2+1)u^6\,du \\
&= \int (u^{10}-2u^8+u^6)\,du \\
&= \frac{u^{11}}{11}-\frac{2u^9}{9}+\frac{u^7}{7}+C \\
&= \frac{\sec^{11}(x)}{11}-\frac{2}{9}\sec^9(x)+\frac{\sec^7(x)}{7}+C.
\end{aligned}$$

4. $\int \tan^3(x)\,dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(x)\,dx = \int \tan^2(x)\tan(x)\,dx &= \int (\sec^2(x)-1)\tan(x)\,dx \\
&= \int \sec^2(x)\tan(x)\,dx - \int \tan(x)\,dx \\
&= \int \tan(x)\cdot\sec^2(x)\,dx - \ln|\sec(x)|, \quad \text{hacemos} \quad \begin{array}{l} u=\tan(x) \\ du=\sec^2(x)\,dx \end{array} \\
&= \int u\,du - \ln|\sec(x)|+C \\
&= \frac{u^2}{2}-\ln|\sec(x)|+C \\
&= \frac{\tan^2(x)}{2}-\ln|\sec(x)|+C.
\end{aligned}$$

5. $\int \sec(x)\,dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int \sec(x)\,dx &= \int \frac{\sec(x)(\sec(x)+\tan(x))}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx, \quad \text{hacemos} \quad \begin{array}{l} u=\sec(x)+\tan(x) \\ du=(\sec(x)\tan(x)+\sec^2(x))\,dx \end{array} \\
&= \int \frac{du}{u}\,du \\
&= \ln|u|+C = \ln|\sec(x)+\tan(x)|+C.
\end{aligned}$$

Observación 7.5 Las integrales de la forma $\int \cot^m(x)\csc^n(x)\,dx$ se pueden determinar con métodos semejantes a la de la sección anterior, utilizando la identidad trigonométrica $1+\cot^2(x)=\csc^2(x)$.

■ **Ejemplo 7.11** Calcular la siguiente integral

$$\int \csc^4(x)\cot(x)\,dx.$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\int \csc^4(x)\cot(x)\,dx &= \int \csc^2(x)\csc^2(x)\cot(x)\,dx \\
&= \int (1+\cot^2(x))\csc^2(x)\cot(x)\,dx, \quad \text{hacemos} \quad \begin{array}{l} u=\cot(x) \\ du=-\csc^2(x)\,dx \end{array} \\
&= \int (1+u^2)u(-du) \\
&= \int (-u-u^3)\,du \\
&= -\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}+C \\
&= -\frac{\cot^2(x)}{2}-\frac{\cot^4(x)}{4}+C.
\end{aligned}
$$

7.5.4 Producto de senos y cosenos

En estás sección se indicara como calcular las siguientes integrales

$$
\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx, \quad \int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx \quad \text{y} \quad \int \cos^m(x)\cos^n(x)\,dx
$$

Podemos determinar las integrales utilizando el método de integración por partes, en cada caso se requiere integrar dos veces por partes. Es más sencillo utilizar las siguientes identidades trigonométricas:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) &= \frac{1}{2}\left[\cos((m-n)x)-\cos((m+n)x)\right], \\
\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}((m-n)x)+\operatorname{sen}((m+n)x)\right], \\
\cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\left[\cos((m-n)x)+\cos((m+n)x)\right].
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 7.12** Calcular las siguientes integrales

1. $\int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)\,dx$.

   Solución:

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)\,dx &= \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(4x-5x)+\operatorname{sen}(4x+5x)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left[\operatorname{sen}(-x)+\operatorname{sen}(9x)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos(x)-\frac{1}{9}\cos(9x)\right]+C.
\end{aligned}
$$

2. $\int \cos(3x)\cos(6x)\,dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \cos(3x)\cos(6x)\,dx &= \int \frac{1}{2}\left[\cos(3x-6x)+\cos(3x+6x)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left[\cos(-3x)+\cos(9x)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}+\frac{\operatorname{sen}(9x)}{9}\right]+C.
\end{aligned}$$

3. Si m y n son enteros positivos, demostrar que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Solución:

i) Si $m \neq n$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(x(m-n))-\cos(x(m+n))\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(x(m-n))}{m-n}-\frac{\operatorname{sen}(x(m+n))}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

ii) Si $m = n$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(0)-\cos(2mx)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[1-\cos(2mx)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x-\frac{\operatorname{sen}(2mx)}{2m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}-\left(\frac{-\pi}{2}\right) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

7.5.5 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 7.5

Productos de potencias de senos y cosenos

Resolver las siguientes integrales

1. $\int 8\,\text{sen}^4(x)\,dx$
2. $\int \text{sen}^5\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$
3. $\int 8\cos^4(2\pi x)\,dx$
4. $\int \text{sen}^5(x)\,dx$
5. $\int 16\,\text{sen}^2(x)\cos^2(x)\,dx$
6. $\int 8\,\text{sen}^4(y)\cos^2(y)\,dy$
7. $\int 35\,\text{sen}^4(x)\cos^3(x)\,dx$
8. $\int \text{sen}(2x)\cos^2(2x)\,dx$
9. $\int 8\cos^3(2\theta)\,\text{sen}(2\theta)\,d\theta$
10. $\int \text{sen}^2(2\theta)\cos^3(2\theta)\,d\theta$
11. $\int 3\cos^5(3x)\,dx$
12. $\int \cos^3(x)\,dx$
13. $\int \text{sen}^7(y)\,dy$
14. $\int 7\cos^7(t)\,dt$

Integrales con raíces cuadradas

Resolver las siguientes integrales

15. $\int \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}\,dx$
16. $\int \sqrt{1-\cos(2x)}\,dx$
17. $\int \sqrt{1-\text{sen}^2(t)}\,dt$
18. $\int \sqrt{1-\cos^2(\theta)}\,d\theta$
19. $\int \sqrt{1+\tan^2(x)},dx$
20. $\int \sqrt{\sec^2(x)-1}\,dx$
21. $\int \theta\sqrt{1-\cos(2\theta)},d\theta$
22. $\int \left(1-\cos^2(t)\right)^{3/2}\,dt$

Potencias de $\tan(x)$ **y** $\sec(x)$

Resolver las siguientes integrales

23. $\int 2\sec^3(x)\,dx$
24. $\int e^x\sec(e^x)\,dx$
25. $\int \sec^4(\theta)\,d\theta$
26. $\int 3\sec^4(x)\,dx$
27. $\int \csc^4(\theta),d\theta$
28. $\int 6\tan^4(\theta)\,d\theta$
29. $\int \cot^3(\theta),d\theta$
30. $\int 8\cot^4(t)\,dt$

Producto de senos y cosenos

Resolver las siguientes integrales

31. $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx$
32. $\int \operatorname{sen}(2x)\cos(3x)\,dx$
33. $\int \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(3x)\,dx$
34. $\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx$
35. $\int \cos(3x)\cos(4x),dx$
36. $\int \cos(x)\cos(7x)\,dx$

7.6 Integración de Funciones Racionales

Estudiaremos sobre una función racional, dada por la siguiente regla de asignación $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, en donde P y Q son polinomios. Es posible expresar f, como la suma de funciones más sencillas. Ahora, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q la función racional, de este tipo, se llama *Propia*, en caso contrario, si f es *Impropia*, es decir, que el $Grad(P) \geq Grad(Q)$, para lo cual se procede a dividir P para Q, hasta obtener un residuo $(R(x))$ tal que el $Grad(R) < Grad(Q)$, así la división se lo puede representar por:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde $S(x)$ es el polinomio cociente.

■ **Ejemplo 7.13** Determinar $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

Solución:

Sea $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x-1}$, entonces $Grad(P) = 3 > Grad(Q) = 1$, se sigue que,

$$\begin{array}{rl}
\left(\; x^3 \qquad + x\right) : \left(x-1\right) = x^2+x+2+\dfrac{2}{x-1}. & \\
\underline{-x^3+x^2} \qquad\qquad & \\
x^2 + x \qquad & \\
\underline{-x^2 + x} \qquad & \\
2x \qquad & \\
\underline{-2x+2} & \\
2 &
\end{array}$$

Así,

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left[(x^2+x+2) + \frac{2}{x-1}\right] dx$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx + \int 2 dx + \int \frac{2}{x-1} dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C.$$

Analizamos que, si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se puede expresar como la suma de fracciones parciales, para eso necesitamos descomponer en factores el denominador $(Q(x))$, tanto como sea posible, de esta forma se va considerar los siguientes casos:

Caso 1: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos, es decir, que se puede escribir $Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_kx+b_k)$, en donde no hay factores que se repitan, en este caso, existen constantes $A_1, A_2, \cdots A_k$, tales que:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots \frac{A_k}{a_kx+b_k}.$$

■ **Ejemplo 7.14**

1. Determinar $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx.$

   Solución:

   Sea $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$, lo primero se tiene que descomponer en factores el denominador, entonces

   $$Q(x) = 2x^3+3x^2-2x = x\left(2x^2+3x-2\right) = x(x+2)(2x-1).$$

   Así,

   $$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{x^2+2x-1}{x(x+2)(2x-1)}.$$

   Luego,

   $$\frac{x^2+2x-1}{x(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x-1}$$
   $$\frac{x^2+2x-1}{x(x+2)(2x-1)} = \frac{A(x+2)(2x-1)+B(x)(2x-1)+C(x)(x+2)}{x(x+2)(2x-1)}$$
   $$\Rightarrow \quad x^2+2x-1 = A(x+2)(2x-1)+B(x)(2x-1)+C(x)(x+2) \tag{7.3}$$

   Ahora,

   - Si tomamos $x=0$ en (7.3), se tiene $A = \frac{1}{2}$.
   - Si tomamos $x=-2$ en (7.3), se tiene $B = -\frac{1}{10}$.
   - Si tomamos $x = \frac{1}{2}$ en (7.3), se tiene $B = \frac{1}{5}$.

Esto implica que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{10}}{x+2} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} \right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{10}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{2x-1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| + C.
\end{aligned}$$

2. Demuestre que:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Solución:

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2-a^2}$, lo primero se tiene que descomponer en factores el denominador, entonces

$$Q(x) = x^2 - a^2 = (x-a)(x+a).$$

Así,

$$f(x) = \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \\
\frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)} \\
\Rightarrow \quad 1 &= A(x+a)+B(x-a). \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Ahora,

- Si tomamos $x = a$ en (7.4), se tiene $A = \dfrac{1}{2a}$.
- Si tomamos $x = -a$ en (7.4), se tiene $B = -\dfrac{1}{2a}$.

Esto implica que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-a^2}\,dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{2a}}{x-a} + \frac{-\frac{1}{2a}}{x+a} \right) dx \\
&= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}\,dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}\,dx \\
&= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C \\
&= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.
\end{aligned}$$

3. Determinar $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx$.

   Solución:

   Sea $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-x}$, como $Grad(P) = 4 > Grad(Q) = 3$, entonces

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^4 \qquad +1 \right) : \left(x^3 - x \right) = x + \dfrac{x^2+1}{x^3-x}. \\ \underline{-x^4 + x^2} \\ \qquad\quad x^2+1 \end{array}$$

   Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{x^3-x} &= \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} \\ \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \\ \Rightarrow \quad x^2+1 &= A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1). \end{aligned} \tag{7.5}$$

   Esto implica que,

   - Si tomamos $x = 0$ en (7.5), se tiene $A = -1$.
   - Si tomamos $x = 1$ en (7.5), se tiene $B = 1$.
   - Si tomamos $x = -1$ en (7.5), se tiene $C = 1$.

   Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx = \int \left(x + \frac{x^2+1}{x^3-x} \right) dx &= \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

4. Demuestre que:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad \text{con } a \neq 0.$$

   Solución:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}.$$

Ahora, realizando $\tan(\theta) = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \sec^2(\theta)\, d\theta = \dfrac{dx}{a}$, se sigue que

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2(\theta)}{\tan^2(\theta)+1} d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{\cancel{\sec^2(\theta)}}{\cancel{\sec^2(\theta)}} d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^-1\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

7.6.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 7.6 Factores Lineales no repetidos

Exprese los integrandos como suma de fracciones parciales y evalué las integrales.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$.
2. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6} dx$.
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$.
4. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12} dx$.
5. $\displaystyle\int \frac{y}{y^2-2y-3} dy$.
6. $\displaystyle\int \frac{y+4}{y^2+y} dy$.
7. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3+t^2-2t}$.
8. $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x} dx$.

Factores Lineales repetidos

Exprese los integrandos como suma de fracciones parciales y evalué las integrales.

9. $\displaystyle\int \frac{x^3\, dx}{x^2+2x+1}$.
10. $\displaystyle\int \frac{x^3\, dx}{x^2-2x+1}$.
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.
12. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$.

Factores cuadráticos irreducibles

Exprese los integrandos como suma de fracciones parciales y evalué las integrales.

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.
14. $\displaystyle\int \frac{3t^2+t+4}{t^3+t} dt$.
15. $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2} dy$.
16. $\displaystyle\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2} dx$.
17. $\displaystyle\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3} ds$.
18. $\displaystyle\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2} ds$.
19. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2} d\theta$.
20. $\displaystyle\int \frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3} d\theta$.

7.7 Método de Sustitución Trigonométrica

En el método de las sustituciones trigonométricas, son de gran utilidad para la sustitución de expresiones algebraicas las cuales pueden estar dadas por: $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ y $\sqrt{x^2-a^2}$, de esta forma se convierte en integrales que se pueden evaluar de manera directa. Ahora, se presenta tres tipos de sustituciones básicas.

Tipos de sustituciones trigonométricas básicas

Las sustituciones más frecuentes son $x = a\tan(\theta)$, $x = a\,\text{sen}(\theta)$ y $x = a\sec(\theta)$. Las cuales provienen de los triángulos rectángulos de la figura

- Con $x = a\tan(\theta)$,

$$a^2+x^2 = a^2+a^2\tan^2(\theta) = a^2(1+\tan^2(\theta)) = a^2\sec^2(\theta).$$

- Con $x = a\,\text{sen}(\theta)$,

$$a^2-x^2 = a^2-a^2\,\text{sen}^2(\theta) = a^2(1-\text{sen}^2(\theta)) = a^2\cos^2(\theta).$$

- Con $x = a\sec(\theta)$,

$$x^2-a^2 = a^2\sec^2(\theta)-a^2 = a^2(\sec^2(\theta)-1) = a^2\tan^2(\theta).$$

Se necesita que cualquier sustitución que utilicemos en una integración sea reversible, de manera que podamos restituirla a su variable original. Por ejemplo, si $x = a\tan(\theta)$, se desea poder hacer $\theta = \tan^{-1}(x/a)$ después de realizar la integración. Si $x = a\,\text{sen}(\theta)$, se desea poder hacer $\theta = \text{sen}^{-1}(x/a)$ cuando se haya terminado la integración, y de manera similar para $x = a\sec(\theta)$. Como se conoce las funciones trigonométricas en estas sustituciones sólo tienen inversa para ciertos valores de θ (figura 8.3). Para que se pueda revertir,

- $x = a\tan(\theta)$ requiere $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ con $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$,
- $x = a\,\text{sen}(\theta)$ requiere $\theta = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ con $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$,
- $x = a\sec(\theta)$ requiere $\theta = \sec^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ con $\begin{cases} 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } \dfrac{x}{a} \geq 1, \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, & \text{si } \dfrac{x}{a} \leq -1. \end{cases}$

Para simplificar los cálculos con la sustitución $x = a\sec(\theta)$, restringiremos su uso a integrales en las que $x/a \geq 1$. Esto colocará a θ en el intervalo $[0,\pi/2)$ y hará que $\tan(\theta) \geq 0$. Después se tendrá $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\tan^2(\theta)} = |a\tan(\theta)|$, sin valores absolutos, siempre y cuando se encuentre con esas condiciones.

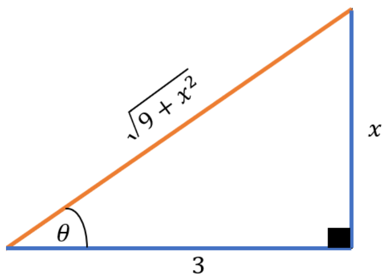
■ **Ejemplo 7.15**

Determinar las siguientes integrales utilizando sustituciones trigonométricas.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

   Solución:

   Primero observemos que,



$$\tan(\theta) = \frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 3\tan(\theta)$$
$$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}.$$

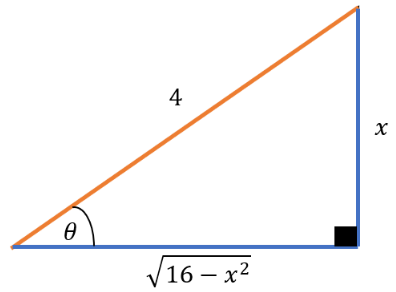
   Luego, sustituyendo $x = 3\tan(\theta) \Rightarrow dx = 3\sec^2(\theta)$ en la integral , se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{dx}{3\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}} &= \int \frac{3\sec^2(\theta)}{3\sec(\theta)} d\theta \\ &= \int \sec(\theta) d\theta \\ &= \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|+C \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}+\frac{x}{3}\right|+C.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx.$

   Solución:

   Primero observemos que,



$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 4\operatorname{sen}(\theta)$$
$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}.$$

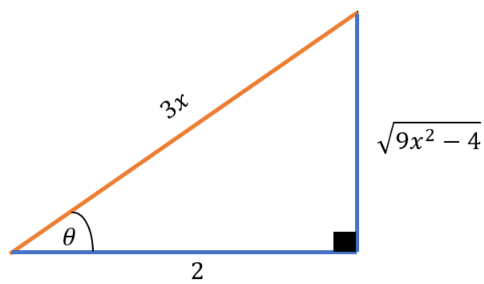
Luego, sustituyendo $x = 4\ \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow dx = 4\cos(\theta)$ en la integral , se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{(4\operatorname{sen}(\theta))^2 \cdot \cancel{4\cos(\theta)}}{\cancel{4\cos(\theta)}}\,d\theta &= \int 16\operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta \\
&= 16\int \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))\,d\theta \\
&= 8\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + C \\
&= 8\left(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\right) + C \\
&= 8\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x}{4}\cdot\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}\right] + C \\
&= 8\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C.
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}, \quad x > \frac{2}{3}.$

Solución:

Primero observemos que,



$$\sqrt{9x^2-4} = \sqrt{9\left(x^2 - \frac{4}{9}\right)} = 3\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}.$$

esto es, para poner el radical en la forma $x^2 - a^2$. Luego, sustituimos

$$\begin{aligned}
x = \frac{2}{3}\sec(\theta) \quad &\Rightarrow \quad dx = \frac{2}{3}\sec(\theta)\cdot\tan(\theta)\,d\theta \\
x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{4}{9}\sec^2(\theta) - \frac{4}{9} \\
&= \frac{4}{9}\left(\sec^2(\theta) - 1\right) = \frac{4}{9}\tan^2(\theta) \\
\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} &= \frac{2}{3}|\tan(\theta)| = \frac{2}{3}\tan(\theta),
\end{aligned}$$

puesto que $\tan(\theta) > 0$, para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y con estás sustituciones, se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 4}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{x^2 - \left(\frac{4}{9}\right)}} &= \int \frac{\cancel{\frac{2}{3}}\sec(\theta)\cdot\cancel{\tan(\theta)}}{3\left(\cancel{\frac{2}{3}\tan(\theta)}\right)}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int \sec(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C \\
&= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3x}{2} + \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{2}\right| + C.
\end{aligned}$$

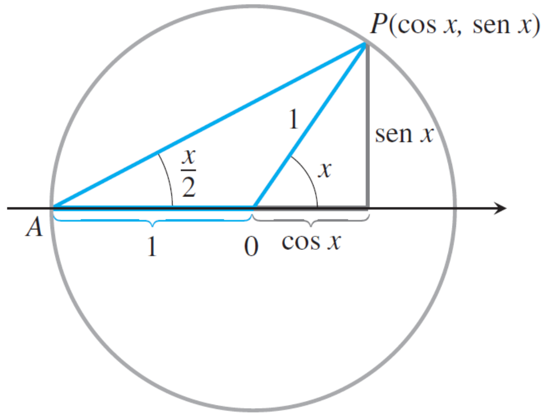
La sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Analicemos la siguiente sustitución trigonométrica importante,

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \tag{7.6}$$

reduce el problema de integración de expresión racional en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ a un problema de integración de una función racional de z. Esto a su vez puede integrarse por medio de fracciones parciales.

De la siguiente figura



se tiene la relación

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{sen}(x)}{1+\cos(x)}$$

Para ver el efecto de la sustitución, calculamos

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\
&= \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - = \frac{2}{1+z^2} - 1 \\
\Rightarrow \quad \cos(x) &= \frac{1-z^2}{1+z^2},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\text{sen}(x) &= 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
\Rightarrow \quad \text{sen}(x) &= \frac{2z}{1+z^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, $x = 2\tan^{-1}(z)$, de está forma

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}. \tag{7.7}$$

■ **Ejemplo 7.16**

a. Determinar $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos(x)}\,dx$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2\,dz}{1+z^2} \\
&= \int \frac{\cancel{1+z^2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\,dz}{\cancel{1+z^2}} \\
&= \int dz = z + C \\
&= \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

b. Determinar $\displaystyle\int \frac{1}{2+\operatorname{sen}(x)}\,dx$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2+\operatorname{sen}(x)} &= \int \frac{1+z^2}{2+2z+2z^2} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} \\
&= \int \frac{dz}{z^2+z+1} = \int \frac{dz}{(z+(1/2))^2+3/4} \\
&= \int \frac{du}{u^2+a^2} \\
&= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1+2\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

7.7.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 7.7

Determine las siguientes integrales indefinidas, utilizando el método de sustitución trigonométrica.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}.$

3. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1+9y^2}}\,dy.$

4. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{\left(16-9x^2\right)^{3/2}}{x^6}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,dy \quad y>5.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1.$

9. $\displaystyle\int \frac{8}{w^2\sqrt{4-w^2}}\,dw.$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw.$

11. $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}\,dx.$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$

15. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x}-2e^x+5)^3}\,dx.$

16. $\displaystyle\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,dr.$

17. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}\,dt.$

Utilice la sustitución $z=\tan(\theta/2)$ para calcular las siguientes integrales.

18. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{sen}(x)}\,dx.$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}(x)}.$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos(x)}\,dx.$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}\,dx.$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos(\theta)}\,d\theta.$

23. $\displaystyle\int \frac{\cos(\theta)d\theta}{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)}.$

24. $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{sen}(t)-\cos(t)}. \quad y>5.$

25. $\displaystyle\int \frac{\cos(t)\,dt}{1-\cos(t)}.$

26. $\displaystyle\int \sec(\theta)\,d\theta.$

27. $\displaystyle\int \csc(\theta)\,d\theta.$

8. Integral Definida

La idea de integral, es antecesora a la de derivada, sin embargo por intereses didácticos se presenta posterior a ésta.

Las secciones están separadas en función de la necesidad de conceptos, es decir, en la primera sección se presenta algunos resultados de sumatorias; en la segunda sección se establecerá algunos resultados sobre el axioma del supremo, éstos servirán para abordar la tercera sección en donde se definirá la integral de Riemann, posteriormente en la cuarta sección se estudiará las propiedades de ésta integral para finalmente en la quinta sección establecer la relación entre la integral con la derivada, a través de los teoremas fundamentales del cálculo.

8.1 Sumatorias

Sean $x_k \in \mathbb{R}$, con $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ para $n \in \mathbb{N}$. A la suma de n elementos x_k, la notamos como sigue:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \qquad con \;\; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Donde el símbolo $\sum$, denota la letra griega sigma a la cual en este apartado lo denominamos *sumatoria*. Esta sumatoria se puede generalizar para una función real $\varphi \in (\mathscr{F}(\mathbb{R}))$, como sigue:

$$\sum_{k=m}^{n} \varphi(x_k) = \varphi(x_m) + \varphi(x_{m+1}) + \varphi(x_{m+2}) + ... + \varphi(x_n).$$

En la siguiente proposición se enuncian algunas propiedades de la sumatoria.

Proposición 8.1 Sean $\xi, \varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ y c una constante real. Entonces se verifican las siguientes igualdades:

$$1)\ \sum_{k=m}^{n} c = c(n-m+1) \tag{8.1}$$

$$2)\ \sum_{k=1}^{n} (c\xi(k) \pm \varphi(k)) = c\sum_{k=1}^{n} \xi(k) \pm \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \tag{8.2}$$

$$3)\ \sum_{k=m}^{n} \varphi(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} \varphi(k-p) \tag{8.3}$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{n} (\varphi(k) - \varphi(k-1)) = \varphi(n) - \varphi(0) \quad \textit{Propiedad Telescopica} \tag{8.4}$$

$$5)\ \sum_{k=m}^{n} (\varphi(k) - \varphi(k-1)) = \varphi(n) - \varphi(m-1) \ \ \textit{Telescopica Generalizada}. \tag{8.5}$$

Demostración. **1)** Para este ítem, se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} c &= \sum_{k=1}^{n} c - \sum_{k=1}^{m-1} c \\
&= \underbrace{(c+c+...+c)}_{n-veces} - \underbrace{(c+c+...+c)}_{(m-1)-veces} \\
&= cn - c(m-1) \\
&= c(n-m+1).
\end{aligned}$$

2) En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (c\xi(k) \pm \varphi(k)) &= [c\xi(1) \pm \varphi(1)] + [c\xi(2) \pm \varphi(2)] + ... + [c\xi(n) \pm \varphi(n)] \\
&= [c\xi(1) + c\xi(2) + ... + c\xi(n)] \pm [\varphi(1) + \varphi(2) + ... + \varphi(n)] \\
&= c[\xi(1) + \xi(2) + ... + \xi(n)] \pm [\varphi(1) + \varphi(2) + ... + \varphi(n)]
\end{aligned}$$

$$= c\sum_{k=1}^{n}\xi(k) \pm \sum_{k=1}^{n}\varphi(k).$$

3) Si $r = k + p$ entonces $k = r - p$. Luego si $k = m \Longrightarrow r = m + p$ y si $k = n \Longrightarrow r = n + p$, usando estos hechos se sigue que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\varphi(k) &= \sum_{r=p+m}^{n+p}\varphi(r-p)\\ &= \sum_{k=p+m}^{n+p}\varphi(k-p),\end{aligned}$$

en la última igualdad arriba, se ha cambiado el contador r por k.

4) Para este ítem, se utiliza la definición de sumatoria, como sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(k)-\varphi(k-1)) &= [\varphi(1)-\varphi(0)]+[\varphi(2)-\varphi(1)]+\ldots+[\varphi(n)-\varphi(n-1)]\\ &= \varphi(1)-\varphi(0)+\varphi(2)-\varphi(1)+\ldots+\varphi(n)-\varphi(n-1)\\ &= \varphi(n)-\varphi(0).\end{aligned}$$

5) En este caso, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(\varphi(k)-\varphi(k-1)) &= \sum_{k=1}^{n}(\varphi(k)-\varphi(k-1)) - \sum_{k=1}^{m-1}(\varphi(k)-\varphi(k-1))\\ &= [\varphi(n)-\varphi(0)]-[\varphi(m-1)-\varphi(0)]\\ &= \varphi(n)-\varphi(0)-\varphi(m-1)+\varphi(0)\\ &= \varphi(n)-\varphi(m-1).\end{aligned}$$

■

El siguiente lema, recoge algunas fórmulas importantes de la sumatoria.

Lema 8.2 Para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ se cumple:

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{8.6}$$

$$b)\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{8.7}$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{8.8}$$

$$d)\ \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}. \tag{8.9}$$

Demostración. **a)** Como,

$$(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1 \Longrightarrow 2k = k^2 - (k-1)^2 + 1$$
$$\Longrightarrow k = \frac{1}{2}\left[k^2 - (k-1)^2\right] + \frac{1}{2}, \tag{8.10}$$

utilizando (8.10), (8.2) y (8.4) se sigue

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\left[k^2 - (k-1)^2\right] + \frac{1}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[k^2 - (k-1)^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{2}[n^2 - 0^2] + \frac{1}{2}n \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

b) Tome $\varphi(k) = (k+1)^3$, entonces al aplicar la propiedad telecópica (8.4), se tiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(\varphi(k) - \varphi(k-1)) = \varphi(n) - \varphi(0) \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1^3 \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n}[k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3] = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 \\
\Longrightarrow &\, 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n^3 + 3n^2 + 3n \\
\Longrightarrow &\, 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n = n^3 + 3n^2 + 3n \\
\Longrightarrow &\, 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3}{2}n(n+1) \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

c) Considerando $\varphi(k) = (k+1)^4$, y aplicando nuevamente la propiedad telescópica (8.4), se sigue:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(\varphi(k) - \varphi(k-1)) = \varphi(n) - \varphi(0) \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^4 - k^4] = (n+1)^4 - 1^4 \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n}[k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4] = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n^4+4n^3+6n^2+4n \\
&\Longrightarrow 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n = n^4+4n^3+6n^2+4n \\
&\Longrightarrow 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4+4n^3+6n^2+4n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

d) Finalmente, tomando $\varphi(k) = (k+1)^5$, y aplicando nuevamente la propiedad telescópica (8.4), se sigue:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} (\varphi(k) - \varphi(k-1)) = \varphi(n) - \varphi(0) \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^5 - k^5] = (n+1)^5 - 1^5 \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n} [k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k^5] = (n+1)^5 - 1 \\
\Longrightarrow &\, 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (n+1)^5 - 1 \\
\Longrightarrow &\, 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + + \frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^5 - 1 \\
\Longrightarrow &\, 5\sum_{k=1}^{n} k^4 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n - 5n(n+1)\left[\frac{n^2+n+1}{2} + \frac{2n+1}{3}\right] \\
\Longrightarrow &\, 5\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n}{6}\left[6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1\right] \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.
\end{aligned}
$$

■

■ **Ejemplo 8.1** Halle el valor de la siguiente sumatoria,

$$\sum_{i=1}^{99} \ln(2^i).$$

Solución. Se tiene,

$$\sum_{i=1}^{99} \ln(2^i) = \sum_{i=1}^{99} i\ln(2) = \ln(2)\sum_{i=1}^{99} i = \ln(2)\cdot\frac{(99)(100)}{2} = 5950\ \ln(2).$$

■ **Ejemplo 8.2** Calcule el valor de la siguiente sumatoria,

$$\sum_{i=1}^{100} \ln\left(\frac{i}{i+2}\right).$$

Solución. Se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100} \ln\left(\frac{i}{i+2}\right) &= \sum_{i=1}^{100} [\ln(i) - \ln(i+2)] \\
&= -\left\{\sum_{i=1}^{100} \ln(i+2) - \sum_{i=1}^{100} \ln(i)\right\} \\
&= \ln(100!) - \ln(102!) \\
&= \ln\left(\frac{1}{5151}\right).
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.3** Halle el valor de la sumatoria siguiente,

$$\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2+2).$$

Solución. Se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2+2) &= 3\sum_{i=1}^{20} i^3 + 6\sum_{i=1}^{20} i \\
&= 3 \cdot \frac{(20)^2(20+1)^2}{4} + 6 \cdot \frac{(20)(20+1)}{2} \\
&= 133560.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.4** Calcule la el valor de la sumatoria siguiente,

$$\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1).$$

Solución. Se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1) &= 2\left[\sum_{i=1}^{25} i^2 - \sum_{i=1}^{25} i\right] \\
&= 2\left[\frac{25(25+1)(2(25)+1)}{6} - \frac{25(25+1)}{2}\right] = 10400.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.5** Calcule la sumatoria siguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{\sqrt{i^2+i}}.$$

Solución. Se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{\sqrt{i^2+i}} &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\sqrt{i+1}}{\sqrt{i^2+i}} - \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i^2+i}}\right] \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{i+1}} - \frac{1}{\sqrt{i}}\right] \\
&= -\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1\right] \\
&= \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.6** Halle el valor de la sumatoria dada a continuación,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i + i(i+1)}{2^{i+1}(i^2+i)}.$$

Solución. Se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i + i(i+1)}{2^{i+1}(i^2+i)} &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2^i}{2^{i+1}(i^2+i)} + \frac{i(i+1)}{2^{i+1}(i^2+i)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{2^i}\right]. \qquad (8.11)
\end{aligned}$$

Por otro lado, el realizar fracciones separadas, se obtiene:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{A}{i} + \frac{B}{i+1} = \frac{Ai+A+Bi}{i(i+1)} = \frac{i(A+B)+A}{i(i+1)},$$

de donde se sigue que, $A = 1$ y $A+B = 0$. Por lo tanto $B = -1$. Así entonces,

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}. \qquad (8.12)$$

Además, si $f(i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$, y usando la propiedad telescópica se sigue,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{i+1}} - \frac{1}{2^i}\right) = f(n) - f(0) &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}. \tag{8.13}$$

Luego al sustituir (8.12) y (8.13), en (8.11) se concluye :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i + i(i+1)}{2^{i+1}(i^2+i)} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \frac{1}{2^i}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) + 1 - \frac{1}{2^n}\right] \qquad (8.14) \\
&= \frac{1}{2}\left[2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2^n}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Note que (8.14), es consecuencia de la propiedad telescópica.

■ **Ejemplo 8.7** Determine el valor de la siguiente sumatoria

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)^i (1+i)}{\ln(i^i)\left[\ln(1+i)^{1+i}\right]}$$

Solución. Así mismo, usando la propiedad telescópica se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} \frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)^i (1+i)\right]}{\ln(i^i)\left[\ln(1+i)^{1+i}\right]} &= \sum_{i=2}^{n} \frac{i\left[\ln(i+1) - \ln(i)\right] + \ln(1+i)}{i(1+i)\ln(i)\ln(1+i)} \\
&= \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{(1+i)\ln(i)} - \frac{1}{(1+i)\ln(1+i)} + \frac{1}{i(1+i)\ln(i)}\right] \\
&= \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{i\ln(i)} - \frac{1}{(1+i)\ln(1+i)}\right] \\
&= -\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{(1+i)\ln(1+i)} - \frac{1}{i\ln(i)}\right] \\
&= -\left[\frac{1}{(1+n)\ln(n+1)} - \frac{1}{2\ln(2)}\right] \\
&= \frac{1}{2\ln(2)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.8** Resuelva la siguiente sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\log_a(2^{2i}) \cdot \log_a(2^{2i+2})}$$

Solución. Nuevamente, al usar la propiedad telescópica se tiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\log_a(2^{2i}) \cdot \log_a(2^{2i+2})} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i(2i+2)\,[\log_a 2]\,[\log_a 2]} \\
&= \frac{1}{4\,[\log_a 2]^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \\
&= \frac{1}{4\,[\log_a 2]^2} \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{4\,[\log_a 2]^2} \left\{ -\frac{1}{n+1} + 1 \right\} \\
&= \frac{1}{4\,[\log_a 2]^2} \left(\frac{n}{n+1} \right).
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.9** Si $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, demuestre que: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Solución. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \overline{x}^2 \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \overline{x} \cdot \overline{x} \cdot n \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \overline{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \cdot n \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i.
\end{aligned}$$

8.1.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 8.1 Halle el valor de las siguientes sumatorias.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{57} [2k^3 - k]$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \left[\frac{2}{3}k^2 + \frac{5}{2}k \right]$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{200} \left[\frac{1}{2} - 5k + \frac{2}{3}k^3 + \frac{5}{2}k^4 \right]$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (5k-2)^3$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[(2k-5)^4 - \frac{1}{3}(6k-1)^2 \right]$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(2n+1)(n+1)}$

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{3^k}{7^{k^3}} \right)$

Ejercicio 8.2 Demuestre la siguiente igualdad.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ejercicio 8.3 Sean n y p números naturales. Pruebe las siguientes desigualdades.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{p} < \frac{1}{2}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n}-\sqrt{p-1}.$$

8.2 Axioma del Supremo

Definición 8.1 Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, se dice que $y \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A si $x \leq y$, para todo $x \in A$.

Definición 8.2 Al conjunto $B = \{y \in \mathbb{R} | x \leq y,\ \forall x \in A\}$ se denomina el conjunto de las cotas superiores del conjunto A.

Si $B \neq \emptyset$, entonces A es acotado superiormente.

Una equivalencia de esta definición es: Si $B = \emptyset$ entonces A no es acotada superiormente.

Definición 8.3 Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, un número $\alpha \in \mathbb{R}$ se denomina extremo superior de A si verifica las siguientes condiciones:

a) $x \leq \alpha,\ \forall x \in A$; esto significa que α es una cota superior de A.

b) $\alpha \leq c,\ \forall c \in B$; es decir que α es la menor de todas las cotas superiores de A.

Al extremo superior α del conjunto A se lo denomina supremo y se nota como sigue: $\alpha = sup\ A$.
Se denomina máximo de A, notado por: $max\ A$ al supremo de A, es decir a $\alpha = sup\ A$ siempre y cuando $\alpha = sup\ A \in A$.

Teorema 8.3 Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ si existe el $sup\ A = \alpha$, este es único.

Demostración. Supongamos que existe $\beta = supA$ y $\alpha \neq \beta$, entonces tenemos los casos siguientes.
i) $\alpha < \beta$, este caso no es posible pues $\beta = supA$ y es la menor de todas las cotas superiores, así que no puede existir una cota superior mas pequeña que $\beta = supA$.
ii) $\beta < \alpha$, tampoco es posible este caso pues $\alpha = supA$ es la menor de las cotas superiores de A y no puede existir una cota superior mas pequeña que el supremo $\alpha = supA$. ∎

Definición 8.4 Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, se dice que $z \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A si $z \leq x$, para todo $x \in A$.

Definición 8.5 Al conjunto $C = \{z \in \mathbb{R}/z \leq x,\ \forall x \in A\}$ se denomina el conjunto de las cotas inferiores de A.

Definición 8.6 Si $C \neq \emptyset$ entonces A es acotado inferiormente.

Una equivalencia a la definición anterior es que si $C = \emptyset$ entonces A no es acotado inferiormente.

Definición 8.7 Sea $A \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$, un número $\beta \in \mathbb{R}$ se denomina extremo inferior de A, si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) $\beta \leq x$, para todo $x \in A$. Esto quiere decir que β es cota inferior.

ii) $\beta \geq c$, para todo $c \in C$. Esto quiere decir que β es la mayor de todas las cotas inferiores.

En este caso al extremo inferior β se lo denomina el ínfimo del conjunto A y se nota $\beta = \text{ínf}A$.

Se denomina mínimo de A y se nota $\text{mín}A$ al $\text{ínf}A = \beta$ siempre y cuando $\text{ínf}A = \beta \in A$. Esto es:

$$\beta = \text{mín}A, \quad ssi \;\; \beta \in A, \; donde \;\; \beta = \text{ínf}A.$$

Observación 8.1 Todo máximo es el supremo, pero no todo supremo es máximo.

Todo mínimo es el ínfimo, pero no todo ínfimo es mínimo.

Definición 8.8 Sea $a \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ se dice que A es un conjunto acotado, cuando es acotado supeiormente e inferiormente al mismo tiempo.

■ **Ejemplo 8.10** Pruebe que $A = (0, +\infty)$ no es acotado.

Solución.

1) El conjunto $a = (0, +\infty)$ no es acotado superiormente, puesto que el conjunto de las cotas superiores del conjunto A es vacío.

2) El conjunto $A = (0, +\infty)$ es acotado inferiormente, puesto que el conjunto de las cotas inferiores $C = (-\infty, 0] \neq \emptyset$.

Así de 1), 2) y de la Definición 8.8 se sigue que $A = (0, +\infty)$ no es acotado.

Teorema 8.4 Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si existe el ínfimo $\beta = \text{ínf}A$ este es único.

Demostración. Suponemos que existe $\alpha = \text{ínf}A$ y $\beta \neq \alpha$, entonces tenemos los casos siguientes:

i) $\beta < \alpha$, esto no es posible pues $\beta = \text{ínf}A$ y es la mayor de las cotas inferiores.

ii) $\alpha < \beta$ no es posible pues $\alpha = \text{ínf}A$ y es la mayor de las cotas inferiores. ■

AXIOMA DE COMPLETEZ

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, si A es acotado superiormente entonces existe el supremo de A, es decir existe $\alpha = \sup A$.

Teorema 8.5 Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si A es acotado inferiormente entonces tiene extremo inferior, es decir existe el $\text{ínf} A$.

Demostración. Sea B el conjunto de las cotas inferiores de A, es decir

$B = \{y \in \mathbb{R}/y \leq x,\ \forall x \in A\}$.

Note que $B \neq \emptyset$ pues por hipótesis A es acotado inferiormente.

Luego B es acotado superiormente puesto que por ser $A \neq \emptyset$, existe $a \in A$ y por la definición de cota superior $a \geq b$, para todo $b \in B$.

Así por el Axioma de Completez, existe $\alpha = \sup B$. Mostremos ahora que $\text{ínf} A = \alpha$.

i) En efecto, α es cota inferior de A, puesto que si $\alpha > a$ para algún $a \in A$ entonces se tendría que a es una cota superior de B, lo cual no es posible pues $\alpha = \sup B$ es la menor de las cotas superiores de B. Por lo tanto $\alpha \leq a$, para todo $a \in A$.

ii) Sea y una cota inferior de A, entonces $y \in B$ de donde $y \leq \alpha = \sup B$, esto prueba que α es la mayor de todas las cotas inferiores de A.

Así de i) y ii) seguimos que $\alpha = \text{ínf} A$. ∎

Teorema 8.6 Sea A un conjunto no vacío acotado superiormente y sea $b = \sup A$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Demostración. Supongamos que dado $\varepsilon_0 > 0$ se cumple $x < b - \varepsilon_0$, para todo $x \in A$. Luego como esto sucede para todo $x \in A$, entonces $b - \varepsilon_0$ es una cota superior de A, pero como $b - \varepsilon_0 < b$ entonces tenemos que existe una cota inferior de A la cual es menor que el $\sup A = b$, lo cual es una contradicción pues el supremo es la menor de todas las cotas superiores de A. ∎

Teorema 8.7 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, si b es una cota superior de A y además si para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $b - \varepsilon < x$, entonces $b = \sup A$.

Demostración. Sabemos que b es una cota superior de A; luego sea

$B = \{y \in \mathbb{R}/x \leq y,\ \forall x \in A\}$, note que $B \neq \emptyset$ pues $b \in B$ por hipótesis.

Sea $c \in B$ entonces $c \geq a$, para todo $a \in A$ pues c es cota superior de A.

Para probar que $b = \sup A$ es suficiente probar que $b \leq c$, para todo $c \in B$.

Supongamos que $b > c$ entonces $b - c > 0$.

Note que por hipótesis,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \ \ tal\ que\ x > b - \varepsilon \tag{8.15}$$

Como (8.15) se verifica para todo $\varepsilon > 0$, en particular se cumplirá para $\varepsilon = b - c > 0$, así entonces

$$\exists x \in A \ \ tal\ que\ \ x > b - (b - c) = c, \ \ es\ decir\ \ x > c. \tag{8.16}$$

Como $c \geq a$, para todo $a \in A$ entonces tomando $a = x \in A$ entonces $c \geq x$, lo cual es contradictorio con (8.16).

Así la suposición $b > c$ es falsa, lo correcto es que $b \leq c$, para todo $c \in B$, esto quiere decir que $b = \sup A$. ∎

Teorema 8.8 Sea A un conjunto acotado inferiormente y sea $a = \text{ínf} A$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x < a + \varepsilon$.

Demostración. Supongamos que dado $\varepsilon_0 > 0$ se verifica $x > a + \varepsilon_0$, para todo $x \in A$; así entonces $a + \varepsilon_0$ es cota inferior de A, luego como $a + \varepsilon_0 > a = \text{ínf} A$ entonces seguimos que existe una cota inferior de A mayor que $a - \text{ínf} A$, lo cual es contradictorio pues el $\text{ínf} A = a$ es la más grande de todas las cotas inferiores. ∎

Teorema 8.9 Si c es una cota inferior de A y si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x < c + \varepsilon$ entonces $c = \text{ínf} A$.

Demostración. Sabemos que c es cota inferior de A, luego sea

$C := \{z \in \mathbb{R} / z \leq x, \ \forall x \in A\}$, note que $C \neq \emptyset$ pues por hipótesis $c \in C$.

Para mostrar que $c = \text{ínf} A$ es suficiente probar que $c \geq z$, para todo $z \in C$.

Supongamos $c < z$, para todo $z \in C$, luego $z - c > 0$. Por hipótesis tenemos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x < c + \varepsilon$, en particular esto se cumplirá para $\varepsilon = z - c > 0$, es decir:

$$Si, \ \ \varepsilon = z - c > 0, \ \ \exists x \in A \ \ tal\ que\ \ x < c + (z - c) = z. \tag{8.17}$$

Luego (8.17) es contradictorio con la definición de C, pues $z \leq x$, para todo $x \in A$; así entonces la suposición $c < z$ es falsa. Lo correcto es $c \geq z$, para todo $z \in C$, es decir c es la mayor de todas las cotas inferiores de A, por tanto verifica la Definición 8.7, consecuentemente $c = \text{ínf} A$. ∎

Proposición 8.10 Sean A y B dos conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Poniendo $A + B = \{x + y / x \in A, \ y \in B\}$, se tiene que:

i) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

ii) $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf} A + \text{ínf} B$.

Demostración. Consideremos las siguientes observaciones. Como $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ no vacíos, y además A y B son acotados, entonces son acotados superiormente e inferiormente, luego por el Axioma de Completez existen $\sup A$ y $\sup B$; además por el Teorema 8.5, seguimos que existen $\inf A$ e $\inf B$.

i) Mostremos que $A+B$ es acotado superiormente.

En efecto, por las observaciones dadas previamente, se tiene que para todo $x \in A$, $x \leq \sup A$; y para todo $y \in B$, $y \leq \sup B$, de donde $x+y \leq \sup A + \sup B$, para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$. Así entonces, se sigue que $A+B$ es acotado superiormente, pues al menos existe la cota superior $\sup A + \sup B$.

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario tenemos por el Teorema 8.6 que existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que,

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x \tag{8.18}$$

$$\sup B - \frac{\varepsilon}{2} < y. \tag{8.19}$$

De (8.18) y (8.19) seguimos que, para todo $\varepsilon > 0$ existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $(\sup A + \sup B) - \varepsilon < x+y$, entonces por el Teorema 8.7 se sigue que,

$\sup A + \sup B = \sup(A+B)$.

ii) mostremos primero que $A+B$ está acotado inferiormente.

En efecto, por las observaciones dadas al inicio de la demostración de este teorema, se tiene que: para todo $x \in A$, $\inf A \leq x$, además $\inf B \leq y$ para todo $y \in B$; de donde $\inf A + \inf B \leq x+y$. Así se sigue que $A+B$ es acotado inferiormente, pues al menos existe la cota inferior $\inf A + \inf B$.

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por el Teorema 8.8 que existe $x \in A$ e $y \in B$ tales que

$$x < \inf A + \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.20}$$

$$y < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.21}$$

De (8.20) y (8.21) se sigue que, para todo $\varepsilon > 0$ existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $x+y < (\inf A + \inf B) + \varepsilon$.

Luego por el Teorema 8.9, se sigue que $\inf A + \inf B = \inf(A+B)$. ■

8.2.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 8.4 Sea $\mathfrak{B} = \left\{ \frac{k}{k+1} \ / \ k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$. Demuestre que $\inf \mathfrak{B} = \frac{1}{2}$, y además $\sup \mathfrak{B} = 1$.

Ejercicio 8.5 Sea $\mathfrak{A} = \left\{ \dfrac{1}{3k+2} \ / \ k \in \mathbb{Z}^- \right\}$. Demuestre que $\text{ínf}\, \mathfrak{A} = -1$ y además $\sup \mathfrak{A} = 0$.

Ejercicio 8.6 Sea $\mathfrak{C} \subset \mathbb{R}$, $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ y acotado superiormente, además α, β constantes reales, donde $\beta > 0$.

i) Si $\mathfrak{B} = \{\alpha - \beta x \ / \ x \in \mathfrak{C}\}$. Demuestre que $\mathfrak{B}$ es acotado inferiormente, además $\text{ínf}\, \mathfrak{B} = \alpha - \beta \sup \mathfrak{C}$.

ii) Si $\mathfrak{B} = \{\alpha + \beta x \ / \ x \in \mathfrak{C}\}$. Demuestre que $\mathfrak{B}$ es acotado superiormente, además $\sup \mathfrak{B} = \alpha + \beta \sup \mathfrak{C}$.

Ejercicio 8.7 Demuestre, que si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathbb{R}$ acotados no vacíos, entonces $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ es acotado.

Ejercicio 8.8 Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Si $\mathfrak{C} = \{x \cdot y \ / \ x \in \mathfrak{A}, y \in \mathfrak{B}\}$, entonces demuestre que en general no se verifica $\sup \mathfrak{C} = \sup \mathfrak{A} \cdot \sup \mathfrak{B}$.

8.3 Definición de Integral de Riemann

En esta sección se define la integral de Riemann de una función f, a partir de los resultados previos sobre el axioma del supremo y de la idea de área bajo una curva.

Definición 8.9 Sea $f : \begin{cases} I = [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x), \end{cases}$ una función real acotada, definida sobre el intervalo cerrado $I = [a,b]$.

Se define una partición $\mathscr{P}$ del intervalo I, como un subconjunto de puntos de I. Es decir:

$$\mathscr{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n / \ x_k \in I, \ con \ k = 1, \ldots, n\}$$

tal que, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$.

Así el subintervalo I_k se define como sigue:

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad con \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

La longitud del intervalo I_k, se nota y se define a continuación:

$$\triangle_k x := x_k - x_{k-1}, \ con \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

A la longitud más grande de todos los subintervalos I_k, se denomina norma de la partición $\mathscr{P}$ y se denota por $\|\mathscr{P}\|$, esto es:

$$\|\mathscr{P}\| := \max_{I_k} \triangle_k x.$$

Se definen M_k y m_k como los valores máximo y mínimo respectivamente, que toma la función f en el subintervalo I_k, esto es:

$$M_k = \max_{x \in I_k} f(x),$$
$$m_k = \min_{x \in I_k} f(x).$$

Observación 8.2 Se dice que la partición de $[a,b]$, $\mathscr{P}' = \{a = x'_0, x'_1, \ldots, x'_m = b\}$ es un refinamiento de $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ si todo $x_k \in \mathscr{P}$ también se encuentra en $\mathscr{P}'$. Es decir que $\mathscr{P}'$ se construye a partir de $\mathscr{P}$, añadiéndole a esta última uno o mas puntos adicionales.

A continuación se presenta un problema geométrico clásico, el cual es determinar el área bajo una curva generada por una función, como se muestra en la Figura(8.1)

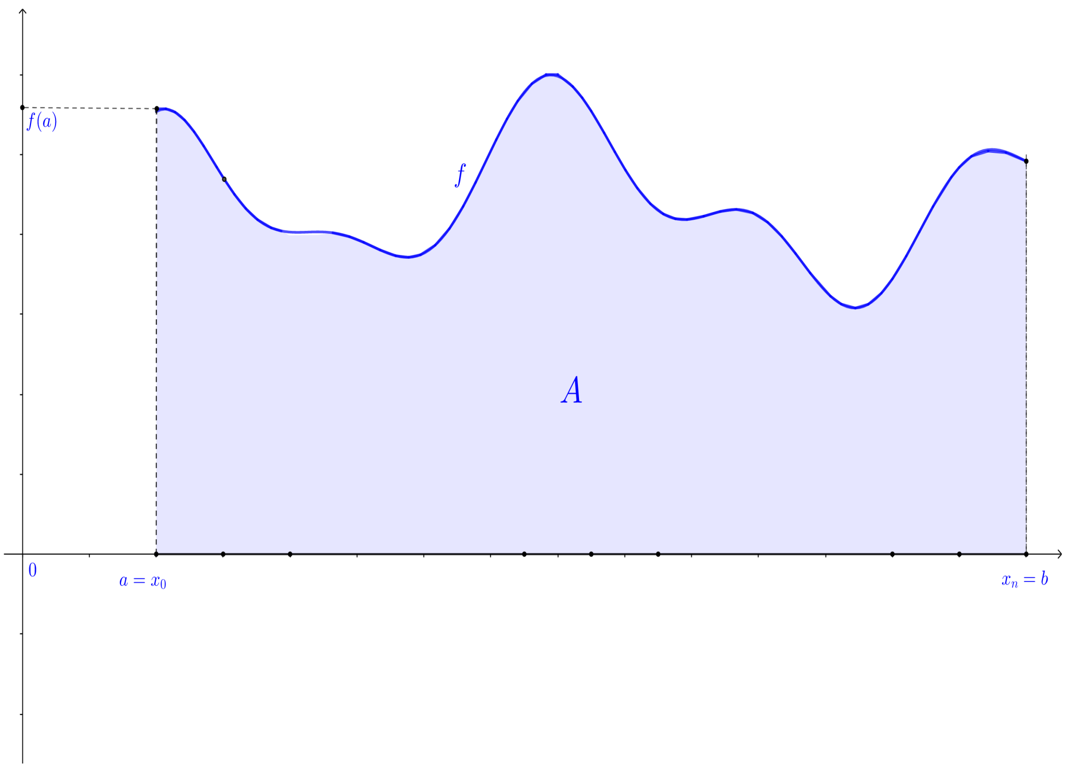


Figura 8.1: Área bajo la curva f.

Para esto es necesario dar una descripción elemental de lo que se entiende por área. Es así que, se supone la existencia de una familia $\mathscr{F}$ de conjuntos C_k del plano, a los cuales se les puede evaluar en una función ψ, denominada función área. Estos conjuntos se denominan " Conjuntos Medible ", y la función ψ satisface las siguientes condiciones:

1) $\psi(C_k) \geq 0$, para todo $C_k \in \mathscr{F}$.

2) Si C_1 y $C_2 \in \mathscr{F}$ entonces $C_1 \cap C_2 \in \mathscr{F}$ y $C_1 \cup C_2 \in \mathscr{F}$, cumpliendo además:

$$\psi(C_1 \cup C_2) = \psi(C_1) + \psi(C_2) - \psi(C_1 \cap C_2).$$

3) Si $C_1, C_2 \in \mathscr{F}$ con $C_1 \subset C_2$ entonces $C_2 \setminus C_1 \in \mathscr{F}$ y se cumple además

$$\psi(C_2 \setminus C_1) = \psi(C_2) - \psi(C_1).$$

4) Si $C_1 \in \mathscr{F}$ y si además existe un C_2 tal que es congruente con C_1, entonces se verifica que $C_2 \in \mathscr{F}$, adicionalmente se cumple que $\psi(C_1) = \psi(C_2)$.

5) Sea un rectángulo $C \in \mathscr{F}$, cuyos lados son a y b, entonces $\psi(C) = a \cdot b$.

6) Sean C_1, $C_2 \in \mathscr{F}$ y C un conjunto que satisface

$$C_1 \subseteq C \subseteq C_2. \tag{8.22}$$

Si existe un único número μ que satisface $\psi(C_1) \leq \mu \leq \psi(C_2)$, para todas las regiones escalonadas C_1 y C_2 que satisfacen (8.22), entonces C es un conjunto medible y además $\psi(C) = \mu$.

Como consecuencia de la existencia de una función área, definida sobre conjuntos medibles, entonces se procede a obtener el área bajo la curva f de la siguiente forma.

Primero, se establece la partición $\mathscr{P}$ del dominio y posteriormenete se calcula las áreas de los rectángulos por exceso, como se puede ver en la Figura (8.3), donde las bases de éstos son: la longitud de cada subintervalo I_k, y su altura cada valor M_k del respectivo subintervalo.

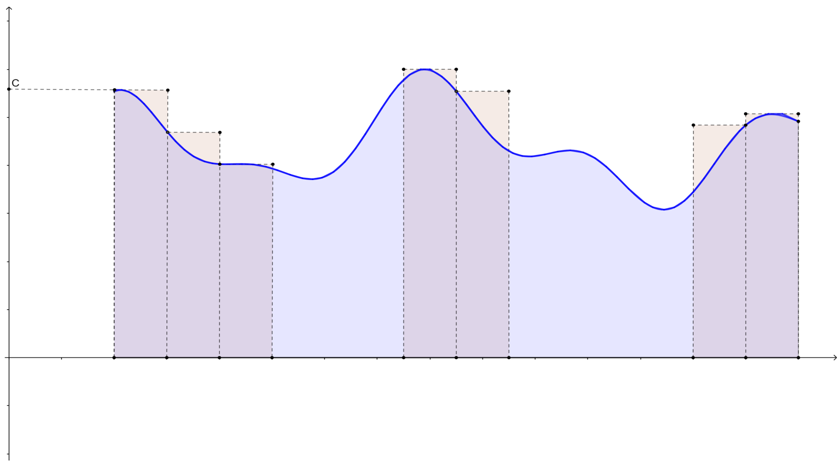


Figura 8.2: Suma por exceso .

Por lo tanto el área por exceso calculada como la suma de estos rectángulos la notaremos por:

$$U_{\mathscr{P}}(f) = M_1 \triangle_1 x + M_2 \triangle_2 x + \cdots + M_n \triangle_n x = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle_k x.$$

Se coloca U en alusión a la palabra inglesa ”*upper*”, que significa superior.

De forma similar el área por defecto, se calcula como la suma de los rectángulos cuyas bases son las longitudes de los subintervalos I_k y las alturas son los valores mínimos de la función f en dichos intervalos, como se muestra en la Figura (8.3), notados por m_k. Esto es:

$$L_{\mathscr{P}}(f) = m_1 \triangle_1 x + m_2 \triangle_2 x + \cdots + m_n \triangle_n x = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x,$$

Se utiliza la letra L en alusión a la palabra inglesa ”*lower*”, que significa inferior.

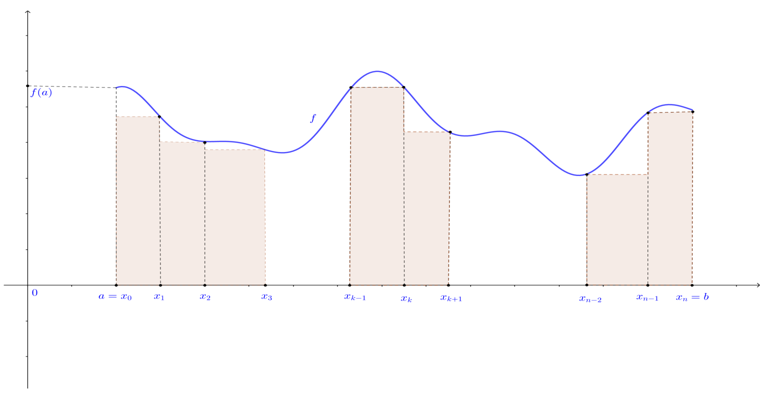


Figura 8.3: Suma por defecto.

En ambos casos $\mathscr{P}$ representa la partición sobre la cual se definen estas sumas.

Proposición 8.11 Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathscr{R}$, una función acotada en el dominio, entonces para cualquier partición $\mathscr{P}$ del intervalo $I=[a,b]$, se cumple que:

$$L_{\mathscr{P}}(f) \leq U_{\mathscr{P}}(f).$$

Demostración. En efecto, si $\mathscr{P}$ es una partición, como la dada en la Definición 8.9, y por la definición de m_k y M_k, para $k=1,2,...,n$, se tiene que

$$\begin{aligned} m_k \leq M_k &\Longrightarrow m_k \triangle_k x \leq M_k \triangle_k x \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle_k x \\ &\Longrightarrow L_{\mathscr{P}}(f) \leq U_{\mathscr{P}}(f). \end{aligned}$$

∎

Proposición 8.12 Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, si $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}'$ son dos particiones de $[a,b]$, donde $\mathscr{P}'$ es un refinamiento de $\mathscr{P}$, entonces se verifican las siguientes desigualdades:
i) $U_{\mathscr{P}'}(f) \leq U_{\mathscr{P}}(f)$.
ii) $L_{\mathscr{P}}(f) \leq L_{\mathscr{P}'}(f)$.

Demostración. En efecto, sin pérdida de generalidad, considere a $\mathscr{P}'$ un refinamiento de $\mathscr{P}$, tal que a esta última partición se la ha añadido un punto $\widehat{x} \in]x_{k-1}, x_k[$. Es decir:

$$\mathscr{P} = \{x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k, ..., x_n\},$$

donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$.
Así también,

$$\mathscr{P}' = \{x_0, x_1, ..., x_{k-1}, \widehat{x}, x_k, ..., x_n\},$$

con, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < \widehat{x} < x_k < \cdots < x_n = b$.
i) Con las particiones definidas anteriormente se tiene,

$$\begin{aligned} U_{\mathscr{P}'}(f) &= M_1 \triangle_1 x + M_2 \triangle_2 x + \cdots + \widehat{M}_{k_1} \triangle_{k_1} x + \widehat{M}_{k_2} \triangle_{k_2} x + \cdots + M_n \triangle_n x \\ &\leq M_1 \triangle_1 x + M_2 \triangle_2 x + \cdots + M_k \triangle_{k_1} x + M_k \triangle_{k_2} x + \cdots + M_n \triangle_n x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M_1 \triangle_1 x + M_2 \triangle_2 x + \cdots + M_k[\triangle_{k_1} x + \triangle_{k_2} x] + \cdots + M_n \triangle_n x \\
&= M_1 \triangle_1 x + M_2 \triangle_2 x + \cdots + M_k[(\widehat{x} - x_{k-1}) + (x_k - \widehat{x})] + \cdots + M_n \triangle_n x \\
&= M_1 \triangle_1 x + M_2 \triangle_2 x + \cdots + M_k(x_k - x_{k-1}) + \cdots + M_n \triangle_n x \\
&= \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle_k x \\
&= U_{\mathscr{P}}(f).
\end{aligned}
$$

ii) Así mismo, considerando las particiones definidas anteriormente se tiene,

$$
\begin{aligned}
L_{\mathscr{P}'}(f) &= m_1 \triangle_1 x + m_2 \triangle_2 x + \cdots + \widehat{m}_{k_1} \triangle_{k_1} x + \widehat{m}_{k_2} \triangle_{k_2} x + \cdots + m_n \triangle_n x \\
&\leq m_1 \triangle_1 x + m_2 \triangle_2 x + \cdots + m_k \triangle_{k_1} x + m_k \triangle_{k_2} x + \cdots + m_n \triangle_n x \\
&= m_1 \triangle_1 x + m_2 \triangle_2 x + \cdots + m_k[\triangle_{k_1} x + \triangle_{k_2} x] + \cdots + m_n \triangle_n x \\
&= m_1 \triangle_1 x + m_2 \triangle_2 x + \cdots + m_k[(\widehat{x} - x_{k-1}) + (x_k - \widehat{x})] + \cdots + m_n \triangle_n x \\
&= m_1 \triangle_1 x + m_2 \triangle_2 x + \cdots + m_k(x_k - x_{k-1}) + \cdots + m_n \triangle_n x \\
&= \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x \\
&= L_{\mathscr{P}}(f).
\end{aligned}
$$

■

Proposición 8.13 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathscr{R}$ una función acotada, si además $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}'$ son particiones de $[a,b]$, entonces: $L_{\mathscr{P}'}(f) \leq U_{\mathscr{P}}(f)$.

Demostración. En efecto, considere $\mathscr{P}^* = \mathscr{P}' \cup \mathscr{P}$, entonces $\mathscr{P}^*$ es una partición de $[a,b]$ entonces por las Proposiciones (8.11) y (8.12), se sigue que:

$$L_{\mathscr{P}'}(f) \leq L_{\mathscr{P}^*}(f) \leq U_{\mathscr{P}^*}(f) \leq U_{\mathscr{P}}(f).$$

■

Observe que toda función f acotada en $[a,b]$, y para cualquier partición $\mathscr{P}$, el área por defecto tiene cotas superiores que son las áreas por exceso, y viceversa. Esto quiere decir que existen tanto el ínfimo como el supremo de estas sumas, tales que verifican:

$$L_{\mathscr{P}}(f) \leq \text{ínf}\, U_{\mathscr{P}}(f) \tag{8.23}$$

$$\sup L_{\mathscr{P}}(f) \leq U_{\mathscr{P}}(f). \tag{8.24}$$

Así, de (8.23) y (8.24) se sigue que

$$\sup L_{\mathscr{P}}(f) \leq \text{ínf}\, U_{\mathscr{P}}(f). \tag{8.25}$$

Definición 8.10 Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathscr{P}$ una partición del intervalo $[a,b]$, entonces al $\sup L_{\mathscr{P}}(f)$ se lo denomina integral inferior de Riemann; así también al $\text{ínf}\, U_{\mathscr{P}}(f)$ se denomina integral superior de Riemann. Se notan las dos integrales como sigue:

$$\begin{aligned} \text{ínf}\, U_{\mathscr{P}}(f) &= \overline{\int_a^b} f(x)dx \\ \sup L_{\mathscr{P}}(f) &= \underline{\int_a^b} f(x)dx. \end{aligned}$$

Proposición 8.14 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada donde Γ y δ son las cotas superior e inferior respectivamente, entonces se verifica:

$$\delta(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \Gamma(b-a).$$

Demostración. Como, $\delta \leq f(x)$ y $f(x) \leq \Gamma$, para todo $x \in [a,b]$. Entonces

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup L_{\mathscr{P}}(f) \geq L_{\mathscr{P}}(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x \geq \sum_{k=1}^{n} \delta \triangle_k x = \delta(b-a). \tag{8.26}$$

Así mismo,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \text{ínf}\, U_{\mathscr{P}}(f) \leq U_{\mathscr{P}}(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle_k x \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle_k x = \Gamma(b-a). \tag{8.27}$$

De (8.26), (8.27) y por la Definición 8.10 se sigue que,

$$\delta(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \Gamma(b-a).$$

∎

Proposición 8.15 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Si $\xi \in (a,b)$, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx.$$

Demostración. En efecto sea $\mathscr{P}$ una partición de $[a,b]$ y sea $\mathscr{Q}$ un refinamiento de $\mathscr{P}$ donde $\xi \in Q$. Así $\mathscr{Q}$, induce particiones de $[a,\xi]$ y $[\xi,b]$ que las notamos por $\mathscr{Q}'$ y $\mathscr{Q}''$ respectivamente. Note que $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}' \cup \mathscr{Q}''$ y $\mathscr{Q}' \cap \mathscr{Q}'' = \{\xi\}$.
Ahora, dado que $\overline{\int_a^\xi} f(x)dx = \inf\limits_{\mathscr{Q}'} U_{\mathscr{Q}'}(f)$ y $\overline{\int_\xi^b} f(x)dx = \inf\limits_{\mathscr{Q}''} U_{\mathscr{Q}''}(f)$, entonces por el Teorema 8.8 se sigue que, para todo $\varepsilon > 0$, existen particiones de $[a,\xi]$ y $[\xi,b]$ tales que

$$U_{\mathscr{Q}'}(f) < \overline{\int_a^\xi} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad U_{\mathscr{Q}''}(f) < \overline{\int_\xi^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde

$$U_{\mathscr{Q}}(f) = U_{\mathscr{Q}'}(f) + U_{\mathscr{Q}''}(f) < \overline{\int_a^\xi} f(x)dx + \overline{\int_\xi^b} f(x)dx + \varepsilon,$$

luego por el Teorema 8.9, se concluye que

$$\overline{\int_a^\xi} f(x)dx + \overline{\int_\xi^b} f(x)dx = \inf U_{\mathscr{Q}}(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{8.28}$$

Así también, como $\underline{\int_a^\xi} f(x)dx = \sup\limits_{\mathscr{Q}'} L_{\mathscr{Q}'}(f)$ y $\underline{\int_\xi^b} f(x)dx = \sup\limits_{\mathscr{Q}''} L_{\mathscr{Q}''}(f)$, entonces utilizando el Teorema 8.6 se sigue que, para todo $\varepsilon > 0$ existen particiones $\mathscr{Q}'$ y $\mathscr{Q}''$ de $[a,\xi]$ y $[\xi,b]$ respectivamente, tales que

$$\underline{\int_a^\xi} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < L_{\mathscr{Q}'}(f) \quad y \quad \underline{\int_\xi^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < L_{\mathscr{Q}''}(f)$$

de donde al sumar miembro a miembro, se tiene

$$\underline{\int_a^\xi} f(x)dx + \underline{\int_\xi^b} f(x)dx - \varepsilon < L_{\mathscr{Q}'}(f) + L_{\mathscr{Q}''}(f) = L_{\mathscr{Q}}(f).$$

Luego por el Teorema 8.7 se sigue que:

$$\underline{\int_a^\xi} f(x)dx + \underline{\int_\xi^b} f(x)dx = \sup L_{\mathscr{Q}}(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{8.29}$$

Ahora como f es integrable entonces:

$$\begin{aligned}
&\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \\
&\Longrightarrow \overline{\int_a^\xi} f(x)dx + \overline{\int_\xi^b} f(x)dx = \underline{\int_a^\xi} f(x)dx + \underline{\int_\xi^b} f(x)dx \\
&\Longrightarrow \left[\overline{\int_a^\xi} f(x)dx - \underline{\int_a^\xi} f(x)dx\right] + \left[\overline{\int_\xi^b} f(x)dx - \underline{\int_\xi^b} f(x)dx\right] = 0 \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \overline{\int_a^\xi} f(x)dx = \underline{\int_a^\xi} f(x)dx = \int_a^\xi f(x)dx \\ \overline{\int_\xi^b} f(x)dx = \underline{\int_\xi^b} f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx. \end{cases}
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Finalmente, de (8.28), (8.29) y (8.30) se sigue que

$$\int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx = \overline{\int_a^\xi} f(x)dx + \overline{\int_\xi^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

■

Teorema 8.16 — Condición de integrabilidad. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es integrable sobre el dominio, si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ tal que $U_{\mathscr{P}}(f) - L_{\mathscr{P}}(f) < \varepsilon$.

Demostración. La demostración se establece en dos partes que son la suficiencia y la necesidad. $\Rightarrow$) en efecto, suponiendo que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{8.31}$$

Luego como $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \operatorname{ínf} U_{\mathscr{P}}(f)$ y $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup L_{\mathscr{P}}(f)$, entonces por el Teorema 8.8 y Teorema 8.6 se tiene respectivamente que, para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ tal que,

$$U_{\mathscr{P}}(f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < L_{\mathscr{P}}(f),$$

de donde, al sumar miembro a miembro las dos desigualdades, se obtiene

$$U_{\mathscr{P}}(f) + \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} + L_{\mathscr{P}}(f),$$

reordenando los términos de forma adecuada se tiene

$$U_{\mathscr{P}}(f)-L_{\mathscr{P}}(f)<\overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon,$$

donde al utilizar (8.31) en la desigualdad anterior, se tiene

$$U_{\mathscr{P}}(f)-L_{\mathscr{P}}(f)<\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)dx+\varepsilon \Longrightarrow U_{\mathscr{P}}(f)-L_{\mathscr{P}}(f)<\varepsilon.$$

$\Leftarrow$) Recíprocamente, si para todo $\varepsilon>0$ existe una partición $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ tal que $U_{\mathscr{P}}(f)-L_{\mathscr{P}}(f)<\varepsilon$, entonces

$$0\leq \overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx=\operatorname{ínf} U_{\mathscr{P}}(f)-\sup L_{\mathscr{P}}(f)\leq U_{\mathscr{P}}(f)-L_{\mathscr{P}}(f)<\varepsilon.$$

Como estas últimas desigualdades arriba, se verifican para todo $\varepsilon>0$, entonces

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx=0 \Longrightarrow \overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

esto significa que f es integrable sobre $[a,b]$. ■

■ **Ejemplo 8.11** Determine si la siguiente función $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, que se define a continuación, es integrable.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x\in[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}).\end{cases}$$

Solución. Note que para cualquier partición $\mathscr{P}$ del intervalo $[0,1]$ existen racionales e irracionales, por lo que se tiene que $M_k=\sup_{\mathscr{P}} f(x)=1$ y $m_k=\operatorname{ínf}_{\mathscr{P}} f(x)=0$, además la longitud del intervalo $[0,1]$ resulta: $b-a=1-0=1$, por lo tanto

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx=\operatorname{ínf}_{\mathbb{P}} U_{\mathbb{P}}(f)=\sum_{k=1}^{n} M_k\bigtriangleup_k x=\sum_{k=1}^{n} 1\bigtriangleup_k x=1\cdot 1=1. \tag{8.32}$$

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx=\sup_{\mathbb{P}} L_{\mathbb{P}}(f)=\sum_{k=1}^{n} m_k\bigtriangleup_k x=\sum_{k=1}^{n} 0\bigtriangleup_k x=0\cdot 1=0. \tag{8.33}$$

En consecuencia de (8.32) y (8.33) se sigue que $1=\overline{\int_0^1} f(x)dx\neq\underline{\int_0^1} f(x)dx=0$, luego por el Teorema 8.16 se concluye que f no es integrable.

Observe que existen funciones, como la del ejemplo anterior, que a pesar de ser acotadas no son integrables según Riemann.

Proposición 8.17 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona, entonces f es integrable.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que f es creciente, por lo tanto para cada subintervalo $I_k \subset [a,b]$, que define una partición $\mathscr{P}$, se nota $m_k = f(x_{k-1})$ y $M_k = f(x_k)$ al ínfimo y al supremo respectivamente de la función f. Luego, usando la propiedad telescópica, se sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}[M_k - m_k] &= \sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})] \\ &= f(x_n) - f(x_0) \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned} \tag{8.34}$$

Ahora, para esta partición $\mathscr{P}$ se tiene,

$$\begin{aligned} 0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx &\le U_{\mathscr{P}}(f) - L_{\mathscr{P}}(f) \\ &= \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle_k x - \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x \\ &\le \sum_{k=1}^{n} M_k \|\mathscr{P}\| - \sum_{k=1}^{n} m_k \|\mathscr{P}\| \\ &= \|\mathscr{P}\| \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \\ &= \|\mathscr{P}\| [f(b) - f(a)]. \end{aligned} \tag{8.35}$$

Si $f(a) = f(b)$, entonces de (8.35) se tiene que: $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, lo cual significa que f es integrable en el dominio.

Si $f(a) \neq f(b)$ y como f es creciente, se tiene $f(b) - f(a) > 0$, dado $\varepsilon > 0$ y al tomar $\tau = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, entonces si $\|\mathscr{P}\| < \tau$, en (8.35) se tiene:

$$\begin{aligned} 0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx &< \tau[f(b) - f(a)] \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot [f(b) - f(a)] \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego se cumple las hipótesis del Teorema 8.16, en consecuencia f es integrable en $[a,b]$. ■

■ **Ejemplo 8.12** Determine si la siguiente función es integrable.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad -2 \leq x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x^2+1 & si \quad 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Solución. Note que en $[-2,0)$ la función es creciente; además en $[0,1]$ la función es continua; finalmente en $(1,2]$ la función es creciente, en consecuencia en todo el dominio la función f es creciente, es decir es monótona, entonces por la Proposición 8.17, se sigue que f es integrable en $[-2,2]$.

Proposición 8.18 Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrabl en todo el dominio.

Demostración. Como $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es un cerrado y acotado, es decir es un compacto, además como f es continua en dicho compacto, entonces $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua, es decir que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, [a,b]) > 0$ tal que para $\xi, \zeta \in [a,b]$,

$$si \;\; |\xi - \zeta| < \delta \Longrightarrow |f(\xi) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{8.36}$$

Considerando una partición $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ tal que $\|\mathscr{P}\| < \delta$, entonces en cada subintervalo $I_k \subset [a,b]$ generado por dicha partición, existen $\xi_k,\ \zeta_k \in I_k$ tales que $M_k = f(\xi_k)$ y $m_k = f(\zeta_k)$, en consecuencia por (8.36), se sigue que

$$|\xi_k - \zeta_k| \leq \|\mathscr{P}\| < \delta \Longrightarrow M_k - m_k \leq |M_k - m_k| = |f(\xi_k) - f(\zeta_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{8.37}$$

Ahora de (8.37) obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx &\leq U_{\mathscr{P}}(f) - L_{\mathscr{P}}(f) \\ &= \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle_k x - \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |M_k - m_k| \triangle_k x \\ &= \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k) - f(\zeta_k)| \triangle_k x \\ &< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \triangle_k x \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \triangle_k x \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego por el Teorema 8.16 se sigue que f es integrable sobre $[a,b]$. ■

Es de notar que la continuidad de una función sobre un dominio garantiza siempre la integrabilidad de dicha función, pero recíprocamente en general no se cumple. Es decir una función integrable no siempre es continua. Así se ejemplifica en la siguiente función.

■ **Ejemplo 8.13** Note que la función: $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x \leq 2. \end{cases}$
No es continua en $x = 0$, sin embargo es integrable en $[-2,2]$.

■ **Ejemplo 8.14** Note que la siguiente función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, no es una función integrable en $[-2,2]$, ya que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, es decir que f no es continua en $x = 0$.

■ **Ejemplo 8.15** ¿La función $f(x) = x^2 + 1$ es integrable sobre $[-2,2]$?
Si, ya que f es continua en todo $[-2,2]$, luego por el Teorema 8.18, se sigue que f es integrable en dicho dominio.

Teorema 8.19 — Linealidad de la integral. Sean $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables, entonces la integral es lineal; esto quiere decir que se verifican las propiedades siguientes:

a) $$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

b) $$\int_a^b (cf)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

donde c es una constante real.

Demostración. **a)** Sean $\mathscr{P}$ una partición de $[a,b]$ con $I_k \subset [a,b]$ subintervalos definidos por esta partición. Entonces definimos:

$$m_k = \inf\{(f+g)(x)/x \in I_k\}$$

$$m'_k = \inf\{f(x)/x \in I_k\}$$

$$m''_k = \inf\{g(x)/x \in I_k\}$$

$$M_k = \sup\{(f+g)(x)/x \in I_k\}$$

$$M'_k = \sup\{(f+g)(x)/x \in I_k\}$$

$$M''_k = \sup\{(f+g)(x)/x \in I_k\}.$$

En primer lugar note que para $\xi_1,\ \xi_2 \in I_k$ tenemos por la Proposición 8.10,

$$\begin{aligned} m'_k + m''_k &= \text{ínf}\{f(\xi_1)/\xi_1 \in I_k\} + \text{ínf}\{g(\xi_2)/\xi_2 \in I_k\} \\ &= \text{ínf}\{f(\xi_1) + g(\xi_2)/\xi_1, \xi_2 \in I_k\} \\ &\leq \text{ínf}\{f(\xi) + g(\xi)/\xi \in I_k\} \\ &= m_k. \end{aligned} \tag{8.38}$$

Así mismo por la proposición 8.10, se tiene que

$$\begin{aligned} M'_k + M''_k &= \sup\{f(\xi_1)/\xi_1 \in I_k\} + \sup\{g(\xi_2)/\xi_2 \in I_k\} \\ &= \sup\{f(\xi_1) + g(\xi_2)/\xi_1, \xi_2 \in I_k\} \\ &\geq \text{ínf}\{f(\xi) + g(\xi)/\xi \in I_k\} \\ &= M_k. \end{aligned} \tag{8.39}$$

Ahora de (8.38) se tiene

$$\begin{aligned} m'_k + m''_k \leq m_k &\Longrightarrow m'_k \triangle_k x + m''_k \triangle_k x \leq m_k \triangle_k x \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} (m'_k \triangle_k x + m''_k \triangle_k x) \leq \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} m'_k \triangle_k x + \sum_{k=1}^{n} m'' \triangle_k x \leq \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x \\ &\Longrightarrow L_{\mathscr{P}}(f) + L_{\mathscr{P}}(g) \leq L_{\mathscr{P}}(f+g). \end{aligned} \tag{8.40}$$

Así mismo de (8.39) se tiene que:

$$\begin{aligned} M_k \leq M'_k + M''_k \leq M_k &\Longrightarrow M_k \triangle_k x \leq M'_k \triangle_k x + M''_k \triangle_k x \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle_k x \leq \sum_{k=1}^{n} (M'_k \triangle_k x + M''_k \triangle_k x) \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle_k x \leq \sum_{k=1}^{n} M'_k \triangle_k x + \sum_{k=1}^{n} M'' \triangle_k x \\ &\Longrightarrow U_{\mathscr{P}}(f+g) \leq U_{\mathscr{P}}(f) + U_{\mathscr{P}}(f). \end{aligned} \tag{8.41}$$

Luego por la Proposición 8.11, además de (8.40) y (8.41) se obtiene

$$L_{\mathscr{P}}(f) + L_{\mathscr{P}}(g) \leq L_{\mathscr{P}}(f+g) \leq U_{\mathscr{P}}(f+g) \leq U_{\mathscr{P}}(f) + U_{\mathscr{P}}(f).$$

Ahora como f y g son integrables en $[a,b]$ entonces por el Teorema 8.16 se tiene que existen particiones $\mathscr{P}'$ y $\mathscr{P}''$ de $[a,b]$ tales que:

$$U_{\mathscr{P}'}(f) - L_{\mathscr{P}'}(f) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.42}$$

$$U_{\mathscr{P}''}(f) - L_{\mathscr{P}''}(f) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.43}$$

Considerando a $\mathscr{P} = \mathscr{P}' \cup \mathscr{P}''$ entonces de (8.42) y (8.43) se sigue

$$U_{\mathscr{P}}(f) - L_{\mathscr{P}}(f) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.44}$$

$$U_{\mathscr{P}}(f) - L_{\mathscr{P}}(f) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.45}$$

de donde al sumas lado a lado de las desiguadades, se tiene

$$U_{\mathscr{P}}(f) + U_{\mathscr{P}}(g) - [L_{\mathscr{P}}(f) + L_{\mathscr{P}}(g)] < \varepsilon, \tag{8.46}$$

luego de (8.40), (8.41) y (8.46) se concluye que

$$U_{\mathscr{P}}(f+g) - L_{\mathscr{P}}(f+g) \leq U_{\mathscr{P}}(f) + U_{\mathscr{P}}(g) - [L_{\mathscr{P}}(f) + L_{\mathscr{P}}(g)] < \varepsilon, \tag{8.47}$$

en consecuencia por el Teorema 8.16 se sigue que $f+g$ es integrable.

Finalmente cono $f+g$ es integrables, f es integrable y g es integrable, entonces se tiene respectivamente

$$L_{\mathscr{P}}(f+g) \leq \int_a^b (f+g)(x)dx \leq U_{\mathscr{P}}(f+g)$$
$$L_{\mathscr{P}}(f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U_{\mathscr{P}}(f)$$
$$L_{\mathscr{P}}(g) \leq \int_a^b g(x)dx \leq U_{\mathscr{P}}(g),$$

de donde

$$L_{\mathscr{P}}(f) + L_{\mathscr{P}}(g) \leq \int_a^b (f+g)(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq U_{\mathscr{P}}(f) + U_{\mathscr{P}}(g)$$

luego de (8.47) se concluye que

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b (f+g)(x)dx < \varepsilon,$$

y como es para todo $\varepsilon > 0$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f+g)(x)dx.$$

b) Consideramos el caso $c > 0$, entonces se definen

$$\begin{aligned}
m_k &= \text{ínf}\{(cf)(x)/x \in I_k\} \\
m'_k &= \text{ínf}\{(f)(x)/x \in I_k\}
\end{aligned}$$

luego note que

$$m_k = \text{ínf}\{(cf)(x)/x \in I_k\} = \text{ínf}\{cf(x)/x \in I_k\} = c\,\text{ínf}\{f(x)/x \in I_k\} = cm'_k,$$

de donde

$$\begin{aligned}
m_k = cm'_k &\Longrightarrow m_k \triangle_k x = cm'_k \triangle_k x \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x = c \sum_{k=1}^{n} m'_k \triangle_k x \\
&\Longrightarrow L_{\mathscr{P}}(cf) = cL_{\mathscr{P}}(f) \\
&\Longrightarrow \sup\{L_{\mathscr{P}}(cf)\} = \sup\{cL_{\mathscr{P}}(f)\} \\
&\Longrightarrow \sup\{L_{\mathscr{P}}(cf)\} = c\sup\{L_{\mathscr{P}}(f)\} \\
&\Longrightarrow \underline{\int_a^b} (cf)(x)dx = c\underline{\int_a^b} f(x)dx. \qquad (8.48)
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $M_u = \sup\{(cf)(x)/x \in I_k\}$ y $M'_k = c\sup\{f(x)/x \in I_k\}$, de donde,

$$M_k = \sup\{(cf)(x)/x \in I_k\} = \{cf(x)/x \in I_k\} = c\sup\{f(x)/x \in I_k\} = cM'_k,$$

en consecuencia

$$M_k = cM'_k \Longrightarrow M_k \triangle_k x = cM'_k \triangle_k x$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle_k x = c \sum_{k=1}^{n} M'_k \triangle_k x \tag{8.49}$$

$$\Longrightarrow U_{\mathscr{P}}(cf) = cU_{\surd}(f)$$

$$\Longrightarrow \text{ínf}\{U_{\mathscr{P}}(cf)\} = c\,\text{ínf}\{U_{\mathscr{P}}(f)\}$$

$$\Longrightarrow \overline{\int_a^b}(cf)(x)dx = c\overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{8.50}$$

Luego de (8.48) y (8.50) se tiene

$$\underline{\int_a^b}(cf)(x)dx = c\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b}(cf)(x)dx = c\overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{8.51}$$

Como f es integrable, entonces de lo anterior se sigue

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{\int_a^b}(cf)(x)dx - \underline{\int_a^b}(cf)(x)dx &= c\overline{\int_a^b} f(x)dx - c\underline{\int_a^b} f(x)dx \\ &= c\left(\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx\right) \\ &< c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde por el Teorema 8.16, se concluye que cf es integrable en $[a,b]$.

Además de (8.51) se sigue que,

$$\int_a^b (cf)(x)dx = \underline{\int_a^b}(cf)(x)dx = c\underline{\int_a^b} f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Si $c < 0$, el procedimiento es el mismo. ■

Definición 8.11 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si $\mathscr{P}$ una partición del intervalo y si $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ es un intervalo de dicha partición entonces tome $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ de donde se obtiene $f(\xi_k) \triangle_k x$, lo cual representa el área del rectángulo $k-$*esimo* como indica la Figura, entonces la suma de las áreas de los n rectángulos formados por la partición resulta:

$$\mathscr{S}_{\mathscr{P}}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle_k x. \tag{8.52}$$

A la expresión (8.52) se la denomina suma de Riemann.

Note que en (8.52) si n se hace cada vez mas grande o de forma equivalente si $\|\mathscr{P}\|$ se hace pequeña entonces la suma de Riemann se acerca al área bajo la curva de la función f. Esto amerita la siguiente definición de integral.

Definición 8.12 Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada, si $\mathscr{P}$ es una partición de $[a,b]$ con norma $\mathscr{P}$. Entonces se dice que f es una función Riemann integrable sobre $[a,b]$ que se nota por $\int_a^b f(x)dx$, si existe el siguiente límite de las sumas de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\|\mathscr{P}\|\mapsto 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle_k x. \tag{8.53}$$

Note que el límite de las sumas de Riemann existe y cuyo valor es L significa que: para todo $\varepsilon>0$, existe algún $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que si

$$\|\mathscr{P}\|<\delta \Longrightarrow |\mathscr{S}_{\mathscr{P}}(f)-L|<\varepsilon.$$

En consecuancia se tiene otro teorema de integrabilidad.

Teorema 8.20 Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. se tiene que f es integrable e igual al valor L si y solo si:

$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0}\mathscr{S}_{\mathscr{P}}(f)=L.$$

A continuación se presentan algunos ejercicios de aplicación directa de la teoría vista en esta sección.

■ **Ejemplo 8.16** Sea $f(x)=c$, para todo $x\in[\alpha,\beta]$, donde $\alpha<\beta$ y c es una constante real. Determine $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, utilizando el criterio de integrabilidad a partir del límite de las sumas de Riemann.

Solución. Tenemos los siguientes hechos que se deducen de las hipótesis:

$$\begin{aligned}
&f(x)=c \quad \forall x\in[\alpha,\beta]\\
&\triangle x=\frac{\beta-\alpha}{n}\\
&\xi_k=\alpha+k\triangle x=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\\
&f(\xi_k)=c,
\end{aligned}$$

de donde se tiene

$$\int_\alpha^\beta f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} c\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right) n\\
&= \lim_{n\to\infty} c(\beta-\alpha)\\
&= c(\beta-\alpha).
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 8.17** Sea $f(x) = cx$, para todo $x \in [\alpha, \beta]$, donde $\alpha < \beta$ y c es una constante real. Determine $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, utilizando el criterio de integrabilidad a partir del límite de las sumas de Riemann.

Solución. Tenemos los siguientes hechos que se deducen de las hipótesis:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = cx \quad \forall x \in [\alpha, \beta]\\
&\triangle x = \frac{\beta-\alpha}{n}\\
&\xi_k = \alpha + k \triangle x = \alpha + k \cdot \frac{\beta-\alpha}{n}\\
&f(\xi_k) = c\left(\alpha + k \cdot \frac{\beta-\alpha}{n}\right),
\end{aligned}
$$

de donde se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c\left(\alpha + k \cdot \frac{\beta-\alpha}{n}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \left[c\alpha\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} 1 + c\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} \left[c\alpha\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right) n + c\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&= c\alpha(\beta-\alpha) + \frac{c}{2}(\beta-\alpha)^2\left(1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{c}{2}(\beta^2-\alpha^2).
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 8.18** Determine el área de la región acotada por $f(x) = 12 - x^2 - x$, el eje de las x y las rectas $x = -3$ y $x = 2$.

Solución. Para este ejemplo se tiene

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 12 - x^2 - x, \quad x \in [-3,2] \\
\triangle x &= \frac{2-(-3)}{n} = \frac{5}{n}, \\
\xi_k &= -3 + k\triangle x = -3 + \frac{5k}{n} \\
f(\xi_k) &= 12 - \left(-3 + \frac{5k}{n}\right)^2 - \left(-3 + \frac{5k}{n}\right) = 6 - \frac{25k^2}{n^2} + \frac{25k}{n},
\end{aligned}
$$

en consecuencia

$$
\begin{aligned}
A(R) &= \int_a^b f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(6 - \frac{25k^2}{n^2} + \frac{25k}{n}\right)\left(\frac{5}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{30}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{125k^2}{n^3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{125k}{n^2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{30}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{125}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{125}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{30}{n}n - \frac{125}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{125}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[30 - \frac{125}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{125}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= 30 - \frac{125}{3} + \frac{125}{2} \\
&= \frac{305}{6}.
\end{aligned}
$$

8.3.1 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 8.9 Determine el valor de las siguientes integrales de Riemann, utilizando el Teorema de condición de integrabilidad en función del límite de las sumas de Riemann.

a) $\displaystyle\int_1^3 (x^4 - 2x + 3)dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{1}{4}x - 1\right)dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 (x^5 - 2x^2 + 7x)dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{1}{\pi}x^2 + 2x - \frac{1}{\pi}\right)dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{2}{5}x + \pi^2\right)dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^1 \left(x^4 + x^3 - x^2 - x + \pi\right)dx$

g) $\displaystyle\int_0^{10}(x^2-x+1)dx$ h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\pi}}\left(2x^2+x-\frac{1}{2}\right)dx$

i) $\displaystyle\int_0^{2}(7x^3-2x^2-9x+10)dx$ j) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{5}x^4-3x^2+\frac{1}{7}x-20\right)dx$

Ejercicio 8.10 Exprese el siguiente límite como una integral de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right).$$

Ejercicio 8.11 Utilizando el límite de las sumas de Riemann, determine la integral en el dominio $[0,\pi]$ de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-2x+1 & si \quad 0\leq x\leq \frac{1}{2}\\ -2x^2+x+1 & si \quad \frac{1}{2}<x<1\\ x^2-5 & si \quad 1\leq x\leq \pi.\end{cases}$$

8.4 Teoremas Fundamentales del Cálculo

En esta sección, se demuestran los teoremas fundamentales del cálculo; los cuales relacionan la integral con la derivada.

Teorema 8.21 [Primer Teorema Fundamental del Cálculo] Sea f una función real integrable sobre el intervalo $[a,b]$; además se define la función

$$F=\begin{cases} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & F(x):=\int_a^x f(t)dt.\end{cases}$$

Si f es continua en $\xi\in[a,b]$, entonces F es derivable en ξ, además se cumple que $F'(\xi)=f(\xi)$.

Demostración. Considere dos casos.

i) Si $h>0$, entonces definimos

$$\alpha(h):=\inf\{f(x):\xi\leq x\leq \xi+h\}$$

$$\Theta(h):=\sup\{f(x):\xi\leq x\leq \xi+h.\}$$

Luego por la Proposición 8.14, se sigue que

$$\alpha(h)\cdot h \leq \int_{\xi}^{\xi+h} f(t)dt \leq \Theta(h)\cdot h. \tag{8.54}$$

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned} F(\xi+h)-F(\xi) &= \int_a^{\xi+h} f(t)dt - \int_a^{\xi} f(t)dt \\ &= \int_a^{\xi} f(t)dt + \int_{\xi}^{\xi+h} f(t)dt - \int_a^{\xi} f(t)dt \\ &= \int_{\xi}^{\xi+h} f(t)dt. \end{aligned} \tag{8.55}$$

Sustituyendo (8.55) en (8.54) se sigue que,

$$\begin{aligned} \alpha(h)\cdot h \leq \int_{\xi}^{\xi+h} f(t)dt \leq \Theta(h)\cdot h &\Longrightarrow \alpha(h)\cdot h \leq F(\xi+h)-F(\xi) \leq \Theta(h)\cdot h \\ &\Longrightarrow \alpha(h) \leq \frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h} \leq \Theta(h) \\ &\Longrightarrow \lim_{x\to h}\alpha(h) \leq \lim_{x\to h}\frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h} \leq \lim_{x\to h}\Theta(h) \\ &\Longrightarrow f(\xi) \leq F'(\xi) \leq f(\xi), \end{aligned} \tag{8.56}$$

de donde (8.56) se sigue de la continuidad de la función f.

ii) Si $h < 0$, de forma similar se define

$$\alpha(h) := \inf\{f(x) : \xi+h \leq x \leq \xi\}$$
$$\Theta(h) := \sup\{f(x) : \xi+h \leq x \leq \xi\}.$$

Además como $\xi+h < \xi$, entonces

$$\begin{aligned} -F(\xi+h)+F(\xi) &= -\int_a^{\xi+h} f(t)dt + \int_a^{\xi} f(t)dt \\ &= -\int_a^{\xi} f(t)dt - \int_{\xi}^{\xi+h} f(t)dt + \int_a^{\xi} f(t)dt \\ &= \int_{\xi+h}^{\xi} f(t)dt. \end{aligned} \tag{8.57}$$

Ahora por la Proposición 8.14, por la ecuación (8.57) y debido a que $-h > 0$, se obtiene que

$$\alpha(h)[-h] \leq \int_{\xi+h}^{\xi} f(t)dt \leq \Theta(h)[-h] \Longrightarrow \alpha(h)[-h] \leq -F(\xi+h)+F(\xi) \leq \Theta(h)[-h]$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \alpha(h) \leq \frac{-F(\xi+h)+F(\xi)}{-h} \leq \Theta(h) \\
&\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \alpha(h) \leq \lim_{h\to 0} \frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h} \leq \lim_{h\to 0} \Theta(h) \\
&\Longrightarrow f(\xi) \leq F'(\xi) \leq f(\xi). \qquad (8.58)
\end{aligned}$$

Así de (8.56) y (8.58) se sigue que $F'(\xi) = f(\xi)$, para todo $\xi \in [a,b]$. ■

Se presentan algunos ejemplos de aplicación directa del primer Teorema Fundamental del Cálculo.

■ **Ejemplo 8.19** Determine $F'(x)$, si

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$$

Solución. En efectos, utilizando el Teorema (8.21), se tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt\right] \\
&= \sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.20** Determine $F'(x)$, si

$$F(x) = \int_x^5 \sqrt{1+t^4}dt.$$

Solución. Por el Teorema (8.21), se tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_x^5 \sqrt{1+t^4}dt\right] \\
&= -\frac{d}{dx}\int_5^x \sqrt{1+t^4}dt \\
&= -\sqrt{1+x^4}.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.21** Determine $F'(x)$, si

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_6^y \frac{1}{1+t^2+\cos^2 t}dt\right) dy.$$

Solución. Por el Teorema (8.21), se tiene

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \left(\int_6^y \frac{1}{1+t^2+\cos^2 t}dt\right) dy\right]$$

$$= \int_6^x \frac{1}{1+t^2+\cos^2 t} dt.$$

■ **Ejemplo 8.22** Determine $F'(x)$, si

$$F(x) = \cos\left[\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt\right) dy\right].$$

Solución. Por el Teorema (8.21), se tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\cos\left[\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt\right) dy\right]\right\}\\
&= -\operatorname{sen}\left[\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt\right) dy\right] \cdot \frac{d}{dx}\left\{\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt\right) dy\right\}\\
&= -\operatorname{sen}\left[\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt\right) dy\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}^3 t dt\right).
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.23** Determine $F'(x)$, si

$$F(x) = \left[\int_0^x \frac{1}{a+bt+ct^2} dt\right]^3.$$

Solución. Por el Teorema (8.21), se tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\left[\int_0^x \frac{1}{a+bt+ct^2} dt\right]^3\right\}\\
&= 3\left[\int_0^x \frac{1}{a+bt+ct^2} dt\right]^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\left[\int_0^x \frac{1}{a+bt+ct^2} dt\right]\right)\\
&= \frac{3}{a+bx+cx^2}\left[\int_0^x \frac{1}{a+bt+ct^2} dt\right]^2.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.24** Determine $F'(x)$, si

$$F(x) = \int_{100}^x \frac{\operatorname{sen}^3 \sqrt{t}}{t^5+1} dt.$$

Solución. Por el Teorema (8.21), se tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_{100}^x \frac{\operatorname{sen}^3 \sqrt{t}}{t^5+1}\right]\\
&= \frac{\operatorname{sen}^3 \sqrt{x}}{x^5+1}.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.25** Halle la función f y una constante c tal que se verifique la ecuación siguiente:

$$\int_c^x f(t)dt = \cos x - \frac{1}{2}.$$

Solución. Por el Teorema (8.21), se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(\int_c^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\left[\cos x - \frac{1}{2}\right] \Longrightarrow f(x) = -\operatorname{sen} x.$$

Luego por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_c^x -\operatorname{sen} t\, dt = \cos x - \frac{1}{2} &\Longrightarrow \cos(t)|_c^x = \cos(x) - \frac{1}{2}\\ &\Longrightarrow \cos(x) - \cos(c) = \cos(x) - \frac{1}{2}\\ &\Longrightarrow \cos(c) = \frac{1}{2}\\ &\Longrightarrow c = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.26** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta. Su posición en el instante t es $f(t)$.

Si $0 \leq t \leq 1$, $f(t)$ está dado por:

$$f(t) = \int_0^t \frac{1+2\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi x)}{1+x^2}dx.$$

Para $t \geq 1$, la partícula se mueve con aceleración constante que adquiere en $t = 1$. Calcule

a) Su aceleración en $t = 1$.

b) Su velocidad en $t = 1$.

c) Su velocidad cuando $t > 1$.

Solución. a) En efecto, para $0 \leq t \leq 1$, se tiene que:

$$v(t) = f'(t) = \frac{1+2\operatorname{sen}(\pi t)\cos(\pi t)}{1+t^2} = \frac{1+\operatorname{sen}(2\pi t)}{1+t^2}.$$

por lo tanto,

$$a(t) = v'(t) = f''(t) = \frac{[2\pi\cos(2\pi t)]\left[1+t^2\right] - [1+\operatorname{sen}(2\pi t)][2t]}{(1+t^2)^2},$$

de donde

$$\begin{aligned} a(1) &= \frac{[2\pi\cos(2\pi)]\left[1+1^2\right]-[1+\operatorname{sen}(2\pi)][2(1)]}{(1+1^2)^2} \\ &= \frac{4\pi-2}{4} = \pi - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, como a es constante luego del primer segundo, entonces $a(2) = \pi - \dfrac{1}{2}$.
b) Como $v(t) = \dfrac{1+\operatorname{sen}(2\pi t)}{1+t^2}$, entonces, $v(1) = \dfrac{1+\operatorname{sen}(2\pi)}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$.
c) Por las propiedades de la integral definida, se tiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^t \left(\pi - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} + \left(\pi - \frac{1}{2}\right) t - \pi + \frac{1}{2} \\ &= 1 - \pi + \left(\pi - \frac{1}{2}\right) t. \end{aligned}$$

Proposición 8.22 Sea f una función continua y sean φ, ψ funciones derivables, entonces se verifica:

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Demostración. En efecto, si definimos

$$\zeta(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

de donde, al aplicar el Teorema 8.21 se tiene que:

$$\begin{aligned} \zeta(x) = \int_0^x f(t)dt \Longrightarrow \zeta'(x) &= \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt \\ \Longrightarrow \zeta'(x) &= f(x). \end{aligned} \tag{8.59}$$

Por otro lado, utilizando la regla de la cadena se tine que

$$\begin{aligned} \int_0^{\psi(x)} f(t)dt = (\zeta \circ \psi)(x) &\Longrightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\psi(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}[(\zeta \circ \psi)(x)] \\ &\Longrightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\psi(x)} f(t)dt = \zeta'(\psi(x))\psi'(x) \\ &\Longrightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\psi'(x). \end{aligned} \tag{8.60}$$

Note que (8.60), se obtiene de (8.59).

Ahora consideremos el caso general,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt &= \frac{d}{dx}\left[\int_{\varphi(x)}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\psi(x)} f(t)dt\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{\psi(x)} f(t)dt - \int_{0}^{\varphi(x)} f(t)dt\right] \\
&= \frac{d}{dx}\int_{0}^{\psi(x)} f(t)dt - \frac{d}{dx}\int_{0}^{\varphi(x)} f(t)dt \\
&= f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x), \qquad (8.61)
\end{aligned}$$

aquí (8.61) se sigue de (8.60). ■

■ **Ejemplo 8.27** Determine $F'(x)$, si $F(x) = \int_x^{g(x)} f(t)dt$.

Solución. Por la Proposición (8.22), se tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_{x}^{g(x)} f(t)dt\right] \\
&= -\frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{x} f(t)dt\right] + \frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{g(x)} f(t)dt\right] \\
&= -f(x) + f(g(x))g'(x).
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.28** Determine $F'(x)$, si $F(x) = \int_1^{[\ln(x)]^2} \sqrt{1+\cos t}\,dt$.

Solución. Por la Proposición (8.22), se tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{[\ln x]^2} \sqrt{1+\cos t}\,dt\right] \\
&= \sqrt{1+\cos[\ln x]^2}\cdot\frac{d}{dx}\left[\ln^2(x)\right] \\
&= \frac{2}{x}\ln(x)\sqrt{1+\cos[\ln^2(x)]}.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.29** Determine $F'(x)$, si $F(x) = \operatorname{sen}^2\left(\int_a^{\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\right)dt$.

Solución. Por la Proposición (8.22), se tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) = 2\operatorname{sen}&\left(\int_a^{\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)\cdot\cos\left(\int_a^{\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)\cdot \\
&\frac{d}{dx}\left(\int_a^{\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{sen}\left[2\left(\int_a^{\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)\right]\cdot\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)}\cdot\frac{d}{dx}\left[\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right]$$

$$= \frac{3x^2}{[1+\operatorname{sen}^2(x^3)]\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)\right]}\cdot\operatorname{sen}\left[2\left(\int_a^{\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)\right].$$

■ **Ejemplo 8.30** Determine $F'(x)$, si $F(x) = \int_x^{x^3} t^2\cos t\ dt$.

Solución. Por la Proposición (8.22), se tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_x^{x^3} t^2\cos t\ dt\right]\\
&= \frac{d}{dx}\left[-\int_0^x t^2\cos t\ dt\right]+\frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^3} t^2\cos t\ dt\right]\\
&= -x^2\cos x+(x^3)^2\cos(x^3)\cdot\frac{d}{dx}[x^3]\\
&= -x^2\cos x+3x^8\cos(x^3).
\end{aligned}$$

Teorema 8.23 — Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, si además f' es integrable en $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a).$$

Demostración. En efecto, si consideramos $\mathscr{P}$ una partición de $[a,b]$, entonces por el Teorema 5.4, existe un $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$, tal que

$$f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

de donde se sigue que,

$$\begin{aligned}
f(b)-f(a) &= \sum_{k=1}^{n}[f(x_k-f(x_{k-1})]\\
&= \sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).
\end{aligned}\tag{8.62}$$

Considerando, $M'_k = \sup_{I_k} f'(x)$ y $m'_k = \inf_{I_k} f'(x)$ y al aplicar (8.62), se tiene lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} m'_k \triangle_k x \leq \sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(b) - f(a) \leq \sum_{k=1}^{n} M'_k \triangle_k x, \tag{8.63}$$

como (8.63) se verifica para toda partición $\mathscr{P}$ de $[a,b]$, entonces al considerar el supremo de todas las sumas inferiores y el ínfimo de todas las umas superiores se obtiene

$$\sup L_{\mathscr{P}}(f') = \underline{\int_a^b} f'(x)dx \leq f(b) - f(a) \leq \overline{\int_a^b} f'(x)dx = \inf U_{\mathscr{P}}(f'). \tag{8.64}$$

Ahora, como f' es integrable en $[a,b]$ se sigue de (8.64) que

$$\int_a^b f'(x)dx = \underline{\int_a^b} f'(x)dx = \overline{\int_a^b} f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

■

Algunos ejercicios de aplicación directa se presentan a continuación.

■ **Ejemplo 8.31** Calcule la siguiente integral.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$$

Solución. Se tiene la siguiente identidad trigonométrica, $2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Note además que

$$[\cos(2x)]' = -2\operatorname{sen}(2x) \Longrightarrow \operatorname{sen}(2x) = -\frac{\cos(2x)}{2}. \tag{8.65}$$

En consecuencia de la identidad trigonométrica enunciada y de (8.65) se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right] \\
&= \frac{1}{4},
\end{aligned} \tag{8.66}$$

observe que en (8.66) se ha utilizado el Teorema 8.23.

■ **Ejemplo 8.32** Determine el valor de la siguiente integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\tan(x)dx$$

Solución. Observe que,

$$\begin{aligned}\left[\ln(\cos^2(x))\right]' &= \frac{1}{\cos^2(x)}\cdot[2\cos(x)]\cdot[-\operatorname{sen}(x)]\\ &= -2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\\ &= -2\tan(x). \end{aligned} \tag{8.67}$$

Luego utilizando (8.67) y el Teorema 8.23 se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\tan(x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} -2\tan(x)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(\cos^2(x))\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\cos^2\left[\frac{\pi}{4}\right]\right)-\ln[\cos^2(0)]\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2}-\ln(1)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln(2)\right].\end{aligned}$$

Teorema 8.24 — Método de Sustitución. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua, además si φ es una función con derivada continua en $[\alpha,\beta]$, donde $\varphi(\alpha)=a$ y $\varphi(\beta)=b$. Entonces si $\varphi(t)\in[a,b]$, se sigue que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Demostración. Definimos,

$$\psi(\xi) := \int_a^\xi f(x)dx \tag{8.68}$$

Note que, por la regla se la cadena se tiene

$$
\begin{aligned}
[\psi(\varphi(t))]' &= \psi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\
&= \frac{d}{d\varphi}\left[\int_a^{\varphi} f(x)dx\right] \cdot \varphi'(t) &(8.69)\\
&= f(\varphi(t))\varphi'(t), &(8.70)
\end{aligned}
$$

donde (8.69) se obtiene de (8.68), mientras que (8.70) procede del Teorema 8.21. Como consecuencia de (8.70) se presenta los siguientes resultados,

$$
\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} [\psi(\varphi(t))]'dt \\
&= \psi(\varphi(\beta)) - \psi(\varphi(\alpha)) &(8.71)\\
&= \psi(b) - \psi(a) \\
&= \int_a^b f(x)dx, &(8.72)
\end{aligned}
$$

es de notar que (8.71) es producto del Teorema 8.23, mientras que (8.72) se obtiene de (8.68). ■

Teorema 8.25 — Integración por partes. Sean $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ derivables. Si f' y g' son integrables en $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_b^a - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

Demostración. Note que si f' y g' son integrables, entonces $(fg)' = f'g + fg'$ es integrable ya que es la suma de funciones integrables; luego por el Teorema 8.23 se obtiene

$$\int_a^b [f(x)g(x)]'dx = f(x)g(x)\Big|_a^b, \tag{8.73}$$

además

$$\int_a^b [f(x)g(x)]'dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{8.74}$$

luego igualando (8.73) y (8.74) se concluye

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b.$$

■

Se presenta un ejemplo de cálculo directo utilizando las propiedades enunciadas anteriormente.

■ **Ejemplo 8.33** Sean $f(x) = xe^x$. Demuestre que, $\Psi(x) = f(x)$, sabiendo que

$$\Psi(x) = \operatorname{sen}(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt.$$

Solución. Se tiene

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \operatorname{sen}(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt \\
&= \operatorname{sen}(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)te^t dt \\
&= \operatorname{sen}(x) + 2\int_0^x [\cos(x)\ \cos(t) + \operatorname{sen}(x)\ \operatorname{sen}(t)]te^t dt \\
&= \operatorname{sen}(x) + 2\left[\cos(x)\int_0^x te^t\cos(t)dt + \operatorname{sen}(x)\int_0^x te^t\operatorname{sen}(t)dt\right]. \qquad (8.75)
\end{aligned}$$

Utilizando integración por partes, donde

$$\begin{aligned}
u = te^t &\longmapsto du = (e^t + te^t)dt \\
dv = \cos(t)dt &\longmapsto v = \operatorname{sen}(t)
\end{aligned}$$

entonces en la integral siguiente se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^x te^t\cos(t)dt &= te^t\operatorname{sen}(t)|_0^x - \int_0^x (e^t + te^t)\operatorname{sen}(t)dt \\
&= xe^x\operatorname{sen}(x) - \int_0^x e^t\operatorname{sen}(t)dt - \int_0^x te^t\operatorname{sen}(t)dt. \qquad (8.76)
\end{aligned}$$

Usando integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned}
m = e^t &\longmapsto dm = e^t dt \\
dn = \operatorname{sen}(t)dt &\longmapsto n = -\cos(t)
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^t\operatorname{sen}(t)dt &= e^t\cos(t)|_0^x + \int_0^x e^t\cos(t)dt \\
&= -e^x\cos(x) + 1 + \int_0^x e^t\cos(t)dt. \qquad (8.77)
\end{aligned}$$

Nuevamente, se utiliza integración por partes como sigue:

$$w = e^t \longmapsto dw = e^t dt$$
$$dz = \cos(t)dt \longmapsto z = \operatorname{sen}(t)$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \cos(t)dt &= e^t \operatorname{sen}(t)|_0^x - \int_0^x \operatorname{sen}(t)e^t dt \\ &= e^x \operatorname{sen}(x) - \int_0^x e^t \operatorname{sen}(t)dt. \end{aligned} \tag{8.78}$$

Sustituyendo (8.78) en (8.77), se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \operatorname{sen}(t)dt &= -e^x \cos(x) + 1 + e^x \operatorname{sen}(x) - \int_0^x e^t \operatorname{sen}(t)dt \\ \Longrightarrow \int_0^x e^t \operatorname{sen}(t)dt &= \frac{e^x \operatorname{sen}(x)}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^x \cos(x)}{2}. \end{aligned} \tag{8.79}$$

Al aplicar integración por partes, se sigue

$$p = te^t \longmapsto dp = (e^t + te^t)dt$$
$$dq = \operatorname{sen}(t)dt \longmapsto q = -\cos(t)$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_0^x te^t \operatorname{sen}(t)dt &= -te^t \cos(t)|_0^x + \int_0^x (e^t + te^t)\cos(t)dt \\ &= -xe^x \cos(x) + \int_0^x e^t \cos(t)dt + \int_0^t te^t \cos(t)dt. \end{aligned} \tag{8.80}$$

Finalmente, usando la integración por partes siguiente,

$$g = e^t \longmapsto dg = e^t dt$$
$$dh = \cos(t)dt \longmapsto h = \operatorname{sen}(t)$$

de donde, al considerar (8.79) se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \cos(t)dt &= e^t \operatorname{sen}(t)|_0^x - \int_0^x e^t \operatorname{sen}(t)dt \\ &= e^x \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2} - \frac{e^x \operatorname{sen}(x)}{2} + \frac{e^x \cos(x)}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^x \operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^x \cos(x)}{2}. \tag{8.81}$$

Ahora al sustituir (8.81) en (8.80) obtenemos

$$\int_0^x te^t \operatorname{sen}(t)dt = -xe^x \cos(x) + \frac{e^x \operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^x \cos(x)}{2} + \int_0^x te^t \cos(t)dt. \tag{8.82}$$

Así, al sustituir (8.79) y (8.82) en (8.76) se sigue

$$\begin{aligned}\int_0^x te^t \cos(t)dt =& xe^x \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2} - \frac{e^x \operatorname{sen} 9x)}{2} + \frac{e^x \cos(x)}{2} + xe^x \cos(x) - \frac{e^x \operatorname{sen}(x)}{2} \\ &+ \frac{1}{2} - \frac{e^x \cos(x)}{2} - \int_0^x te^t \cos(t)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow 2\int_0^x te^t \cos(t)dt = xe^x \operatorname{sen}(x) + xe^x \cos(x) - e^x \operatorname{sen}(x) \\ &\Longrightarrow \int_0^x te^t \cos(t)dt = \frac{xe^x \operatorname{sen}(x)}{2} + \frac{xe^x \cos(x)}{2} - \frac{e^x \operatorname{sen}(x)}{2}.\end{aligned} \tag{8.83}$$

Por otro lado, al sustituir (8.83) en (8.82), tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^x te^t \operatorname{sen}(t)dt &= -xe^x \cos(x) + \frac{e^x \operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^x \cos(x)}{2} + \frac{xe^x \operatorname{sen}(x)}{2} \\ &\quad + \frac{xe^x \cos(x)}{2} - \frac{e^x \operatorname{sen}(x)}{2} \\ &= -\frac{xe^x \cos(x)}{2} + \frac{e^x \cos(x)}{2} + \frac{xe^x \operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{8.84}$$

Finalmente, sustituyendo (8.83) y (8.84) en (8.75), y aplicando la identidad trigonométrica fundamental, se concluye que

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \operatorname{sen}(x) + 2\cos(x)\left[\frac{xe^x \operatorname{sen}(x)}{2} + \frac{xe^x \cos(x)}{2} - \frac{e^x \operatorname{sen}(x)}{2}\right] \\ &\quad + 2\operatorname{sen}(x)\left[-\frac{xe^x \cos(x)}{2} + \frac{e^x \cos(x)}{2} + \frac{xe^x \operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{1}{2}\right] \\ &= \operatorname{sen}(x) + xe^x \operatorname{sen}(x)\cos(x) + xe^x \cos^2(x) - e^x \operatorname{sen}(x)\cos(x) \\ &\quad - xe^x \operatorname{sen}(x)\cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x)\cos(x) + xe^x \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) \\ &= xe^x \operatorname{sen}^2(x) + xe^x \cos^2(x) \\ &= xe^x[\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)] \\ &= xe^x\end{aligned}$$

$$= f(x).$$

Teorema 8.26 — Valor medio para Integrales. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua, entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Demostración. Definimos $\psi(x)=\int_a^x f(t)dt$ entonces por el Teorema 5.4 para derivadas existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\begin{aligned}\psi'(c)=\frac{\psi(b)-\psi(a)}{b-a} &\Longrightarrow \psi'(c)(b-a)=\psi(b)-\psi(a)\\ &\Longrightarrow \int_a^b f(t(dt-\int_a^a f(t)dt=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right](c)(b-a)\\ &\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a),\end{aligned}$$

en la última igualdad anterior se a aplicado el Teorema 8.21. ■

Geométricamente el Teorema 8.26 anterior indica que si f es continua en $[a,b]$, entonces existe un punto c entre a y b tal que el área bajo la curva f, sea igual al área del rectángulo $f(c)(b-a)$, donde $f(c)$ es la altura de dicho rectángulo y $b-a$ es la base. Esto se visualiza en la Figura 8.4.

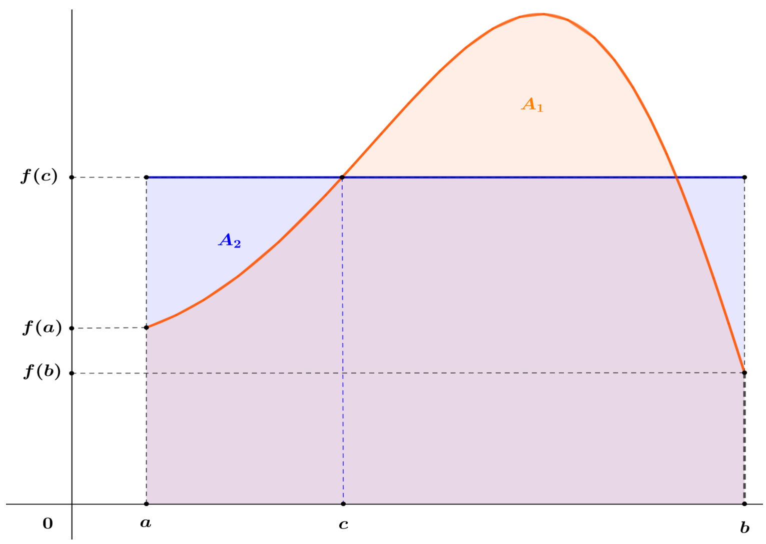


Figura 8.4: El Teorema del Valor Medio indica que $A_1 = A_2$.

8.5 Aplicaciones de la Integral Definida

En esta sección presentamos algunas aplicaciones de la integral definida.

8.5.1 Cálculo del área entre curvas

Sabemos que el área bajo la una curva, generada por la función f en el intervalo $[a,b]$, está dada por la integral

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx.$$

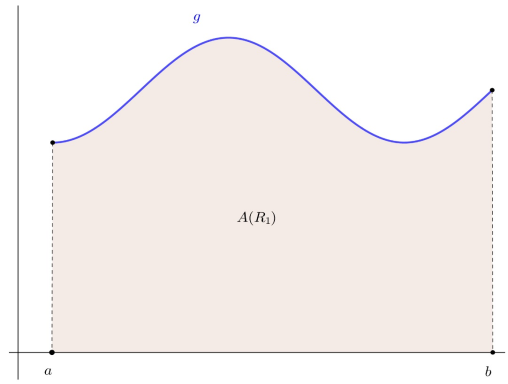


Figura 8.5: Área de la región R_1, bajo la función g.

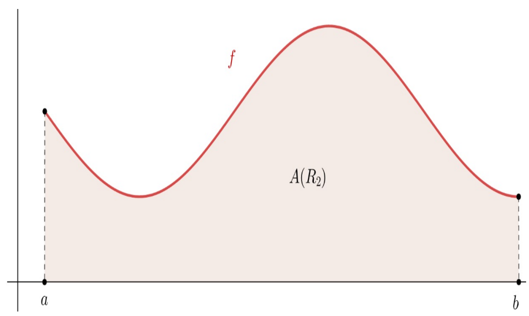


Figura 8.6: Área de la región R_2, bajo la función f.

Consideremos ahora que $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$. Además si $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Entonces el área entre las curvas $A(R)$, se define como la diferencia entre el área $A(R_1)$ de la región generada por la gráfica de g y el área $A(R_2)$ de la región generada por la gráfica de f, es decir:

$$A(R) = A(R_1) - A(R_2) = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

En la Figura 8.7 se muestra el sentido geométrico de la ecuación anterior.

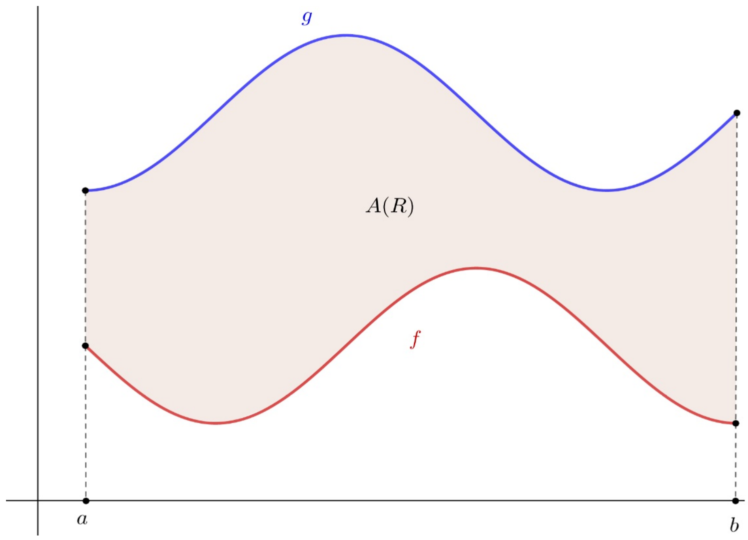


Figura 8.7: Área de la región R, entre las funciones g y f.

Cuando $f(x) \leq g(x)$, pero no necesariamente $f(x) \geq 0$.

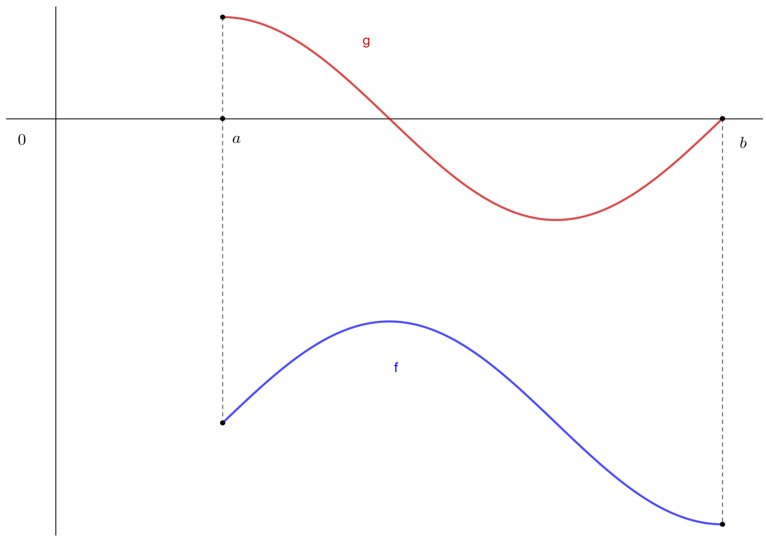


Figura 8.8: Funciones cualquiera g y f.

Entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) + \alpha \geq 0$, en tal caso el área de la región entre las funciones f y g está dada por:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_a^b [g(x) + \alpha]dx - \int_a^b [f(x) + \alpha]dx = \int_a^b [g(x) + \alpha - f(x) - \alpha]dx \\ &= \int_a^b [g(x) - f(x)]dx. \end{aligned}$$

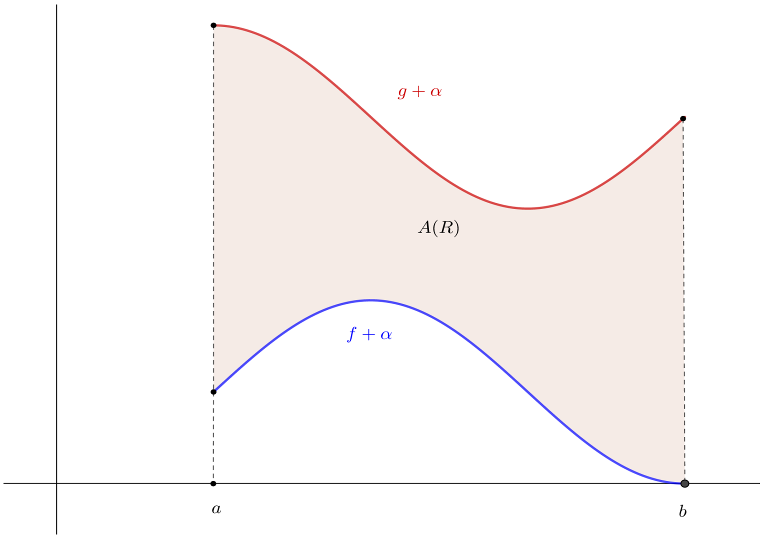


Figura 8.9: Área entre las funciones $g+\alpha$ y $f+\alpha$.

Observe que se redujo al caso inicial en el cual $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$.

■ **Ejemplo 8.34** Halle el área de la región $A(R)$ entre las gráficas de las funciones f y g en el intervalo que se determina a continuación.

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = 4x, \quad [-3,3].$$

Solución. En primer lugar, obtengamos los puntos de intersección de las dos funciones,

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Longrightarrow x^3 = 4x \\ &\Longrightarrow x(x^2-4) = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2. \end{aligned}$$

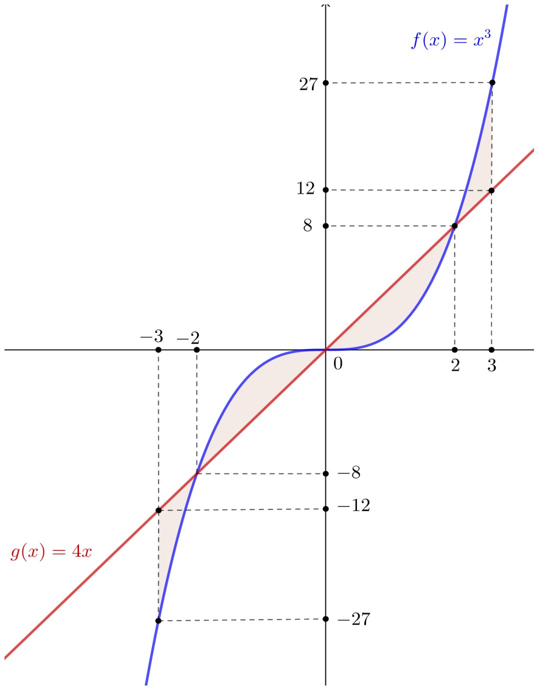


Figura 8.10: Área entre las funciones f y g.

Note que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ y $g(-x) = 4(-x) = -4x = -g(x)$, es decir las dos funciones son impares, por lo tanto el área entre las dos gráficas en el intervalo $[-3,3]$ se puede calcular como dos veces el área en el intervalo $[0,3]$. Esto es:

$$\begin{aligned} A(R) &= 2\left(\int_0^2 [g(x) - f(x)]dx + \int_2^3 [f(x) - g(x)]dx\right) \\ &= 2\left(\int_0^2 [4x - x^3]dx + \int_2^3 [x^3 - 4x]dx\right) \\ &= 2\left(\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^2 + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]\Big|_2^3\right) \\ &= 2\left(8 - 4 + \frac{81}{4} - 18 - 4 + 8\right) \\ &= \frac{41}{2}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 8.35** Halle el área de la región $A(R)$ entre las gráficas de las funciones f y g en el intervalo que se determina a continuación.

$$f(x) = \text{sen}(x), \quad g(x) = \cos(x), \quad [0, 2\pi].$$

Solución. Obtenemos los puntos de intersección de las dos funciones, como sigue:

$$
\begin{aligned}
f(x) = g(x) &\Longrightarrow \operatorname{sen}(x) = \cos(x) \\
&\Longrightarrow \tan(x) = 1 \\
&\Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, se obtiene el área entre las dos curvas como sigue:

$$
\begin{aligned}
A(R) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx \\
&= (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}(0) - \cos(0) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&\quad + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}(2\pi) + \cos(2\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\
&= 2(2\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}
$$

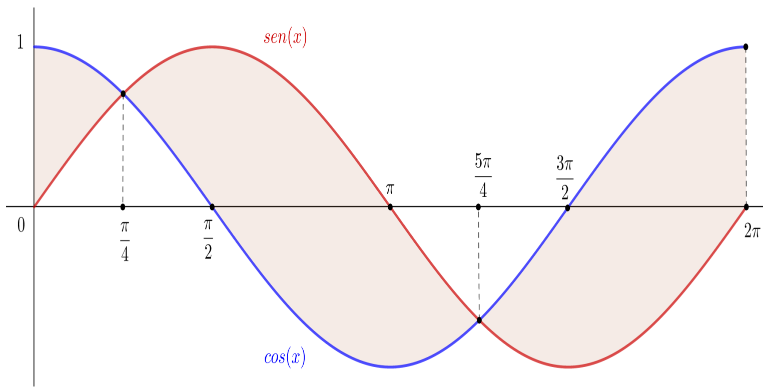


Figura 8.11: Área entre las curvas f y g.

8.5.2 Longitud de arco

Se sabe que, $r'(t) = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \dfrac{\triangle r(t)}{\triangle t}$, de donde $r'(t) \approx \dfrac{\triangle r(t)}{\triangle t}$ esto implica a su vez que, $\triangle r(t) \approx r'(t) \triangle t$. En consecuencia $\|\triangle r(t)\| \approx \|r'(t)\| \triangle t$; es así que $\mathscr{S} \approx \sum \|r'(t)\| \triangle t$.

Por lo tanto definimos la longitud de arco de una curva $\mathscr{C}$, como el límite de la sumatoria, y en caso de tal límite existir este coincide con el valor de la siguiente integral:

$$\mathscr{S} := \int_\alpha^\beta \|r'(t)\| dt, \quad donde \ \ \alpha \le t \le \beta.$$

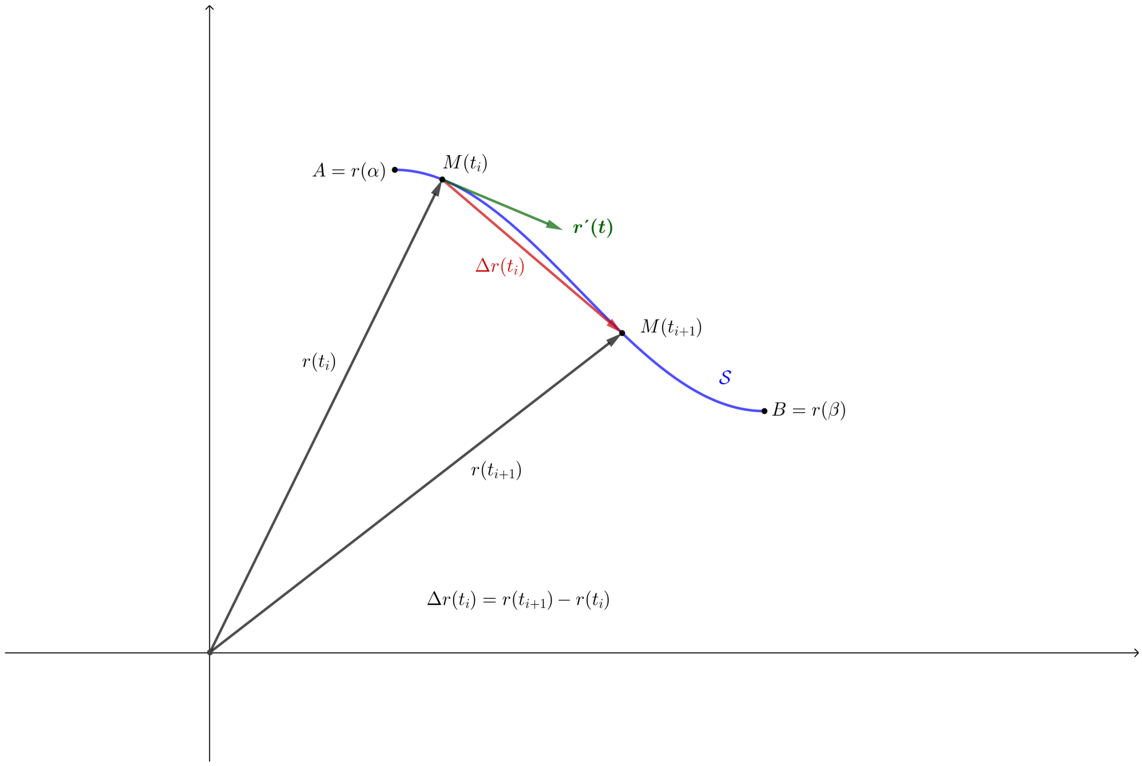


Figura 8.12: Longitud de arco $\mathscr{S}$.

Ahora procedemos a definir la función longitud de arco $\mathscr{S}(t)$ como sigue:

$$\mathscr{S}(t) := \int_{\alpha}^{t} \|r'(\tau)\| d\tau, \quad donde \;\; t \geq \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios Resueltos

■ **Ejemplo 8.36** Calcule el área de la región R, comprendida entre las gráficas de f y g para el intervalo $[a,b]$ que se especifica.

$f(x) = x^3, \;\; g(x) = 4x, \;\; x \in [-3,3].$

Solución. Primero se determina los puntos de corte de las dos funciones, para lo cual, igualamos las mismas y de la ecuación resultante despejamos los valores de la variable.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Longrightarrow x^3 = 4x \\ &\Longrightarrow x(x^2-4) = 0 \\ &\Longrightarrow x^2 = 4 \;\; \vee \;\; x = 0 \\ &\Longrightarrow x = \pm 2 \;\; \vee \;\; x = 0. \end{aligned}$$

Ahora, se calcula el área de la región R, utilizando la definición de área entre dos funciones y las propiedades de la integral definida, como sigue

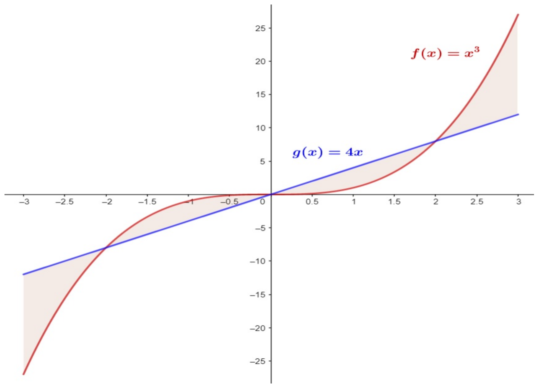


Figura 8.13: Área entre dos funciones.

$$
\begin{aligned}
A(R) &= 2\left[\int_0^2 [g(x)-f(x)]\,dx + \int_2^3 [f(x)-g(x)]\,dx\right]\\
&= 2\left[\int_0^2 \left(4x-x^3\right)dx + \int_2^3 \left(x^3-4x\right)dx\right]\\
&= 2\left[\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_2^3\right]\\
&= 2\left[2(2)^2-\frac{2^4}{4}+\frac{3^4}{4}-2(3^2)-\frac{2^4}{4}+2(2^2)\right]\\
&= 2\left[8-4+\frac{81}{4}-18-4+8\right] = \frac{41}{2}.
\end{aligned}
$$

8.5.3 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 8.12 Demuestre que las siguientes igualdades:

$$i)\ \int_{-\pi}^{\pi} x\ \cos(nx)dx = 0$$

$$ii)\ \int_{-\pi}^{\pi} x\ \operatorname{sen}(nx)dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$iii)\ \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\operatorname{sen}(x)\Big|\cos(nx)dx = -2\left(\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\right),\quad con\ n \neq 1$$

$$iv)\ \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)dx = \frac{\pi}{2}$$

$$v)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \pi$$

$$vi)\ \int_0^{\alpha} t^2\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha}t\right)dt = \frac{2\alpha^3(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$vii) \quad \int_0^{\alpha} t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\alpha}t\right) dt = \frac{\alpha^3}{\pi n}\left((-1)^{n+1} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^2}\right)$$

Ejercicio 8.13 Si $\alpha > 0$. Pruebe que se verifican las siguientes desigualdades:

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} < \int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha}+1} dt < 1.$$

Ejercicio 8.14 Sea f una función continua en todo $x \in \mathbb{R}$. Tal que verifica

$$\int_1^x f(t)dt = -e^{\operatorname{sen}(x)} + \cos^3(x) - x\operatorname{sen}^2(x).$$

Determine:

a) $f(t)$.
b) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
c) $(fof)(\operatorname{sen}(\pi t))$.

Ejercicio 8.15 Sea f una función continua en todo $x \in \mathbb{R}$. Determine de forma explícita la función $f(t)$ y el valor de k, tal que verifique la siguiente ecuación:

$$\int_c^x t f(t)dt = \operatorname{sen}^2(x) - x\cos(2x) - 3x + 4.$$

Ejercicio 8.16 Sean $I = [a,b]$ y $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y supóngase que para cualquier función integrable $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, el producto fg es integrable y $\int_a^b fg = 0$. Demuestre que $f(x) = 0$, para todo x en I.

Ejercicio 8.17 Sea $I = [a,b]$ y sean f y g funciones acotadas de I a $\mathbb{R}$. Supóngase que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$. Probar que $L(f) \leq L(g)$ y $U(f) \leq U(g)$.

Ejercicio 8.18 Suponiendo que $\alpha,\ a,\ b$ son constantes, halle la siguiente integral definida.

$$I = \int_{v_1}^{v_2} \frac{a\alpha}{v^2 + 2bv - b^2} dv.$$

Ejercicio 8.19 Sean $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$. Demuestre que, $\Psi(x) = f(x)$, sabiendo que

$$\Psi(x) = \frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2} - \int_0^x \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2} f(t)dt.$$

Ejercicio 8.20 Sean $f(x) = e^x\left[\cos(e^x) - e^x \operatorname{sen}(e^x)\right]$. Demuestre que, $\Psi(x) = f(x)$, sabiendo que

$$\Psi(x) = (1-xe^{2x})\cos 1 - e^{2x}\operatorname{sen} 1 + \int_0^x \left[1-(x-t)e^{2x}\right] f(t)dt.$$

Ejercicio 8.21 Sean $f(x) = (1-x)$. Demuestre que, $\Psi(x) = x$, sabiendo que

$$\Psi(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)dt.$$

Ejercicio 8.22 Sean $f(x) = (1-x)$. Demuestre que, $\Psi(x) = x$, sabiendo que

$$\Psi(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)dt.$$

Ejercicio 8.23 Determine dos funciones no constantes ψ y φ tales que, cumplan la siguiente igualdad:

$$\int_0^1 \psi(t)\cdot\varphi(t)dt = \left(\int_0^1 \psi(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^1 \varphi(t)dt\right).$$

Ejercicio 8.24 Halle el área de la superficie de revolución generada al girar el grafo de la función $\Psi(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{\ln(x)}{5}$.

Ejercicio 8.25 Sea $f:[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua positiva, tal que

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = 1.$$

Demuestre que para cada $x \in [0,1]$ existe un único $y = g(x) \in [1,2]$, tal que

$$\int_x^y f(t)dt = 1.$$

Ejercicio 8.26 Halle el valor de las siguientes integrales definidas.

$a)\ \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sec^2(x)}{7+\pi\ \tan^2(x)}dx$

$b)\ \displaystyle\int_{1}^{\pi} \frac{8x-7}{\sqrt{x^2-3x+7}}dx$

$c)\ \displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\sqrt{3}}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$

$d)\ \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{3}} \frac{-1+\ln(x)}{\ln^2(x)}dx$

$e)\ \displaystyle\int_{e}^{e^2} [\ln(e\cdot x)]\, e^{\ln(x^x)}dx$

$f)\ \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsen(x)-x}{\sqrt{1-x^2}\,(arcsen(x))^2}dx$

$g)\ \displaystyle\int_{e}^{e\pi} \pi^{\text{sen}(x)}\cos(x)dx$

$h)\ \displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{2^x\cdot 3^{x-2}}{5^{x-1}}dx$

$i)\ \displaystyle\int_{1}^{3} \frac{e^{\ln(x)+\frac{1}{x}}}{x^3}dx$

$j)\ \displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-2x+3x^2}}dx$

$k)\ \displaystyle\int_{-\frac{2}{5}}^{\frac{3}{4}} \frac{\pi^2}{\sqrt{20x^2-15x-6}}dx$

$l)\ \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} \frac{x\ln(x)\cos(x)-sin(x)}{x\ \text{sen}^2(x)}dx$

$m)\ \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{5e^x}{9e^{2x}-12e^x+29}dx$

$n)\ \displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$

$o)\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x))^2dx$

$p)\ \displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$q)\ \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \text{sen}^6\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$r)\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x))^4dx$

$s)\ \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{1+4x^2}dx$

$t)\ \displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,\text{sen}(x)\,\text{sen}(t)dt$

$u)\ \displaystyle\int_{0}^{\ln(x)} (e^{2(x+y)}-e^{x+y})dx$

$v)\ \displaystyle\int_{0}^{\beta} \frac{\alpha(\beta^2-x^2)+(\alpha+x)x^2}{\sqrt{\beta^2-x^2}}dx$

$w)\ \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \pi\left[(R+r\cos(x))^2-(R-r\cos(x))^2\right]r^2\ \cos(x)\ sin(x)dx$

$x)\ \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\alpha\cos^2x+2\beta\cos(x)\,\text{sen}(x)+\gamma\text{sen}^2(x)}\right)^2dx$

$y)\ \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x\left[\ln(\ln^3(\ln(x)))\right]\cdot[\ln(\ln(x))]\cdot\ln(x)}dx$

$z)\ \displaystyle\int_{-3}^{1} \sqrt[5]{3x^4+4x^3+6x^2+12x-5}\,(x^3+x^2+x+1)dx$

III

APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

9 Impresión, Offset y Acabados 263

10 Mecánica Industrial 287

11 Mecánica Automotriz 301

12 Electricidad 313

13 Electrónica 323

Bibliografía 341

9. Impresión, Offset y Acabados

Aplicación 1

Se requiere diseñar una caja sin tapa en base a una plancha de cartón de 30×15 cm para almacenar retazos de papel reciclado proveniente de una imprenta. Considerando que se corta un cuadrado de lado L en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja.

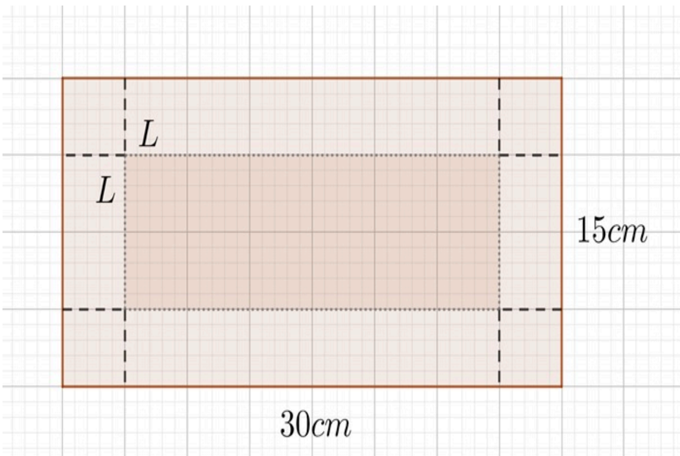


Figura 9.1: Plancha de cartón.

Se desea determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo si el lado L cumple la siguiente condición:

$$3 \leq L \leq 4$$

Para resolver este ejercicio identificamos los datos.

Ancho de la caja: a

Profundidad: p

Altura: h

Así, la representación algebraica al cortar los 4 cuadrados de lado L sería,

$$a = 30 - 2L$$

$$p = 15 - 2L$$

por último, la altura coincide con el lado del cuadrado recortado, es decir,

$$h = L$$

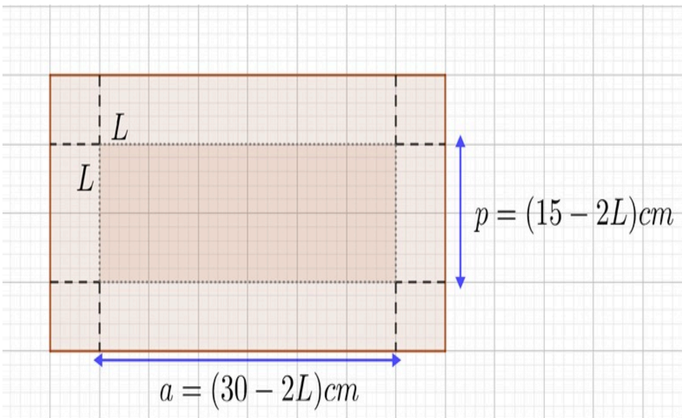


Figura 9.2: Medidas en función de L.

Se necesita calcular el volumen de la caja en función de L:

$$V = ahp \tag{9.1}$$

Reemplazando en la ecuación (9.1), los datos dados en la hipótesis del problema, como sigue:

$$V(L) = (30 - 2L)(15 - 2L)L$$

$$V(L) = (450 - 60L - 30L + 4L^2)L$$

$$V(L) = (450 - 90L + 4L^2)L$$

$$V(L) = 450L - 90L^2 + 4L^3$$

luego, derivando el volumen, se obtiene

$$V'(L) = 450 - 180L + 12L^2 \tag{9.2}$$

seguidamente, resolvemos la ecuación cuadrática para encontrar los puntos críticos, para lo cual igualamos a cero la ecuación (9.2).

$$12L^2 - 180L + 450 = 0$$

aplicando la fórmula general,

$$L = \frac{-(-180) \pm \sqrt{(-180)^2 - 4(12)(450)}}{2(12)}$$

$$L = \frac{180 \pm \sqrt{10800}}{24}$$

$$L = \frac{180 \pm 60\sqrt{3}}{24}$$

$$L = \frac{60\left(3 \pm \sqrt{3}\right)}{24}$$

$$L = \frac{5}{2}\left(3 \pm \sqrt{3}\right)$$

$$L_1 = \frac{5}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right) \quad \text{y} \quad L_2 = \frac{5}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right) \tag{9.3}$$

es decir, existen puntos críticos en $L_1 = \frac{5}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)$ y $L_1 = \frac{5}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)$

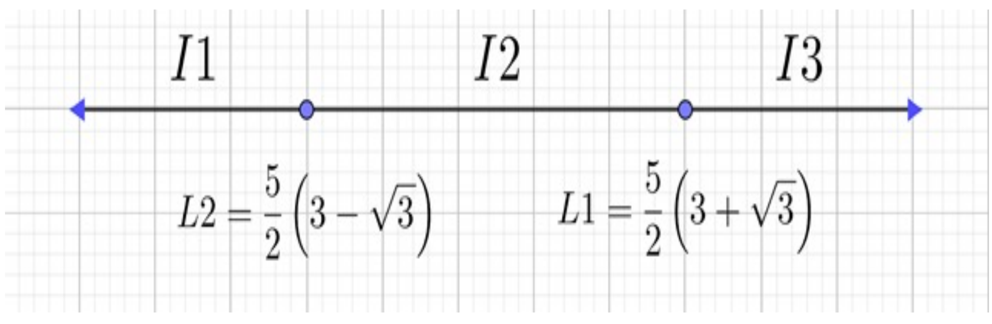


Figura 9.3: Partición de la recta $\mathbb{R}$ en intervalos.

Mostremos que $V'(L) \geq 0$ en $I_1 = \left[-\infty, \frac{5}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\right]$. En efecto, por (9.3) se sabe que:

$$12L^2 - 180L + 450 = \left(\frac{2}{5}L - 3 - \sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{5}L - 3 + \sqrt{3}\right)$$

luego, si $L \in I_1$, entonces

$$L \leq \frac{5}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$$
$$\frac{2}{5}L \leq 3 - \sqrt{3}$$
$$\frac{2}{5}L - 3 + \sqrt{3} \leq 0 \tag{9.4}$$

Además,

$$L \leq \frac{5}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$$
$$\frac{2}{5}L \leq 3 - \sqrt{3}$$
$$\frac{2}{5}L - 3 - \sqrt{3} \leq -2\sqrt{3} < 0$$
$$\frac{2}{5}L - 3 - \sqrt{3} \leq 0 \tag{9.5}$$

Así de (9.4) y (9.5) se tiene que,

$$V'(L) = 12L^2 - 180L + 450 = \left(\frac{2}{5}L - 3 - \sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{5}L - 3 - \sqrt{3}\right) \geq 0, \quad \forall L \in I_1$$

Consecuentemente, debido al criterio de la primera derivada, existe un máximo relativo en $L_2 = \frac{5}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$.

Por lo tanto, las dimensiones de la caja deben ser

$$a = 30 - 2L$$
$$a = 30 - 2\left(\frac{5}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\right)$$
$$a = 23,66\,cm$$
$$p = 15 - 2L$$
$$p = 15 - 2\left(\frac{5}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\right)$$

$$p = 8,66\,cm$$

$$h = L = 3,17\,cm$$

Entonces reemplazando en la ecuación (9.1)

$$V = (23,66)\,(3,17)\,(8,66) = 649,52\,cm^3$$

En conclusión, las dimensiones de la caja serían: $23,68\,cm \times 8,68\,cm \times 3,16\,cm$

Aplicación 2

Una empresa gráfica desea colocar una pancarta publicitaria debajo de un puente, cuyo espacio tiene la forma de una parábola que viene dada por:

$$f(x) = -4x^2 + 8, \quad \forall x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$$

el cartel debe sujetarse por los vértices superiores y la distancia entre el cartel y el suelo debe ser de $2,3\,m$. Calcular

a. Las dimensiones del cartel para que su área sea máxima

b. Los puntos de los vértices superiores del cartel.

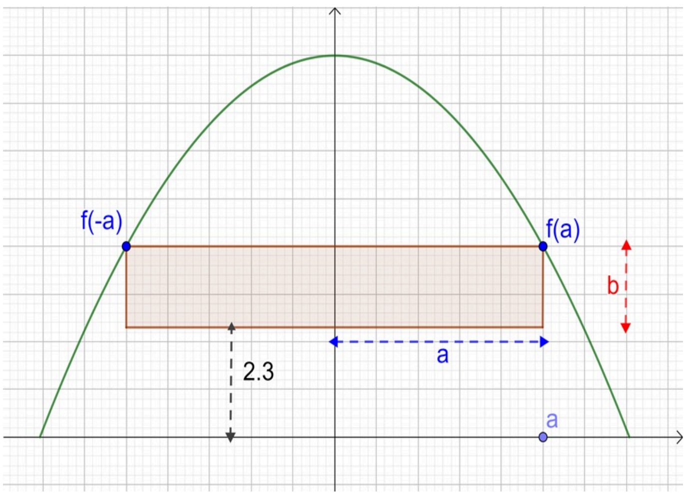


Figura 9.4: Cartel publicitario debajo de un puente.

Solución:

Datos

$a =$ mitad del ancho del cartel

$b =$ altura del cartel

La función es simétrica respecto al eje de las ordenadas.

Desarrollo:

$b + 2,3 = f(a) = -4a^2 + 8$ de esta expresión, escribimos b en función de a, despejando b se tiene

$$b = -4a^2 + 8 - 2,3$$

$$b = -4a^2 + 5,7 \tag{9.6}$$

La función del área del cartel viene dada por:

$$A(a) = 2ab \tag{9.7}$$

Reemplazamos el valor de b en (9.7)

$$A(a) = 2a\left(-4a^2 + 5,7\right)$$

$$A(a) = -8a^3 + 11,4a$$

Derivamos el área en función de a

$$A'(a) = -24a^2 + 11,4 \tag{9.8}$$

Para buscar los puntos críticos, igualamos a cero la ecuación (9.8). Apliquemos el criterio de la primera derivada:

$$-24a^2 + 11,4 = 0$$

$$-24a^2 = -11,4$$

$$a^2 = \frac{-11,4}{-24}$$

$$a^2 = 0,475$$

$$|a| = \sqrt{0,475}$$

$$a_1 = 0,68 \quad \text{y} \quad a_2 = -0,68$$

entonces existen puntos críticos en $a_1 = 0,68$ y $a_2 = -0,68$.

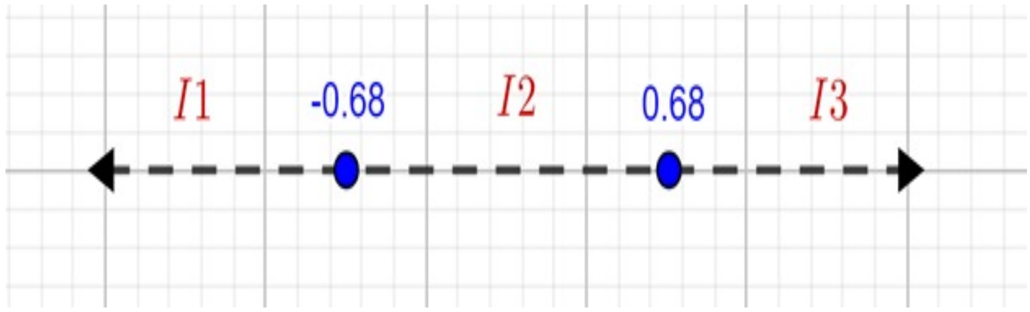


Figura 9.5: Partición de la recta $\mathbb{R}$ en intervalos.

$\sum_{k=0}^{+\infty}$

Apliquemos el criterio de la segunda derivada, derivando A' se obtiene

$$A''(a) = -48a$$

de donde

$$A''(a_1) = -48a_1 = -48(0,68) < 0$$

lo que indica un máximo relativo en $a_1 = 0,68$. El valor $a_2 = -0,68$ se descarta pues corresponde a una cantidad negativa y no tiene sentido considerarla.

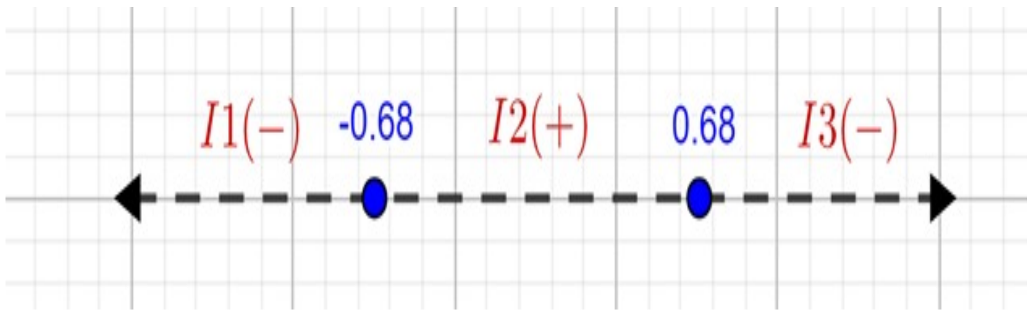


Figura 9.6: Análisis de positividad en los intervalos I_1, I_2 y I_3.

Por lo tanto:

El ancho del cartel se determina por:

$$2(a) = 2(0,68)$$

$$2(a) = 1,36m$$

Mientras que la altura del cartel se determina por (9.6):

$$b = -4a^2 + 5,7$$

$$b = -4(0,68)^2 + 5,7$$

$$b = -4(0,46) + 5,7$$

$$b = -1,84 + 5,7$$

$$b = 3,86m$$

La parábola es simétrica, los vértices superiores del cartel son:

$$3,86m + 2,3m = 6,16m$$

$$(-0,68;6,16) \quad \text{y} \quad (0,68;6,16)$$

Aplicación 3

Se requiere fabricar un recipiente que esté cubierto por un material previamente impreso. ¿Qué dimensiones debe tener dicho recipiente, si este debe tener una base cuadrada y capacidad para 8000 litros, de tal manera que su fabricación sea lo más económica posible?

Solución:

Datos

Sean las variables a utilizar

$x =$ medida de la base del recipiente

$y =$ medida de la altura del recipiente

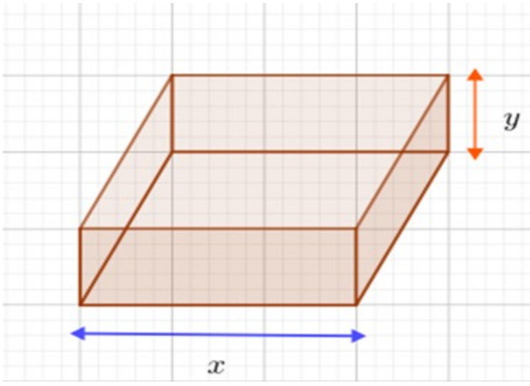


Figura 9.7: Recipiente de base rectangular

Desarrollo:

El volumen estaría definido por:

$$V = x \cdot x \cdot y$$

$$V = x^2 y \tag{9.9}$$

Reemplazando en la ecuación (9.9), los datos dados en la hipótesis del problema, como sigue:

$$8000 = x^2 y$$

$$y = \frac{8000}{x^2}$$

Por otra parte, el área superficial del recipiente estaría definido por:

$$A = 4xy + x^2 \tag{9.10}$$

Reemplazando (9.9) en (9.10):

$$A = 4x\frac{8000}{x^2} + x^2$$

$$A = \frac{32000}{x} + x^2$$

Además, el dominio para esta función debería considerar todos los valores $x > 0$.

Derivando el área en función de x:

$$A'(x) = -\frac{32000}{x^2} + 2x$$

$$A'(x) = \frac{-32000 + 2x^3}{x^2} \tag{9.11}$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada: Para buscar los puntos críticos, igualamos a cero la ecuación (9.11)

$$A'(x) = 0$$

$$\frac{-32000 + 2x^3}{x^2} = 0$$

$$-32000 + 2x^3 = 0$$

$$2x^3 = 32000$$

$$x^3 = \frac{32000}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{16000}$$

luego, existe un punto crítico en $x = \sqrt[3]{16000}$.

Determinamos la segunda derivada del área en función de x; es decir, derivamos la ecuación (9.11):

$$A''(x) = \frac{\left(-32000 + 2x^3\right)'\left(x^2\right) - \left(-32000 + 2x^3\right)\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}$$

$$A''(x) = \frac{\left(6x^2\right)\left(x^2\right) - \left(-32000 + 2x^3\right)(2x)}{x^4}$$

$$A''(x) = \frac{6x^4 + 64000x - 4x^4}{x^4}$$

$$A''(x) = \frac{2x^4 + 64000x}{x^4}$$

$$A''(x) = \frac{\left(2x^3 + 64000\right)x}{x^4}$$

$$A''(x) = \frac{2x^3 + 64000}{x^3} \tag{9.12}$$

Evaluamos el punto crítico $x = \sqrt[3]{16000}$ en (9.12):

$$A''\left(\sqrt[3]{16000}\right) = \frac{2\left(\sqrt[3]{16000}\right)^3 + 64000}{\left(\sqrt[3]{16000}\right)^3}$$

$$A''\left(\sqrt[3]{16000}\right) = 42 > 0$$

Consecuentemente, debido al criterio de la segunda derivada, existe un mínimo relativo en $x = \sqrt[3]{16000}$.

Por lo tanto, las dimensiones que debe tener el recipiente de base cuadrada y capacidad para 8000 litros, de tal manera que su fabricación sea lo más económica posible, serían:

$$x = \sqrt[3]{16000} = 25,20$$

$$y = \frac{8000}{x^2} = \frac{8000}{\left(\sqrt[3]{16000}\right)^2} = 12,60$$

Sin embargo, recordemos que las unidades estarían en $l^{\frac{1}{3}}$, por lo que transformando a m, las dimensiones serían:

$$x = 25,20\, l^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1\, m^3}{1000\, l}\right)^{\frac{1}{3}} = 2,52\, m$$

Aplicación 4

La posición de una matriz de impresión en una máquina está dada por la expresión: $s(t) = 2 + 7\cos(t)$, para la cual t representa a la variable tiempo dado en minutos. Determinar todos los tiempos para los cuales no se estaría moviendo.

Solución:

Datos:

Expresión de la posición de la matriz de impresión:

$$s(t) = 2 + 7\cos(t) \tag{9.13}$$

La matriz no se estaría moviendo si y sólo sí la velocidad de la matriz de impresión es igual a cero.

Desarrollo:

Para determinar la expresión de la velocidad, derivamos la expresión de la posición con respecto al tiempo (9.13), obteniéndose:

$$v = s'(t) = -7\sin(t) \tag{9.14}$$

Para determinar los tiempos en los que la matriz de impresión no se mueve, igualamos la expresión de la velocidad (9.14) a cero y despejamos t:

$$v = s'(t) = -7\sin(t) = 0$$

$$-7\sin(t) = 0$$

$$\sin(t) = 0$$

Los valores de t que permiten cumplir esta condición son:

$$t = k\pi, \text{ donde} k \in \mathbb{Z}$$

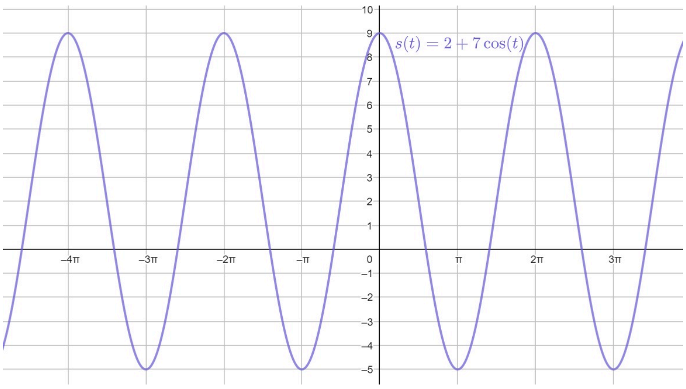


Figura 9.8: Función de cambio de posición de la matriz de impresión

Aplicación 5

Una empresa de impresión establece que el precio de venta de los bienes que produce está determinada por la ecuación de la demanda $p = 16 - 0,03x$, y la función del costo $C = 3 + 1,4x$, siendo x el número de bienes producidos. Determine:

a. El nivel de producción que generará la máxima utilidad.

b. La utilidad máxima

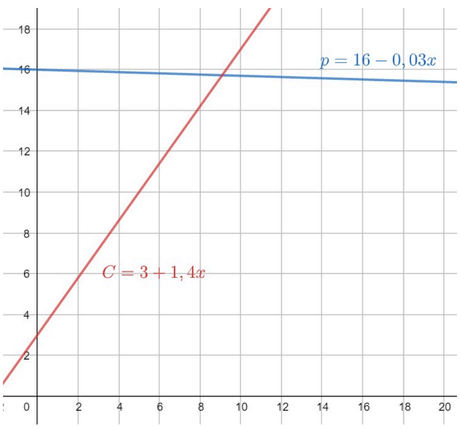


Figura 9.9: Ecuaciones de la demanda (p) y del costo (C)

Solución:

Datos:

Sea

$x =$ número de bienes producidos

Entonces la expresión del precio de venta es:

$$p = 16 - 0,03x \tag{9.15}$$

y la expresión del costo es:

$$C = 3 + 1,4x \tag{9.16}$$

Desarrollo:

Para determinar los ingresos de la empresa, se multiplica el número de bienes producidos por el precio de venta:

$$I = xp \tag{9.17}$$

reemplazando (9.15) en (9.17):

$$I = x(16 - 0,03x)$$

$$I = 16x - 0,03x^2 \tag{9.18}$$

mientras que la utilidad viene dada por la diferencia entre ingresos y costos:

$$U = I - C \tag{9.19}$$

reemplazando (9.16) y (9.18) en (9.19):

$$U = 16x - 0,03x^2 - (3 + 1,4x)$$

$$U = 16x - 0,03x^2 - 3 - 1,4x$$

$$U = 14,6x - 0,03x^2 - 3$$

$$U = -0,03x^2 + 14,6x - 3 \tag{9.20}$$

Para determinar la máxima utilidad, podemos aplicar el criterio de la segunda derivada, para lo cual en primer lugar determinamos los puntos críticos.

Derivando la utilidad (9.20) en función del número de vienes producidos (x):

$$U' = -0,06x + 14,6 \tag{9.21}$$

igualando la ecuación (9.21) a cero:

$$U' = -0,06x + 14,6 = 0$$

$$-0,06x + 14,6 = 0$$

$$0,06x = 14,6$$

$$x = \frac{14,6}{0,06}$$

luego existe un punto crítico en $x = \frac{14,6}{0,06}$.

Obtenemos la segunda derivada de la utilidad; es decir, derivamos la ecuación (9.21):

$$U'' = -0,06 \tag{9.22}$$

evaluando el punto crítico $x = \frac{14,6}{0,06}$ en (9.22):

$$U''\left(\frac{14,6}{0,06}\right) = -0,06$$

$$U''\left(\frac{14,6}{0,06}\right) < 0$$

consecuentemente, debido al criterio de la segunda derivada, existe un máximo relativo en $x = \frac{14,6}{0,06}$, por lo tanto $x = \frac{14,6}{0,06}$ constituye el número de unidades que producen la utilidad máxima.

La utilidad máxima se obtendría reemplazando $x = \frac{14,6}{0,06}$ en la expresión de la utilidad (9.20), de tal manera que se tiene:

$$U = -0,03\left(\frac{14,6}{0,06}\right)^2 + 14,6\left(\frac{14,6}{0,06}\right) - 3$$

$$U_{max} = \$1773,33$$

Aplicación 6

Los estudiantes de la carrera de OFFSET y acabados deben diseñar un cartel publicitario que tiene la siguiente forma: base horizontal de $10m$ de longitud y resto del contorno limitado por la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x, & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ -x + 10, & \text{si } 5 < x \leq 10 \end{cases} \tag{9.23}$$

Calcule la cantidad de material de soporte requerida para el cartel.

Solución:

Datos:

Sea

$x =$ longitud del cartel en el eje de las abcisas $[m]$

$y =$ longitud del cartel en el eje de las ordenadas $[m]$

Si hacemos coincidir la base horizontal del cartel con el eje de las abscisas, su función estaría dada por:

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \,\mathsf{tal\,que}\, 0 \leq x \leq 10 \tag{9.24}$$

el resto del contorno del cartel está limitado por la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x, & \forall x \in \mathbb{R} \,\mathsf{tal\,que}\, 0 \leq x \leq 10 \\ -x + 10, & \forall x \in \mathbb{R} \,\mathsf{tal\,que}\, 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \tag{9.25}$$

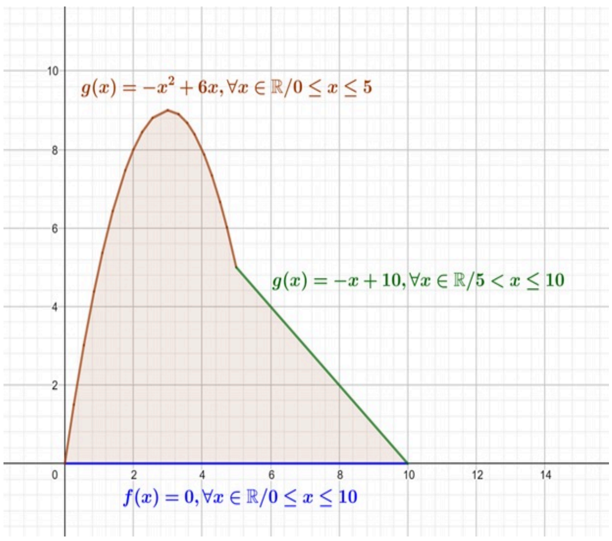


Figura 9.10: Forma del cartel publicitario

Desarrollo:

Para calcular el área bajo la curva, se integran la función a trozos en sus respectivos dominios:

$$A = \int_0^5 \left(-x^2 + 6x\right) dx + \int_5^{10} (-x + 10)\, dx$$

se aplican las reglas de integración y se resuelven las integrales definidas:

$$A = \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2\right)\Bigg|_0^5 + \left(-\frac{x^2}{2} + 10x\right)\Bigg|_5^{10}$$

$$A = \left(-\frac{125}{3} + 75\right) + (-50 + 100) - \left(-\frac{25}{2} + 50\right)$$

$$A = \frac{100}{3} + 50 - \frac{75}{2}$$

$$A = \frac{275}{6}\,m^2$$

Cabe recalcar que la base horizontal del cartel ya está considerada en la integral, al hacerla coincidir con el eje de las abscisas.

Aplicación 7

Una empresa gráfica tiene un contrato para diseñar un cartel publicitario, para lo cual debe determinar el área de la figura $ABCDA$ sabiendo que la curva ADC es parte de la gráfica de una función polinómica de segundo grado. El área está limitada por la parábola que pasa por los puntos $A(-2,0)$,$C(2,0)$ y $D(0,-4)$; además la región se delimita con segmentos de recta que van desde el punto $B(0,1)$ hacia el punto A y C.

Solución:

Datos:

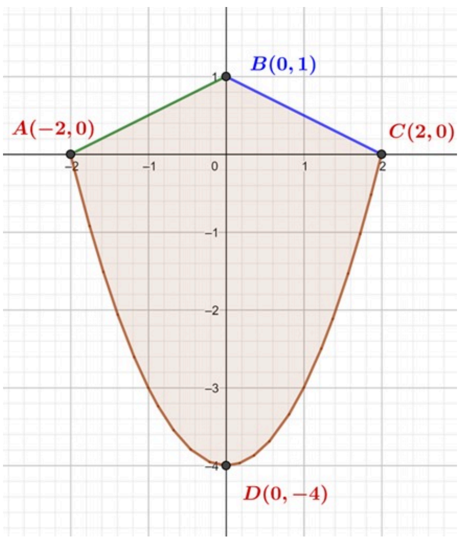


Figura 9.11: Forma del cartel publicitario

En la Figura (9.11) se observa la simetría de la región a determinar, con el eje de las ordenadas, entonces basta con calcular el área que está a la derecha del eje vertical y después duplicarla.

La parábola pasa por los puntos $A(-2,0)$, $C(2,0)$ y $D(0,-4)$.

La región se delimita con segmentos de recta que van desde el punto $B(0,1)$ hacia el punto A y C.

Sea

x= longitud del cartel en el eje de las abscisas $[m]$

y = longitud del cartel en el eje de las ordenadas $[m]$

Desarrollo:

Se requiere determinar la ecuación de la parábola vertical que pasa por tres puntos: $A(-2,0)$, $C(2,0)$ y $D(0,-4)$, para la cual aplicamos la ecuación general de la parábola vertical:

$$x^2+Dx+Ey+F=0 \tag{9.26}$$

evaluando el punto $A(-2,0)$ en la ecuación (9.26)

$$(-2)^2+D(-2)+E(0)+F=0$$

$$4-2D+F=0$$

$$-2D+F=-4 \tag{9.27}$$

evaluando el punto $C(2,0)$ en la ecuación (9.26)

$$(2)^2+D(2)+E(0)+F=0$$

$$4+2D+F=0$$

$$2D+F=-4 \tag{9.28}$$

evaluando el punto $D(0,-4)$ en la ecuación (9.26)

$$(0)^2+D(0)+E(-4)+F=0$$

$$-4E+F=0 \tag{9.29}$$

Resolvemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} -2D+F=-4 & \qquad F=-4 \\ 2D+F=-4 & \Longrightarrow \quad D=0 \\ -4E+F=0 & \qquad E=-1 \end{cases} \tag{9.30}$$

reemplazamos los valores de F,D y E en la ecuación (9.26)

$$x^2+(0)x+(-1)y+(-4)=0$$

$$x^2-y-4=0$$

$$x^2-4=y$$

$$y=x^2-4$$

entonces la ecuación d la parábola queda definida por

$$y=x^2-4 \tag{9.31}$$

Se requiere determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $B(0,1)$ y $C(2,0)$, para la cual aplicamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \tag{9.32}$$

Considerando como x_1 y y_1 los valores correspondientes al par ordenado de $B(0,1)$; mientras que para x_2 y y_2 consideraremos los valores correspondientes al par ordenado de $C(2,0)$, entonces la ecuación (9.32) estaría definida de la siguiente manera

$$y-1=\frac{1-0}{0-2}(x-0)$$

$$y-1=-\frac{1}{2}x$$

$$y=-\frac{1}{2}x+1 \tag{9.33}$$

Para calcular el área de la derecha del eje vertical, se integra las funciones correspondientes a las ecuaciones (9.31) y (9.33)

$$A = \int_0^2 \left[\left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) - \left(x^2 - 4\right) \right] dx$$

se aplican las reglas de integración y se resuelven las integrales definidas,

$$A = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{4} + 5x \right) \Bigg|_0^2$$

$$A = -\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{2^2}{4} + 5(2)$$

$$A = \frac{19}{3}u^2$$

entonces, el área total sería

$$A_T = 2\left(\frac{19}{3}u^2 \right)$$

$$A_T = \frac{38}{3}u^2$$

Aplicación 8

En un restaurante de comida exótica dónde la decoración no es tan común y el espacio disponible es muy limitado se debe agregar un cartel publicitario de las promociones del mes. Para imprimir el cartel a la medida se requiere calcular el área del mencionado cartel cuya forma viene dada por la región limitada por las curvas: $y = x^2$ y $y = 4 - x^2$ que es el espacio designado para agregar la publicidad a través del arte diseñado cuyas unidades vienen dadas en metros.

Solución:

Datos:

Sea

$x =$ longitud del cartel en el eje de las abscisas $[m]$

$y =$ longitud del cartel en el eje de las ordenadas $[m]$

El área destinada para el cartel viene limitada por la intersección de las curvas:

$$f(x) = y = x^2 \tag{9.34}$$

$$g(x) = y = 4 - x^2 \tag{9.35}$$

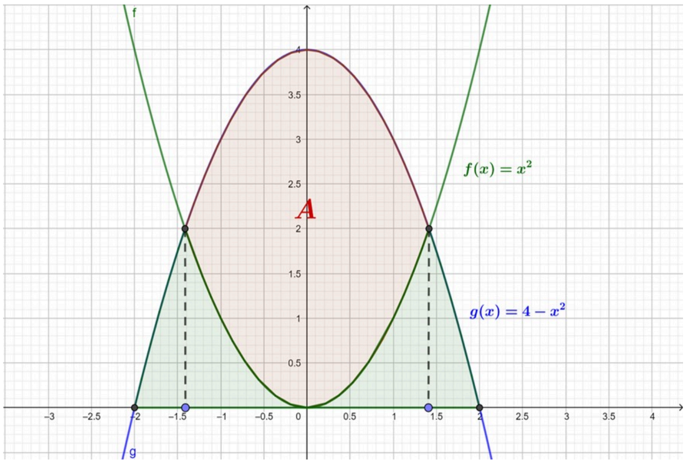


Figura 9.12: Forma del cartel publicitario de las promociones del mes

Desarrollo:

Se requiere determinar los puntos de intersección de las curvas, para lo cual igualamos las ecuaciones (9.34) y (9.35):

$$x^2 = 4 - x^2$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

luego, existen puntos de intersección en $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$.

En la figura ( ) se puede apreciar que el área A que se busca es aquella formada por la intersección de las curvas $y = x^2$ y $y = 4 - x^2$, por lo que el valor de su superficie se puede determinar restando las áreas de $y = 4 - x^2$ menos $y = x^2$. Entonces integrando entre los puntos de intersección

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\left(4 - x^2\right) - x^2\right] dx$$

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(4 - 2x^2\right) dx$$

se aplican las reglas de integración y se resuelven las integrales definidas

$$A = \left(4x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$A = \left[4\left(\sqrt{2}\right) - \frac{2\left(\sqrt{2}\right)^3}{3}\right] - \left[4\left(-\sqrt{2}\right) - \frac{2\left(-\sqrt{2}\right)^3}{3}\right]$$

$$A = \frac{16\sqrt{2}}{3} m^2$$

Aplicación 9

A una empresa de impresión offset y acabados, llega un pedido de una pancarta publicitaria para colocarla en una pared cuya forma se expresa en la figura (9.13). Calcular la cantidad de soporte requerido para cubrir dicha pared.

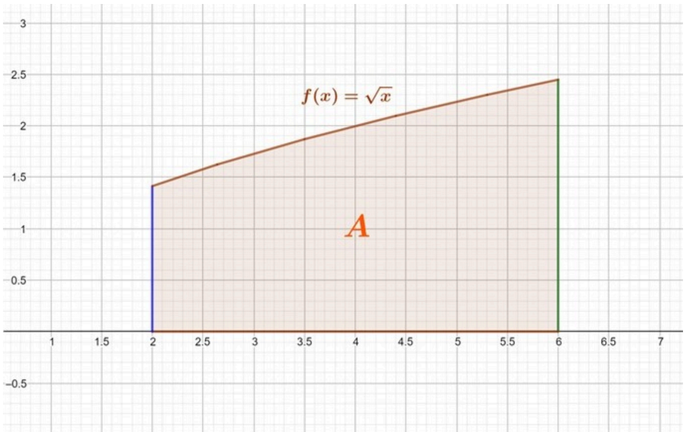


Figura 9.13: Pancarta publicitaria

Solución:

Datos:

Sea

$x =$ longitud del cartel en el eje de las abscisas $[u]$

$y =$ longitud del cartel en el eje de las ordenadas $[u]$

El área destinada para el cartel corresponde al área bajo la curva

$$f(x) = y = \sqrt{x} \tag{9.36}$$

Desarrollo:

En la figura () se puede apreciar que el área A que se busca es aquella formada por la región bajo la curva $f(x) = y = \sqrt{x}$, entre las rectas $x = 2$ y $x = 6$, entonces integrando

$$A = \int_2^6 \sqrt{x}dx$$

se aplican las reglas de integración y se resuelven la integral definida

$$A = \int_2^6 x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$A = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_2^6$$

$$A = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_2^6$$

$$A = \frac{2(6)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2(2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$A = \frac{12\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{3}u^2$$

Aplicación 10

Una empresa de impresión offset y acabados requiere hacer un inventario de las tintas almacenadas en bodega. Para lo cual, se conoce que el recipiente que contiene las tintas tiene la forma que se presenta en la figura (9.14). Calcular el volumen de tinta que contiene cada recipiente.

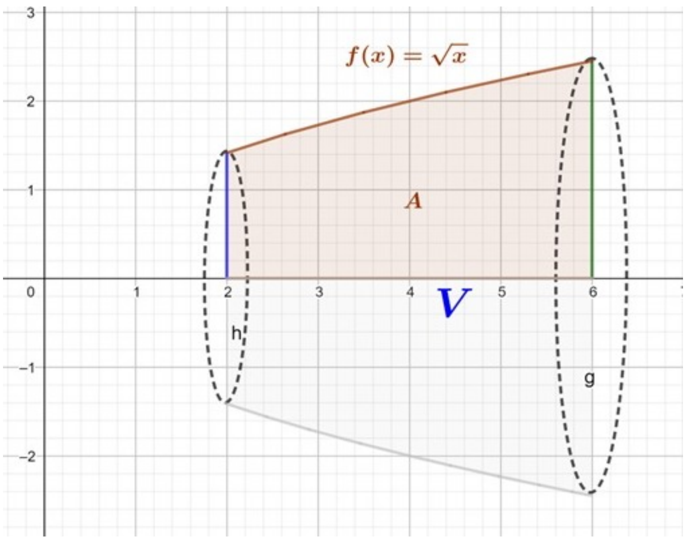


Figura 9.14: Contenedor de tintas

Solución:

Datos:

Sea

$x =$ longitud del recipiente en el eje de las abscisas $[u]$

$y =$ radio del recipiente en el eje de las ordenadas $[u]$

En la figura () se puede observa que el volumen del recipiente se forma al girar la región limitada por $f(x) = \sqrt{2}$ y el eje de las abscisas, entre $x = 2$ y $x = 6$.

$$f(x) = y = \sqrt{x} \tag{9.37}$$

Desarrollo:

Para calcular el volumen de tinta contenida en e recipiente, se puede integrar aplicando el método de discos considerando que la región gira alrededor del eje de las abscisas,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{9.38}$$

reemplazando (9.37) en (9.38) y considerando los límites de integración se tiene

$$V = \pi \int_2^6 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

se aplican las reglas de integración y se resuelven la integral definida

$$V = \pi \int_2^6 xdx$$

$$V = \pi \left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_2^6$$

$$V = \pi \left(\frac{6^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right)$$

$$V = 16\pi u^3$$

10. Mecánica Industrial

Aplicación 1

Hallar los valores de la fuerza y el par lateral, F_L y M_L para mantener una velocidad angular constante de $10\,rad/s$ el viscosímetro cilíndrico de la figura. (Considérense los esfuerzos cortantes, en la superficie lateral y en la base).

Solución:

Datos:

$H = 10\,cm$

$R_1 = 3\,cm$

$h = 0,1\,m$

$\mu = 7 \cdot 10^{-3}\,N \cdot \frac{s}{m^2}$ (constante)

$\tau = \mu \frac{du}{dy}$

Desarrollo:

En la cara lateral se tiene:

Figura 10.1: Viscosímetro cilíndrico

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{V_1 - 0}{h} = \frac{R_1 \omega}{h}$$

los valores de la fuerza y el par lateral, F_L y M_L, se obtienen:

$$F_L = \tau \cdot dS = \mu \cdot \frac{R_1 \omega}{h} \cdot 2\pi R_1 \cdot H = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi \cdot H \cdot R_1^2$$

$$F_L = \left(7 \cdot 10^{-3} N \cdot \frac{s}{m^2}\right) \frac{(10 \, \frac{rad}{s})}{0,1\, m} 0,1\, m(2\pi)(0,1\, m)(0{,}03\, m)^2$$

$$F_L = 3,9584 \cdot 10^{-6} \, [N]$$

$$M_L = F \cdot R_1 = \mu \cdot \frac{R_1 \omega}{h} \cdot 2\pi R_1 \cdot H \cdot R_1 = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi \cdot H \cdot R_1^3$$

$$M_L = \left(7 \cdot 10^{-3} N \cdot \frac{s}{m^2}\right) \frac{(10 \, \frac{rad}{s})}{0,1\, m} 0,1\, m(2\pi)(0,1\, m)(0{,}03\, m)^3$$

$$M_L = 1,1875 \cdot 10^{-5} \, [Nm]$$

Aplicación 2

Una ventana tiene la forma rectangular con su parte superior en media circunferencia. Cuáles serán sus dimensiones para que penetre el máximo de luz para un perímetro dado.

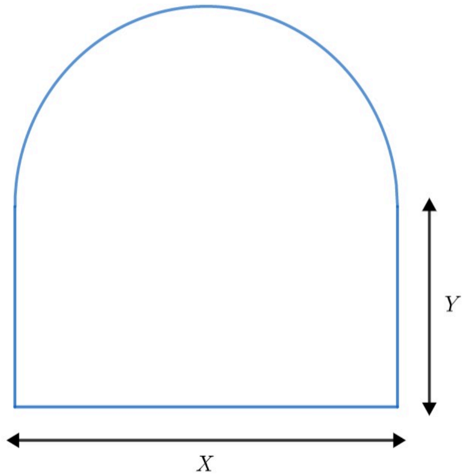


Figura 10.2: Forma de ventana

Solución:

De la figura se deduce que el perímetro sería

$$P = \frac{\pi X}{2} + 2Y + X$$

entonces

$$Y = \frac{1}{2}\left(P - X - \frac{\pi X}{2}\right)$$

luego, la función que describe la cantidad total de luz sería:

$$A(X) = \frac{\pi X^2}{8} + \frac{x}{2}\left(P - X - \frac{\pi X}{2}\right)$$

$$A(X) = \frac{\pi X^2}{8} + \frac{Px}{2} - \frac{X^2}{2} - \frac{\pi X^2}{4}$$

$$A(X) = \frac{Px}{2} - \frac{X^2}{2} - \frac{\pi X^2}{8}$$

donde la mayor superficie corresponde a determinar los puntos máximos de A en su correspondiente dominio, derivando e igualando a cero se tiene

$$A'(X) = \frac{P}{2} - X - \frac{\pi X}{4} = 0$$

entonces se tiene un punto crítico en $X = \frac{2P}{\pi+4}$, luego derivando A' para utilizar el criterio de la segunda derivada se tiene

$$A''(X) = -1 - \frac{\pi}{4} < 0$$

por lo tanto existe un máximo en $X = \frac{2P}{\pi+4}$.

Como además,

$$Y = \frac{1}{2}\left(P - X - \frac{\pi X}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[P - \frac{2P}{\pi+4} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{2P}{\pi+4}\right)\right] = \frac{P}{\pi+4}$$

por lo tanto, las dimensiones para que entre la mayor cantidad de luz sería

$$X = \frac{2P}{\pi+4} \quad \text{y} \quad Y = \frac{P}{\pi+4}$$

Aplicación 3

Si un recipiente cilíndrico de lámina (cerrado en ambos extremos) ha de tener V como volumen constante, encuéntrese las dimensiones que requieran la mínima cantidad de material.

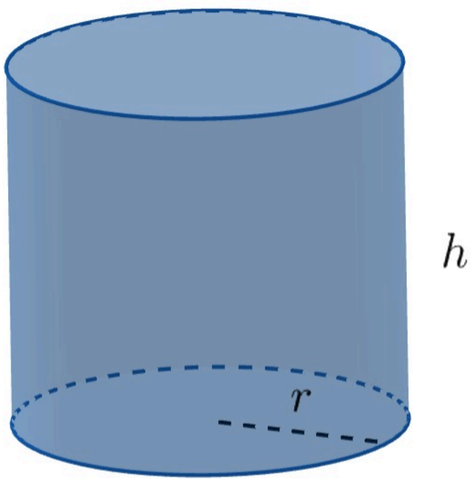


Figura 10.3: Cilindro genérico de radio r y altura h

Solución:

Dado que para cualquier cilindro su volumen se calcula con la fórmula

$$V = \pi r^2 h$$

se sigue que

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

y además su superficie total considerando que es un cilindro cerrado con tapa se calcula como

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

reemplazando h en la última expresión se tiene la superficie total en función del radio de la siguiente manera

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Utilicemos el criterio de la primera derivada para hallar sus puntos críticos

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

$$4\pi r = \frac{2V}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

es decir se tiene un punto crítico en $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Utilicemos el criterio de la segunda derivada, es decir derivemos nuevamente y reemplacemos nuestro punto crítico hallado previamente, se tiene

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^3} = 12\pi > 0$$

lo que indica que $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ es un mínimo, además hallemos el valor de h:

$$h = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2}$$

$$h = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Aplicación 4

Hacia un tanque cónico fluye agua a razón de $8\,\frac{pies^3}{min}$, si la altura del tanque es de $12\,pies$ y el radio de la base es de $6\,pies$. ¿Qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuando tiene $4\,pies$ de altura?

Solución:

Esquematicemos en un gráfico, la información dada:

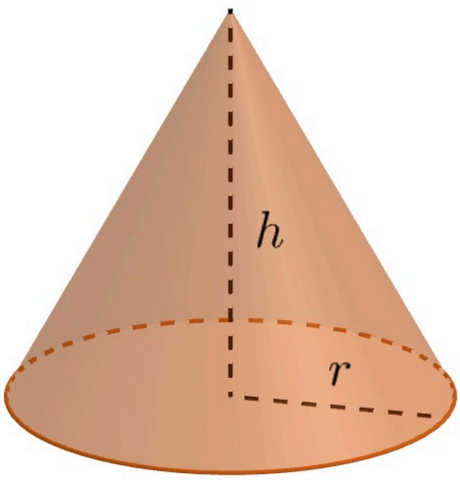


Figura 10.4: Cono genérico de radio r y altura h

Llamemos a:

$M =$ Cantidad de agua que entra en pie^3

$Q =$ Cantidad de agua que sale en pie^3

$V =$ Cantidad de agua alojada en pie^3

Para este tipo de problema de manera general se puede proponer $M - Q = V$, derivando con respecto al tiempo resulta:

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dQ}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

ahora de acuerdo a la información proporcionada tenemos:

$$\frac{dM}{dt} = 8\,\frac{pies^3}{min}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0\,\frac{pies^3}{min}$$

El volumen del agua alojada depende del recipiente en este caso deberíamos usar la formula del volumen de un cono, es decir:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ahora hay que tener la función volumen en término de una variable, que en este caso lo mas indicado es que sea una función de h. La forma geométrica del recipiente y la forma geométrica de la masa de agua que se va alojando en el recipiente nos permite hacer lo indicado. Las secciones transversales son triángulos semejantes, esto nos permite relacionar r con h.

$$\frac{h}{12} = \frac{r}{6}$$

$$r = \frac{h}{2}$$

reemplazando en la fórmula para el volumen del agua alojada, resulta:

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

por lo tanto,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

entonces,

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dQ}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

$$8 - 0 = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}\,\frac{pies}{min}$$

luego, en $h = 4$ resulta

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi(4)^2} = \frac{32}{16\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{pies}{min}$$

Aplicación 5

Se desea construir una caja con tapa utilizando una lata rectangular que mide $5\,pies \times 8\,pies$. Esta se realiza cortando las regiones sombreadas de la figura y luego doblando por las líneas discontinuas. ¿Cuáles son las dimensiones x, y y z que maximizan el volumen de la caja?

Solución:

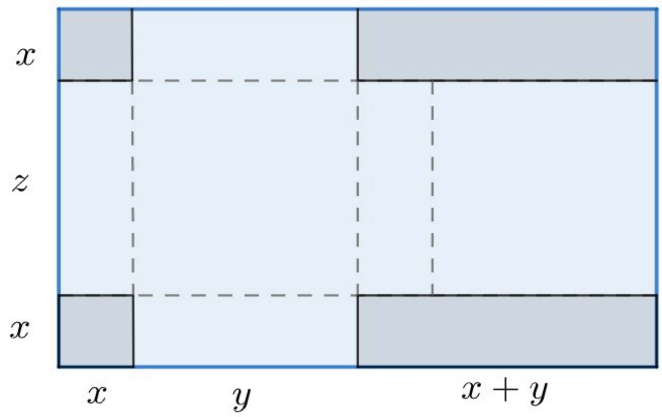


Figura 10.5: Lata rectangular de $5pies \times 8pies$ para la realización de caja con tapa

De acuerdo a la figura, la caja formada así, tendrá un volumen que se puede calcular con la fórmula

$$V = xyz$$

observe $5 = 2x + z$, por lo tanto $z = 5 - 2x$, observe también que $8 = 2x + 2y$, por lo tanto $y = 4 - x$, reemplazando en el volumen se tiene

$$V = x(4 - x)(5 - 2x)$$

$$V = \left(4x - x^2\right)(5 - 2x)$$

$$V = 2x^3 - 13x^2 + 20x$$

Para utilizar el criterio derivamos e igualamos a cero, la derivada es

$$\frac{dV}{dx} = 6x^2 - 26x + 20 = 0$$

$$6x^2 - 26x + 20 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{y} \quad x = \frac{10}{3} \approx 3,33$$

escogemos el punto crítico $x = 1$ *pies* porque no es posible que $x \geq 2,5$.

Por lo tanto $y = 4 - x = 4 - 1 = 3$ *pies* y $z = 5 - 2x = 5 - 2(1) = 3$ *pies* serian las dimensiones para obtener un volumen máximo. El valor de este volumen sería:

$$V_{max} = xyz = 1(3)(3) = 9\, pies^3$$

Aplicación 6

Encontrar el área acotada por las curvas cuyas ecuaciones son $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

Solución:

La región comprendida por $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y $x = 1$ es la del gráfico siguiente:

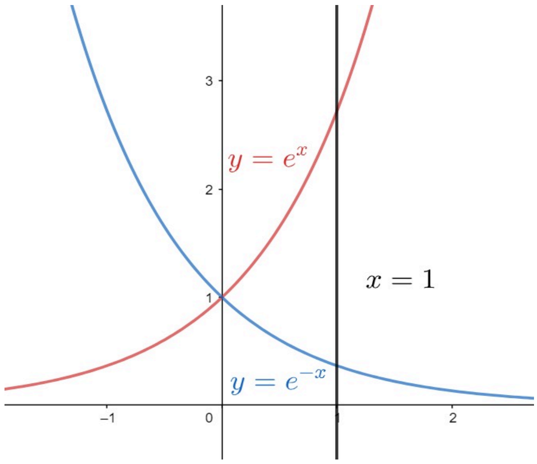


Figura 10.6: Región acotada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y $x = 1$

Entonces el área de esta región viene dada por:

$$A(R) = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx$$

$$A(R) = \left(e^x + e^{-x}\right)|_0^1$$

$$A(R) = e + e^{-1} - 2$$

$$A(R) = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1\right)$$

$$A(R) = 2\left(\cosh(1) - 1\right)$$

por lo tanto,

$$A(R) = 2(\cosh(1) - 1)\, u^2$$

Aplicación 7

Una fuerza de $25\,kg$, alarga un resorte de $3\,cm$, encontrar el trabajo requerido para alargar el resorte $2\,cm$ más.

Figura 10.7: Resorte y un peso de $25kg$

Solución:

Se tiene $F(x) = kx$ como $x = 3\,cm$, entonces $x = 0,03\,m$ y $F(0,03) = 25\,kg$, entonces

$$25 = 0,03k$$

de donde

$$k = \frac{2500}{3}$$

se sabe que el la fórmula del trabajo viene dado por la integral

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

entonces,

$$W = \int_{0,03}^{0,05} \left(\frac{2500}{3} x\right) dx$$

$$W = \left(\frac{2500}{3} \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0,03}^{0,05}$$

$$W = \frac{2500}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[(0,05)^2 - (0,03)^2 \right]$$

$$W = \frac{1250}{3}(0,0025 - 0,0009)$$

$$W = \frac{1250}{3}(0,0016)$$

$$W = \frac{2}{3} J$$

Aplicación 8

Para varias aplicaciones industriales, es necesario conocer el volumen de una esfera de radio r.

Solución:

Podemos considerar la esfera como el sólido de revolución generado al girar el semicírculo de radio r con centro en el origen alrededor del eje X:

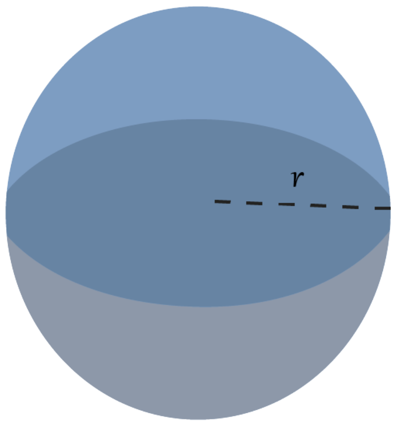


Figura 10.8: Esfera genérica de radio r

La ecuación que describe el semicírculo es:

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{con}\, y \geq 0$$

de donde se obtiene

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

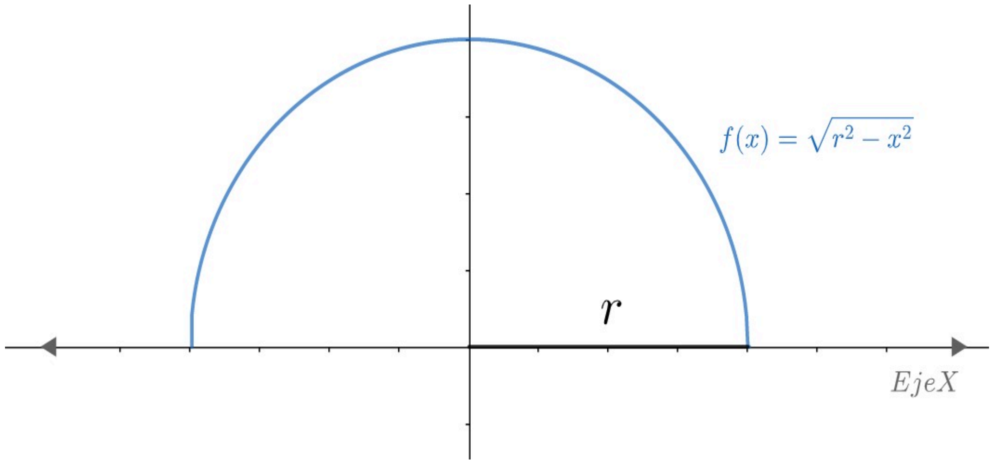


Figura 10.9: Semicircunferencia $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ antes de ser girada respecto al $EjeX$.

Como $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, y la fórmula del volumen para un sólido de revolución es

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

entonces

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$V = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) dx$$

$$V = 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r$$

$$V = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\, u^3$$

Aplicación 9

Calcular el volumen de un cilindro y de un cono, ambos circulares rectos, con radio r en la base y altura h, consideremos como sólidos de revolución.

Solución:

Tanto el cilindro como el cono se generan como sólidos de revolución al girar un rectángulo y un triángulo, respectivamente, alrededor del eje x como se muestran en las figuras:

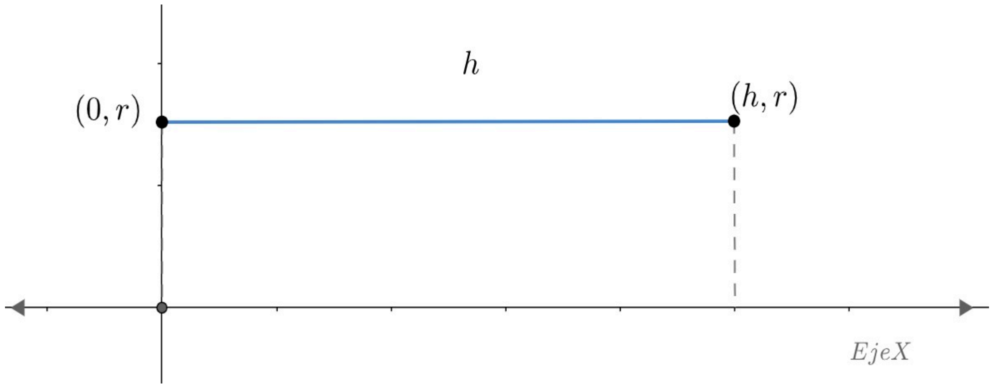


Figura 10.10: Función constante, $f(x) = r$ antes de ser girada respecto al $EjeX$ y convertirse en un cilindro

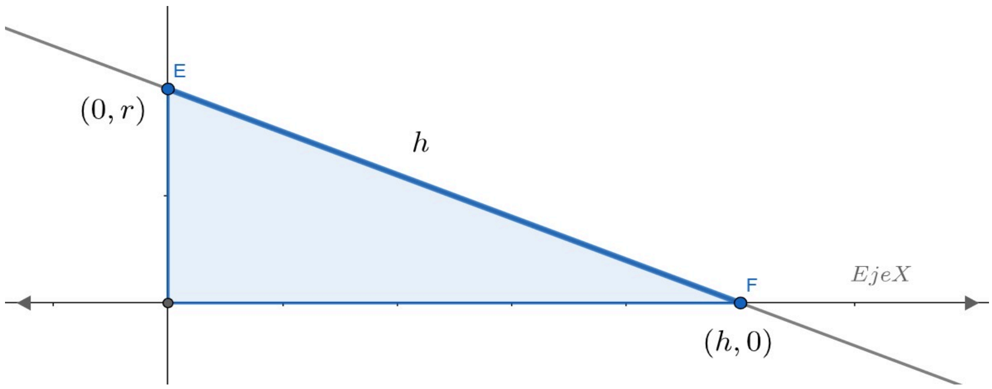


Figura 10.11: Función lineal, antes de ser girada respecto al $EjeX$ y convertirse en un cono.

Utilizamos la fórmula para determinar el volumen del sólido de revolución que es la siguiente:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

con $f(x) = r$ para el cilindro, así como $g(x) = \frac{r}{h}x$ para el cono puesto que $y = \frac{r}{h}x$ es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y (h,r), obtenemos:

Para el cilindro

$$V = \pi \int_0^h r^2\,dx = \pi\, r^2 x\Big|_0^h = \pi r^2 h u^3$$

Para el cono,

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h u^3$$

11. Mecánica Automotriz

Aplicación 1

El tanque de combustible de un vehículo para correr rally está fabricado de fibra de vidrio tiene una forma de paralelepípedo de medidas en centímetros: base $60 \times 40\,cm$; altura $35\,cm$. Se vierte combustible desde un surtidor con un caudal de $6000\frac{cm^3}{min}$. Determinar:

a. La rapidez que sube el nivel del combustible

b. En qué tiempo se llena el tanque

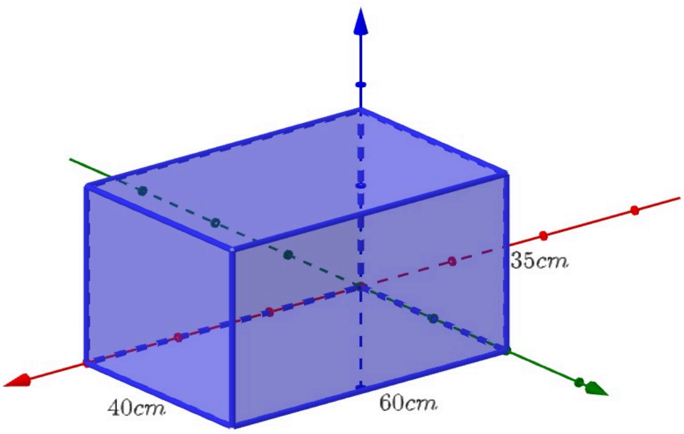


Figura 11.1: Tanque de combustible de un vehículo para correr rally.

Solución:

Para el ítem a., podemos darnos cuenta el problema está en llenar el volumen contenido dentro del tanque de combustible, al ser una figura homogénea no presenta mayor complicación; para ello debemos crear la función del volumen del tanque y saber que mientras se llena el tanque las medidas de la base se mantienen constantes mientras que lo que va variando es la altura de llenado del tanque. El volumen de llenado y la altura por lo tanto dependerán del tiempo que vaya transcurriendo, la función queda definida de la siguiente manera:

$$v(t) = (60\,cm)(40\,cm)h(t)$$

si derivamos está expresión con respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dv}{dt} = 2400\,cm^2\frac{dh}{dt}$$

despejando $\frac{dh}{dt}$ que representa la rapidez a la cual sube el nivel de combustible en el tanque nos queda:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{2400\,cm^2}$$

reemplazando el dato del caudal que representa la rapidez de cambio del volumen con respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{6000\frac{cm^3}{min}}{2400\,cm^2} = 2,5\frac{cm}{min}$$

Lo que significa que por cada minuto que pasa la altura sube $2,5\frac{cm}{min}$; esto para cualquier instante de tiempo debido a que el tanque tiene una forma homogénea.

Para el ítem b., es decir, para determinar en qué tiempo se llenará el tanque, con el dato encontrado en el punto anterior y el valor de la altura del tanque podemos encontrar el tiempo de llenado. La altura del tanque es $35\,cm$, mientras que la rapidez a la cual sube el nivel de combustible es de $2,5\frac{cm}{min}$ eso significa que si dividimos 35 para $2,5$ nos va a dar el tiempo de llenado del tanque y se puede comprobar que las unidades si son correspondientes:

$$t_{llenado} = \frac{35\,cm}{2,5\frac{cm}{min}} = 14\,min$$

Aplicación 2

Un coche de competición se desplaza a una velocidad que entre las 0 y 2 horas y viene dada por la expresión $v(x) = (2-x)e^x$ donde x es el tiempo en horas y $v(x)$ es la velocidad en kilómetros. Determinar:

a. En qué momento del intervalo circula a la velocidad máxima e indicar la misma.

b. En qué periodos ganó velocidad y en cuáles redujo

c. Indicar si se detuvo en alguna vez el coche

Solución:

Según los datos mencionados concluimos que nuestra derivada es:

$$v'(x) = -1 \cdot e^x + e^x(2-x) = -e^x + 2e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x(1-x)$$

para utilizar el criterio de la primera derivada igualamos a cero el resultado anterior obteniendo

$$e^x(1-x) = 0 \Longrightarrow 1-x = 0 \Longrightarrow x = 1$$

ya que e^x nunca puede ser cero.

Utilicemos el criterio de la segunda derivada,

$$v''(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$$

de donde

$$v''(1) = -e < 0$$

lo que indica que existe un máximo en $x = 1$.

Además, note que $v'(x) = e^x(1-x) > 0$ cuando $x \in [0,1)$ lo que indica que gana velocidad cuando el coche recorre de 0 a 1 hora, también se observa que $v'(x) = e^x(1-x) < 0$ cuando $x \in (0,2]$ lo que indica que pierde velocidad cuando el coche recorre de 1 a 2 horas.

Dado que $v(1) = (2-1)e^1 = e$ entonces e es la velocidad máxima que alcanzó el coche, y dado que $v(2) = (2-2)e^2 = 0$ entonces a las 2 horas el coche se detuvo.

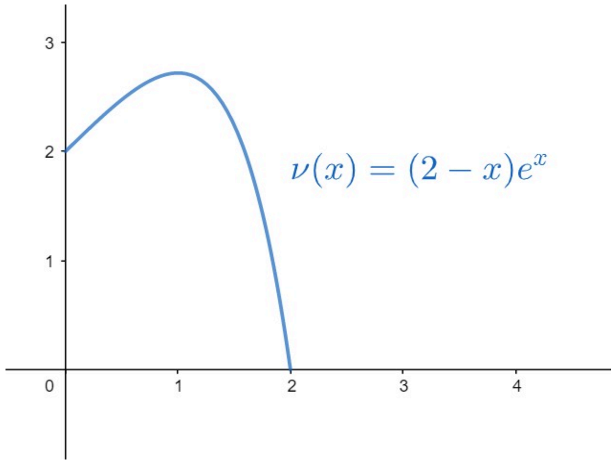


Figura 11.2: Velocidad de un coche de competición.

Aplicación 3

Un automóvil que parte desde la posición de $10\,m$ de un sistema de referencias, se desplaza a una velocidad inicial de $5\,\frac{m}{s}$ y lleva una aceleración constante de $9\,\frac{m}{s^2}$. Determinar La posición en función del tiempo.

Solución:

Según los datos mencionados concluimos que nuestra función es:

$$f(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

donde x es la posición inicial, v es la velocidad inicial y a es la aceleración constante, reemplazando datos tenemos que:

$$f(t) = \frac{9t^2}{2} + 5t + 10$$

Para corroborar se recuerda que la posición inicial se define como $x_0 = f(0)$, lo cual coincide con nuestra ecuación

$$x_0 = f(0) = \frac{9(0)^2}{2} + 5(0) + 10 = 10\,m$$

la velocidad inicial se define como $v_0 = f'(0)$, lo cual coincide con la derivada de nuestra ecuación

$$f'(t) = 9t + 5 \Longrightarrow v_0 = f'(0) = 9(0) + 5 = 5\,\frac{m}{s}$$

por último la aceleración que es constante se define como $a = f''(t)$, lo cual coincide con la segunda derivada de nuestra ecuación

$$a = f''(t) = 9\,\frac{m}{s^2}$$

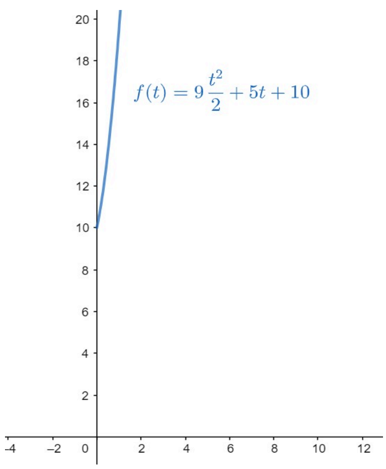


Figura 11.3: Función $f(t) = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$ cuando $a = 9m/s^2$, $v_0 = 5m/s$ y $x_0 = 10m$.

Aplicación 4

Una empresa quiere saber la cantidad mínima de metal para fabricar una lata de aceite para auto de forma cilíndrica de $350ml$.

Solución:

Sea r el radio de la base y h la altura del cilindro.

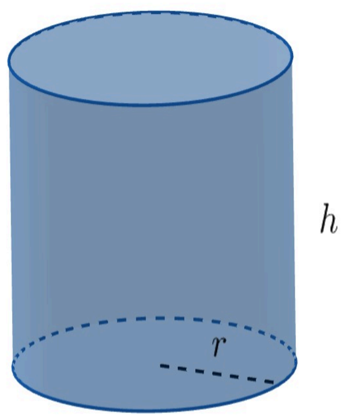


Figura 11.4: Lata de aceite para auto de forma cilíndrica de $350ml$.

El área de la base es πr^2 igual al área de la tapa. El área lateral es $2\pi rh$, producto de la circunferencia por la altura del cilindro. Por lo tanto, el área total, que es la función para minimizar, está dada por:

$$f(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

El otro dato del problema es el volumen del cilindro $\pi r^2 h$, que debe ser igual a $350\,ml$. De este se despeja la altura, para sustituir en la función área total,

$$\pi r^2 h = 350\,ml$$

$$h = \frac{350}{\pi r^2} \Longrightarrow f(r) = 2\pi r\left(\frac{350}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 = \frac{700}{r} + 2\pi r^2$$

$$f(r) = \frac{700}{r} + 2\pi r^2$$

Utilicemos el criterio de la primera derivada, derivamos f

$$f\prime(r) = -700\frac{1}{r^2} + 4\pi r$$

igualamos a cero

$$0 = -700\frac{1}{r^2} + 4\pi r$$

$$0 = \frac{-700 + 4\pi r^3}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{700}{4\pi}} = 3,81\,cm$$

utilizando el criterio de la segunda derivada se tiene

$$f''(r) = 700\frac{1}{r^3} + 4\pi \Longrightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{700}{4\pi}}\right) = 700\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{700}{4\pi}}\right)^3} + 4\pi > 0$$

lo que indica que $r = \sqrt[3]{\frac{700}{4\pi}}$ es un mínimo.

La altura nos da

$$h = \frac{350}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{700}{4\pi}}\right)^2} = 7,63\,cm$$

Las dimensiones de la lata cilíndrica de $350\,ml$ que tiene menos superficie lateral son: Una base de aproximadamente $3,81\,cm$ de radio y una altura de aproximadamente $7,63\,cm$.

Aplicación 5

Un vehículo se mueve en trayectoria rectilínea (a lo largo del eje x), con una aceleración dada por la siguiente ecuación $a(t) = 2t^2 - 6t$, donde la aceleración a está dada en $\frac{m}{s^2}$, y el tiempo t en segundos. Exprese la velocidad y la posición de la partícula en función del tiempo si parte con una velocidad inicial de $5\frac{m}{s}$ desde una posición de $2m$.

Solución:

Partiendo de la ecuación de la velocidad

$$V = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = V\,dt$$

así como

$$a = \frac{dV}{dt} \Longrightarrow dV = a\,dt$$

En función a los datos del ejercicio planteado, se procederá a obtener la primitiva considerando que en integrales indefinida aparece siempre una constante C de la igualdad de $dV = a\,dt$, así aplicando la integral a los dos lados me queda:

$$\int dV = \int a\,dt$$

$$V = \int a\,dt$$

seguidamente reemplazamos la función aceleración en el integral

$$V = \int \left(2t^2 - 6t\right)\,dt$$

$$V = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + C$$

Ahora bien, con los datos enunciados en el planteamiento del ejercicio, se sabe que, la $V_0 = 5\,\frac{m}{s}$ y en ese instante $t = 0$, entonces al reemplazar en la ecuación nos quedará:

$$5 = \frac{2}{3}(0)^3 - 3(0)^2 + C \Longrightarrow C = 5$$

conocido el valor de C se procede a reemplazar en la ecuación, de la siguiente manera

$$V = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + 5$$

Seguidamente se procederá a expresar la posición en función del tiempo, siguiendo el mismo procedimiento descrito anteriormente, de la siguiente manera:

$$V = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = V\,dt$$

$$x = \int V\,dt$$

$$x = \int \left(\frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + 5\right) dt$$

$$x = \frac{1}{6}t^4 - t^3 + 5t + C$$

partiendo de las condiciones iniciales se sabe que con $t = 0$, la posición inicial es de $x_0 = 2\,m$, entonces

$$2 = \frac{1}{6}(0)^4 - (0)^3 + 5(0) + C \Longrightarrow C = 2$$

entonces la función de la posición respecto del tiempo me queda expresado de la siguiente manera:

$$x = \frac{1}{6}t^4 - t^3 + 5t + 2$$

Por lo tanto, las gráficas correspondientes de las funciones obtenidas quedarán expresadas de la siguiente manera.

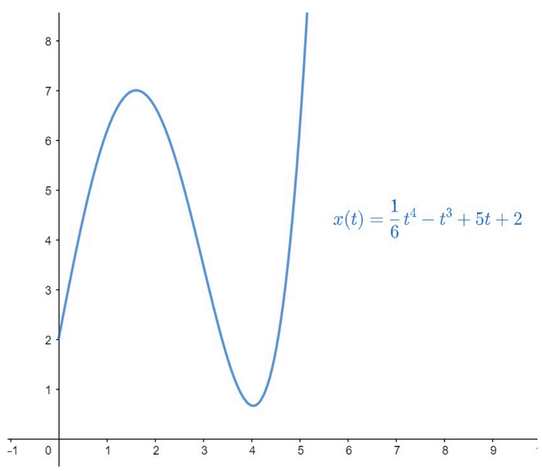


Figura 11.5: Función de la posición con respecto del tiempo de un vehículo.

Aplicación 6

Calcular el trabajo mecánico en Joules de una fuerza con la función $f(x) = 3x^2 - x + 1$ que varía con la posición en el intervalo $[1,3]$.

Solución:

Empezamos interpretando gráficamente el ejercicio de la siguiente manera

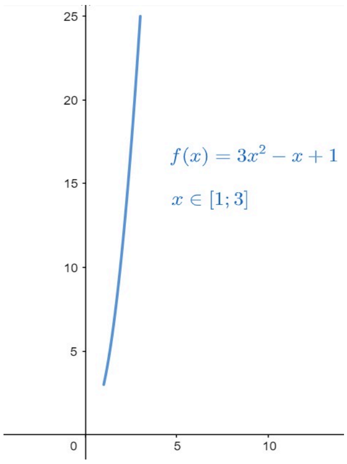


Figura 11.6: Función a calcular el trabajo mecánico en Joules.

El trabajo mecánico, de acuerdo al concepto a la integral definida que existe entre la fuerza y el producto escalar de la posición en el intervalo $[1,3]$,

$$W = \int_1^3 f\,dx$$

seguidamente, aplicando las propiedades de las integrales definidas se obtendrá, el resultado esperado

$$W = \int_1^3 \left(3x^2 - x + 1\right)\,dx$$

$$W = \left(\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_1^3$$

$$W = \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_1^3$$

$$W = \left[(3)^3 + \frac{(3)^2}{2} + 3\right] - \left[(1)^3 + \frac{(1)^2}{2} + 1\right]$$

$$W = \left(27 - \frac{9}{2} + 3\right) - \left(1 - \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$W = \frac{51}{2} - \frac{3}{2}$$

$$W = 24J$$

Entonces se puede decir que el trabajo mecánico entre la función y el eje de las x, es el área bajo la curva con el mismo eje de las x.

Aplicación 7

Una fábrica de repuestos automotrices descubrió que el costo marginal cuando se producen q unidades es $T(q) = 3q^2 - 30q + 200$ dólares por unidad. Si el costo total de producción de las 2 primeras unidades es \$800, ¿cuál es el costo total de producción de las 5 primeras unidades?

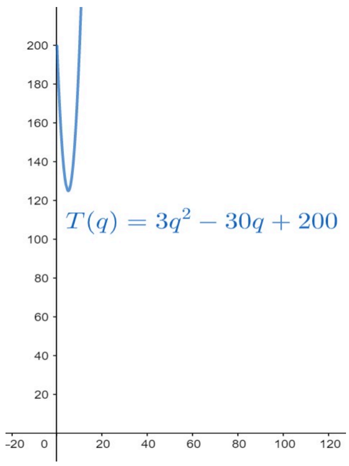


Figura 11.7: Función del costo marginal cuando se producen q unidades.

Solución:

Dado que

$$T(q) = 3q^2 - 30q + 200$$

integramos

$$\int T(q)\,dq = \int \left(3q^2 - 30q + 200\right)\,dq = q^3 - 15q^2 + 200q + C$$

$$\int T(q)\,dq = q^3 - 15q^2 + 200q + C$$

sustituimos $\int T(q)\,dq = 800$, cuando $q = 2$,

$$800 = (2)^3 - 15(2)^2 + 200(2) + C$$

$$C = 452$$

Después sustituimos los valores en esta última, para obtener el costo de producción de las 5 primeras unidades:

$$\int T(q)\,dq = (5)^3 - 15(5)^2 + 200(5) + 452$$

$$\int T(q)\,dq = 1202$$

así, el costo total de producción de las primeras 5 unidades es: \$1202.

12. Electricidad

Aplicación 1

La corriente eléctrica no es más que la velocidad de cambio de la carga eléctrica con respecto al tiempo, para calcularla se tiene la siguiente expresión:

$$i(t) = \frac{d}{dt}Q(t)$$

donde:

- $i(t)$ es la corriente eléctrica medida en Amperios (A)
- $Q(t)$ es la carga eléctrica medida en Coulomb (C)

Si en determinada aplicación la carga eléctrica de un circuito responde a la función:

$$Q(t) = 5e^{-4t}\cos(50t)\,\mu C$$

Calcular la corriente eléctrica que genera dicha carga.

Solución:

Aplicando la fórmula de $i(t)$ se tiene,

$$i(t) = \frac{d}{dt}5e^{-4t}\cos(50t)$$

$$i(t) = 5\left[-4e^{-4t}\cos(50t) + e^{-4t}\left(-\sin(50t)\right)\cdot 50\right]$$

$$i(t) = -20e^{-4t}\cos(50t) - 250e^{-4t}\sin(50t)$$

$$i(t) = -10e^{-4t}\left[2\cos(50t) - 25\sin(50t)\right]\,\mu A$$

Aplicación 2

Una de las aplicaciones de la derivada se encuentra cuando se desea calcular la fuerza electromotriz inducida en un circuito, este fenómeno de inducción se genera por la variación con respecto al tiempo del flujo magnético, lo cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\phi(t)$$

donde:

- ε es la fuerza electromotriz inducida medida en Voltios (V)
- $\phi(t)$ es el flujo magnético medido en Teslas (T)

Si en un determinado circuito se conoce que el flujo magnético varía de acuerdo a la siguiente función:

$$\phi(t) = 3t\sin(t)\,T$$

Calcular:

a. Calcular la fuerza electromotriz inducida en dicho circuito
b. Calcular la fuerza electromotriz inducida al tiempo de $0,4\,s$

Solución:

Para el ítem a., aplicando la fórmula de ε se tiene

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\left[3t\sin(t)\right]$$

$$\varepsilon = -3\left[1\cdot\sin(t) + t\cos(t)\right]$$

$$\varepsilon = -3\left[\sin(t) + t\cos(t)\right]\,V$$

Para el ítem b., reemplazamos $t = 0,4\,s$ en ε,

$$\varepsilon = -3\left[\sin(0,4) + (0,4)\cos(0,4)\right]$$

$$\varepsilon = -1,22\,V$$

Aplicación 3

Un amplificador operacional es un circuito integrado que tiene una amplia gama de aplicaciones en el campo de la Electrónica. Una de ellas se denomina circuito derivador, que como su nombre lo indica nos permite derivar una señal de voltaje que se conecte a la entrada de dicho circuito. La configuración usada para este fin es la siguiente:

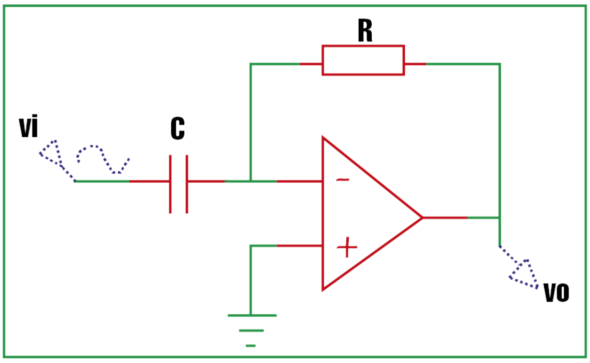


Figura 12.1: Circuito derivador.

Para poder calcular el voltaje de salida de esta configuración se tiene la siguiente fórmula:

$$V_0(t) = -RC\frac{d}{dt}V_i(t)$$

donde

- $V_0(t)$ es el voltaje de salida
- $V_i(t)$ es el voltaje de entrada
- R es la resistencia expresada en ohmios
- C es la capacitancia expresada en faradios

Se desea calcular el voltaje de salida de un circuito derivador si se conoce que $R = 15\,k\Omega$, $C = 120\,\mu F$ y el voltaje de entrada responde a la siguiente función:

$$V_i(t) = 15\sin(t)\,V$$

Solución:

Aplicando la fórmula de $V_0(t)$ se tiene,

$$V_0(t) = -15\cdot 10^3\cdot 120\cdot 10^{-6}\frac{d}{dt}[15\sin(t)]$$

$$V_0(t) = -1,8\frac{d}{dt}\left[15\sin(t)\right]$$

$$V_0(t) = -27\cos(t)$$

Aplicación 4

Un inductor es un elemento de un circuito eléctrico capaz de oponerse al cambio de la corriente, sus unidades se expresan en Henrios que se representa con la letra H. Para poder calcular el voltaje de un inductor debido al paso de una corriente se tiene la siguiente fórmula:

$$V_L = L\frac{d}{dt}i(t)$$

donde

- $i(t)$ es la corriente en función del tiempo que circula por el inductor
- V_L es el voltaje del inductor
- L es la inductancia medida en Henrios (H)

Calcular el voltaje de un inductor de $0,5H$, por el cual circula la siguiente función de corriente:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\infty < t < 0 \\ 5e^{-2t}, & \text{si } 0 \leq t < +\infty \end{cases}$$

Solución:

Aplicando la fórmula de V_L se tiene,

$$V_L = 0,5\frac{d}{dt}\left[5e^{-2t}\cos(t)\right]$$

$$V_L = 2,5\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\cos(t)\right]$$

$$V_L = 2,5\left[-2e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}(-\sin(t))\right]$$

$$V_L = -5e^{-2t}\cos(t) - 2,5e^{-2t}\sin(t)$$

$$V_L = -e^{-2t}\left[5\cos(t) + 2,5\sin(t)\right]$$

$$V_L = \begin{cases} 0, & \text{si } -\infty < t < 0 \\ -e^{-2t}\left[5\cos(t) + 2,5\sin(t)\right], & \text{si } 0 \leq t < +\infty \end{cases}$$

Aplicación 5

La resistencia de un circuito por el cual circula determinada corriente eléctrica, empieza a calentarse de manera anómala, cuando la temperatura ha llegado al límite máximo permitido salta una protección y el circuito queda desenergizado. Si la temperatura con la que se enfría la resistencia durante los primeros 30 segundos de desconexión responde a la siguiente función: $T(t) = 45 - 3t + 0,045t^2\,°C$. Determinar la razón de cambio de la temperatura de la resistencia a los $15\,s$.

Solución:

Para obtener la razón de cambio de la temperatura se debe derivar la función de temperatura con respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d}{dt}\left(45 - 3t + 0,045t^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}T(t) = -3 + 0,09t$$

reemplazando $t = 15\,s$,

$$\frac{d}{dt}T(15) = -3 + 0,09(15)$$

$$\frac{d}{dt}T(15) = -1,65\frac{°C}{s}$$

Aplicación 6

En el campo de la Electricidad se utiliza mucho el valor eficaz de voltaje que actúa sobre una carga, dicho valor es posible calcularlo aplicando la siguiente integral:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (V_{wt})^2\, dwt}$$

donde

- T es el período de la función de voltaje
- V_{wt} es la función de voltaje
- V_{rms} es el voltaje eficaz

Digamos que se tiene un circuito, el cual recorta el ciclo negativo de la función seno de una señal de voltaje y lo entrega a una carga; se pide calcular el voltaje eficaz que el circuito entrega a dicha carga con los datos que nos proporciona la señal de voltaje de la figura.

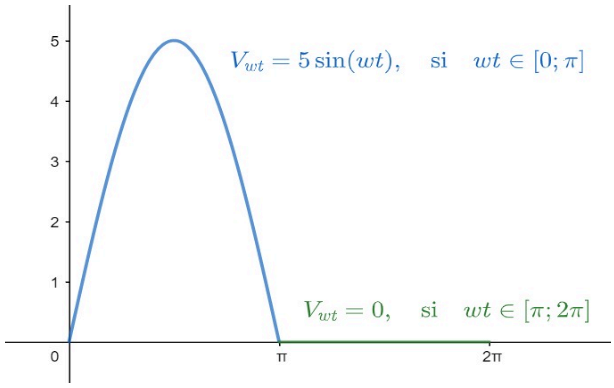


Figura 12.2: Función de voltaje.

Solución:

De la gráfica se pueden obtener los siguientes datos:

$$V_{wt} = \begin{cases} 5\sin(wt), & \text{si } 0 < wt < \pi \\ 0, & \text{si } \pi < wt < 2\pi \end{cases}$$

Luego aplicando la fórmula para V_{rms} se tiene:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [5\sin(wt)]^2\, dwt}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{25}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(wt)\, dwt}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{25}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2wt)}{2}\right] dwt}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{25}{4\pi}\int_0^{2\pi} dwt - \frac{25}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2wt)\, dwt}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{25}{4\pi}\,(wt|_0^{2\pi} - \frac{25}{8\pi}\,(\sin(2wt)|_0^{2\pi}}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{25}{4\pi}\,(2\pi) - \frac{25}{8\pi}\,[\sin(4\pi) - \sin(0)]}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

$$V_{rms} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$V_{rms} = \frac{5\sqrt{2}}{2}V$$

Aplicación 7

Un capacitor es un elemento de un circuito eléctrico capaz de acumular y conservar cargas eléctricas, sus unidades se expresan en faradios que se representa con la letra F. Para poder calcular el voltaje de un capacitor cuyo voltaje inicial es de cero se tiene la siguiente fórmula:

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^T i(t)\,dt$$

donde,

- $i(t)$ es la corriente en función del tiempo que circula por el capacitor
- V_C es el voltaje del capacitor
- C es la capacitancia medida en faradios

Calcular el voltaje de un capacitor de $100\,mF$, en un intervalo de 0 a $0,1\,s$, por el cual circula la siguiente función de corriente:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\infty < t < 0 \\ 3e^{-2t}, & \text{si } 0 \leq t < +\infty \end{cases}$$

Solución:

Aplicando la fórmula para V_C se tiene:

$$V_C = \frac{1}{100\cdot 10^{-3}}\int_0^{0,1} 3e^{-2t}\,dt$$

$$V_C = \frac{3}{100\cdot 10^{-3}}\int_0^{0,1} e^{-2t}\,dt$$

$$V_C = \frac{3}{100\cdot 10^{-3}}\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\Bigg|_0^{0,1}$$

$$V_C = -\frac{3}{200\cdot 10^{-3}}\left(e^{-0,2} - e^{0}\right)$$

$$V_C = 2,72\,V$$

Aplicación 8

Un amplificador operacional es un circuito integrado que tiene una amplia gama de aplicaciones en el campo de la Electrónica. Una de ellas se denomina circuito integrador, que como su nombre lo indica nos permite integrar una señal de voltaje que se conecte a la entrada de dicho circuito. La configuración usada para este fin es la siguiente:

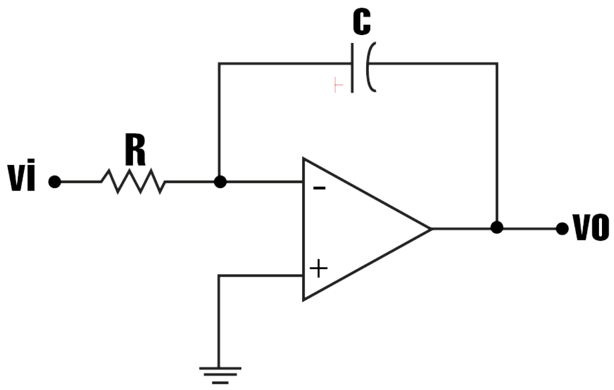


Figura 12.3: Circuito integrador con amplificador operacional.

Para poder calcular el voltaje de salida de esta configuración se tiene la siguiente fórmula:

$$V_0(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^T V_i(t)\,dt$$

donde

- $V_0(t)$ es el voltaje de salida
- $V_i(t)$ es el voltaje de entrada
- R es la resistencia expresada en ohmios
- C es la capacitancia expresada en faradios

Se desea calcular el voltaje de salida del circuito integrador de la figura en un intervalo de 0 a $3\,s$ si se conoce que $R = 12\,k\Omega$, $C = 100\,\mu F$ y el voltaje de entrada responde a la siguiente función: $V_i(t) = 2t + 4$.

Solución:

Aplicando la fórmula de V_0 se tiene,

$$V_0 = -\frac{1}{12000 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\int_0^3 (2t+4)\,dt$$

$$V_0 = -\frac{5}{6}\int_0^3 (2t+4)\,dt$$

$$V_0 = -\frac{5}{3}\int_0^3 (t+2)\,dt$$

$$V_0 = -\frac{5}{3}\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)\Bigg|_0^3$$

$$V_0 = -\frac{5}{3}\left(\frac{9}{2}+6\right)$$

$$V_0 = -\frac{35}{2}V$$

Aplicación 9

Para el cálculo de la resistencia de cierto conductor en donde el área transversal de dicho conductor se puede considerar como constante, se tiene la siguiente fórmula:

$$R(L) = \int_0^L \frac{\rho(x)}{S}\,dx$$

donde

- $R(L)$ es la resistencia del conductor a calcularse
- $\rho(x)$ es la resistividad que varía en función de la longitud del conductor
- S es la superficie transversal del conductor
- L es la longitud total que tiene el conductor

Calcular la resistencia de un conductor si se conoce que la superficie transversal es S la longitud es L y la función que describe la resistividad es $\rho(x) = \rho_0(1+\frac{x}{L})$.

Solución:

Aplicando la fórmula de $R(x)$ se tiene,

$$R(L) = \int_0^L \frac{\rho_0}{S}\left(1+\frac{x}{L}\right)dx$$

$$R(L) = \frac{\rho_0}{S}\int_0^L \left(1+\frac{x}{L}\right)dx$$

$$R(L) = \frac{\rho_0}{S}\left(x+\frac{x^2}{2L}\right)\Bigg|_0^L$$

$$R(L) = \frac{\rho_0}{S}\left(L+\frac{L^2}{2L}\right)$$

$$R(L) = \frac{\rho_0}{S}\left(\frac{3L}{2}\right)$$

$$R(L) = \frac{3L\rho_0}{2S}$$

Aplicación 10

Un elemento de un circuito tiene un voltaje de $v = 28\sin(100\pi t)\,V$ y circula por él una corriente de $45\,mA$. Calcular la potencia absorbida por el elemento en función del tiempo y la energía absorbida en un intervalo de $30\,ms$, sabiendo que:

$$w = \int_0^{\tau} P\,dt \quad \text{y} \quad P = vi$$

donde

- w es la energía absorbida medida en Julios
- P es la potencia absorbida medida en vatios
- v es el voltaje medido en voltios
- i es la corriente medida en amperios

Solución:

Primero calculamos la potencia absorbida por el elemento,

$$P = vi = [28\sin(100\pi t)\,V][0,045A] = 1,26\sin(100\pi t)\,W$$

Ahora se calcula la energía absorbida por el elemento en un intervalo de $30\,ms$,

$$w = \int_0^{30\cdot 10^{-3}} 1,26\sin(100\pi t)\,dt$$

$$w = 1,26\int_0^{3\pi} \frac{1}{100\pi}\sin(u)\,du$$

$$w = \frac{1,26}{100\pi}(-\cos(u))\,|_0^{3\pi}$$

$$w = \frac{1,26}{100\pi}b(2)$$

$$w = 8,02\,mJ$$

13. Electrónica

Aplicación 1

El modelo de la cantidad de orden económico.

Una de las primeras aplicaciones de las matemáticas en la gestión de fábrica fue el trabajo de Ford W. Harris (1913) sobre establecer tamaños de lotes de fabricación. A pesar de que el documento original fue evidentemente incorrecto citado durante muchos años, el modelo EOQ (Economic Order Quantity) de Harris ha sido ampliamente estudiado y es un elemento básico de prácticamente todos los libros introductorios de producción y gestión de operaciones.

Motivación:

Considere la situación de MedEquip, un pequeño fabricante de monitores de quirófano y equipo diagnóstico, que produce una variedad de productos finales mediante el montaje de componentes electrónicos en bastidores metálicos estándar.

Los bastidores se compran en un local taller de metalurgia, que debe configurar su equipo (prensas, estaciones de mecanizado y estaciones de soldadura) cada vez que produce una .ejecución"de bastidores.

Por el tiempo perdido instalando el taller, el taller de metalurgia puede producir (y vender) los estantes de manera más económica si MedEquip los compra en cantidades superiores a uno. Sin embargo, MedEquip no quiere dar demasiado de su valioso efectivo en tiendas de estanterías, no quiere comprar demasiado, éste dilema es precisamente el estudiado por Harris en su artículo Çuántas partes hacer a la vez".

Lo puso de la siguiente manera: El interés sobre el capital vinculado a los salarios, materiales y gastos generales establece un límite máximo para la cantidad de piezas que se pueden fabricar de manera rentable a la vez. La experiencia le ha mostrado a un gerente una forma de determinar cómo economizar el tamaño de lotes. (Harris 1913)

El problema que Harris tenía en mente era el de una fábrica que producía varios productos, donde el cambio entre productos implica una configuración costosa.

Como ejemplo, describió una tienda de metalurgia que producía conectores de cobre. Cada vez que la tienda cambiaba de un tipo de conector a otro, las máquinas tenían que ser ajustadas, el trabajo administrativo se tenía que hacer, y el material podría desperdiciarse (por ejemplo, cobre usado como piezas de prueba en el proceso de ajuste).

Harris definió la suma de los costos de mano de obra y materiales para preparar el compre para producir un producto que sea el costo de instalación. (Observe que si los conectores hubieran sido comprados, en lugar de fabricados, entonces el problema seguiría siendo similar, pero la configuración del costo correspondería al costo de realizar un pedido de compra).

La compensación básica en la caja del conector de cobre de Harris es la misma que en el Ejemplo de MedEquip. Los lotes grandes reducen los costos de instalación al requerir cambios menos frecuentes. Pero los lotes pequeños reducen el inventario al sincronizar mejor la llegada de materiales que son utilizados. El modelo EOQ fue el enfoque sistemático de Harris para lograr un equilibrio entre estas dos preocupaciones.

A pesar de su afirmación en la cita anterior de que el EOQ se basa en la experiencia, Harris fue consistente con el énfasis de gestión científica en enfoques matemáticos a la gerencia de la fábrica.

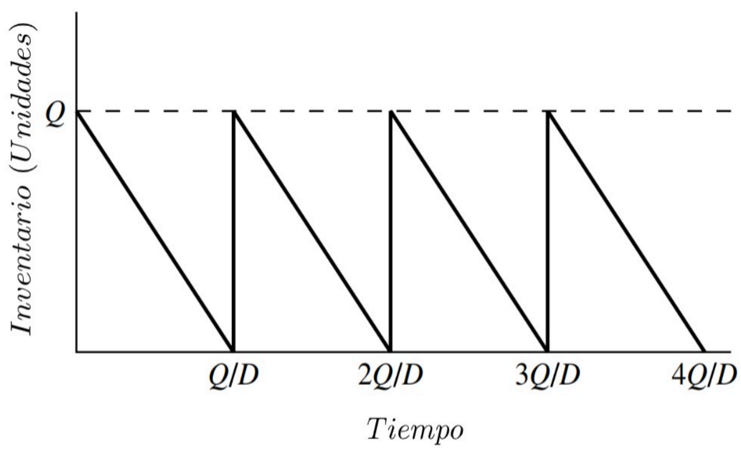


Figura 13.1: Inventario versus el tiempo en el modelo EOQ.

Para derivar una fórmula de tamaño de lote, hizo las siguientes suposiciones sobre el sistema de fabricación:

- **La producción es instantánea.** No hay restricción de capacidad, y todo el lote se produce simultáneamente.
- **La entrega es inmediata.** No hay demora entre la producción y la disponibilidad para satisfacer la demanda.
- **La demanda es determinista.** No hay incertidumbre sobre la cantidad o el tiempo de demanda.
- **La demanda es constante en el tiempo.** De hecho, se puede representar como una línea recta, por lo que si la demanda anual es de 365 unidades, esto se traduce en una demanda diaria de una unidad.
- **Una ejecución de producción incurre en un costo fijo de instalación.** Independientemente del tamaño del lote o el estado de la fábrica, el costo de instalación es el mismo.
- **Los productos pueden ser analizados individualmente.** O solo hay un único producto o no hay interacciones (por ejemplo, equipo compartido) entre productos.

Con estos supuestos, podemos usar la notación de Harris, con ligeras modificaciones para facilidad de presentación, para desarrollar el modelo EOQ para calcular el lote de producción óptimo tamaños. La notación que necesitaremos es la siguiente:

$D =$ tasa de demanda (en unidades por año)

$c =$ costo de producción unitario, sin contar la configuración o los costos de inventario (en dólares por unidad)

$A =$ costo fijo de instalación (pedido) para producir (comprar) mucho (en dólares)

$h =$ costo de mantenimiento (en dólares por unidad por año); si el costo de mantenimiento consiste enteramente de interés sobre el dinero inmovilizado en el inventario, luego $h = ic$, donde i es la tasa de interés anual

$Q =$ tamaño del lote (en unidades); esta es la variable de decisión

Para fines de modelado, Harris representó tanto el tiempo como el producto como continuos cantidades. Como asumió una demanda constante y determinista, haciendo pedidos de unidades Q cada vez que el inventario llega a cero resulta en un nivel de inventario promedio de $\frac{Q}{2}$ (ver Figura(13.1)). El costo de mantenimiento asociado con este inventario es por lo tanto $\frac{hQ}{2}$ por año. El costo de instalación es A por pedido o $\frac{AD}{Q}$ por año, ya que debemos realizar pedidos $\frac{D}{Q}$ por año para satisfacer la demanda. El costo de producción es c por unidad, o cD por año. Por lo tanto, el costo total (inventario, configuración y producción) por año, que denotamos con $Y(Q)$, puede ser expresado como

$$Y(Q) = \frac{hQ}{2} + \frac{AD}{Q} + cD \tag{13.1}$$

Ejemplo:

Para ilustrar la naturaleza de $Y(Q)$, volvamos al ejemplo de MedEquip. Supongamos que la demanda para bastidores metálicos es bastante estable y predecible a $D = 1000$ unidades por año. El costo por unidades de los bastidores es $c = \$250$, pero el taller de metalurgia también cobra un costo fijo de $A = \$500$ por pedido, para cubrir el costo de cerrar la tienda para configurar una ejecución de MedEquip. MedEquip estima su costo de oportunidad o tasa de obstáculo para el dinero en un 10 por ciento anual. También estima que el espacio requerido para almacenar un estante cuesta aproximadamente \$10 por año en costos anualizados. Por lo tanto, el costo de tenencia anual por rack es $h = (0,1)(250) + 10 = \$35$. Sustituyendo estos valores se obtienen los gráficos de la Figura (13.2).

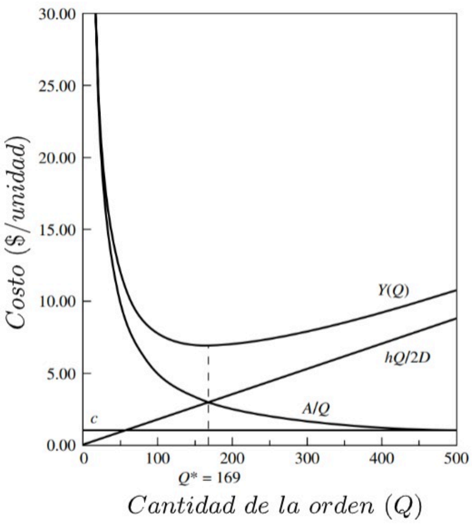


Figura 13.2: Costos en el modelo EOQ.

Soluión

Podemos hacer las siguientes observaciones sobre la función de costo $Y(Q)$ de la Figura

- El término de costo de mantenimiento $\frac{hQ}{D}$ aumenta linealmente en el tamaño de lote Q y eventualmente se convierte en el componente dominante del costo anual total para grandes Q.
- El término de costo de instalación $\frac{AD}{Q}$ disminuye rápidamente en Q, lo que indica que mientras aumentar el tamaño del lote inicialmente genera ahorros sustanciales en el costo de instalación, los retornos de lotes aumentados disminuyen rápidamente.
- El término de costo unitario cD no afecta el costo relativo para diferentes tamaños de lote, ya

que no incluye un término Q.

- El costo anual total $Y(Q)$ se minimiza en algún tamaño de lote Q. Curiosamente, esto resulta que el mínimo se produce precisamente en el valor de Q para el cual la explotación el costo y el costo de instalación están exactamente equilibrados (es decir, las curvas de costo $\frac{hQ}{D}$ y $\frac{AD}{Q}$ se cruzan).

Vamos a aplicar las derivadas para encontrar el tamaño de lote adecuado Q^* tal que el costo anual $Y(Q)$ es mínimo. En efecto, derivemos la Ecuación (13.1), e igualemos a cero para hallar los puntos críticos,

$$\frac{d}{dQ}Y(Q) = \frac{h}{2} - \frac{AD}{Q^2} = 0$$

$$\frac{h}{2} = \frac{AD}{Q^2}$$

$$Q = \pm\sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

dado que el tamaño del lote Q debe ser positivo, consideramos el valor positivo $Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$, derivemos dos veces la Ecuación (13.1) y verifiquemos que $Q^* > 0$ es un mínimo,

$$\frac{d^2}{dQ}Y(Q) = \frac{AD}{Q^3}$$

pero para $Q^* > 0$ se tiene que $\frac{d^2}{dQ}Y(Q) > 0$, lo que indica un mínimo en Q^*.

Esta fórmula de raíz cuadrada es la conocida cantidad de orden económica (EOQ), también referido como el tamaño del lote económico. Aplicando esta fórmula al ejemplo de la Figura ..., se tiene

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2(500)(1000)}{35}} \approx 169$$

La intuición detrás de este resultado es que el gran costo fijo (\$500) asociado con realizar un pedido lo hace atractivo para MedEquip cuando se ordenan bastidores en lotes bastante grandes (169).

Aplicación 2

Tiempo de respuesta para un sistema eléctrico de segundo orden

Considere el sistema eléctrico ilustrado en la Figura (13.3). El voltaje de entrada v_i, es aplicado a las terminales $a-b$. La salida del sistema es un voltaje v_0, medido a través de los terminales $c-d$.

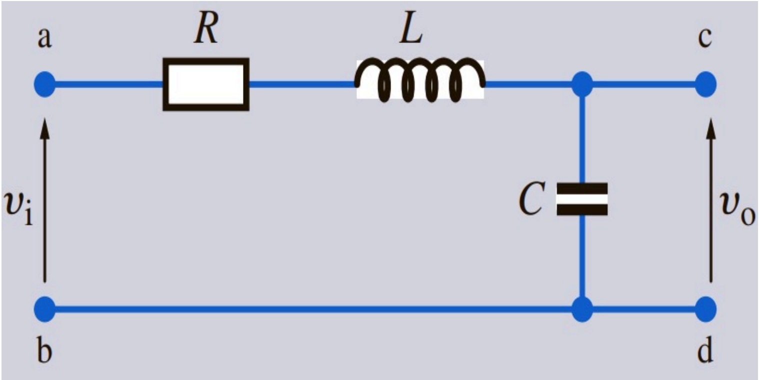


Figura 13.3: Un sistema eléctrico de segundo orden.

Cuando se aplica una entrada escalonada al sistema, la forma general de la respuesta depende de si una cantidad llamada relación de amortiguamiento ζ, es tal que $\zeta > 1$, $\zeta = 1$ o $\zeta < 1$. La cantidad ζ depende de los valores de L, C y R. Esto se ilustra en la siguiente figura.

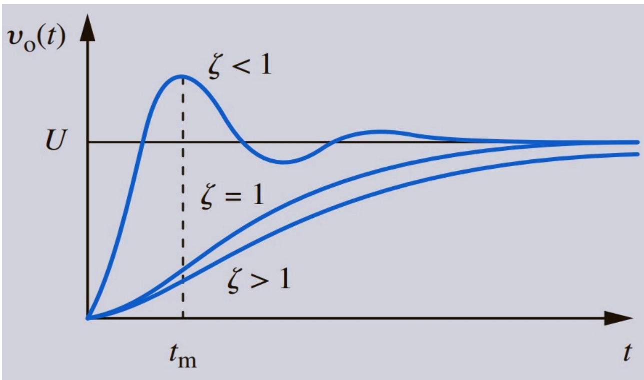


Figura 13.4: Respuesta a la entrada de paso de un sistema de segundo orden.

Si la relación de amortiguamiento $\zeta < 1$, entonces v_0 sobrepasa su valor final y se dice que el sistema está subamortiguado. Para este caso se puede demostrar que

$$v_0 = U - Ue^{-\alpha t}\left[\cos(\beta t) + \frac{\alpha \sin(\beta t)}{\beta}\right] \tag{13.2}$$

Para $t > 0$, donde U es la altura de entrada escalonada aplicada en $t = 0$, y

$$\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{R}{2L} \\ \omega_r &= \tfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ \beta &= \sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2} \end{aligned} \tag{13.3}$$

Los ingenieros a menudo están interesados en saber qué tan rápido responderá un sistema a una entrada particular. Para muchos sistemas, este es un criterio de diseño importante. Una forma de caracterizar la velocidad de respuesta del sistema es el tiempo que tarda la salida en alcanzar un cierto nivel en respuesta a un paso de entrada. Esto se conoce como el tiempo de subida y a menudo se define como el tiempo que tarda la producción en aumentar del 10 % al 90 % de su rendimiento final valor. Sin embargo, al observar la respuesta subamortiguada ilustrada en la Figura (...) está claro que el tiempo t_m, requerido para que la salida alcance su valor máximo también proporciona un indicador del tiempo de respuesta del sistema. Como la derivada de una función es cero en un punto máximo es posible calcular este tiempo.

Diferenciando la Ecuación (13.2) y usando la regla del producto,

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{v_0 = U - Ue^{-\alpha t}\left[\cos(\beta t) + \frac{\alpha \sin(\beta t)}{\beta}\right]\right\}$$

$$\frac{dv_0}{dt} = 0 - U\frac{d}{dt}\left[e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\right] - U\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{-\alpha t}\alpha \sin(\beta t)}{\beta}\right]$$

$$\frac{dv_0}{dt} = -U\left[-\alpha e^{-\alpha t}\cos(\beta t) - e^{-\alpha t}\beta \sin(\beta t)\right] - U\left[\frac{-\alpha e^{-\alpha t}\alpha \sin(\beta t)}{\beta} + \frac{e^{-\alpha t}\alpha\beta \cos(\beta t)}{\beta}\right]$$

$$\frac{dv_0}{dt} = -Ue^{-\alpha t}\left[-\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t) - \frac{\alpha^2\sin(\beta t)}{\beta} + \alpha\cos(\beta t)\right]$$

$$\frac{dv_0}{dt} = Ue^{-\alpha t}\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\sin(\beta t)$$

Para hallar sus puntos críticos se iguala a cero, donde se obtiene

$$Ue^{-\alpha t}\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\sin(\beta t) = 0 \Longleftrightarrow \sin(\beta t) = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{k\pi}{\beta}, \text{ para} k \in \mathbb{Z}^+$$

Ahora es sencillo calcular t_m, una vez que β ha sido calculado, usando las Ecuaciones (13.3) para valores particulares de R, L y C.

Vamos a demostrar que el punto de inflexión correspondiente a $k = 1$ es un máximo calculando la segunda derivada

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[Ue^{-\alpha t}\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\sin(\beta t)\right]$$

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} = U\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\frac{d}{dt}\left[e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\right]$$

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} = U\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left[-\alpha e^{-\alpha t}\sin(\beta t) + e^{-\alpha t}\beta\cos(\beta t)\right]$$

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} = Ue^{-\alpha t}\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left[-\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)\right]$$

donde reemplazando $t_m = \frac{\pi}{\beta}$ se tiene

$$\left.\frac{d^2v_0}{dt^2}\right|_{t=t_m} = Ue^{-\alpha\frac{\pi}{\beta}}\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left[-\alpha\sin\left(\beta\frac{\pi}{\beta}\right) + \beta\cos\left(\beta\frac{\pi}{\beta}\right)\right]$$

$$\left.\frac{d^2v_0}{dt^2}\right|_{t=t_m} = Ue^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left[-\alpha\cdot(0) + \beta(-1)\right]$$

$$\left.\frac{d^2v_0}{dt^2}\right|_{t=t_m} = -Ue^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(\beta^2 + \alpha^2\right)$$

$$\left.\frac{d^2v_0}{dt^2}\right|_{t=t_m} < 0$$

lo que indica que en t_m se tiene un máximo como queríamos mostrar.

Es posible verificar si un sistema está amortiguado o no utilizando las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{ll} \zeta = \frac{R}{R_C} & \text{radio de amortiguación} \\ R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} & \text{resistencia crítica} \end{array} \tag{13.4}$$

Veamos un caso específico con valores típicos $L = 40\,mH$, $C = 1\,\mu F$ y $R = 200\,\Omega$. Usando las Ecuaciones (13.4), encontramos

$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{4\cdot 10^{-2}}{1\cdot 10^{-6}}} = 400$$

$$\zeta = \frac{R}{R_C} = \frac{200}{400} = 0,5$$

por lo tanto el sistema está subamortiguado pues $\zeta < 1$. Además

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5000$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{200}{2\cdot 4\cdot 10^{-2}} = 2500$$

$$\beta = \sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2} = \sqrt{5000^2 - 2500^2} = 4330$$

finalmente,

$$t_m = \frac{\pi}{4330} = 7,26\cdot 10^{-4} = 726\,\mu s$$

Se concluye que el tiempo de respuesta es $726\,\mu s$.

Aplicación 3

Transferencia máxima de potencia

Considere el circuito de la Figura (13.5) en el que se conecta una fuente de voltaje no ideal a una resistencia de carga variable con resistencia R_L. La fuente de voltaje es V y es interna. La resistencia es R_S. Calcule el valor de R_L que resulta en la potencia máxima transferida desde la fuente de voltaje a la resistencia de carga. Esta es una pieza esencial de información para ingenieros involucrados en el diseño de sistemas de energía. A menudo una importante consideración del diseño principal es transferir la cantidad máxima desde la fuente de alimentación hasta el punto donde se consume el poder.

Solución:

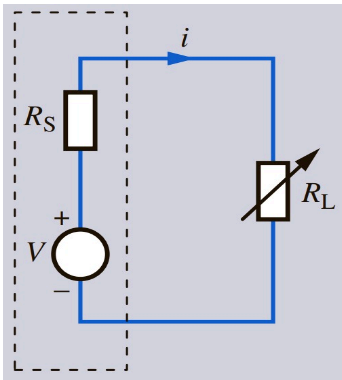


Figura 13.5: La transferencia de máxima potencia ocurre cuando $R_L = R_S$.

Sea i la corriente que fluye en el circuito, usando la ley de voltaje de Kirchhoff y la de Ohm se tiene

$$V = i\left(R_S + R_L\right)$$

Sea P la potencia desarrollada en la resistencia de carga. Entonces

$$P = i^2 R_L = \frac{V^2 R_L}{\left(R_S + R_L\right)^2}$$

claramente, P depende del valor de R_L. Diferenciando con respecto a R_L y usando la regla del cociente, obtenemos

$$\frac{dP}{dR_L} = V^2 \frac{1\left(R_S + R_L\right)^2 - R_L 2\left(R_S + R_L\right)}{\left(R_S + R_L\right)^4}$$

$$\frac{dP}{dR_L} = V^2 \frac{\left(R_S + R_L\right)\left(R_S + R_L - 2R_L\right)}{\left(R_S + R_L\right)^4}$$

$$\frac{dP}{dR_L} = V^2 \frac{R_S - R_L}{(R_S + R_L)^3}$$

para hallar sus puntos críticos se iguala a cero, donde se obtiene

$$V^2 \frac{R_S - R_L}{(R_S + R_L)^3} = 0 \Longleftrightarrow R_S = R_L$$

Entonces, un punto de inflexión ocurre cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia de la fuente. Nosotros necesitamos verificar si este es un punto de inflexión máximo, entonces

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = V^2 \frac{-1\,(R_S + R_L)^3 - (R_S - R_L)\,3\,(R_S + R_L)^2}{(R_S + R_L)^6}$$

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = V^2 \frac{-\,(R_S + R_L) - 3\,(R_S - R_L)}{(R_S + R_L)^4}$$

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = V^2 \frac{-4R_S + 2R_L}{(R_S + R_L)^4}$$

$$\frac{d^2P}{dR_L^2} = 2V^2 \frac{R_L - 2R_S}{(R_S + R_L)^4}$$

Donde cuando $R_L = R_S$, se obtiene

$$\left.\frac{d^2P}{dR_L^2}\right|_{R_L = R_S} = 2V^2 \frac{-3R_S}{(2R_S)^4} = -\frac{3V^2}{8R_S^3} < 0$$

por lo tanto, el punto de inflexión es máximo. Así, la transferencia de potencia máxima ocurre cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia de fuente.

Aplicación 4

Método de Newton-Raphson para encontrar raíces numéricas de funciones

Para resolver problemas de maximización y minimización, es necesario indicar los puntos críticos que posee una función $y = f(x)$, para esto la teoría nos indica que tenemos que igualar a cero la primera derivada de tal función es decir buscar los x tal que $y' = f'(x) = 0$, lo que nos lleva al problema más general de hallar las raíces de una función cualquiera, por ejemplo

$$g(x) = 3\sin(x) - x = 0 \tag{13.5}$$

En efecto, intentar hallar los valores exactos para los cuales es verdad la Ecuación (13.5) es un duelo de titanes, es por eso que para resolver este problema utilizaremos un método que nos permitirá hallar de manera aproximada (tanto como lo deseemos) la o las raíces que una función posea.

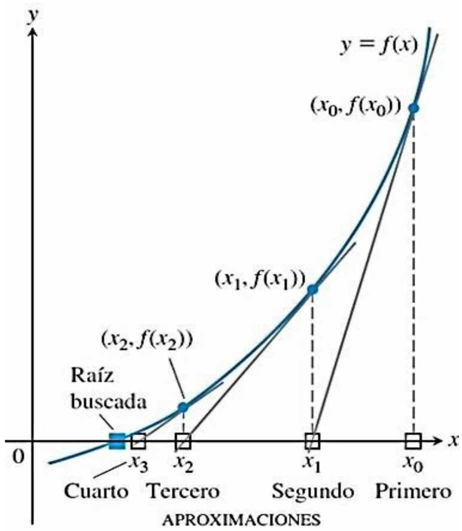


Figura 13.6: Aproximación a la raíz por medio del método de Newton Raphson.

Procedimiento

Sea $y = f(x)$ una función, hallemos una aproximación de la raíz buscada, se toma x_0 como un número que se acerque a nuestra raíz, la idea es que a partir de x_0, se encuentre el valor de x_1, y a partir de éste último se encuentre x_2 y así sucesivamente hasta encontrar $x_3, x_4, \ldots$ en función de sus anteriores valores, tales que como en la Figura (13.6) que se acercan cada vez más a la raíz buscada.

Así para poner a x_1 en función de x_0 utilicemos el hecho que la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ es el número $f'(x_0)$, es decir

$$m_0 = f'(x_0)$$

donde m_0 es la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ y que corta al eje X en el punto $(x_1, 0)$, por lo tanto utilizado la fórmula para hallar la pendiente de una recta utilizando dos puntos se tiene

$$f'(x_0) = m_0 = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Longrightarrow x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

es decir,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Es así que para encontrar x_2 en función de x_1 se tiene como en la Figura (13.6) que tenemos que repetir el procedimiento nada más, obteniendo

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Donde x_2 estará mas próximo a la raíz buscada que x_1. Así se define el procedimiento recursivo con la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

para $n \in \mathbb{Z}^+$, donde $f'(x_n) \neq 0$

Ejemplo:

Resolvamos el problema de la Ecuación (13.5), $g(x) = 3\sin(x) - x = 0$.

Tomemos $x_0 = 2,5$ (cercano es lo más conveniente), entonces es indispensable primeramente hallar

$$g'(x) = 3\cos(x) - 1$$

Consideremos que queremos resolver el problema con dos decimales exactos, para eso mostremos el cálculo de las dos primeras iteraciones. La primera iteración se calcula utilizando el valor inicial escogido

$$x_1 = 2,5 - \frac{g(2,5)}{g'(2,5)} = 2,5 - \frac{3\sin(2,5) - 2,5}{3\cos(2,5) - 1} \approx 2,293$$

$$x_2 = 2,293 - \frac{g(2,293)}{g'(2,293)} = 2,293 - \frac{3\sin(2,293) - 2,293}{3\cos(2,293) - 1} \approx 2,209$$

Y así se obtiene $x_3 \approx 2,176$, $x_4 \approx 2,164$, $x_5 \approx 2,159$, lo cual se acerca cada vez más a su valor exacto $x^* = 2,1564818\ldots$, sin embargo, obsérvese que para resolver el problema de encontrar la solución a dicha ecuación con la precisión de dos decimales se resuelve ya en la iteración 5.

Aplicación 5

Diodo en serie - circuito de resistencia

Considere el circuito de la Figura (13.7), un diodo está en serie con una resistencia R. El voltaje a través del diodo se denota por V y la corriente a través del diodo se denota por I. La relación $I - V$ para el diodo no es lineal y se da por

$$I = I_S\left(e^{40V} - 1\right)$$

donde I_S es la corriente de saturación inversa del diodo. Dado que el voltaje de suministro V_S, es

$2V$, I_S es $10^{-14}A$ y R es $22k\Omega$, calcule los valores de estado estacionario de I y V.

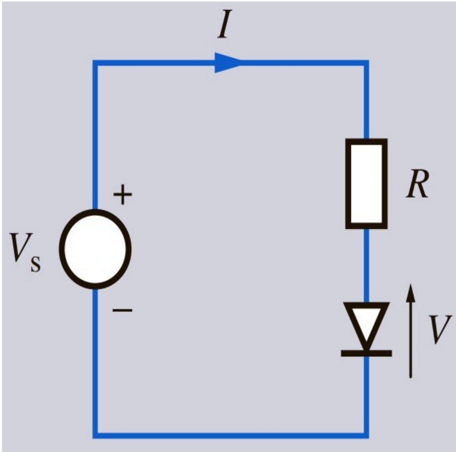


Figura 13.7: Diodo en serie – circuito de resistencia.

Solución:

Hay varias formas de resolver este problema. Existe una dificultad porque la relación del diodo I-V es no lineal. Una posibilidad es dibujar una línea de carga para la resistencia superpuesto a la característica del diodo I-V, como se muestra en la Figura (13.8). La línea de carga es una ecuación para la característica de resistencia escrita en términos del voltaje a través del diodo V, y la corriente a través del diodo I. Está dada por

$$V_S - V = IR \Longrightarrow I - \frac{1}{R}V + \frac{V_S}{R}$$

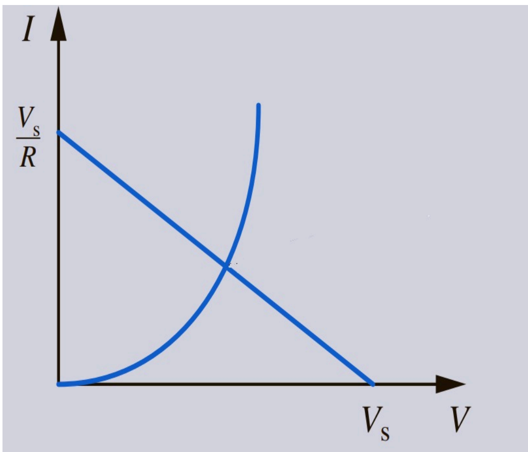


Figura 13.8: Línea de carga de resistencia superpuesta a la característica del diodo.

Esta es una línea recta con pendiente $-\frac{1}{R}$ y ordenada $\frac{V_S}{R}$. Cuando $V = 0$, se tiene $I = \frac{V_S}{R}$. Esto corresponde a toda la tensión de alimentación que cae a través de la resistencia.

Cuando $V = V_S$, se tiene que $I = 0$. Esto corresponde a la caída de toda la tensión de alimentación a través del diodo. Por lo tanto, estos dos límites corresponden a los puntos dentro de los cuales el circuito debe funcionar. La solución al circuito se puede obtener determinando la intersección de la característica del diodo y la línea de carga. Esto es posible porque tanto la característica de resistencia como la característica de diodo están formuladas en términos de V e I, por lo que cualquier solución debe tener los mismos valores de I y V para ambos componentes.

Si se usa un gráfico preciso, es posible obtener una solución razonablemente buena. Un enfoque alternativo es utilizar la técnica de Newton-Raphson. Combinando las dos ecuaciones componentes da

$$-V + V_S = RI_S\left(e^{40V} - 1\right)$$

de donde tenemos un problema de búsqueda de raíz de la siguiente manera

$$f(V) = RI_S\left(e^{40V} - 1\right) + V - V_S = 0$$

Entonces para los valores $V_S = 2$, $I_S = 10^{-14}$ y $R = 2,2 \cdot 10^4$ se tiene en particular

$$f(V) = \left(2,2 \cdot 10^4\right)\left(10^{-14}\right)\left(e^{40V} - 1\right) + V - 2 = 2,2 \cdot 10^{-10}\left(e^{40V} - 1\right) + V - 2 = 0$$

Para aplicar Newton-Raphson se necesita

$$f'(V) = 2,2 \cdot 10^{-10}(40)e^{40V} + 1 = 8,8 \cdot 10^{-9}e^{40V} + 1$$

Entonces tomando el valor inicial $V_0 = 0,6$ se tiene

$$V_1 = 0,6 - \frac{f(0,6)}{f'(0,6)}$$

$$V_1 = 0,6 - \frac{2,2 \cdot 10^{-10}\left(e^{40(0,6)} - 1\right) + (0,6) - 2}{8,8 \cdot 10^{-9}e^{40(0,6)} + 1} \approx 0,581$$

y así sucesivamente se obtiene: $V_2 \approx 0,569$, $V_3 \approx 0,565$, que ya se aproxima al valor real $V^* = 0,564964577\ldots$.

Es útil verificar la solución calculando independientemente la corriente a través del diodo usando las dos diferentes expresiones. Entonces,

$$I = 10^{-14}\left(e^{40(0,565)} - 1\right) = 6,53 \cdot 10^{-5} A$$

$$I = -\frac{0,565}{2,2 \cdot 10^4} + \frac{2}{2,2 \cdot 10^4} = 6,53 \cdot 10^{-5} A$$

y por lo tanto la solución es correcta.

Aplicación 6

Dado el circuito de la figura de carga $R - L$ en el cual circula una corriente

$$i(t) = \frac{V}{R}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

Determinar la fórmula de la carga que circula por los conductores en función del tiempo $Q(t)$.

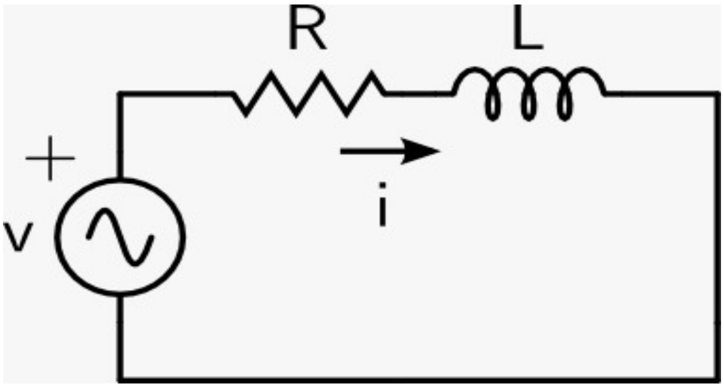


Figura 13.9: Circuito $R - L$.

Solución:

Se integra $i(t)$

$$Q(t) = \int \frac{V}{R}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] dt$$

$$Q(t) = \frac{V}{R}\left[\int 1\, dt - \int e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt\right]$$

$$Q(t) = \frac{V}{R}\left[t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + C\right]$$

por lo tanto,

$$Q(t) = \frac{V}{R}t + \frac{\tau V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + C$$

Aplicación 7

Considerando una carga resistiva de corriente alterna (C.A) y dada la corriente instantánea y el voltaje instantáneo. Calcular la potencia promedio o activa correspondiente.

Datos:

$$I = I_{max} \cdot \cos(\omega t)$$

$$V = V_{max} \cdot \cos(\omega t)$$

Solución:

Dado que la potencia se define como $P = V \cdot I$ entonces

$$P = V_{max} \cdot I_{max} \cdot \cos^2(\omega t)$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T P \cdot d\omega t$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_{max} \cdot I_{max} \cdot \cos^2(\omega t)\, d\omega t$$

$$P = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t)\, d\omega t$$

dado que se conoce que $\cos^2(\omega t) = \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}$, entonces

$$P = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\right] d\omega t$$

$$P = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\omega t + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\omega t)}{2}\, d\omega t\right]$$

$$P = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\,\omega t|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\sin(2\omega t)|_0^{2\pi}\right]$$

$$P = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2\pi}\left[\frac{1}{2}(2\pi - 0) + \frac{1}{4}[\sin(4\pi) - \sin(0)]\right]$$

$$P = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2}$$

por lo tanto,

$$P = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = VRMS \cdot IRMS\ [W]$$

Aplicación 8

Un motor DC de excitación independiente es alimentado mediante un rectificador monofásico totalmente controlado a través de una fuente de voltaje

$$v(\omega t) = V_{max} \cdot \sin(\omega t), \text{donde} V_{max} = \sqrt{2} \cdot V_s$$

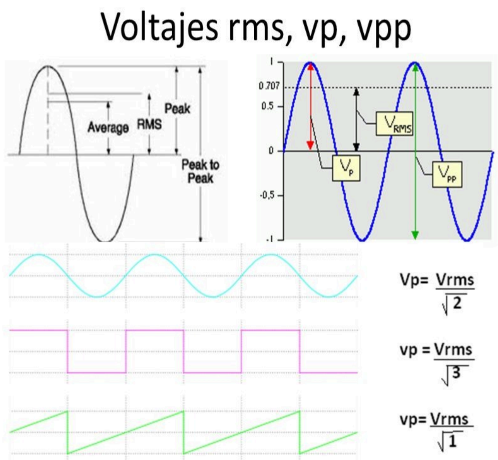


Figura 13.10: Voltajes *rms*, *vp* y *vpp*.

Calcule el valor promedio del voltaje de armadura V_a utilizando integrales definidas a partir de la forma de onda dada. Considere la siguiente fórmula:

$$V_a = \frac{1}{2\pi} \int_a^b v(\omega t) \cdot dwt$$

Solución:

Considerando el problema desde un momento determinada α hasta $\pi + \alpha$ y el circuito se tiene

$$V_a = \frac{2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2} V_s \sin(\omega t) \, dwt$$

$$V_a = \frac{\sqrt{2} V_s}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sin(\omega t) \, dwt$$

$$V_a = \frac{\sqrt{2} V_s}{\pi} [-\cos(\omega t)] \,|_{\alpha}^{\pi+\alpha}$$

$$V_a = \frac{\sqrt{2} V_s}{\pi} [-\cos(\pi + \alpha) + \cos(\alpha)]$$

por el teorema de adición del coseno se tiene

$$\cos(\pi+\alpha) = \cos(\pi)\cos(\alpha) - \sin(\pi)\sin(\alpha) = -\cos(\alpha)$$

entonces

$$V_a = \frac{\sqrt{2}V_s}{\pi}\left[\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\right]$$

por lo tanto

$$V_a = \frac{2\sqrt{2}V_s}{\pi}\cos(\alpha)\,[V]$$

Bibliografía

[1] Apostol T. (1960). *Análisis Matemático*. Editorial Reverté.

[2] Apostol T. (1985). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Editorial Reverté.

[3] Axler S. (1997). *Linear Algebra Done Right*. Editorial Springer.

[4] Banach S. (1967). *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial UTEHA.

[5] Courant R. (1993). *Introducción al cálculo y análisis matemático. Vol. 1*. Editorial Limusa.

[6] Dankó P., Popov A. y Kozhévnikova T. (1990). *Matemáticas superiores en ejercicios y problemas, Vol.1*. Editorial MIR.

[7] Espinoza E.(2002). *Análisis Matemático para estudiantes de ciencias e ingeniería. Vol. 1 y 2*. Lima-Perú.

[8] Fulks W. (1991). *Cálculo avanzado*. Editorial Limusa.

[9] Granville W., P. Smith and Longley W. (1941). *Elements of the differential and integral calculus*. Editorial Ginn and company.

[10] Kudriávtsev V. y Demidóvich B. (1989). *Breve curso de matemáticas superiores*. Editorial MIR.

[11] Lara J. y Arroba J. (2011). *Análisis Matemático*. Centro de Matemática-Universidad Central del Ecuador.

[12] Lara J. y Benalcázar H. (2008). *Fundamentos de Análisis Matemático*. Centro de Matemática-Universidad Central del Ecuador.

[13] Lima E. (2015). *Curso de Análise, Vol. 1*. Brasil-IMPA.

[14] Merino P. (1942). *Curso de cálculo integral*. Editorial Cultural S.A.

[15] Pastor R., Calleja P. y Trejo C. (1968). *Análisis Matemático*. Editorial Kapelusz.

[16] Piskunov N. (1970). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Montaner y Simon, S.A.

[17] Pita C.(2010). *Cálculo de una Variable*. Editorial Pearson Educación.

[18] Potapov M., Alexandrov V. y Pasichenko P. (1986). *Álgebra y análisis de funciones elementales*. Editorial MIR.

[19] Sáenz R. y Lara J. (2010). *Matemáticas Básicas*. Centro de Matemática-Universidad Central del Ecuador.

[20] Spivak M.(2005). *Calculus*. Editorial Reverté.

[21] Ya. S. Bugrov y Nikolski S.M. (1984). *Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral*. Editorial MIR.

ISBN: 978-9942-33-844-0

compÁs

Grupo de capacitación e investigación pedagógica

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com