MATEMÁTICA BÁSICA
ÁREA DE TECNOLOGÍAS

ISU CENTRAL TÉCNICO

MATEMÁTICA BÁSICA ÁREA DE TECNOLOGÍAS

MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro
Ing. Kevin Astudillo

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica del mismo.

© Publicaciones Editorial Grupo Compás
Guayaquil - Ecuador
compasacademico@icloud.com
https://repositorio.grupocompas.com

Diseño de la portada es de: Ariadna Tirado Pereira

Cumbal, H., Castro, J., Astudillo, K. (2024) MATEMÁTICA BÁSICA ÁREA DE TECNOLOGÍAS. Editorial Grupo Compás

© MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro
Ing. Kevin Astudillo

Diseño Gráfico y Diagramación:
Ing. Miguel Murillo
Ing. Edgar Guamán
Sr. Jonathan Cevallos
Diseño de Portada y Banners:
Ing. Juan Carlos Fuertes

ISBN: 978-9942-33-845-7

Revisores:
Dr. Romel Pineda, Ph.D.
Universidad Central del Ecuador
MSc. Mónica Mantilla Hidalgo
Escuela Politécnica Nacional
Mgs. Katalina Sarmiento
Instituto Superior Universitario Central Técnico

DEDICATORIA

Dedicado a nuestras familias, que han sido
el pilar fundamental en nuestra formación.

Docentes del Área

AGRADECIMIENTO

Hacemos presente nuestro agradecimiento
a los compañeros del Área de Ciencias Exactas
y a todos quienes colaboraron en la finalización
de esta obra, así como a las autoridades del ISUCT
por hacernos partícipes de este proyecto.

ISU CENTRAL TÉCNICO

CONTENIDO

III ÁLGEBRA DE FUNCIONES

ISU CENTRAL TÉCNICO

INTRODUCCIÓN

Al preparar la presente edición del libro de Matemática Básica, hemos querido mantener un estilo propio a fin de conservar las fortalezas de las matemáticas. Nuestra meta ha sido, por lo tanto, identificar las mejores características de la presente obra y, al mismo tiempo, atender cuidadosamente las sugerencias de nuestros revisores. Con estos altos estándares de aplicación, hemos construido los ejercicios y aclarado algunos temas de difícil comprensión, *"hemos intentado escribir el libro con tanta claridad y precisión como nos ha sido posible"*. Además, hemos restablecido los contenidos para que sean más lógicos y congruentes con los programas de estudio de mayor difusión. Al revisar esta labor en retrospectiva, nos percatamos de que los muchos conocimientos adquiridos nos han ayudado a crear el texto de Matemática, útil y atractivo para la siguiente generación de estudiantes y docentes del ISUCT.

El presente texto no sólo presenta a los estudiantes los fundamentos y aplicaciones de la matemática, sino que plantea también una manera de pensar totalmente lógica y abstracta. A partir de los ejercicios, los ejemplos y el desarrollo de los conceptos que revela la teoría en un lenguaje legible, este libro se centra en el pensamiento y la comunicación de ideas matemáticas. La matemática tiene gran relación con muchos de los paradigmas claves y, establece los fundamentos reales para la reflexión precisa y lógica entorno de temas físicos y matemáticos. Nuestro propósito se centra en ayudar a los estudiantes y docentes del ISUCT a alcanzar la madurez matemática necesaria para dominar y aplicar sus conocimientos de manera íntegra. El razonamiento que se deriva de la comprensión de lo analizado en las páginas de esta obra hace que el esfuerzo que ha implicado su creación valga la pena.

AUTORES

ÁLGEBRA EN LÓGICA Y CONJUNTOS

1. Lógica Matemática

Autores:
Lcdo. Byron Méndez, MSc.
MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro
Ing. Kevin Astudillo

La Matemática es el lenguaje de toda ciencia y la Lógica es el fundamento de toda la Matemática. Es así, que en el presente libro, el estudiante se introducirá al lenguaje que tienen las Matemáticas para juntar los cuatro pilares de esta ciencia, que son: la Lógica, la Teoría de Conjuntos, las Funciones y la Geometría, mediante el Álgebra, desde un punto de vista riguroso, pero a la vez que enseña diversas aplicaciones del álgebra que se definen en diferentes campos matemáticos de una manera Técnica-Tecnológica.

El capítulo tiene la finalidad principal de dar la parte teórica necesaria para que el estudiante pueda aplicar el álgebra proposicional en circuitos lógicos.

1.1 Elementos fundamentales de la lógica matemática

Definición 1.1 — Proposición. Es una oración que solo puede considerarse verdadera o falsa y no ambas, ni tampoco ninguna de ellas.

■ **Ejemplo 1.1**

El martes es el siguiente día del lunes.

Es una oración, la cual se puede afirmar que solo es verdadera, por lo tanto es una proposición.

■ **Ejemplo 1.2**

El sol es un planeta.

Es una oración, la cual se puede afirmar que solo es falsa, por lo tanto es una proposición.

■ **Ejemplo 1.3**

$$x+3>5.$$

Es una oración que depende del valor que tome x para considerarla verdadera o falsa, es decir, si $x=4$, entonces la oración es verdadera pues $4+3=7>5$, pero si $x=1$, entonces la oración es falsa pues $1+3=4\not>5$. En conclusión, esta oración no es una proposición.

■ **Ejemplo 1.4**

Hola, ¿cómo estás?

Este es un ejemplo de una oración que no se puede considerar ni verdadera, ni falsa, y por lo tanto no es una proposición.

Es así, que las unidades fundamentales de la lógica serán las proposiciones pues ellas carecen de ambigüedad, estando bien definidas.

Cada proposición va a ser representada por letras minúsculas p, q, r, etc.

■ **Ejemplo 1.5** $p: 3-1=2$.

■ **Ejemplo 1.6** q : El mes de enero tiene treinta y dos días.

■ **Ejemplo 1.7** r : El ser humano puede sobrevivir 40 años sin agua.

Definición 1.2 — Valor de verdad. El valor de verdad es el atributo de veracidad o falsedad que tiene una proposición. Para cada proposición p se denota su veracidad como

$$v(p)=V,$$

y su falsedad como

$$v(p)=F.$$

■ **Ejemplo 1.8 — Valor de verdad de algunas proposiciones.** Con base en los ejemplos (1.5), (1.6) y (1.7) se tiene que:

$$v(p)=V,$$

$$v(q)=F,$$

$$v(r)=F.$$

En la literatura, también se utilizan el número 1 para indicar la veracidad de una proposición y el número 0 para indicar la falsedad de una proposición.

■ **Ejemplo 1.9 — Valores de verdad tomando el 1 para la veracidad y 0 para la falsedad.** Con base en los ejemplos (1.5), (1.6) y (1.7) también se puede denotar:

$$v(p) = 1,$$

$$v(q) = 0,$$

$$v(r) = 0.$$

Definición 1.3 — Tabla de verdad. Es una tabla que agrupa todos los posibles valores de verdad de una o varias proposiciones.

Observación 1.1 La construcción de esta tabla depende del número de proposiciones que se componga una situación. Para n proposiciones que componen una situación, se tiene que su respectiva tabla deberá ser formada por 2^n filas extras y n columnas donde irán los posibles valores de verdad.

■ **Ejemplo 1.10 — Tabla de verdad para una proposición.** Para $n = 1$ se tienen $2^n = 2^1 = 2$ filas donde irán los posibles valores de verdad.

p
V
F

Tabla 1.1: Tabla de verdad para una proposición p.

■ **Ejemplo 1.11 — Tabla de verdad para dos proposiciones.** Para $n = 2$ se tienen $2^n = 2^2 = 4$ filas donde irán los posibles valores de verdad.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tabla 1.2: Tabla de verdad para dos proposiciones p y q.

■ **Ejemplo 1.12 — Tabla de verdad para tres proposiciones.** Para $n = 3$ se tienen $2^n = 2^3 = 8$ filas donde irán los posibles valores de verdad.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Tabla 1.3: Tabla de verdad para tres proposiciones p, q y r.

1.1.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.1 De los siguientes enunciados determine cuáles son proposiciones e indique si son verdaderos o falsos.

1. El mundial de 1986 se celebró en México.
2. $4^2 - 5 + 3 \times 2 = 18$.
3. Cuando el río suena.
4. $4 \in \mathbb{Z}$.
5. $\sqrt{4+9} + 3$.
6. Los números reales son subconjuntos de los números irracionales.
7. Los documentos encontrados en el celular.
8. Pitágoras fue un filósofo y matemático griego.
9. Newton falleció en 1643.
10. Al que madruga Dios le ayuda.

1.2 Operadores lógicos

En el lenguaje corriente se utilizan expresiones especiales que pueden conectar varias proposiciones.

■ **Ejemplo 1.13** Blanco y negro son colores.

■ **Ejemplo 1.14** Leche o café son bebidas que prefieren los ecuatorianos en el desayuno.

■ **Ejemplo 1.15** No se puede mirar al sol directamente.

Es así que resulta útil definir distintos conectores u operadores lógicos que son útiles para enlazar distintas frases más complejas.

1.2.1 Negación

Definición 1.4 — Negación. Sea p una proposición, se define una nueva proposición $\sim p$ denominada la negación de p tal que se lee: "no p". Además, está determinada por la siguiente tabla de verdad:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabla 1.4: Tabla de verdad para la negación $\sim p$.

■ **Ejemplo 1.16 — Negación de una proposición falsa.** Si

$$p : \text{Azul es un día de la semana}$$

entonces,

$$\sim p : \text{Azul no es un día de la semana.}$$

Note que:

$$v(p) = F, \quad v(\sim p) = V.$$

■ **Ejemplo 1.17 — Negación de una proposición verdadera.** Si

$$q : \text{Jorge es un nombre masculino}$$

entonces

$$\sim q : \text{Jorge no es un nombre masculino.}$$

Note que:

$$v(q) = V, \quad v(\sim q) = F.$$

1.2.2 Conjunción

Definición 1.5 — Conjunción. Sean p y q dos proporciones, se define una nueva proporción $p \wedge q$ denominada la conjunción entre p y q tal que se lee: "p y q". Además, está determinada por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 1.5: Tabla de verdad para la conjunción $p \wedge q$.

Observación 1.2 La manera de como actúa la conjunción se establece mediante la siguiente regla: Si p es verdadera y q es verdadera al mismo tiempo, entonces $p \wedge q$ es verdadera, caso contrario $p \wedge q$ es falsa.

■ **Ejemplo 1.18 — Conjunción de dos proposiciones verdaderas.** Si

$$p : \text{La pera es una fruta}$$

$$q : \text{La manzana es una fruta}$$

entonces,

$$p \wedge q : \text{La pera es una fruta y la manzana es una fruta,}$$

en términos más sencillos, se puede decir

$$p \wedge q : \text{La pera y la manzana son frutas.}$$

Note que $v(p) = V$ y $v(q) = V$ implica que $v(p \wedge q) = V$.

■ **Ejemplo 1.19 — Conjunción de una proposición falsa y una verdadera.** Si

$$r : \text{El perro es herbívoro}$$

$$s : \text{El gato es carnívoro}$$

entonces,

$$r \wedge s : \text{El perro es herbívoro y el gato es carnívoro.}$$

Note que $v(r \wedge s) = F$, pues aunque $v(s) = V$ se tiene que $v(r) = F$.

■ **Ejemplo 1.20 — Conjunción de n proposiciones verdaderas y una falsa.** Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son proposiciones verdaderas y q es una proposición falsa, entonces

$$v(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q) = F$$

mientras que

$$v(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) = V.$$

1.2.3 Disyunción

Definición 1.6 — Disyunción. Sean p y q dos proposiciones, se define una nueva proposición $p \vee q$ denominada la disyunción entre p y q tal que se lee: "p o q". Además, está determinada por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 1.6: Tabla de verdad para la disyunción $p \vee q$.

Observación 1.3 La manera como actúa la disyunción se establece mediante la siguiente regla: Si p es falsa y q es falsa al mismo tiempo, entonces $p \vee q$ es falsa, caso contrario $p \vee q$ es verdadera.

■ **Ejemplo 1.21 — Disyunción de una proposición verdadera y una falsa.** Si

$$p : \text{el amarillo es un color}$$

$$q : \text{el arroz es un color}$$

entonces,

$$p \vee q : \text{el amarillo o el arroz es un color.}$$

Note que $v(p \vee q) = V$, pues aunque $v(q) = F$ se tiene que $v(p) = V$.

■ **Ejemplo 1.22 — Disyunción de dos proposiciones falsas.** Si

$$r : \text{Titán es un planeta}$$

$$s : \text{Ganymides es un planeta}$$

entonces,

$$r \vee s : \text{Titán o Ganymides es un planeta.}$$

Note que $v(r) = F$ y $v(s) = F$ implica que $v(r \vee s) = F$.

■ **Ejemplo 1.23 — Disyunción de n proposiciones verdaderas y una falsa.** Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son proposiciones falsas y q es una proposición verdadera, entonces

$$v(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \vee q) = V$$

mientras que

$$v(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = F.$$

1.2.4 Disyunción exclusiva

Definición 1.7 — Disyunción Exclusiva. Sean p y q dos proposiciones, se define una nueva proposición $p \veebar q$ denominada la disyunción exclusiva entre p y q, tal que se lee: "o solo p o solo q". Además se determina mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 1.7: Tabla de verdad para la disyunción exclusiva $p \veebar q$.

Observación 1.4 La manera como actúa la disyunción exclusiva es que es verdadera solamente cuando una de las proposiciones es verdadera y la otra falsa.

■ **Ejemplo 1.24 — Disyunción exclusiva de una proposición verdadera y otra falsa.** Si

$$p: \text{el verde es un color del arcoíris}$$

$$q: \text{el negro es un color del arcoíris}$$

entonces,

$$p \veebar q: \text{o solo el verde o solo el negro es un color del arcoíris.}$$

Note que, $v(p) = V$ y $v(q) = F$, por lo tanto, $v(p \veebar q) = V$.

■ **Ejemplo 1.25 — Disyunción exclusiva de dos proposiciones verdaderas.** Si

$$r: \text{la letra b es una consonante}$$

$$s: \text{la letra c es una consonante}$$

entonces,

$$r \veebar s: \text{ o solo la letra b o solo la letra c es una consonante.}$$

Note que, $v(r) = V$ y $v(s) = V$, por lo tanto, $v(r \veebar s) = F$.

■ **Ejemplo 1.26 — Valor de verdad de la disyunción exclusiva de una yuxtaposición de proposiciones.** Sean p, q y r proposiciones tales que $v(p) = V$, $v(q) = F$ y $v(r) = F$ entonces,

$$v(p \veebar q) = V \veebar F = V$$

y por lo tanto,

$$v((p \veebar q) \veebar r) = (V \veebar F) \veebar F = V \veebar F = V.$$

1.2.5 Condicional

Definición 1.8 — Condicional. Sean p y q dos proposiciones, se define una nueva proposición $p \to q$ denominada el condicional de p en q, tal que se lee: "p implica q". Además, está determinada mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	V

Tabla 1.8: Tabla de verdad para el condicional $p \to q$.

Observación 1.5 La manera como actúa el condicional es pensar que si p es verdadero y q es falso entonces el condicional es falso. En escencia, algo verdadero jamás puede implicar algo falso.

■ **Ejemplo 1.27 — Condicional falso.** Si

$$p : \text{Marco es un hombre}$$

$$q : \text{Marco es inmortal}$$

entonces,

$$p \to q : \text{Si Marco es hombre entonces es inmortal.}$$

Note que si $v(p) = V$ y $v(q) = F$ se tiene $v(p \to q) = F$, pues por la observación (1.5) se tiene que algo verdadero jamás puede implicar algo falso.

■ **Ejemplo 1.28 — Una proposición falsa puede implicar una proposición verdadera o falsa.** Si

$$r : \frac{1}{0} \text{ es un número real}$$

$$s : 1 = 0$$

entonces,

$$r \to s : \text{ Si } \frac{1}{0} \text{ es un número real, entonces } 1 = 0.$$

Observe que $v(r \to s) = V$, pues aunque $v(s) = F$, se tiene que el valor de verdad del antecedente es falso, es decir, $v(r) = F$.

Esto también se puede justificar mediante el siguiente razonamiento. En efecto, suponga que $1/0$ es un número real a, entonces

$$\frac{1}{0} = a$$

$$1 = a \cdot 0$$

$$1 = 0.$$

Esto se interpreta de la siguiente manera, cuando se parte de algo falso se puede llegar a cosas absurdas sin que el proceso para llegar a ese resultado sea erróneo.

Note ahora, que también de algo falso se puede llegar a cosas verdaderas por ejemplo si suponemos que $\frac{0}{0}$ es un número real a, entonces

$$\frac{0}{0} = a$$

$$0 = a \cdot 0$$

$$0 = 0,$$

es decir, se ha partido de algo falso y se ha llegado a algo verdadero, sin que el proceso para llegar a ese resultado sea erróneo.

En conclusión, de algo falso se puede llegar a cualquier cosa, por ende, no se puede ni se debe fiar de las cosas falsas, lo cual es evidente que surjan inconsistencias.

Vale la pena recalcar entonces, que algo verdadero que implique algo verdadero, siempre será verdadero y nunca algo falso y es precisamente esto, la clave de la yuxtaposición de razonamientos verdaderos.

■ **Ejemplo 1.29 — Yuxtaposición de la condicional de proposiciones verdaderas.** Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 proposiciones tales que

$$v(p_1 \to p_2) = V, \quad ,v((p_1 \to p_2) \to p_3) = V, \quad v(((p_1 \to p_2) \to p_3) \to p_4) = V$$

entonces,

$$v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = v(p_4) = V.$$

1.2.6 Bicondicional

Definición 1.9 — Bicondicional. Sean p y q dos proposiciones, se define una nueva proposición $p \leftrightarrow q$ denominada el bicondicional entre p y q, tal que se lee: "p si y solo si q". Además, está determinada mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 1.9: Tabla de verdad para el bicondicional $p \leftrightarrow q$.

Observación 1.6 La manera como actúa el bicondicional es pensar que si p y q son verdaderas al mismo tiempo o falsas al mismo tiempo entonces el bicondicional es verdadero.

■ **Ejemplo 1.30 — Bicondicional de proposiciones verdaderas.** Si

$$p : 3+2=5$$

$$q : 3=5-2$$

entonces,

$$p \leftrightarrow q : \; 3+2=5 \text{ si y solo si } 3=5-2.$$

Note que $v(p)=V$ y $v(q)=V$, por lo tanto, $v(p \leftrightarrow q)=V$.

■ **Ejemplo 1.31 — Bicondicional de una proposición verdadera y una falsa.** Si

r : El fuego es caliente

s : El calor es fuego

entonces,

$r \leftrightarrow s$: El fuego es caliente si y solo si el calor es fuego.

Observe que $v(r)=V$ y $v(s)=F$, por lo tanto, $v(r \leftrightarrow s)=F$.

■ **Ejemplo 1.32 — Deducción de valores de verdad de proposiciones que componen una bicondicional.** Sean p,q y r proposiciones tal que $v(p)=F$ y $v(p \leftrightarrow (q \vee r))=V$, entonces se puede escribir

$$F \leftrightarrow v(q \vee r)=V,$$

de donde se concluye que

$$v(q \vee r)=F$$

y por lo tanto, la única alternativa es que

$$v(q)=v(r)=F.$$

1.2.7 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.2 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones y el valor de verdad de las operaciones establecidas en cada literal.

1. p : Newton fue matemático, q : Newton fue científico.
   i) $p \vee q$
   ii) $p \rightarrow q$
   iii) $p \wedge q$
2. $p : 4 \in \mathbb{Z}$, $q : 4 \in \mathbb{R}$.
   i) $q \vee p$
   ii) $\sim (p \rightarrow q)$
   iii) $\sim p \vee (\sim q)$
3. p : Los gatos son mamíferos, q : Los gatos son invertebrados.
   i) $\sim (p \rightarrow q)$
   ii) $p \vee q$
   iii) $\sim (p \wedge q)$
4. p : Matemática es una palabra esdrújula, q : Matemática es una palabra grave.
   i) $q \wedge p$
   ii) $p \vee q$
   iii) $\sim (p \wedge q)$

1.3 Proposiciones simples y compuestas

Definición 1.10 — Proposición simple y proposición compuesta. Una proposición simple es aquella que no está conformada por ningún operador lógico, mientras que una proposición compuesta es aquella que está conformado por otras proposiciones y operadores lógicos.

■ **Ejemplo 1.33 — Proposición simple.**

$$p : \text{Enero es el primer día del año}$$

se tiene que p corresponde a una proposición simple.

■ **Ejemplo 1.34 — Proposición compuesta.**

$$q : \text{El sol y la luna son objetos dentro del sistema solar}$$

se tiene que q es una proposición compuesta, dado que puede ser escrita como $r \wedge s$ donde r y s se definen como:

$$r : \text{El sol es un objeto dentro del sistema solar,}$$

s : El sol es un objeto dentro del sistema solar.

1.3.1 Valores de verdad de proposiciones compuestas

Se puede obtener el valor de verdad de cualquier proposición compuesta conociendo los valores de verdad de las proposiciones simples que las componen.

■ **Ejemplo 1.35 — Valor de verdad de proposiciones compuestas.** Sean p, q, r y s proposiciones tales que

$$v(p) = v(q) = V,$$

$$v(r) = v(s) = F.$$

Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $[p \wedge (\sim q)] \to (r \vee s)$

Solución:

$$\begin{aligned} v([p \wedge (\sim q)] \to (r \vee s)) &= [V \wedge (\sim V)] \to (F \vee F) \\ &= [V \wedge F] \to F \\ &= F \to F \\ &= V. \end{aligned}$$

b) $\{\sim [p \leftrightarrow (s \to r)]\} \wedge (q \veebar s)$

Solución:

$$\begin{aligned} v(\{\sim [p \leftrightarrow (s \to r)]\} \wedge (q \veebar s)) &= \{\sim [V \leftrightarrow (F \to F)]\} \wedge (V \veebar F) \\ &= \{\sim [V \leftrightarrow V]\} \wedge V \\ &= \{\sim V\} \wedge V \\ &= F \wedge V \\ &= F. \end{aligned}$$

1.3.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.3 Sean p, q, r y s proposiciones tales que

$$v(p) = v(s) = V \quad \text{y} \quad V(q) = v(r) = F.$$

Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

1. $[p \wedge q] \vee [\sim r \vee (\sim s)]$
2. $[(p \leftrightarrow q) \rightarrow r] \vee [s \rightarrow (\sim r)]$
3. $[(r \rightarrow s) \leftrightarrow p] \leftrightarrow [s \wedge p]$
4. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \wedge [(r \vee s) \wedge p]$
5. $(p \vee q) \leftrightarrow \{[(q \leftrightarrow p) \vee r] \leftrightarrow (r \vee s)\}$

1.4 Tautología, contradicción y contingencia

Definición 1.11 — Variable proporcional. Una proposición p se denomina variable proposicional, si representa una proposición (simple o compuesta) tal que los valores de verdad de las proposiciones que la componen aún no están bien definidos, pero se pueden definir.

■ **Ejemplo 1.36 — Variable proposicional considerando una proposición simple.** Una proposición arbitraria p es en sí una variable proposicional si aún no se a definido su valor de verdad.

■ **Ejemplo 1.37 — Variable proposicional considerando una proposición compuesta.** La proposición $p \rightarrow (q \veebar r)$ es una variable proposicional si aún no se han definido los valores de verdad de p, q y r.

Definición 1.12 — Formas proporcionales. Son las estructuras que constituyen proposiciones y operadores lógicos que las relacionan. Se denotarán estas formas proposicionales con letras mayúsculas A, B, C, etc.

■ **Ejemplo 1.38 — Forma proposicional.** Dadas las proposiciones p, q, r y s, se puede tener la siguiente forma proposicional,

$$A : p \leftrightarrow [(r \wedge s) \veebar p].$$

Definición 1.13 — Tautología, contradicción y contingencia. Dada una forma proposicional A, se dice que:

- A es una tautología, si para todos los valores de verdad de las variables proposicionales resulta $v(A) = V$.
- A es una contradicción, si para todos los valores de verdad de las variables proposicionales resulta $v(A) = F$.
- A es una contingencia, si para algunos valores de verdad de las variables proposicionales resulta $v(A) = V$, mientras que para otros resulta $v(A) = F$.

■ **Ejemplo 1.39 — Tautología.** Dada la siguiente forma proposicional

$$A : (p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)\,,$$

determinar su naturaleza.

Solución: Se realiza una tabla de verdad para comprobar la naturaleza de esta forma proposicional, puesto que la componen dos variables proposicionales se necesitan $2^2 = 4$ filas donde irán los valores de verdad:

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	A
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Tabla 1.10: Tabla de verdad para la forma proposicional A.

Luego, A es una tautología, pues se verifica precisamente que para todos los posibles valores de verdad de p y q se tiene $v(A) = V$.

■ **Ejemplo 1.40 — Contradicción.** Dada la siguiente forma proposicional

$$B : p \wedge \sim p,$$

determinar su naturaleza.

Solución: Se realiza una tabla de verdad con $2^1 = 2$ filas donde irán los valores de verdad:

p	$\sim p$	B
V	F	F
F	V	F

Tabla 1.11: Tabla de verdad para la forma proposicional B.

Luego, B es una contradicción, pues se verifica precisamente que para todos los posibles valores de verdad de p se tiene $v(B) = F$.

■ **Ejemplo 1.41 — Contingencia.** Dada la siguiente forma proposicional

$$C : (p \to q) \wedge (q \to p)$$

determinar su naturaleza.

Solución: Se realiza una tabla de verdad con $2^2 = 4$ filas donde irán los valores de verdad:

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	C
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Tabla 1.12: Tabla de verdad para la forma proposicional C.

Luego, C es una contingencia, pues se verifica precisamente que para algunos valores de verdad de p y q se tiene $v(C) = V$, mientras que para otros se tiene $v(C) = F$.

1.4.1 Implicación y equivalencia lógica

Definición 1.14 — Implicación lógica. Sean A y B dos formas proposicionales, si $A \to B$ es una tautología, entonces se dice que A implica lógicamente a B y se denota

$$A \Rightarrow B.$$

■ **Ejemplo 1.42 — Implicación lógica de formas proposicionales.** Se define $p \to (q \to p)$. Al realizar la tabla de verdad con $2^2 = 4$ filas, donde irán los posibles valores de verdad se tiene

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Tabla 1.13: Tabla de verdad que establece una implicación lógica.

entonces, p implica lógicamente a $q \to p$, es decir, se puede escribir

$$p \Rightarrow (q \to p).$$

Definición 1.15 — Equivalencia lógica. Sean A y B dos formas proposicionales, si $A \leftrightarrow B$ es una tautología, entonces se dice que A equivale lógicamente a B y se denota

$$A \Leftrightarrow B.$$

■ **Ejemplo 1.43 — Implicación lógica de formas proposicionales.** Se define $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$. Al realizar la tabla de verdad con $2^2 = 4$ filas, donde irán los posibles valores de verdad, se tiene

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \to \sim p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Tabla 1.14: Tabla de verdad que establece una equivalencia lógica.

entonces, $p \to q$ equivale lógicamente a $\sim q \to \sim p$, es decir, se puede escribir

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p).$$

Observación 1.7 La equivalencia lógica de dos formas proposicionales $A \Leftrightarrow B$ también establece una congruencia entre formas proposicionales, por lo tanto, se escribe esta relación como

$$A \equiv B.$$

■ **Ejemplo 1.44** Del ejemplo (1.43), se puede denotar

$$p \to q \equiv \sim q \to \sim p.$$

1.4.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.4 Determine la naturaleza de las siguientes formas proposicionales mediante tablas de verdad.

1. $[\sim p \to (p \vee q)]$
2. $(p \vee q) \leftrightarrow (r \vee q)$
3. $(p \wedge q) \to (\sim r)$
4. $[(p \to q) \wedge (p \to r)] \to (p \to r)$
5. $\sim [\sim (p \vee q) \to (p \to r)]$
6. $[(p \to q) \to r] \leftrightarrow p$
7. $(p \wedge q) \to (p \vee (\sim r))$
8. $(r \to q) \vee [\sim (q \to r)]$
9. $[(p \to q) \wedge (r \to p)] \leftrightarrow [\sim (p \vee q)]$
10. $[(p \wedge q) \to (\sim r)] \vee [(p \vee (\sim r)) \to q]$

1.5 Álgebra proposicional

Las tautologías nos brindan leyes proposicionales utilizadas para lo que denominaremos álgebra proposicional que es útil para reducir formas proposicionales a formas proposicionales equivalentes más simplificadas y por lo tanto más óptimas para ser utilizadas.

1.5.1 Leyes del álgebra proposicional

Estas leyes que tendrán que ser verificadas mediante las tablas de verdad correspondientes como ejercicios para el lector, se exponen a continuación:

CONJUNCIÓN		**DISYUNCIÓN**
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	**Conmutativa**	$p \vee q \equiv q \vee p$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	**Asociativa**	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$p \wedge p \equiv p$	**Idempotencia**	$p \vee p \equiv p$
$p \wedge V \equiv p$	**Identidad**	$p \vee F \equiv p$
$p \wedge F \equiv F$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	**Absorción**	$p \vee V \equiv V$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Tabla 1.15: Leyes de los operadores fundamentales conjunción y disyunción.

$\sim F \equiv V$ $\sim V \equiv F$	**Negación**
$\sim (\sim p) \equiv p$	**Doble Negación o Involutiva**
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	**Distributivas**
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	**De Morgan**
$p \vee \sim p \equiv V$	**Tercero Excluido**
$p \wedge \sim p \equiv F$	**Contradicción**
$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$	**Contrapositiva o Contrarrecíproca**
$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ $\sim p \rightarrow q \equiv p \vee q$ $\sim (p \rightarrow \sim q) \equiv p \wedge q$ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$ $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$	**Implicación**

$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$	**Exportación**
$p \rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q) \rightarrow F$	**Reducción al Absurdo**
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$	**Equivalencia**

Tabla 1.16: Leyes de los operadores negación, condicional y bicondicional.

FORMA SIMBÓLICA	TAUTOLOGÍA
$p \Rightarrow p$	Trivial
$p \Rightarrow (p \vee q)$	Adición
$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Simplificación
$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$	Modus Ponendo Ponens Suposición del Antecedente
$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$	Modus Tolendo Tollens Negación del Consecuente
$[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$	Silogismo Disyuntivo
$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$ $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$	Dilemas Constructivos
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$ $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$	Transitividad o Silogismo Hipotético

Tabla 1.17: Leyes de las implicaciones lógicas.

1.5.2 Simplificación de formas proposicionales

El estudiante está listo entonces para utilizar las leyes propuestas del álgebra proposicional para simplificar formas proposicionales complejas.

Al principio, es común justificar paso a paso todo el procedimiento de simplificación de formas proposicionales, sin embargo, cuando se obtiene cierta experiencia y se tienen claras las leyes proposicionales, solo se colocan las equivalencias, dejando de lado la justificación engorrosa de tales simplificaciones.

■ **Ejemplo 1.45 — Simplificación con justificación utilizando las leyes proposicionales.**

Simplificar la siguiente forma proposicional

$$\sim(\sim(\sim p \wedge (p \vee \sim q))) \wedge \sim(\sim(\sim(p \wedge q))).$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\sim\{\sim[\sim p \wedge (p \vee \sim q)]\} \wedge \sim\{\sim[\sim(p \wedge q)]\} \\
&\qquad \equiv [\sim p \wedge (p \vee \sim q)] \wedge [\sim(p \wedge q)] && \text{Involutiva} \\
&\qquad \equiv [(\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [\sim(p \wedge q)] && \text{Distributiva} \\
&\qquad \equiv [F \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [\sim(p \wedge q)] && \text{Contradicción} \\
&\qquad \equiv (\sim p \wedge \sim q) \wedge [\sim(p \wedge q)] && \text{Identidad} \\
&\qquad \equiv \sim p \wedge [\sim q \wedge (\sim p \vee \sim q)] && \text{Asociativa} \\
&\qquad \equiv \sim p \wedge \sim q && \text{Absorción} \\
&\qquad \equiv \sim(p \vee q), && \text{De Morgan}
\end{aligned}$$

luego, se establece que la respectiva simplificación corresponde a

$$\sim\{\sim[\sim p \wedge (p \vee \sim q)]\} \wedge \sim\{\sim[\sim(p \wedge q)]\} \equiv \sim(p \vee q).$$

Como se ha mencionado, se puede realizar el álgebra proposicional sin la justificación explícita de las leyes proposicionales como se muestra en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 1.46 — Simplificación sin su respectiva justificación utilizando las leyes proposicionales.** Simplificar la siguiente forma proposicional

$$\sim(\sim(\sim p \wedge (p \vee \sim q))) \wedge \sim(\sim(\sim(p \wedge q))).$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sim\{\sim[\sim p \wedge (p \vee \sim q)]\} \wedge \sim\{\sim[\sim(p \wedge q)]\} &\equiv [\sim p \wedge (p \vee \sim q)] \wedge [\sim(p \wedge q)] \\
&\equiv [(\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [\sim(p \wedge q)] \\
&\equiv [F \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [\sim(p \wedge q)] \\
&\equiv (\sim p \wedge \sim q) \wedge [\sim(p \wedge q)] \\
&\equiv \sim p \wedge [\sim q \wedge (\sim p \vee \sim q)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \sim p \wedge \sim q \\
&\equiv \sim (p \vee q),
\end{aligned}
$$

luego, de igual forma al ejemplo (1.45) se establece que la respectiva simplificación corresponde a

$$\sim \{\sim [\sim p \wedge (p \vee \sim q)]\} \wedge \sim \{\sim [\sim (p \wedge q)]\} \equiv \sim (p \vee q).$$

■ **Ejemplo 1.47** Simplificar la siguientes formas proposicionales:

a) $\sim (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\sim (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) &\equiv (\sim p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \wedge \sim (p \wedge q) \\
&\equiv (\sim p \vee q) \wedge [\sim (p \wedge q) \wedge \sim (p \wedge q)] \\
&\equiv \sim p \wedge \sim (p \wedge q) \\
&\equiv \sim p \wedge (\sim p \vee \sim q) \\
&\equiv \sim p.
\end{aligned}
$$

b) $\sim (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\sim (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (p \vee \sim q) &\equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \wedge V \wedge (p \vee \sim q) \\
&\equiv [\sim p \vee (\sim q \wedge q)] \wedge (p \vee \sim q) \\
&\equiv (\sim p \vee F) \wedge (p \vee \sim q) \\
&\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) \\
&\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
&\equiv F \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
&\equiv \sim (p \vee q).
\end{aligned}
$$

c) $[(p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q)] \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p)$

Solución:

$$[(p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q)] \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \equiv [(p \wedge p) \wedge (\sim q \wedge q)] \vee (p \wedge q) \vee F$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv (p \wedge F) \vee (p \wedge q)\\
&\equiv F \vee (p \wedge q)\\
&\equiv p \wedge q.
\end{aligned}
$$

d) $[(p \wedge p) \vee (\sim q \vee \sim q)] \wedge \sim (\sim p \wedge \sim q)$

Solución:

$$
\begin{aligned}
[(p \wedge p) \vee (\sim q \vee \sim q)] \wedge \sim (\sim p \wedge \sim q) &\equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)\\
&\equiv p \vee (\sim q \wedge q)\\
&\equiv p \vee F\\
&\equiv p.
\end{aligned}
$$

e) $[\sim (\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q)] \vee (p \wedge \sim q)$

Solución:

$$
\begin{aligned}
[\sim (\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q)] \vee (p \wedge \sim q) &\equiv [(p \vee q) \wedge (p \wedge q)] \vee (p \wedge \sim q)\\
&\equiv \{[(p \vee q) \wedge p] \wedge q\} \vee (p \wedge \sim q)\\
&\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)\\
&\equiv p \wedge (q \vee \sim q)\\
&\equiv p \wedge V\\
&\equiv p.
\end{aligned}
$$

1.5.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.5 Utilizando las leyes proposicionales, simplificar las siguientes formas proposicionales.

1. $[(p \wedge q) \wedge (p \wedge q)] \vee (p \wedge q)$
2. $\sim [\sim (p \wedge q) \vee q] \rightarrow [(p \vee q) \wedge q]$
3. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p)] \rightarrow q$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \vee (\sim p \vee r)$
5. $[\sim (p \wedge (\sim p)) \wedge (p \wedge (\sim p))] \wedge (p \wedge (p \vee q))$
6. $[(p \wedge (p \vee q)) \vee (\sim p)] \wedge (\sim (\sim p \vee p))$
7. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

8. $[\sim p \vee (\sim (q \rightarrow p))] \vee [\sim (p \rightarrow q) \wedge [\sim (\sim q \vee p)]]$
9. $[\sim (p \rightarrow (\sim q)) \rightarrow r] \leftrightarrow [(q \wedge (\sim r)) \rightarrow (\sim p)]$
10. $[(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)] \vee [(p \wedge (\sim q)) \vee (p \vee p)]$

1.6 Aplicación del álgebra proposicional: Circuitos lógicos

A continuación, se va a presentar una aplicación del álgebra proposicional en el campo de los circuitos lógicos. Se necesitan previamente algunas definiciones.

Definición 1.16 Un circuito es un arreglo que se constituye de hilo conductor, la fuente de electricidad y un interruptor.

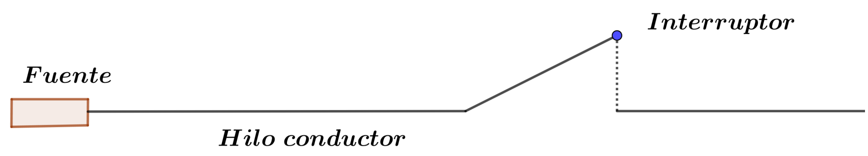


Figura 1.1: Circuito

Es así como se puede asociar a cada interruptor con una proposición p y si al final del circuito tenemos una lámpara pues dependerá del estado del interruptor p.

Definición 1.17 — Circuito cerrado. Si $v(p) = V$, se dice que el estado del interruptor es cerrado o que el interruptor está cerrado.

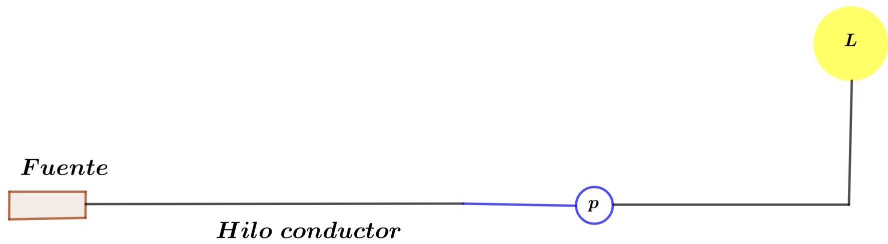


Figura 1.2: Circuito cerrado.

Como se observa en la Figura 1.2, pasa la corriente por el interruptor p por lo que finalmente la luz L permanece encendida.

Definición 1.18 — Circuito abierto. Si $v(p) = F$, se dice que el estado del interruptor es abierto o que el interruptor está abierto.

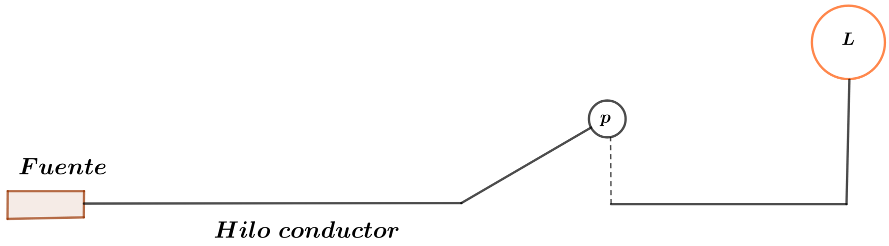


Figura 1.3: Circuito abierto.

Como se observa en la Figura 1.3, no pasa la corriente por el interruptor p por lo que finalmente la luz L permanece apagada.

1.6.1 Circuito en serie

La situación para un circuito tal que se consideran dos interruptores p y q en serie se esquematiza como:

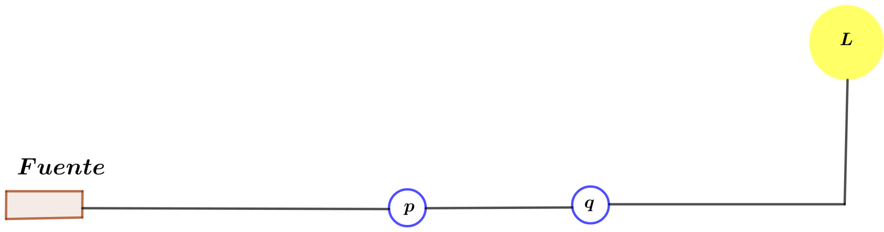


Figura 1.4: Circuito en Serie.

Claramente, la luz se mantiene encendida si y solo si los dos interruptores permanecen cerrados al mismo tiempo, es decir,

$$v(p) = V, \qquad v(q) = V,$$

esto indica que el circuito en serie funciona análogamente como la proposición $p \wedge q$ (conjunción), dado que

$$[v(p \wedge q) = V] \Leftrightarrow [v(p) = V \wedge v(q) = V].$$

1.6.2 Circuito en paralelo

La situación para un circuito tal que se consideran dos interruptores p y q en paralelo se esquematiza como:

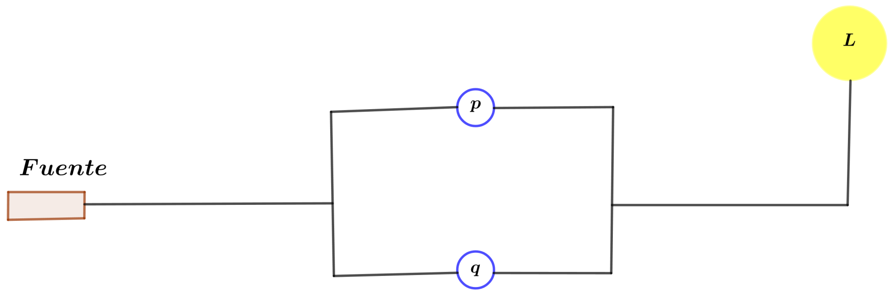


Figura 1.5: Circuito en Paralelo.

Claramente, la luz se mantiene apagada si y solo si los dos interruptores permanecen abiertos al mismo tiempo, es decir,

$$v(p) = F, \qquad v(q) = F,$$

esto indica que el circuito en paralelo, funciona análogamente como la proposición $p \vee q$ (disyunción) dado que

$$[v(p \vee q) = F] \Leftrightarrow [v(p) = F \wedge v(q) = F].$$

1.6.3 Circuito complementario

Dado un circuito con interruptor p, se tiene que un interruptor $\sim p$ se define como el estado opuesto a p, es decir $\sim p$ estará abierto cuando p este cerrado y viceversa.

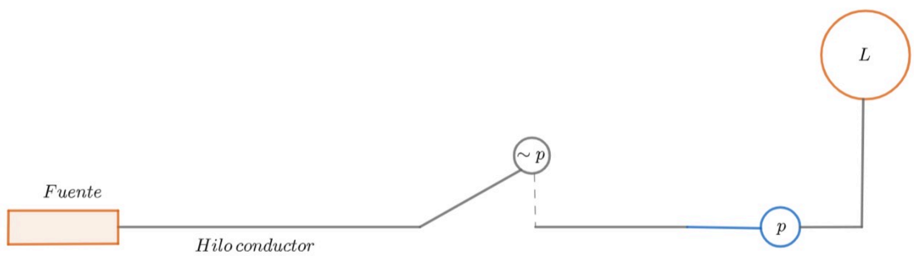


Figura 1.6: Circuito Complementario.

La Figura 1.6 muestra un circuito en serie donde se consideran el interruptor p y el interruptor $\sim p$, que claramente depende de p. En esta situación la luz L nunca estará encendida, pues cuando p esté cerrado, $\sim p$ estará abierto y viceversa. Utilizando el álgebra proposicional, esta situación es equivalente a una contradicción pues recordando las leyes proposicionales se tiene

$$v(p \wedge \sim p) = F.$$

Todo lo mencionado indica que el circuito complementario, funciona análogamente como la proposición $\sim p$ (negación) dado que

$$[v(p) = V] \Leftrightarrow [v(\sim p) = F].$$

1.6.4 Circuitos equivalentes

Definición 1.19 — Circuitos equivalentes. Se dice que dos circuitos C_1 y C_2 son equivalentes si la lámpara se encuentra en el mismo estado en ambos circuitos, para todos los posibles estados de los interruptores. Se denota $C_1 \equiv C_2$.

Observación 1.8 Se puede muchas veces, reducir la complejidad de un circuito a un circuito equivalente, esto se logra gracias a que se ha relacionado la teoría de circuitos con la teoría de las proposiciones.

■ **Ejemplo 1.48** Sea C_1 el siguiente circuito definido por la Figura 1.7

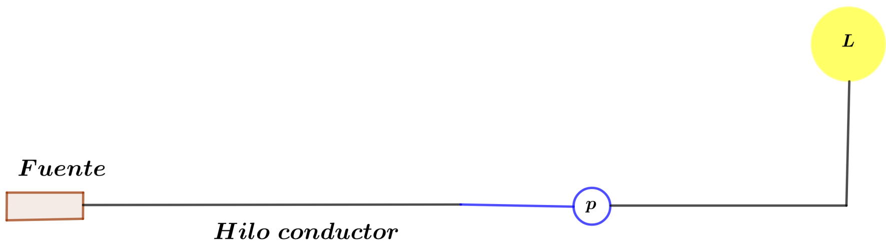


Figura 1.7: Circuito C_1.

Sea C_2 otro circuito definido por la Figura 1.8

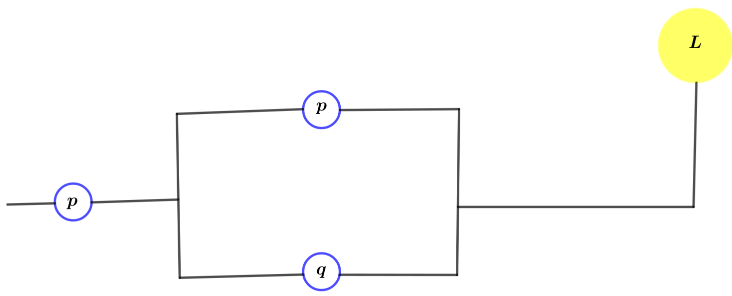


Figura 1.8: Circuito C_2.

Entonces, de la Figura 1.7 y la Figura 1.8, se observa que los dos circuitos son equivalentes, es decir, $C_1 \equiv C_2$; ambos dependen de que el interruptor p esté abierto o cerrado.

Ahora, se va a comprobar este hecho utilizando la lógica proposicional de la siguiente manera.

Sean C_1 y C_2 definidos proposicionalmente como

$$C_1 : \; p$$
$$C_2 : \; p \wedge (p \vee q),$$

por el álgebra proposicional (Ley de absorción) se tiene para cualquier par de proposiciones p y q

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p,$$

en consecuencia, $C_1 \equiv C_2$.

■ **Ejemplo 1.49** Sea C_3 el circuito definido por la Figura 1.9

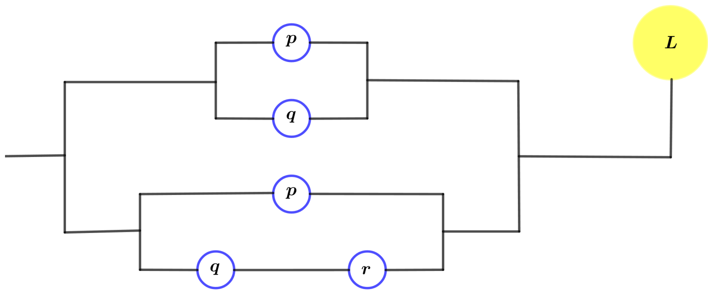


Figura 1.9: Circuito C_3.

Hallar un circuito C_4, el cual sea mas sencillo que C_3 pero sea equivalente a este.

Solución: Dado que

$$C_3 : \; (p \vee q) \vee [p \vee (q \wedge r)]$$

entonces, utilizando el álgebra proposicional, en particular, la ley de absorción, se tiene que

$$\begin{aligned}(p \vee q) \vee [p \vee (q \wedge r)] &\equiv (p \vee q) \vee [(p \vee q) \wedge (p \vee r)] \\ &\equiv p \vee q,\end{aligned}$$

por lo tanto, el circuito C_3 es equivalente al circuito

$$C_4 : \; p \vee q$$

el esquema de tal circuito está dado por la Figura 1.10

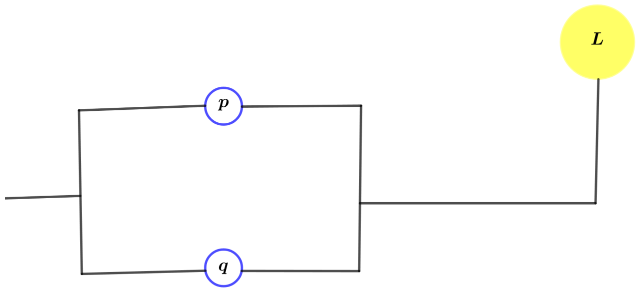


Figura 1.10: Circuito C_4.

■ **Ejemplo 1.50** Sea C_5 el circuito definido por la Figura 1.11

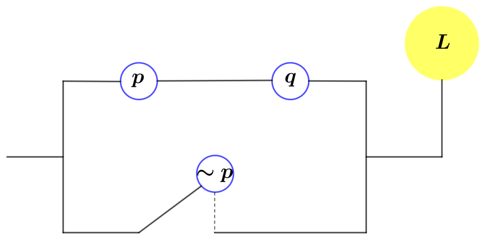


Figura 1.11: Circuito C_5.

Hallar un circuito C_6, el cual sea mas sencillo que C_5 pero sea equivalente a este.

Solución: Dado que

$$C_5 : \ (p \wedge q) \vee \sim p$$

entonces, utilizando el álgebra proposicional se tiene que

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee \sim p &\equiv (p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)\\ &\equiv V \wedge (\sim p \vee q)\\ &\equiv \sim p \vee q\\ &\equiv p \rightarrow q,\end{aligned}$$

por lo tanto, el circuito C_5 es equivalente al circuito

$$C_6 : \ p \rightarrow q.$$

El esquema de tal circuito está dado por la Figura 1.12

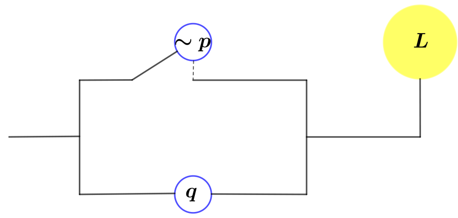


Figura 1.12: Circuito C_6.

1.6.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.6 Realice los gráficos que esquematizan los siguientes circuitos y halle el circuito equivalente.

1. $(\sim p \wedge \sim p) \vee \sim q$
2. $p \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \wedge q)]$
3. $\{\sim [\sim p \rightarrow (\sim p \vee q)]\} \vee \sim p \rightarrow (p \rightarrow r)$.

1.7 Razonamientos y demostraciones

Definición 1.20 — Razonamiento. Un razonamiento es una proposición que se constituye de una conjunción de varias proposiciones llamadas conjunción de hipótesis o antecedente, seguidamente del operador lógico condicional y finalmente de una proposición llamada conclusión o consecuente.

■ **Ejemplo 1.51** Sean $H_1, H_2, \ldots, H_n, C$ proposiciones, entonces un razonamiento es de la forma

$$\underbrace{H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n}_{\text{Antecedente}} \rightarrow \underbrace{C}_{\text{Consecuente}} .$$

Definición 1.21 — Validez de un razonamiento. Un razonamiento se denomina válido cuando resulta ser una tautología. Si el razonamiento resulta ser contradicción o contingencia se denomina falacia.

Observación 1.9 Recuerde que una tautología puede comprobarse mediante una tabla de verdad o utilizando el álgebra proposicional, en ese sentido, se tienen dos formas para probar que un razonamiento sea válido.

■ **Ejemplo 1.52** Determinar si el siguiente razonamiento es válido:

$$R : [(p \rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow q.$$

- Por tablas de verdad

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	R
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Tabla 1.18: Tabla de verdad de R.

- Por álgebra proposicional

$$\begin{aligned}
[(p \to q) \wedge q] \Rightarrow q \equiv \; & \sim [(\sim p \vee q) \wedge q] \vee q \\
\equiv \; & [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim q] \vee q \\
\equiv \; & (p \wedge \sim q) \vee (\sim q \vee q) \\
\equiv \; & (p \wedge \sim q) \vee V \\
\equiv \; & V.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el razonamiento R es válido.

En una demostración se trata de probar la validez de un razonamiento mediante pasos lógicos. Una demostración es la pieza fundamental e indiscutible del poder de la matemática, ya que mediante este proceso se puede determinar lo que es un hecho universal o lo que no lo es.

Existen varias formas de demostrar algo, en este apartado se abordarán las más importantes y comunes. Cabe destacar que las demostraciones serán utilizadas a lo largo del presente libro con el fin de probar las aseveraciones hechas y justificar su validez de la manera lo más general posible.

1.7.1 Demostración directa

Una demostración directa trata de probar la validez del razonamiento $p \to q$ de tal manera que se parte de p y las partes que la componen hasta llegar a q directamente. Muchas veces se necesita de la teoría ya establecida anteriormente.

■ **Ejemplo 1.53 — Demostración directa.** Mostrar que la suma de dos números pares es par.

Solución: Se definen las proposiciones:

$$p: \quad a \text{ es un número par}$$

$$q: \quad b \text{ es un número par}$$
$$r: \quad a+b \text{ es un número par.}$$

La demostración directa se basará en probar que de $p \wedge q$ se puede deducir r. Así, suponga cierta la proposición $p \wedge q$, es decir, a y b son dos números pares, entonces, por definición existen dos números enteros k, m tal que:

$$a = 2k$$
$$b = 2m$$

luego,

$$a+b = 2k+2m = 2(k+m),$$

como $k+m$ es un número entero entonces $a+b$ es un número par, es decir, se cumple la proposición r.

1.7.2 Demostración por contrarrecíproco

Para probar la validez de una proposición $p \to q$, algunas veces resulta más conveniente demostrar la proposición $\sim q \to \sim p$, luego aprovechando la equivalencia lógica

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$$

se tiene que demostrar la validez de $\sim q \to \sim p$ es demostrar la validez de $p \to q$.

■ **Ejemplo 1.54 — Demostración por contrarrecíproco.** Demostrar que si el cuadrado de un número natural a es impar, entonces el número a es impar.

Solución: En este problema no es conveniente realizar la demostración de forma directa. Para ello, se recurre a la demostración por contrarrecíproco.
Se debe mostrar la validez de $p \to q$, donde:

$$p: a^2 \text{ es un número impar,}$$
$$q: a \text{ es un número impar.}$$

Para a un número natural, se va a probar entonces la validez de $\sim q \to \sim p$.

Observe que para todo número natural solo se tiene la posibilidad de ser par o impar, entonces:

$$\sim q: a \text{ no es un número impar}$$
$$\sim p: a^2 \text{ no es un número impar}$$

es lo mismo que decir:

$$\sim q : a \text{ es un número par}$$
$$\sim p : a^2 \text{ es un número par,}$$

lo cual es muy fácil probar que se cumple $\sim q \to \sim p$.

En efecto, suponga que $\sim q$ es verdadero, entonces existe un número natural k tal que:

$$a = 2k$$

luego, elevando ambos miembros al cuadrado

$$\begin{aligned} a^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 2\left(2k^2\right), \end{aligned}$$

puesto que $2k^2$ es un número natural, se concluye que a^2 es un número par. Así, se ha probado la validez de $\sim q \to \sim p$ y por lo tanto la validez de $p \to q$.

1.7.3 Demostración por contraejemplo

En este tipo de demostración, el objetivo es demostrar que una proposición p es falsa. Para esto, se busca un ejemplo (llamado contraejemplo) que contradice la proposición p y por lo tanto p no puede ser verdadera, es decir, p resulta siendo falsa.

Observación 1.10 Una proposición que a falta de una prueba que indique su veracidad o falsedad se denomina conjetura.

■ **Ejemplo 1.55 — Demostración por contraejemplo.** Sea n un número natural, se define el número.

$$m = n^2 + n + 41.$$

Se conjetura que este número m siempre es primo para cualquier valor de n.

Solución: Muchas veces uno esta tentado a probar con algunos números la veracidad o falsedad de una conjetura.

n	$m = n^2 + n + 41$
1	$1^2 + 1 + 41 = 43$
2	$2^2 + 2 + 41 = 47$
3	$3^2 + 3 + 41 = 53$
4	$4^2 + 4 + 41 = 61$
5	$5^2 + 5 + 41 = 71$

Tabla 1.19: Valores de m para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

En la tabla anterior se observa que todos los valores de m son primos, de hecho si se hiciera una tabla con $n = 1, 2, ..., 39$, se observaría que los valores de m correspondientes son primos.

Sin embargo, para $n = 40$ se tiene que m no es primo (contraejemplo), en efecto, para $n = 40$, se sigue:

$$\begin{aligned} m &= 40^2 + 40 + 41 \\ &= 40(40+1) + 41 \\ &= 40(41) + 41 \\ &= 41(40+1) \\ &= 41^2, \end{aligned}$$

lo cual es evidente que m es divisible para 41 y por lo tanto no es primo, demostrando que la conjetura de que m es primo para todo número natural n, es falsa.

1.7.4 Demostración por reducción al absurdo

Para demostrar la validez de un razonamiento $p \to q$, se debe partir del hecho de que p es verdadero y llegar a que q es verdadero. En este tipo de demostración se supone que q es falso, es decir, se supone que $p \wedge \sim q$ es verdadero, luego, se debe llegar a una contradicción o un absurdo y por lo tanto se debe concluir que $p \wedge \sim q$ es falso, dado que p es verdadero desde un inicio, se tiene por la conjunción que $\sim q$ es falso y por lo tanto q es verdadero.

Observación 1.11 La contradicción puede ser con cualquier hecho que ya ha sido probado como verdadero en alguna teoría, o con la afirmación hecha en un inicio.

■ **Ejemplo 1.56 — Demostración por reducción al absurdo.** Demostrar que el número cero es único.

Solución: Se debe probar la proposición q, donde

q : el número cero es único.

De acuerdo a este tipo de demostración, se supone que q es falsa, es decir, se supone que el cero no es único, entonces existen 0 y $0^{'}$ tal que $0 \neq 0^{'}$ y para todo número x se tiene:

$$0+x=x \tag{1.1}$$

$$0^{'}+x=x, \tag{1.2}$$

de (1.1) y (1.2) se tiene

$$\begin{aligned} 0+x &= 0^{'}+x \\ 0 &= 0^{'}+x-x \\ 0 &= 0^{'}. \end{aligned}$$

De esta contradicción, se deduce el razonamiento de que q debe ser verdadero efectivamente.

Observación 1.12 El hecho de probar verdades en matemática, y en todas las áreas es fundamental para dar consistencia y confianza al área en cuestión. Aquí, se han dado directrices claras, siendo fiel al concepto de proposición, la cual se ha concebido como unidad fundamental de la lógica. Sin embargo, cuando se tiene dominio de las demostraciones, resulta innecesario recurrir a la notación de la lógica, y es por lo tanto de mayor interés simplificar las demostraciones, evitando notaciones engorrosas, pero sin dejar de lado que las proposiciones están presentes en las demostraciones, en las suposiciones y en los hechos como tal.

A continuación, se van a repasar las mismas demostraciones de los ejemplos realizados para mostrar las simplificaciones mencionadas.

■ **Ejemplo 1.57 — Demostración directa:.** Demostrar que la suma de dos números pares es par.

Solución: Sean dos números pares genéricos a, b, entonces existen k, m enteros positivos tal que

$$\begin{aligned} a &= 2k \\ b &= 2m, \end{aligned}$$

entonces

$$a+b=2k+2m=2(k+m),$$

puesto que $k+m$ es un número entero, se concluye entonces que $a+b$ es un número par.

■ **Ejemplo 1.58 — Demostración por contrarrecíproco:.** Demostrar que si el cuadrado de un número natural a es impar, entonces el número a es impar.

Solución: Suponga que a es par, entonces existe un número entero k tal que:

$$a = 2k,$$

luego,

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

como, $2k^2$ es un número natural, entonces a^2 es un número par.

Como se ha demostrado que dado un número par, entonces su cuadrado es par; por contrarrecíproco también se ha demostrado que si el cuadrado de un número natural a es impar, entonces el número a es impar.

■ **Ejemplo 1.59 — Demostración por contraejemplo:.** Demostrar que para un número natural n, no siempre se tiene que el número $m = n^2 + n + 41$ es primo.

Solución: Basta escribir un contraejemplo. Para $n = 40$ se tiene,

$$m = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2,$$

el cual no es primo pues es divisible para 41.

■ **Ejemplo 1.60 — Demostración por reducción al absurdo:.** Demostrar que el número cero es único.

Solución: Suponga que el cero no es único, entonces existen 0 y $0^{'}$ tal que:

$$0 \neq 0^{'}$$

y para todo número x se tiene

$$0 + x = x \tag{1.3}$$

$$0^{'} + x = x, \tag{1.4}$$

de (1.3) y (1.4) se tiene

$$\begin{aligned} 0 + x &= 0^{'} + x \\ 0 &= 0^{'}, \end{aligned}$$

lo cual indica una contradicción, y por lo tanto el cero es único.

1.7.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.7 Realizar los siguientes ejercicios.

1. Demostrar que el producto de dos números pares es par.
2. Demostrar que la suma de dos números impares es un número par.
3. Demuestre que si a es múltiplo de 8, entonces a es múltiplo de 4.
4. Sean x, y, z son números enteros. Demuestre por reducción al absurdo que si x divide a $(y+z)$ y x divide a y, entonces x divide a z. Recuerde que: x divide a y, si existe un entero n tal que $y = xn$.
5. Mediante el método de la contraposición, demuestre que si m es múltiplo de 3, entonces $m-2$ es múltiplo de 3.
6. Demuestre que $m^2 - m$ es divisible para 2, para todo entero m.
7. Demostrar que el producto de dos números impares es otro número impar.
8. Demuestre que $m^2(m+1)^2$ es divisible para 2, para todo entero m.

2. Conjuntos

Autores:
Ing. Miguel Murillo
MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro
Ing. Kevin Astudillo

2.1 Introducción a los conjuntos

2.1.1 Definición de un conjunto

La idea de juntar objetos considerando una característica determinada es naturalmente primitiva, tal que resulta prácticamente imposible de calcular cuándo surge el concepto de “agrupar” en el razonamiento del ser humano. Como ejemplo, se puede afirmar que la naturaleza de por si ha sido capaz de agrupar, por ejemplo, átomos para formar estructuras complejas llamadas moléculas, luego, éstas moléculas se han agrupado para formar los elementos y así sucesivamente se observa en nuestro alrededor, ejemplos de como la naturaleza agrupa objetos y por lo tanto, resulta necesario entender el concepto que se va a denominar conjunto.

Definición 2.1 — Conjunto. Un conjunto es una colección o agrupación de objetos que comparten una característica en común.

Observación 2.1 La definición ha sido adaptada para el mejor entendimiento de un conjunto, puesto que es suficiente para comprender los conceptos que se utilizarán a lo largo de este libro.

■ **Ejemplo 2.1 — Conjuntos.** Se agrupan bajo las siguientes características:

- Los seres humanos.
- Las aves que no vuelan.
- Los automóviles sacados al mercado en el año 2023.

2.1.2 Notación de un conjunto

Los conjuntos se denotarán con letras mayúsculas A, B, C, etc. Cuando se habla de objetos que pertenecen a un conjunto, se hace referencia al sentido de pertenencia a lo que se llamarán elementos del conjunto; estos elementos se denotan con letras minúsculas a, b, c, etc, y este sentido de pertenencia se denota como

$$a \in A,$$

y se lee: "a pertenece a A". También, se puede escribir

$$a \notin A,$$

y se lee: "a no pertenece a A" y se entiende como los elementos que no cumplen la definición del conjunto A.

■ **Ejemplo 2.2 — Sentido de pertenencia.** Sea el conjunto A definido por todas las vocales del idioma castellano, entonces $a \in A$, $b \notin A$, $c \notin A$, $e \in A$.

2.1.3 Descripción de un conjunto

Se consideran tres formas de describir un conjunto:

a) **Por compresión:** Se considera alguna característica que defina al conjunto por completo.

b) **Por extensión:** Se enlistan todos los elementos del conjunto.

c) **Por diagramas de Venn:** Se representa gráficamente el conjunto utilizando figuras geométricas, donde los elementos se ubican en el interior de tales gráficos. Usualmente, se utilizan circunferencias para indicar que se trata de un diagrama de Venn.

■ **Ejemplo 2.3 — Por compresión.** El conjunto A de todos los números enteros positivos del uno al mil, se denota por compresión como:

$$A = \{x \mid x \text{ es un numero entero positivo}, 1 < x \leq 1000\}.$$

■ **Ejemplo 2.4 — Por extensión.** Sea A el conjunto de letras que constituyen la palabra matemática, entonces por extensión se tiene:

$$A = \{\, m, a, t, e, i, c\}.$$

■ **Ejemplo 2.5 — Por diagrama de Venn.** El Ejemplo 2.4 se puede representar por un diagrama de Venn del siguiente modo:

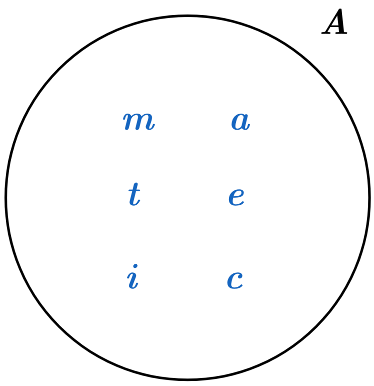


Figura 2.1: Diagrama de Venn del conjunto A.

Observación 2.2 Cuando el número de elementos de un conjunto no son "muchos", es preferible representar el conjunto por extensión, como el Ejemplo 2.4. Para la solución de ejercicios, se hace uso de los diagramas de Venn. La representación por compresión es útil cuando se tiene que el número de elementos es demasiado "grande" como en el Ejemplo 2.3, e incluso conjuntos donde el número de elementos es infinito. Otra opción es denotar al conjunto del Ejemplo 2.3 como:

$$A = \{\ 1, 2, 3, \ldots, 1000\}\ .$$

Definición 2.2 — Conjuntos finitos e infinitos. Un conjunto A tal que el conteo del número de sus elementos tiene fin, se denomina conjunto finito y se denota $\text{Card}(A) < \infty$, caso contrario se denomina conjunto infinito y se denota $\text{Card}(A) = \infty$. El cardinal de un conjunto A es precisamente entonces el número de elementos que tiene tal conjunto y de denota $\text{Card}(A)$.

■ **Ejemplo 2.6 — Cardinalidad de un conjunto.** Sean los conjuntos

$$A = \{\ x \mid x \text{ es un color del arcoíris}\}\ , \quad B = \{\text{Los números}\}$$

entonces, el cardinal de estos conjuntos son $\text{Card}(A) = 7$ y $\text{Card}(B) = \infty$, y por lo tanto, se tiene que A es un conjunto finito y B es un conjunto infinito.

2.1.4 Conjuntos relevantes

Existen conjuntos que tienen características únicas y por lo tanto, son relevantes, estos conjuntos tienen nombres específicos.

Definición 2.3 — Conjunto vacío. Es el conjunto que carece de elementos, se puede denotar como $\emptyset$ o también $\{\ \}$, es así, que por definición se tiene:

$$\mathrm{Card}(\emptyset) = 0.$$

■ **Ejemplo 2.7 — Conjunto vacío.** Sea un conjunto de números tales que son mayores a tres y menores a uno al mismo tiempo. Puesto que es imposible que algún número cumpla estas dos características al mismo tiempo, entonces se tiene que dicho conjunto es el conjunto vacío, simbólicamente se tiene

$$\{x \mid x \text{ es mayor a } 3, x \text{ es menor a } 1\} = \emptyset = \{\ \}.$$

Definición 2.4 — Conjunto unitario. Es aquel conjunto que consta de un solo elemento.

■ **Ejemplo 2.8 — Conjunto unitario.** Se considera el conjunto

$$A = \{5\},$$

note que por definición se tiene $\mathrm{Card}(A) = 1$.

Definición 2.5 — Conjunto universo. Cuando se hace referencia a un conjunto, es necesario casi siempre indicar el contexto de dónde se están tomando los elementos de tal conjunto, es decir, un conjunto más grande de donde se agrupan los elementos que tengan una característica en común. Tal conjunto se le suele denotar como U y se le llama el conjunto universo.

■ **Ejemplo 2.9 — Conjunto Universo.** Sea U el conjunto de todos los números enteros positivos, entonces se puede considerar un conjunto A como

$$A = \{x \in U \mid x \text{ es menor a } 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

donde,

$$U = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Observación 2.3 — Paradoja de Russell. Casi siempre es necesario que se tenga un conjunto universo de referencia, pues si no se lo hace, la teoría como tal puede verse comprometida a una paradoja como escribir

$$A = \{a \mid a \notin A\}.$$

¿Porqué este conjunto conduce a una paradoja? Para más información, buscar acerca de la Paradoja de Russell, por ejemplo, en el siguiente link se encuentra un video acerca de la paradoja: **Link**.

2.1.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1 Dados los siguientes conjuntos, describirlos mediante extensión y diagramas de Venn.

1. $A = \{$los números enteros mayores que dos y menores a cinco$\}$.
2. $B = \{$los estados de la materia$\}$.
3. $C = \{$los continentes$\}$.
4. $D = \{$los planetas del sistema solar$\}$.
5. $E = \{$los colores del arcoiris$\}$.

Ejercicio 2.2 Dados los siguientes conjuntos, describirlos mediante comprensión y diagramas de Venn.

1. $F = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
2. $G = \{$lunes, martes, miércoles, jueves, viernes$\}$.
3. $H = \{$enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre, diciembre$\}$.
4. $I = \{$amarillo, azul, rojo$\}$.
5. $J = \{$hidrógeno, oxígeno$\}$.

Ejercicio 2.3 Dados los siguientes conjuntos, indicar si el conjunto es finito o infinito. Si es finito, hallar la cardinalidad del conjunto.

1. $K = \{1, 10, 10^2, \ldots, 10^n\}$.
2. $L = \{$todos los números reales entre 0 y 1$\}$.
3. $M = \{$los segundos en un año bisiesto$\}$.
4. $N = \{$las palabras formadas por dos letras en el idioma castellano$\}$.
5. $O = \{$todos los números negativos$\}$.

2.2 Cuantificadores

Definición 2.6 — Expresiones abiertas. Una expresión que dependa de una o varias variables (x, y, z, etc) para ser considerada verdadera o falsa, se denomina expresión abierta.

■ **Ejemplo 2.10 — Expresión abierta de una variable.** Se considera la expresión

$$3x + 2 = 5,$$

esta, es una expresión abierta que depende de una variable pues si $x = 1$, esta expresión se considera verdadera, pero para $x \neq 1$, esta expresión se considera falsa.

■ **Ejemplo 2.11 — Expresiones abiertas de dos variables.** Se considera la expresión

$$2x - 3y = 7,$$

esta, es una expresión abierta que depende de dos variables. Hay infinitos valores para x y y, para los cuales esta expresión se considera verdadera, por ejemplo, para $x = 2$ y $y = -1$. Pero además, hay infinitos valores para x, y para los cuales esta expresión se considera falsa, por ejemplo, para $x = 3$ y $y = 1$.

Definición 2.7 — Predicado de una variable. Una expresión abierta de una variable, tal que la variable en cuestión deba ser tomada de un conjunto universo referencial U, se denomina predicado de una variable. La notación para predicado de una variable sera $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, etc.

■ **Ejemplo 2.12 — Predicado de una variable.** Sea $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Se tienen las expresiones abiertas

$$p(x) : x \text{ es no negativo}$$
$$q(x) : x^2 = 4.$$

Se tiene que

$$p(0) : 0 \text{ es no negativo}$$

lo cual es verdadero, es decir,

$$v(p(0)) = V.$$

Además, el lector puede corroborar fácilmente que $p(1)$, $q(-2)$ y $q(2)$, son expresiones verdaderas mientras que $p(-1)$, $q(-1)$, $q(0)$ y $q(1)$, son expresiones falsas, por lo tanto, $p(x)$ y $q(x)$ son predicados de una variable.

Observación 2.4 Se puede apreciar que para lograr una proposición desde un predicado, se deben restringir las variables, esto se puede lograr cuantificando las variables para las cuales los predicados son verdaderos. A continuación, se definen proposiciones con la ayuda de lo que llamaremos cuantificadores.

Definición 2.8 — Cuantificador Universal. Una expresión que comience con: "para todo", "para cada", "todo", "cada", constituyen en el lenguaje de la lógica un cuantificador universal y se denota por el símbolo $\forall$. La notación

$$\forall x, p(x),$$

se convierte en una proposición.

■ **Ejemplo 2.13 — Cuantificador universal.** Se muestran los siguientes ejemplos:

a) La expresión

$$\text{“Para todo número } x \text{ se cumple } x^2 \geq 0\text{”}$$

se puede denotar como: $\forall x,\ x^2 \geq 0$, la cual determina una proposición verdadera, es decir,

$$v(\forall x,\ x^2 \geq 0) = V.$$

b) La expresión

$$\text{“Para cada número } x \text{ se tiene que } x = -x\text{”}$$

se puede denotar como: $\forall x,\ x = -x$, la cual determina una proposición falsa, es decir,

$$v(\forall x,\ x = -x) = F,$$

pues note que se cumple $0 = -0$, pero esto no significa que “para todo x” se cumpla que $x = -x$, por lo tanto, para que una expresión del tipo $\forall x, p(x)$ sea falsa, basta encontrar un x_0 fijo tal que $p(x_0)$ no se cumpla.

Definición 2.9 — Cuantificador existencial. Una expresión que comience con: “algún”, “algunos”, “existe”, “por lo menos uno”, “al menos uno”, constituyen en el lenguaje de la lógica un cuantificador existencial y se denota por el símbolo $\exists$. La notación

$$\exists x,\ p(x),$$

se convierte en una proposición.

■ **Ejemplo 2.14 — Cuantificador existencial.** Se muestran los siguientes ejemplos:

a) La expresión

$$\text{“existe un número } x \text{ tal que } 4x - 1 = 3\text{”}$$

se denota como: $\exists x,\ 4x - 1 = 3$, la cual determina una proposición verdadera, es decir,

$$v(\exists x,\ 4x - 1 = 3) = V.$$

b) La expresión

$$\text{“existe un número } x \text{ tal que } \frac{1}{x} = 0\text{”}$$

se denota como: $\exists x,\ \dfrac{1}{x} = 0$, la cual determina una proposición falsa, es decir,

$$v\left(\exists x,\ \frac{1}{x} = 0\right) = F.$$

pues note que no existe un número tal que divida al uno y de como resultado cero, dicho de otro modo, para todo número se tiene que $1/x$ es siempre diferente de cero, por lo tanto, para que una expresión del tipo $\exists x, p(x)$ sea falsa, es necesario mostrar que para todo x, se puede deducir que $p(x)$ no se cumple.

2.2.1 Negaciones de los cuantificadores

Dado que los cuantificadores junto a predicados constituyen proposiciones, se pueden determinar sus negaciones mediante

$$\sim (\forall x,\, p(x)) \Leftrightarrow \exists x, \sim p(x), \tag{2.1}$$

$$\sim (\exists x,\, p(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim p(x). \tag{2.2}$$

■ **Ejemplo 2.15 — Negación de cuantificadores.** Ahora, se van a negar proposiciones con cuantificadores.

a) Del Ejemplo 2.13, literal b), se puede escribir:

$$\forall x,\, p(x),$$

donde $p(x) : x = -x$, entonces de (2.1) se tiene que su negación sería

$$\sim (\forall x,\, x = -x) \Leftrightarrow \exists x,\, x \neq -x$$

la cual determina una proposición verdadera. Como se tenía $v(\forall x, x = -x) = F$, es natural entonces escribir

$$v(\exists x, x \neq -x) = V.$$

b) Del Ejemplo 2.14, literal b), se puede escribir:

$$\exists x,\, q(x),$$

donde $q(x) : 1/x = 0$, entonces de (2.2), se tiene que su negación sería

$$\sim \left(\exists x, \frac{1}{x} = 0\right) \Leftrightarrow \forall x, \frac{1}{x} \neq 0$$

la cual determina una proposición verdadera. Como se tenía $v\,(\exists x, 1/x = 0) = F$, es natural entonces escribir

$$v\left(\forall x, \frac{1}{x} \neq 0\right) = V.$$

2.2.2 Propiedades de los cuantificadores

De Morgan
$\sim (\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists x, \sim p(x)$
$\sim (\exists x, p(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim p(x)$
Distributivas
$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x,\ p(x) \wedge \forall x,\ q(x)$
$\exists x[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow (\exists x,\ p(x)) \vee (\exists x,\ q(x))$
$(\forall x,\ p(x)) \vee (\forall x,\ q(x)) \Rightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)]$
$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow (\exists x,\ p(x)) \wedge (\exists x,\ q(x))$
Cuantificadores y valores de verdad
Si $v(p(x)) = V$, entonces $\begin{aligned} v(\forall x, p(x)) &= \forall x, V \\ &= V \\ v(\exists x, p(x)) &= \exists x, V \\ &= V \end{aligned}$
Si $v(p(x)) = F$, entonces $\begin{aligned} v(\forall x, p(x)) &= \forall x, F \\ &= F \\ v(\exists x, p(x)) &= \exists x, F \\ &= F \end{aligned}$

Tabla 2.1: Propiedades de los cuantificadores

■ **Ejemplo 2.16** Se consideran los predicados

$$p(x) : x \geq 0$$

$$q(x) : x < 0,$$

hallar $v(\forall x,\ [p(x) \vee q(x)] \rightarrow ([\forall x,\ p(x)] \vee [\forall x,\ q(x)])$.

Solución: Se tiene que

$$v(\forall x,\ p(x)) = v(\forall x, x \geq 0) = F$$

$$v(\forall x, q(x)) = v(\forall x, x < 0) = F$$

$$v(\forall x, [p(x) \vee q(x)]) = v(\forall x, [x \geq 0 \vee x < 0]) = V,$$

es así que

$$\begin{aligned} v(\forall x, [p(x) \vee q(x)] \rightarrow ([\forall x,\ p(x)] \vee [\forall x, q(x)]) &= (V \rightarrow (F \vee F)) \\ &= (V \rightarrow F) \\ &= F, \end{aligned}$$

lo que indica un buen contraejemplo de la propiedad distributiva.

2.2.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.4 Dados los siguientes predicados de una variable

$$p(x) :\ (x+1)(x-2)(x^2-2) = 0$$

$$q(x) : x \text{ es un número par},$$

hallar:

1. $p(-1)$, $q(-1)$, $v(p(-1))$ y $v(q(-1))$.
2. $p(1)$, $q(1)$, $v(p(1))$ y $v(q(1))$.
3. $p(2)$, $q(2)$, $v(p(2))$ y $v(q(2))$.
4. $p(-2)$, $q(-2)$, $v(p(-2))$ y $v(q(-2))$.
5. $p\left(\sqrt{2}\right)$, $q\left(\sqrt{2}\right)$, $v\left(p\left(\sqrt{2}\right)\right)$ y $v\left(q\left(\sqrt{2}\right)\right)$.

Ejercicio 2.5 Dados los siguientes predicados de una variable

$$r(x) :\ (x+7)(x-5) = 0$$

$$s(x) : x \text{ es un número impar},$$

hallar:

1. $v\,(\forall x, r(x))$.
2. $v\,(\forall x, s(x))$.
3. $v\,(\sim (\forall x, r(x)))$.
4. $v\,(\sim (\forall x, s(x)))$.
5. $v\,(\exists x, r(x))$.
6. $v\,(\exists x, s(x))$.
7. $v\,(\sim (\exists x, r(x)))$.
8. $v\,(\sim (\exists x, s(x)))$.

2.3 Relaciones entre conjuntos

Definición 2.10 — Subconjunto. Se dice que un conjunto A es subconjunto de un conjunto B si todo elemento de A también pertenece a B. Se denota $A \subseteq B$ y simbólicamente se tiene:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \to x \in B).$$

Si A es subconjunto de B ($A \subseteq B$), pero B no es subconjunto de A ($B \nsubseteq A$), se dice que A es **Subconjunto Propio** de B, se representa por:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge \neg(A = B)]$$

Observación 2.5 — Superconjunto. Dado un conjunto universo U, cuando $A \subset B$, significa que A está contenido en B. También se puede escribir $B \supset A$, se lee "B contiene a A" y se dice que B es superconjunto de A. La situación en general puede visualizarse utilizando diagramas de Venn.

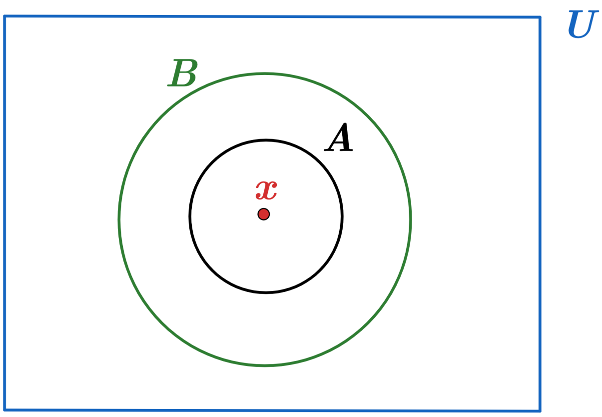


Figura 2.2: $A \subset B$ o $B \supset A$.

■ **Ejemplo 2.17 — Conjunto vacío.** Dado un conjunto A, probar que $\emptyset \subseteq A$.

Solución: Por definición de conjunto vacío 2.3 y condicional, se tiene que

$$\begin{aligned} v(\emptyset \subset A) &\Leftrightarrow v(\forall x, (x \in \emptyset \to x \in A)) \\ &\Leftrightarrow v(\forall x, (\sim (x \in \emptyset) \vee (x \in A))) \\ &\Leftrightarrow v(\forall x, (x \notin \emptyset \vee x \in A)) \\ &\Leftrightarrow v(\forall x, (V \vee x \in A)) \\ &\Leftrightarrow v(\forall x, V) \\ &\Leftrightarrow \forall x,\ V \\ &\Leftrightarrow V. \end{aligned}$$

Definición 2.11 — Conjunto Potencia. Dado un conjunto A. Se define el conjunto potencia de A, denotado por $\mathscr{P}(A)$, como el conjunto de todos los posibles subconjuntos de A, es decir:

$$\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Observación 2.6 — Cardinalidad del conjunto potencia. Dado un conjunto A tal que $\mathrm{Card}(A) < \infty$ entonces

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(A)) = 2^{\mathrm{Card}(A)}.$$

■ **Ejemplo 2.18 — Conjunto Potencia.** Dado el conjunto

$$A = \{\square, \bigcirc, \triangle\}$$

entonces $\mathrm{Card}(A) = 3$, por lo tanto, $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(A)) = 2^3 = 8$. Estos elementos son

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{\square\}, \{\bigcirc\}, \{\triangle\}, \{\square, \bigcirc\}, \{\square, \triangle\}, \{\bigcirc, \triangle\}, A\}.$$

Note que el conjunto vacío y el conjunto en sí, son elementos del conjunto potencia. Además,

$$\{\square, \triangle\} \subset A$$
$$\{\square, \triangle\} \in \mathscr{P}(A).$$

■ **Ejemplo 2.19 — Conjunto potencia del conjunto vacío.** Para el conjunto vacío $\emptyset$, se tiene

$$\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

y esto tiene sentido pues si $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$ (ver 2.3), entonces

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\emptyset)) = 2^{\mathrm{Card}(\emptyset)} = 2^0 = 1,$$

note que

$$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \mathscr{P}(\emptyset)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

lo cual coincide con

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))) = 2^{\mathrm{Card}(\mathscr{P}(A))} = 2^1 = 2.$$

El lector puede animarse a encontrar los cuatro elementos de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))$, pues

$$\operatorname{Card}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))) = 2^{\operatorname{Card}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))} = 2^2 = 4.$$

Definición 2.12 — Igualdad entre conjuntos. Dados los conjuntos A y B. Si se tiene que $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces se dice que los conjuntos son iguales, simbólicamente:

$$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)].$$

■ **Ejemplo 2.20 — Igualdad entre conjuntos.** Dados los conjuntos

$$A = \{\text{las vocales en el idioma castellano}\},$$
$$B = \{a, e, i, o, u\},$$

se aprecia que $A \subset B$ y además $B \subset A$, luego, por definición de igualdad entre conjuntos se deduce que

$$A = B.$$

Definición 2.13 — Conjuntos disjuntos e intersecantes. Dados los conjuntos A y B. Se dicen que son disjuntos si no comparten elementos en común; mientras que si comparten al menos un elemento se denominan intersecantes.

■ **Ejemplo 2.21 — Conjuntos disjuntos e intersecantes.** Dados los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$B = \{-1, -2, -3, -4, -5\},$$
$$C = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

se aprecia que A y B no comparten elementos en común y por lo tanto A y B son conjuntos disjuntos. Por otra parte, A y C tienen algunos elementos en común y por lo tanto A y C son conjuntos intersecantes. Nótese además, que B y C son conjuntos intersecantes.

Definición 2.14 — Diagrama de Venn. Un diagrama de Venn utiliza círculos que se intersectan, u otras formas, para representar visualmente las relaciones lógicas entre dos o más grupos de elementos.

2.3.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.6 Dados los conjuntos

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$B = \{0, 1, 2, 3\},$$

realizar un diagrama de Venn y hallar:

1. El conjunto $X \subset A$ tal que $X \subset B$.
2. El conjunto $Y \subset B$ tal que $Y \subset A$.
3. Concluir que $X = Y$.
4. $\text{Card}(B)$, $\text{Card}(\mathscr{P}(B))$ y $\mathscr{P}(B)$.

Ejercicio 2.7 Dado un conjunto A cualquiera, hallar:

1. $v(A \in A)$.
2. $v(A \subset A)$.
3. $v(A \supset A)$.
4. $v(A \in \mathscr{P}(A))$.
5. $v(A \subset \mathscr{P}(A))$.
6. $v(A \supset \mathscr{P}(A))$.

Ejercicio 2.8 Hallar $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))))$.

Ejercicio 2.9 Dado el conjunto

$$A = \{a, 3, \square\},$$

hallar $\mathscr{P}(A)$.

2.4 Álgebra de conjuntos

El Álgebra de conjuntos se trata de operar con conjuntos y utilizar estas operaciones fundamentales (Unión, Intersección, Diferencia y Complemento) para simplificar expresiones complejas con conjuntos.

2.4.1 Operaciones entre conjuntos

Para establecer el Álgebra de conjuntos se definen las siguientes operaciones:

Definición 2.15 — Unión. Dado los conjuntos A y B. Se define la unión entre conjuntos como un nuevo conjunto de la siguientes manera y cual esta denotado por:

$$A \cup B = \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

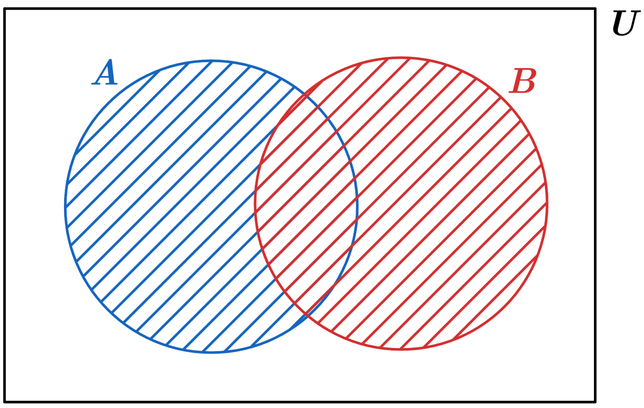


Figura 2.3: Diagrama de Venn de la unión entre conjuntos.

Definición 2.16 — Intersección. Dados los conjuntos A y B. Se define la intersección entre A y B, denotada por $A \cap B$, como un nuevo conjunto de la siguientes manera:

$$A \cap B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

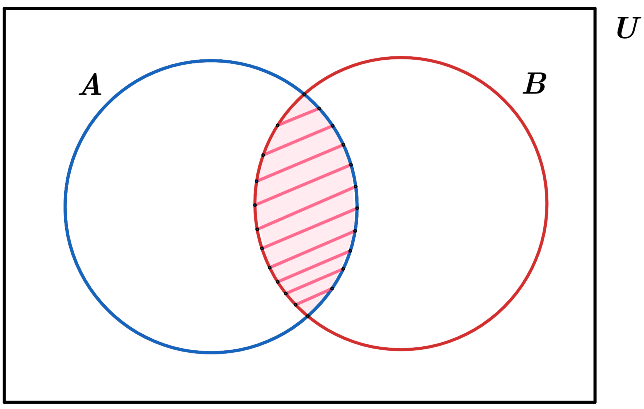


Figura 2.4: Diagrama de Venn de la intersección entre conjuntos.

Observación 2.7 — Conjuntos disjuntos. Otra definición para conjuntos disjuntos es:

$$(A \text{ y } B \text{ son disjuntos}) \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Observación 2.8 — Conjuntos intersecantes. Otra definición para conjuntos intersecantes es:

$$(A \text{ y } B \text{ son intersecantes}) \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

Definición 2.17 — Diferencia. Dados los conjuntos A y B. Se define la diferencia de A y B, denotada por $A \setminus B$, como un nuevo conjunto de la siguientes manera:

$$A \setminus B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

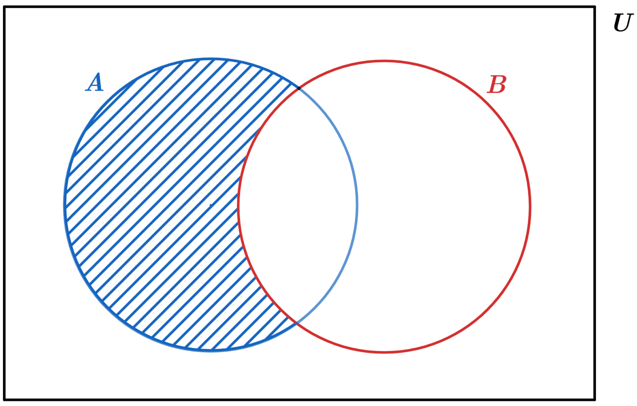


Figura 2.5: Diagrama de Venn de la diferencia entre conjuntos.

Observación 2.9 — No conmutatividad de la diferencia. Si se considera la diferencia de B y A:

$$B \setminus A = \{x \in U \mid (x \in B) \wedge (x \notin A)\},$$

se tiene que

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

Definición 2.18 — Diferencia simétrica. Dados los conjuntos A y B. Se define la diferencia simétrica entre A y B, denotada por $A \triangle B$, como un nuevo conjunto de la siguiente manera:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

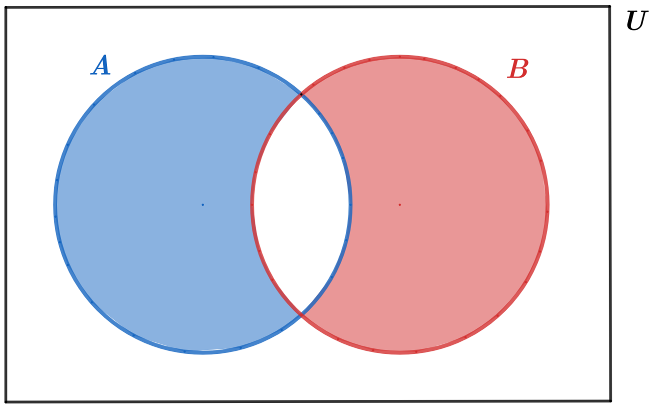


Figura 2.6: Diagrama de Venn de la diferencia simétrica entre conjuntos.

Definición 2.19 — Complemento. Dado el conjunto A. Se define el complemento de A, denotado por A^c, como un nuevo conjunto de la siguiente manera:

$$A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

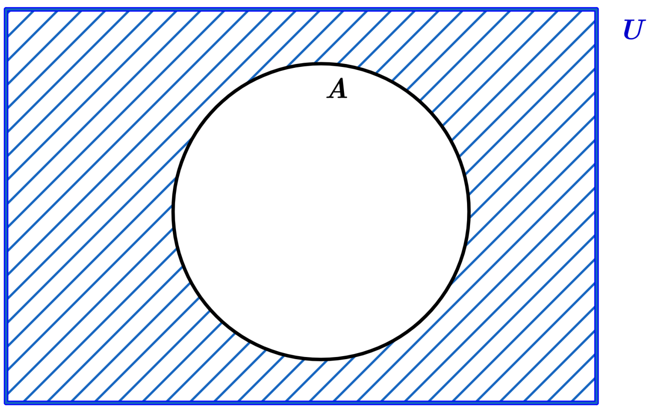


Figura 2.7: Diagrama de Venn del complemento de un conjunto.

■ **Ejemplo 2.22 — Operaciones con conjuntos.** Dado el conjunto universo

$$U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

y los conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{-3, -2, -1, 0, 1\},$$

Hallar $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\triangle B$, A^c, B^c, $A\cup A$, $A\cap A$, $A\cup\emptyset$, $A\cup U$, $A\cap\emptyset$, $A\cap U$, $(A^c)^c$, $(A\cup B)^c$, $(A\cap B)^c$, $A^c\cap B^c$ y $A^c\cup B^c$.

Solución: El correspondiente diagrama de Venn es

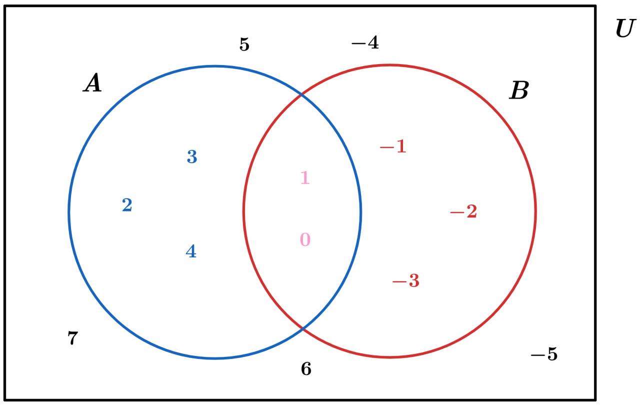


Figura 2.8: Diagrama de Venn del Ejemplo 2.22

por lo tanto

- $A\cup B=\{-3,\,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,\,4\}$.
- $A\cap B=\{0,\,1\}$.
- $A\setminus B=\{2,\,3,\,4\}$.
- $B\setminus A=\{-3,\,-2,\,-1\}$.
- $A\triangle B=\{-3,\,-2,\,-1,\,2,\,3,\,4\}$.
- $A^c=\{-5,\,-4,\,-3,\,-2,\,-1,\,5,\,6,\,7\}$.
- $B^c=\{-5,\,-4,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7\}$.
- $A\cup A=\{0,\,1,\,2,\,3,\,4\}=A$.
- $A\cap A=\{0,\,1,\,2,\,3,\,4\}=A$.
- $A\cup\emptyset=\{0,\,1,\,2,\,3,\,4\}=A$.
- $A\cup U=\{-5,\,-4,\,-3,\,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7\}=U$.
- $A\cap\emptyset=\{\,\}=\emptyset$.
- $A\cap U=\{0,\,1,\,2,\,3,\,4\}=A$.
- $(A^c)^c=\{-5,\,-4,\,-3,\,-2,\,-1,\,5,\,6,\,7\}^c=\{0,\,1,\,2,\,3,\,4\}=A$.
- $(A\cup B)^c=\{-3,\,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,\,4\}^c=\{-5,\,-4,\,5,\,6,\,7\}$.
- $(A\cap B)^c=\{0,\,1\}^c=\{-5,\,-4,\,-3,\,-2,\,-1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7\}$.
- $$\begin{aligned} A^c\cap B^c &= \{-5,\,-4,\,-3,\,-2,\,-1,\,5,\,6,\,7\}\cap\{-5,\,-4,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7\}\\ &= \{-5,\,-4,\,5,\,6,\,7\}\end{aligned}$$

$= (A \cup B)^c.$

- $A^c \cup B^c = \{-5, -4, -3, -2, -1, 5, 6, 7\} \cup \{-5, -4, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

  $= \{-5, -4, -3, -2, -1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

  $= (A \cap B)^c.$

2.4.2 Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Las operaciones entre conjuntos y algunas de sus más importantes propiedades se incluyen en las denominadas Leyes del Álgebra de Conjuntos. A continuación, se presentan las de uso más frecuente:

UNIÓN		**INTERSECCIÓN**
$A \cup B = B \cup A$	Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Asociativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup A = A$	Idempotencia	$A \cap A = A$
$A \cup \emptyset = A$	Identidad	$A \cap U = A$
$A \cup U = U$	Absorción	$A \cap \emptyset = \emptyset$

Tabla 2.2: Leyes de las Operaciones Fundamentales Unión e Intersección.

Observación 2.10 Note que de las propiedades de la unión e intersección de conjuntos se tiene las siguientes relaciones de conjuntos, $A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset A \cup B$

$\emptyset^c = U$ $U^c = \emptyset$	Complementación
$(A^c)^c = A$	Doble Complementación o Involutiva
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivas
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	De Morgan
$A \cup A^c = U$	
$A \cap A^c = \emptyset$	
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (B^c \subseteq A^c)$	
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A^c \cup B = U)$	
$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$	

$(A \cup B = U) \Leftrightarrow (A^c \subseteq B)$	
$(A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow (A \subseteq B^c)$	
$[(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)] \Leftrightarrow [(A \cup B) \subseteq C]$	
$[(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cap C)]$	Transitividad
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow [(A \cap B^c) \subseteq \emptyset]$	Reducción al absurdo
$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$ $(A = B) \Leftrightarrow (B = A)$	Equivalencia
$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (A \neq \emptyset) \wedge (B \neq \emptyset)$ $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \wedge (B = \emptyset)$	
$(A \cap B = U) \Leftrightarrow (A = U) \wedge (B = U)$	
$\emptyset \subseteq A$	
$A \subseteq A$	
$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$	Transitividad
$[(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)] \Rightarrow [(A \cap C) \wedge (B \cap D)]$	
$[(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)] \Rightarrow [(A \cup C) \wedge (B \cup D)]$	

Tabla 2.3: Complemento, De Morgan y otras leyes.

$A \setminus B \subseteq A$ $(A \setminus B) \cap = \emptyset$ $A \setminus A = \emptyset$ $A \setminus \emptyset = A$ $A \setminus B = A \cap B^c$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	Diferencia
$A^c \triangle B^c = A \triangle B$ $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$	Diferencia simétrica

Tabla 2.4: Diferencia y diferencia simétrica.

■ **Ejemplo 2.23 — Diferencia de conjuntos.** Demuestre que $A \setminus B = A \cap B^c$.

Solución: De la definición de intersección, diferencia y complemento de conjuntos se tiene

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B^c. \end{aligned}$$

Observación 2.11 — Cardinalidad y operaciones. Para conjuntos finitos A y B, se tiene que:

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

El estudiante está listo ahora para demostrar igualdades mediante las propiedades de las operaciones entre conjuntos o simplificar expresiones conjuntistas.

■ **Ejemplo 2.24** Demuestre las siguientes igualdades utilizando el álgebra de conjuntos.

a) $(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C$.

Solución:

$$\begin{aligned} (A \cap C) \setminus (B \cap C) &= (A \cap C) \cap (B \cap C)^c && \text{Definición de diferencia} \\ &= (A \cap C) \cap (B^c \cup C^c) && \text{Morgan} \\ &= [(A \cap C) \cap B^c] \cup [(A \cap C) \cap C^c] && \text{Distributiva} \\ &= [A \cap (C \cap B^c)] \cup [A \cap (C \cap C^c)] && \text{Asociativa} \\ &= [A \cap (B^c \cap C)] \cup [A \cap \emptyset] && \text{Conmutativa} \\ &= [(A \cap B^c) \cap C] \cup \emptyset && \text{Asociativa y Absorción} \\ &= (A \setminus B) \cap C && \text{Definición de diferencia e identidad.} \end{aligned}$$

b) $(A \cap B)^c \setminus (B^c \setminus A) = A^c \triangle B^c$.

Solución:

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c \setminus (B^c \setminus A) &= (A^c \cup B^c) \cap (B^c \cap A^c)^c && \text{Definición de diferencia} \\ &= (A^c \cup B^c) \cap (B \cup A) && \text{Morgan} \\ &= [(A^c \cup B^c) \cap B] \cup [(A^c \cup B^c) \cap A] && \text{Distributiva} \\ &= [(A^c \cap B) \cup (B^c \cap B)] \cup [(A^c \cap A) \cup (B^c \cap A)] && \text{Distributiva} \\ &= [(A^c \cap B) \cup \emptyset] \cup [\emptyset \cup (B^c \cap A)] && \text{Morgan} \end{aligned}$$

$$= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) \qquad \text{Identidad}$$

$$= (A^c \setminus B^c) \cup (B^c \setminus A^c) \qquad \text{Definición de Diferencia}$$

$$= A^c \triangle B^c \qquad \text{Definición de Diferencia Simétrica}$$

2.4.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.10 Demostrar mediante la definición de las operaciones y la inclusión que

1. $(A \cap B) \subset A$.
2. $A \subset (A \cup B)$.
3. $(A \cap B) \subset A \cup B$.

Ejercicio 2.11 Sea $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dados los conjuntos

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$
$$B = \{0, 1, 2, 3\},$$

realizar un diagrama de Venn para hallar:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$.
3. $A \setminus B$.
4. $B \setminus A$.
5. $A \triangle B$.
6. A^c.
7. B^c.
8. $A \cup A$.
9. $A \cap A$.
10. $A \cup \emptyset$.
11. $A \cup U$.
12. $A \cap \emptyset$.
13. $A \cap U$.
14. $(A^c)^c$.
15. $(A \cup B)^c$.
16. $(A \cap B)^c$.

17. $A^c \cap B^c$.
18. $A^c \cup B^c$.

Ejercicio 2.12 Demuestre las siguientes igualdades utilizando el álgebra de conjuntos.

1. $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B \cup C) \setminus (C \cap U)$.
2. $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B)^c = [(A \cup C) \setminus B] \cup [(B \cup C) \setminus A]$.
3. $(A \cap B) \setminus (A \cup B) = U \setminus A^c$.
4. $A^c \triangle B^c = (A^c \cup B^c) \setminus (B^c \setminus A)$.
5. $[A^c \cup (B \cup A)^c] \cup A = U$.
6. $[A \cap (B \triangle C)] \setminus [(A \cap B) \triangle (A \cap C)] = \emptyset$.

2.5 Aplicaciones de conjuntos

Utilizando la cardinalidad de un conjunto es posible resolver problemas de la vida real.

■ **Ejemplo 2.25 — Aplicación con dos conjuntos.** Treinta alumnos del ISUCT están matriculados en al menos una de las dos materias: Matemáticas y Física. El número de matriculados en las dos materias es 7 y Física tiene 12 alumnos matriculados. Determinar:

a) ¿Cuántos estudiantes no están matriculados en ninguna de las dos materias?
b) ¿Cuántos estudiantes están matriculados solo en Matemáticas?
c) ¿Cuántos estudiantes están matriculados en Matemáticas?
d) ¿Cuántos estudiantes están matriculados solo en Física?

Solución: Se realiza un diagrama de Venn que contemple la situación:

F: Estudiantes matriculados en Física.
M: Estudiantes matriculados en Matemáticas.
U: Los treinta estudiantes del ISUCT considerados.

Luego, se analiza el diagrama de Venn y se obtiene

- $\text{Card}(U) = 30$
- $\text{Card}(M \cup F) = 30$
- $\text{Card}(M \cap F) = 7$
- $\text{Card}(F) = 12$

por lo tanto,

a) $\text{Card}(M \cup F)^c = 0$
b) $\text{Card}(M \setminus F) = 18$
c) $\text{Card}(M) = 25$

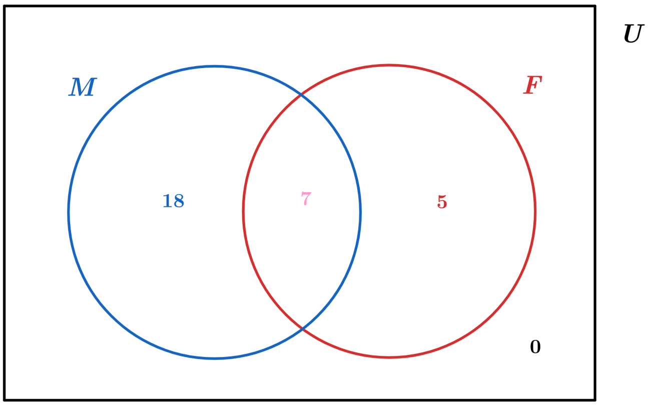


Figura 2.9: Diagrama de Venn del Ejemplo 2.25

d) $\text{Card}(F \setminus M) = 5$

■ **Ejemplo 2.26 — Aplicación con tres conjuntos.** A un examen de Cálculo se presentan 70 alumnos. El examen consta de tres preguntas, cada una de las cuales debía responderse con un si o un no y solo una de estas respuestas es correcta. Si todos los alumnos respondieron y se sabe que:

- 20 alumnos respondieron bien la primera pregunta.
- 25 alumnos respondieron bien la segunda pregunta.
- 24 alumnos respondieron bien la tercera pregunta.
- 2 alumnos respondieron mal solo a la tercera pregunta.
- 3 alumnos respondieron mal solo a la segunda pregunta.
- 1 alumno respondió mal solo a la primera pregunta.
- 5 alumnos respondieron bien a las tres preguntas.

Determinar:

a) ¿Cuántos alumnos respondieron bien al menos una pregunta?

b) ¿Cuántos alumnos respondieron mal las tres preguntas?

c) ¿Cuántos alumnos respondieron bien la primera y segunda pregunta?

d) ¿Cuántos alumnos respondieron bien la primera y tercera pregunta?

e) ¿Cuántos alumnos respondieron bien la segunda y tercera pregunta?

Solución: Se realiza un diagrama de Venn que contemple la situación:

P: Responde bien la primera pregunta.

S: Responde bien la segunda pregunta.

T: Responde bien la tercera pregunta.

U: Los 70 alumnos que dan el examen de Cálculo.

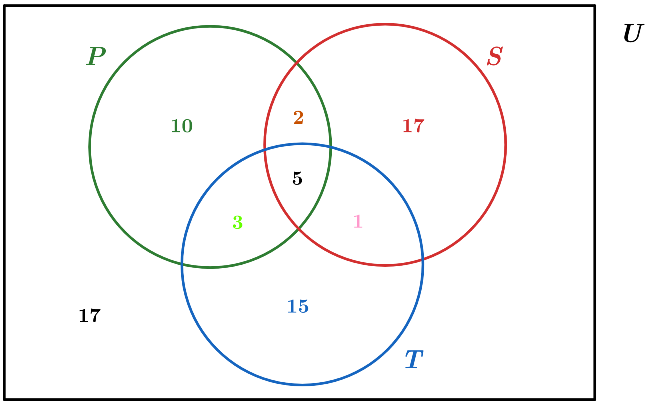


Figura 2.10: Diagrama de Venn del Ejemplo 2.26

Luego, se analiza el diagrama de Venn y se obtiene

- $\text{Card}(U) = 70$
- $\text{Card}(P) = 20$
- $\text{Card}(S) = 25$
- $\text{Card}(T) = 24$
- $\text{Card}((P \cap S) \setminus T) = 2$
- $\text{Card}((P \cap T) \setminus S) = 3$
- $\text{Card}((S \cap T) \setminus P) = 1$
- $\text{Card}(P \cap S \cap T) = 5$

por lo tanto,

a) $70 - 17 = 53$

b) 17

c) 7

d) 8

e) 6

2.5.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.13 En cierta comunidad, 75 % de las personas fuman, 42 % tienen cáncer pulmonar, y 24 % fuma y tiene cáncer pulmonar. Si F y C denotan los conjuntos de fumar y tener cáncer pulmonar, determine la cantidad de personas que:

a) No fume o tenga cáncer pulmonar.

b) No fume ni tenga cáncer pulmonar.

c) No fume o no tenga cáncer pulmonar.

d) Fume o no tenga cáncer pulmonar.

e) Fume pero no tenga cáncer pulmonar.

f) No fume y no tenga cáncer pulmonar.

Ejercicio 2.14 De 333 maestros de una institución educativa se tienen los siguientes datos: 216 son de tiempo completo, 191 hablan inglés, 227 tienen por lo menos maestría, 73 son de tiempo completo y hablan inglés, 111 hablan el inglés y tienen por lo menos una maestría, 144 son de tiempo completo y tienen por lo menos maestría; y todos tienen al menos una de las características.

Halle el número de maestros que tengan las tres características anteriores.

Ejercicio 2.15 En una encuesta aplicada a 100 estudiantes se determinó que 50 practican básquet, 40 practican fútbol, 45 practican atletismo, 20 practican básquet y fútbol, 20 básquet y atletismo, 15 fútbol y atletismo, y 5 practican los tres deportes. Entonces es falso que:

a) 35 practican fútbol o atletismo pero no básquet.

b) 10 practican básquet y fútbol pero no atletismo.

c) 75 practican básquet o atletismo.

d) 15 sólo practican básquet.

e) 15 no practican estos tres deportes.

Ejercicio 2.16 En una encuesta a 50 estudiantes del nivel cero, 29 son hombres y 23 son bachilleres técnicos; de estos últimos 9 son bachilleres técnicos en comercio, 7 de las mujeres no son bachilleres técnicos y 21 de los hombres no son bachilleres en comercio.

- Halle además cuántos hombres no son bachilleres técnicos.
- Determine cuántas mujeres son bachilleres técnicos pero no en comercio.

Ejercicio 2.17 En una encuesta a 99 inversionistas, se observa lo siguiente:

- 22 tienen valores y bonos.
- 14 poseen solamente valores.
- 12 son propietarios sólo de acciones y bonos.
- 14 poseen acciones y valores.
- 6 sólo poseen acciones.

- 71 son propietarios de bonos.

Cada uno de los 99 invierte por lo menos en algo. Halle el número de inversionistas que:

a) Tienen al menos una.
b) Tienen, cuanto mucho, dos de ellas.
c) Tienen sólo una de ellas.
d) Tienen valores, bonos y acciones.

II ÁLGEBRA EN LOS NÚMEROS REALES

3. Los Números Reales

Autores:
MSc. Emilio Cedeño
Ing. Edgar Guamán
MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro
Ing. Kevin Astudillo

Una introducción clásica a los números reales es mostrar las diferentes generalizaciones del concepto de número que hubo a lo largo de la historia, lo cual se abordará en esta sección siguiendo la misma línea con aportes adicionales.

En principio, hay que tener en cuenta el conjunto de números primigenio, el cual es la base de todo número conocido. Se trata del conjunto binario $\{0,1\}$ tal que sus elementos pueden ser interpretados filosóficamente como la ausencia y presencia de algo.

Luego, se conciben los números naturales definidos como $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ que junto al número cero conforman lo necesario para satisfacer la acción de contar. Con la necesidad de darle sentido a ecuaciones como $x+1=0$ y pensando en el hecho de que el conteo de cualquier cosa se aumenta pero otras veces disminuye, se reconoce la necesidad de generalizar los números naturales y se empieza a hablar de los números enteros definidos como $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Más adelante, también se tuvo el deseo de darle sentido a ecuaciones como $2x-1=0$ y esta vez, pensando en que la acción de partir y repartir, da paso a una nueva generalización de números denominados los números racionales definidos como $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\right\}$.

Por mucho tiempo los números racionales reinaron pues se hablaba de conceptos de proporción y belleza en la naturaleza donde no se veía la necesidad de indagar más, sin embargo, surgieron problemas que no se pudieron ignorar, el más conocido se trataba de hallar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado unitario, aplicando el teorema de pitágoras y en la notación moderna, se conoce que el valor de tal diagonal es $\sqrt{2}$, el cual se escapa del conjunto $\mathbb{Q}$ que era considerado como el conjunto supremo de números. Entonces, fue y es necesario definir los números que no son racionales, es decir, los números que no se pueden poner en razón de dos números enteros denominados los números irracionales $\mathbb{I}$. La unión de ambos conjuntos se les denomina los números reales que son el objeto de estudio del siguiente capítulo, es decir, se define los números reales como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Si bien es cierto este capítulo trata del estudio de los números reales, pero es acertado divulgar otra generalización de números, denominados los números complejos. Estos números son el resultado de tratar con ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$, los cuales también tuvieron una historia dramática siendo incluso el resultado de despotismo por parte de la comunidad matemática llamándolos números imaginarios, nombre que también prevalece hoy en día. Se espera que el álgebra de estos números también sean abarcados en una versión posterior de este texto ya que al día de hoy queda claro la importancia indiscutible de estos números, los definimos como $\mathbb{C} = \left\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}\right\}$.

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se definen las operaciones suma y multiplicación usuales como las vistas desde la escuela, es decir, que para todo $x,\, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x + y \in \mathbb{R}$ y $x \cdot y \in \mathbb{R}$. El objetivo inmediato es mostrar tres axiomas (características no demostrables de donde se desprenderán las proposiciones y teoremas), los cuales proporcionarán la definición axiomática de los números reales necesaria para el entendimiento profundo de este conjunto. Estos axiomas son los axiomas de cuerpo, axiomas de orden y axioma de completitud.

3.1 Axiomas de cuerpo

Definición 3.1 — Cuerpo algebraico. Sea X un conjunto dotado de dos operaciones $+$ y $\cdot$, denominadas suma y multiplicación donde se cumplen las siguientes propiedades:

- **Cerradura para la adición y multiplicación:**

$$\forall x, y \in X: \quad x + y \in X, \quad x \cdot y \in X$$

- **Conmutatividad para la adición y multiplicación:**

$$\forall x,y \in X: \quad x+y=y+x, \quad x\cdot y = y\cdot x$$

- **Asociatividad para la adición y multiplicación:**

$$\forall x,y,z \in X: \quad (x+y)+z=y+(x+z), \quad (x\cdot y)\cdot z = y\cdot (x\cdot z)$$

- **Existencia de elementos neutros para la adición y multiplicación:**

$$\forall x \in X,\ \exists\{0,1\} \in X: \quad x+0=0+x=x, \quad x\cdot 1 = 1\cdot x = x$$

- **Existencia de elementos opuestos para la adición y multiplicación:**

$$\forall x \in X,\ \exists -x \in X: \quad x+(-x)=(-x)+x=0$$

$$\forall x \in X\setminus\{0\},\ \exists x^{-1} \in X: \quad x\cdot (x^{-1}) = (x^{-1})\cdot x = 1$$

- **Distributividad:**

$$\forall x,y,z \in X: \quad x\cdot (y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

Se dice entonces que X es un cuerpo algebraico dotado de las operaciones suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$. Se denota entonces a este cuerpo algebraico como $(X,+,\cdot)$.

Lo que se aprende a lo largo de los años en primaria, secundaria y/o grados superiores, indica que efectivamente el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con las operaciones suma y multiplicación componen el cuerpo algebraico $(\mathbb{R},+,\cdot)$. Así, se dice que las propiedades que corresponden a la Definición 3.1, son los denominados axiomas de cuerpo de los números reales. A continuación, se detallan mediante ejemplos.

Axioma 3.1 — Cerradura para la adición y multiplicación.

$$\forall x,y \in \mathbb{R}: \quad x+y \in \mathbb{R}, \quad x\cdot y \in \mathbb{R}.$$

■ **Ejemplo 3.1** Para $\sqrt{2}, -7 \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\sqrt{2}+(-7) = -7+\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2}\cdot(-7) = -7\sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

Axioma 3.2 — Conmutatividad para la adición y multiplicación.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x+y=y+x, \quad x\cdot y=y\cdot x.$$

■ **Ejemplo 3.2** Para $3, -5 \in \mathbb{R}$, se tiene

$$3+(-5)=(-5)+3, \quad 3\cdot(-5)=(-5)\cdot 3.$$

Axioma 3.3 — Asociatividad para la adición y multiplicación.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x+y)+z=y+(x+z), \quad (x\cdot y)\cdot z=y\cdot(x\cdot z).$$

■ **Ejemplo 3.3** Para $4, \sqrt{3}, -7 \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\left[4+\sqrt{3}\right]+(-7)=4+\left[\sqrt{3}+(-7)\right], \quad \left[4\cdot\sqrt{3}\right]\cdot(-7)=4\cdot\left[\sqrt{3}\cdot(-7)\right].$$

Axioma 3.4 — Existencia de elementos neutros para la adición y multiplicación.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \{0,1\} \in \mathbb{R}: \quad x+0=0+x=x, \quad x\cdot 1=1\cdot x=x.$$

■ **Ejemplo 3.4** Para $-\sqrt[3]{7} \in \mathbb{R}$, existe $0, 1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(-\sqrt[3]{7}\right)+0=0+\left(-\sqrt[3]{7}\right)=-\sqrt[3]{7}, \quad \left(-\sqrt[3]{7}\right)\cdot 1=1\cdot\left(-\sqrt[3]{7}\right)=-\sqrt[3]{7}.$$

Axioma 3.5 — Existencia de elementos opuestos para la adición y multiplicación.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R}: \quad x+(-x)=(-x)+x=0,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}: \quad x\cdot(x^{-1})=(x^{-1})\cdot x=1.$$

■ **Ejemplo 3.5** Para $-\frac{2\sqrt{2}}{3} \in \mathbb{R}$, existe $-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ tal que

$$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=0,$$

y existe $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 1.$$

Axioma 3.6 — Distributividad.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

■ **Ejemplo 3.6** Para $-2, \frac{3}{7}, \sqrt{5} \in \mathbb{R}$, se tiene

$$(-2) \cdot \left[\frac{3}{7} + \sqrt{5}\right] = (-2) \cdot \frac{3}{7} + (-2) \cdot \sqrt{5}.$$

Se han detallado los axiomas de lo números reales, los cuales son suficientes para deducir y demostrar todas las propiedades algebraicas de los números reales. A continuación, se presentan algunos teoremas con sus respectivas demostraciones.

Teorema 3.7 — Unicidad del neutro aditivo. En el Axioma 3.4, el cero es único. Este elemento es conocido como el neutro aditivo de los números reales.

Demostración: Por reducción al absurdo, suponga que el ”0” del Axioma 3.4 no es único; y que existe otro número que también satisface el Axioma 3.4 por ejemplo el $0^{'} \in \mathbb{R}$, es decir, $0^{'} \neq 0$ y además por el Axioma 3.4 se tiene para todo $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x,$$

en particular como $0^{'} \in \mathbb{R}$ se tiene

$$0^{'} + 0 = 0 + 0^{'} = 0^{'}. \tag{3.1}$$

Como también hemos supuesto que $0' \in \mathbb{R}$ también satisface el Axioma 3.4, se tiene en particular, como $0 \in \mathbb{R}$ se sigue

$$0 + 0^{'} = 0^{'} + 0 = 0. \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2), se tiene al comparar que $0^{'} = 0$, lo cual contradice con la suposición inicial de que $0^{'} \neq 0$; esto indica que el cero considerado en el Axioma 3.4 es único.

Teorema 3.8 — Unicidad del neutro multiplicativo. En el Axioma 3.4, el uno es único. Este elemento es conocido como el neutro multiplicativo de los números reales.

La demostración de este teorema es análoga al anterior y se propone como ejercicio para el lector.

Teorema 3.9 — Unicidad del opuesto aditivo. En el Axioma 3.5, el $-x$ es único. Este elemento es conocido como el opuesto aditivo de x.

Demostración: Sea $x \in \mathbb{R}$, suponga que en el Axioma 3.5 existen dos opuestos aditivos de x, es decir, existen $y, z \in \mathbb{R}$ tal que $y \neq z$ y por el Axioma 3.5 se cumple

$$x + y = y + x = 0 \tag{3.3}$$

y además

$$x + z = z + x = 0. \tag{3.4}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
y &= y + 0 && \text{Axioma 3.4} \\
&= y + (x + z) && (3.4) \\
&= (y + x) + z && \text{Axioma 3.3} \\
&= 0 + z && (3.3) \\
&= z, && \text{Axioma 3.4}
\end{aligned}$$

se tiene así que $y = z$, lo cual contradice nuestra suposición, esto indica que el $-x$ considerado en el Axioma 3.5 es único.

Teorema 3.10 — Unicidad del inverso multiplicativo. En el Axioma 3.5, el x^{-1} es único. Este elemento es conocido como el opuesto multiplicativo de x.

La demostración de este teorema es análoga al anterior y se propone como ejercicio para el lector.

Teorema 3.11 — Ley cancelativa de la adición. Sean a, b, c números reales. Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

Demostración: Se tiene directamente por hipótesis y los axiomas de cuerpo de los números reales que

$$\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{Axioma 3.4} \\
&= a + [c + (-c)] && \text{Axioma 3.5} \\
&= (a + c) + (-c) && \text{Axioma 3.3} \\
&= (b + c) + (-c) && \text{Por hipótesis} \\
&= b + [c + (-c)] && \text{Axioma 3.3} \\
&= b + 0 && \text{Axioma 3.5} \\
&= b, && \text{Axioma 3.4}
\end{aligned}$$

así, se concluye que si $a+c=b+c$, entonces $a=b$.

Corolario 3.12 Para todo $x\in\mathbb{R}$, se tiene $-(-x)=x$.

Demostración: Sea $x\in\mathbb{R}$ fijo pero arbitrario, por el Axioma 3.4 se tiene

$$-(-x)+(-x)=0 \tag{3.5}$$

$$x+(-x)=0, \tag{3.6}$$

de (3.5) y (3.6) se tiene

$$-(-x)+(-x)=x+(-x)$$

luego, por la ley cancelativa se tiene

$$-(-x)=x,$$

como x es fijo pero arbitrario, se concluye que para todo $x\in\mathbb{R}$, se tiene $-(-x)=x$.

Teorema 3.13 — Ley cancelativa de la multiplicación. Sean a,b,c números reales, donde $c\neq 0$. Si $ac=bc$, entonces $a=b$.

La demostración de este teorema es análoga al Teorema 3.11 y se propone como ejercicio para el lector.

Corolario 3.14 Para todo $x\in\mathbb{R}$, donde $x\neq 0$, se tiene $\left(x^{-1}\right)^{-1}=x$.

La demostración de este corolario es análoga al Corolario 3.12 y se propone como ejercicio para el lector.

Observación 3.1 Gracias al Axioma 3.3, se define la suma de tres números reales como

$$x+y+z=x+(y+z)=(x+y)+z,$$

así mismo, se puede definir la multiplicación de tres números reales como

$$x\cdot y\cdot z=x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z.$$

La suma y multiplicación de n números reales se sigue se manera similar.

Definición 3.2 — Diferencia de números reales. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, se denota la diferencia entre a y b como $a-b$ y se define de la siguiente manera

$$a-b=a+(-b),$$

donde $-b$ es el opuesto aditivo de b.

Definición 3.3 — División de números reales. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se denota la división de a por b como $\frac{a}{b}$ y se define de la siguiente manera

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1},$$

donde b^{-1} es el opuesto multiplicativo de b.

Teorema 3.15 — Multiplicación por cero. Sea $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $a \cdot 0 = 0$.

Demostración: Se tiene directamente por los axiomas de cuerpo que

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot (0+0) && \text{Axioma 3.4} \\ a \cdot 0 &= a \cdot 0 + a \cdot 0 && \text{Axioma 3.6} \\ a \cdot 0 + 0 &= a \cdot 0 + a \cdot 0 && \text{Axioma 3.4} \\ 0 &= a \cdot 0. && \text{Teorema 3.11} \end{aligned}$$

Observación 3.2 El Teorema 3.15 es de gran importancia, pues indica la razón por la cuál el cero no puede tener inverso multiplicativo, pues de tenerlo existiría 0^{-1} tal que $0 \cdot 0^{-1} = 1$ por un lado y por otro lado $0 \cdot 0^{-1} = 0$ por lo que al comparar se tendría $1 = 0$, lo cuál contradice las bases de nuestra teoría.

3.1.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1 — Leyes de signos. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar las siguientes propiedades de correspondientes a las leyes de signos en los números reales:

1. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
2. $(-a)(-b) = ab$.

Ejercicio 3.2 — Propiedades complementarias. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demostrar las siguientes propiedades de los números reales:

1. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$.
3. $-(a+b) = -a-b$.
4. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
5. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

6. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$, con $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

3.2 Axiomas de orden

Al continuar el estudio de los números reales se vuelve indispensable establecer un orden a dichos números, con el objetivo de poder decir cuando un número real es mayor que otro o cuando no lo es, para lo cual, es preciso establecer los axiomas de orden de los números reales.

Definición 3.4 — Orden en los números reales. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y el signo $\leq$ una relación binaria tal que es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple:

- $a \leq a$. (Reflexividad)
- Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$. (Antisimetría)
- Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$. (Transitividad)

Entonces, la dupla $(\mathbb{R}, \leq)$ corresponde al conjunto ordenado ascendentemente de los números reales o también se dice el orden de menor a mayor en los números reales. Para $a \leq b$ se dice que a es menor o igual que b.

■ **Ejemplo 3.7 — Orden entre algunos números reales.** Sean los números reales

$$2, -5, \sqrt{2}, \pi, -10, 0, 7, \frac{4}{2}.$$

Ordenarlos utilizando la relación de orden dada en la Definición 3.4.

Solución: Utilizando la relación de orden dada en Definición 3.4 se tiene

$$-10 \leq -5 \leq 0 \leq \sqrt{2} \leq 2 \leq \frac{4}{2} \leq \pi \leq 7,$$

de hecho, existe otra ordenación posible utilizando la Definición 3.4 la cual quedaría

$$-10 \leq -5 \leq 0 \leq \sqrt{2} \leq \frac{4}{2} \leq 2 \leq \pi \leq 7.$$

Observación 3.3 — Ordenación descentente. El conjunto de los números reales ordenado descendentemente también se puede definir utilizando el símbolo $\geq$ el cual se denota $a \geq b$ si a es mayor o igual que b y se define como

$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a.$$

Por la equivalencia anterior, se dice sencillamente que el conjunto de los números reales es ordenado sin mayores complicaciones.

Observación 3.4 — Relación del menor igual con el estrictamente menor. Se escribirá

$$(a \leq b) \Leftrightarrow (a < b \vee a = b)$$

donde $<$ corresponde al orden estricto entre dos números reales cualquiera y se define mediante los siguientes axiomas, denominados los axiomas de orden de los números reales.

Axioma 3.16 — Clausura de positividad. Si $x > 0$ y $y > 0$ entonces

$$x + y > 0, \quad x \cdot y > 0.$$

Axioma 3.17 — Ley de tricotomía. Dado $x \in \mathbb{R}$, solo existe una y solo una de estas tres posiblilidades:

i) $x > 0$,

ii) $x < 0$,

iii) $x = 0$.

Definición 3.5 — Números reales positivos y negativos. Por los axiomas de orden de los números reales, se definen los siguientes conjuntos

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

A $\mathbb{R}^+$ se le llama el conjunto de números reales positivos y a $\mathbb{R}^-$ se le llama el conjunto de números reales negativos.

Observación 3.5 Por la ley de la tricotomía se tiene

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+.$$

Observación 3.6 Es claro que se tiene

$$a < b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ : b = a + c.$$

■ **Ejemplo 3.8** Mostrar que dados $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$y > x \Leftrightarrow y - x > 0.$$

Solución: Dado $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $y > x$ entonces por la Observación 3.6 existe $z > 0$ tal que $x + z = y$, de donde se tiene $z = y - x \in \mathbb{R}^+$, es decir, $y - x > 0$. Recíprocamente si $y - x > 0$, entonces por la Observación 3.6 se tiene que existe $z > 0$ tal que $0 + z = y - x$, es decir, $x + z = y$, lo cual es equivalente decir que $y > x$. Es así, que se ha mostrado entonces que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$y > x \Leftrightarrow y - x > 0.$$

3.2.1 Propiedades de las desigualdades

Teorema 3.18 Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que:

i) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

ii) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

iii) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

iv) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

v) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $a \cdot b > 0$.

vi) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b < 0$.

vii) Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$. .

viii) $1 > 0$.

ix) Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$.

x) Si $0 < a < b$, entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Demostración: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces

i) Si $a < b$ y $b < c$, entonces por el Ejemplo 3.8 se tiene $b - a > 0$ y $c - b > 0$. Luego, por el Axioma 3.16 se sigue $(c - b) + (b - a) > 0$, lo que es equivalente destruyendo los paréntesis a $c - a > 0$, es decir, $c > a$.

ii) Si $a < b$, entonces por el Ejemplo 3.8 se tiene $b - a > 0$, luego

$$\begin{aligned} b - a + 0 &> 0 \\ b - a + c - c &> 0 \\ (b + c) - (a + c) &> 0 \\ b + c &> a + c. \end{aligned}$$

iii) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces por el Ejemplo 3.8 se tiene $b - a > 0$, luego, por el Axioma 3.16, se sigue

$$\begin{aligned} c \cdot (b-a) &> 0 \\ c \cdot b - c \cdot a &> 0 \\ c \cdot b &> c \cdot a. \end{aligned}$$

iv) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces por el Ejemplo 3.8 se tiene $b - a > 0$ y $-c > 0$. Luego, por el Axioma 3.16 se sigue

$$\begin{aligned} -c \cdot (b-a) &> 0 \\ -c \cdot b + c \cdot a &> 0 \\ c \cdot a - c \cdot b &> 0 \\ c \cdot a &> c \cdot b. \end{aligned}$$

v) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $-a > 0$ y $-b > 0$, luego, por el Axioma 3.16 se sigue $(-a)(-b) > 0$ y por lo tanto $a \cdot b > 0$.

vi) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $-a > 0$, luego, por el Axioma 3.16 se sigue $b(-a) > 0$ y por lo tanto $-a \cdot b > 0$, finalmente $a \cdot b < 0$.

vii) Si $a \neq 0$, por la ley de tricotomía, se consideran dos casos. Si $a > 0$, entonces $a \cdot a > 0$, es decir, $a^2 > 0$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$, luego $(-a)(-a) > 0$ y por lo tanto, $a^2 > 0$.

viii) Por reducción al absurdo, suponga que $1 \leq 0$, luego,

$$\begin{aligned} 1 &< 0 \\ -1 &> 0 \\ (-1)(-1) &> 0 \\ (-1)^2 &> 0 \\ 1 &> 0, \end{aligned}$$

lo cual contradice que $1 \leq 0$, por lo tanto, lo correcto es que $1 > 0$.

ix) Si $a > 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, el opuesto multiplicativo de a. Por la ley de la tricotomía, solo se puede tener $a^{-1} > 0$ o $a^{-1} < 0$. Si $a^{-1} < 0$, entonces $-a^{-1} > 0$, luego

$$\begin{aligned} -a^{-1} \cdot a &> 0 \\ -1 &> 0 \\ 1 &< 0 \end{aligned}$$

lo que contradice el literal anterior. Por lo tanto, el único caso posible es que $a^{-1} > 0$.

x) Si $0 < a < b$, entonces $0 < a$ y $0 < b$, luego existen $a^{-1}, b^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, los opuestos multiplicativos de a y b respectivamente. Luego, el literal anterior se tiene $a^{-1} > 0$ y $b^{-1} > 0$, entonces

$$\begin{aligned} a^{-1} \cdot 0 < a^{-1} \cdot a &< a^{-1} \cdot b \\ 0 < 1 &< a^{-1} \cdot b \\ 0 \cdot b^{-1} < 1 \cdot b^{-1} &< a^{-1} \cdot b \cdot b^{-1} \\ 0 < b^{-1} &< a^{-1} \cdot 1 \\ 0 < b^{-1} &< a^{-1}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.9 — Punto medio.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$.

Solución: Existen infinitos números reales entre a y b, sin embargo, solo se va a mostrar la existencia de lo que se denominará el punto medio entre a y b. Se define $c = \frac{a+b}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} a &< b \\ a + b &< b + b \\ a + b &< 2b \\ \frac{a+b}{2} &< b \\ c &< b. \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene

$$\begin{aligned} a &< b \\ a + a &< b + a \\ 2a &< a + b \\ a &< \frac{a+b}{2} \\ a &< c. \end{aligned}$$

De ambos resultados, se tiene que $a < c < b$, es decir, se establece el punto medio entre a y b, como

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

3.2.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.3 — Desigualdades. Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$, realice las siguientes demostraciones:

1. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a+c < b+d$.
2. Si $a < b$ entonces $-a > -b$.
3. Si a y b tienen el mismo signo y $a < b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
4. Si a,b,c son no todos iguales entonces $a^2+b^2+c^2 > ab+bc+ac$.
5. Se tiene $a^2+b^2 \geq 2ab$.
6. Si $a+b > 0$, entonces $a^3+b^3 > a^2b+ab^2$.
7. La implicación
$$(a < b \wedge c < d) \Rightarrow (ac < bd),$$
es falsa.

3.3 Representación geométrica de los números reales

Gracias a que se ha definido un orden en los números reales, es decir, se ha considerado la dupla $(\mathbb{R}, \leq)$, se tiene entonces que cada número a se puede representar sobre una recta, donde cualquier número b tal que sea mayor que a se lo representa hacia la derecha de a y cualquier número c tal que sea menor que a se lo representa hacia la izquierda de a. Así mismo, los puntos de la recta, representan a su vez un número real y por lo tanto se tiene una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos que componen la recta.

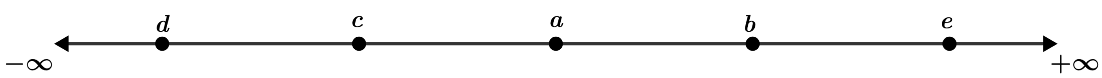


Figura 3.1: Representación geométrica de los números reales cuando $d < c < a < b < e$.

Observación 3.7 — Ubicación y escala. Es necesario notar que los números positivos se los ubica a la derecha del cero y los números negativos se los ubica a las izquierda del cero.

Además, se puede considerar una escala definiendo una distancia estándar, que por lo general suele ser la distancia entre 0 y 1.

■ **Ejemplo 3.10 — Representación geométrica de números reales.** Considere los siguientes números ordenados ascendentemente

$$-3 < -\frac{5}{2} < -\sqrt{2} < -1 < 0 < \frac{1}{2} < \sqrt{3} < 2.$$

Representar geométricamente considerando la ordenación y la escala.

Solución: La representación geométrica sería

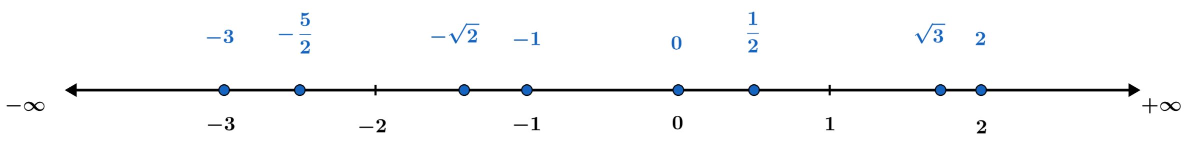


Figura 3.2: Ordenación de los números dados en el Ejemplo 3.10.

3.3.1 Intervalos

Definición 3.6 — Intervalo. Se define un intervalo como un subconjunto de los números reales tal que gráficamente se puede representar como un segmento de rectas o un rayo de recta cuyos elementos satisfacen una desigualdad.

Definición 3.7 — Intervalo que se representa por segmentos. Se definen los siguientes intervalos tal que tienen extremos finitos:

1. Intervalo cerrado

$$[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

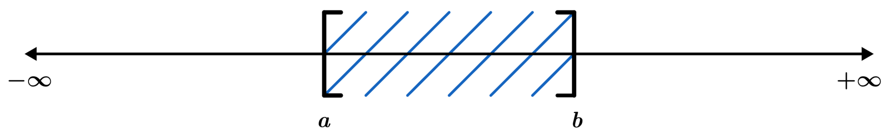


Figura 3.3: Intervalo $[a,b]$.

2. Intervalo abierto

$$(a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

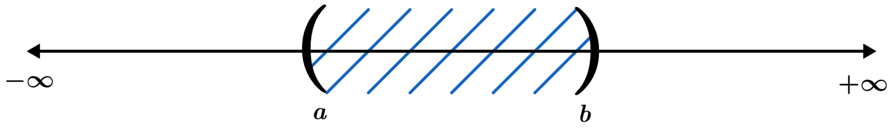


Figura 3.4: Intervalo (a,b).

3. Intervalo abierto por derecha

$$[a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

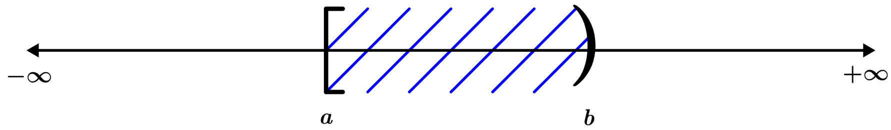


Figura 3.5: Intervalo $[a,b)$.

4. Intervalo abierto por izquierda

$$(a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

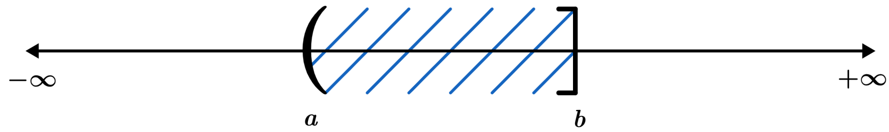


Figura 3.6: Intervalo $(a,b]$.

Definición 3.8 — Intervalo que se representan por rayos. Se definen los siguientes intervalos tal que tienen solo un extremo:

1. Intervalo cerrado por derecha

$$(-\infty,a] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

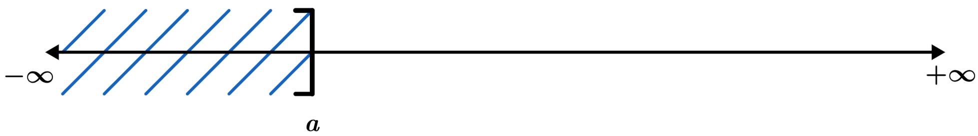


Figura 3.7: Intervalo $(-\infty,a]$.

2. Intervalo abierto por derecha

$$(-\infty, a) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

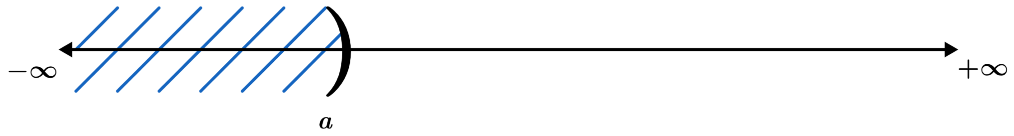


Figura 3.8: Intervalo $(-\infty, a)$.

3. Intervalo cerrado por izquierda

$$[a, +\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

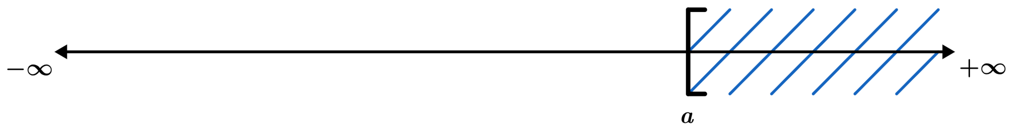


Figura 3.9: Intervalo $[a, +\infty)$.

4. Intervalo abierto por izquierda

$$(a, +\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

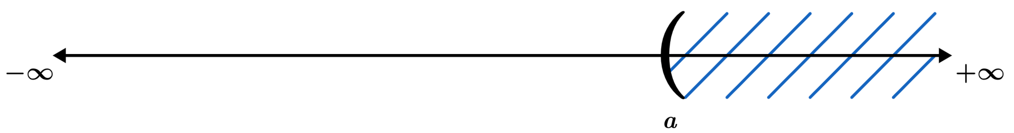


Figura 3.10: Intervalo $(a, +\infty)$.

Observación 3.8 — El símbolo del infinito. El símbolo ∞ corresponde al infinito y este no es un número, es un concepto, el cual no es de interés definirlo ahora, sino solo considerarlo como un símbolo. El símbolo $-\infty$ se lee: "menos infinito". El símbolo $+\infty$ se lee: "más infinito".

Observación 3.9 — Notación alternativa. Los intervalos que se consideran un extremo abierto también se pueden denotar con corchetes pero volteados, es decir, se tiene como notación alternativa para intervalos

$$
\begin{aligned}
(a,b) &=]a,b[\\
(a,b] &=]a,b]\\
[a,b) &= [a,b[\\
(-\infty,b) &=]-\infty,b[\\
(-\infty,b] &=]-\infty,b]\\
(a,+\infty) &=]a,+\infty[\\
[a,+\infty) &= [a,+\infty[.
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 3.11 — Elementos de un intervalo.** Dado el intervalo $[-2,5[=\{\, x\in\mathbb{R} \mid -2\leq x<5\}$, se tiene que $-4\notin[-2,5[$, $-2\in[-2,5[$, $\frac{1}{2}\in[-2,5[$ y $5\notin[-2,5[$.

■ **Ejemplo 3.12 — Conjunto unitario.** Cualquier conjunto unitario se puede poner en forma de un intervalo cerrado, por ejemplo

$$\left\{-\sqrt{2}\right\}=\left[-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right]=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\sqrt{2}\leq x\leq-\sqrt{2}\right\}.$$

■ **Ejemplo 3.13 — Conjunto vacío.** El conjunto vacío se puede poner en forma de intervalos de muchas maneras, por ejemplo para cualquier $a\in\mathbb{R}$, se puede poner

$$
\begin{aligned}
\emptyset &=]a,a[=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<a\}\\
&= [a,a[=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<a\}\\
&=]a,a]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq a\}.
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 3.14 — Conjunto de los números reales.** El conjunto de los números reales, el conjunto de los números reales negativos y el conjunto de los números reales positivos también se pueden notar en forma de intervalos del siguiente modo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} &=]-\infty,+\infty[\\
\mathbb{R}^- &=]-\infty,0[\\
\mathbb{R}^+ &=]0,+\infty[.
\end{aligned}
$$

Observación 3.10 — Relación entre una desigualdad con una variable y un intervalo. Como se ha visto en la Definición 3.7 y la Definición 3.8, los intervalos en su forma conjuntista están determinados por desigualdades que considera la variable x, es así, que a cada desigualdad que se considere la variable x y tenga sentido, se le puede hacer corresponder un intervalo.

■ **Ejemplo 3.15 — Intervalo que corresponde a una desigualdad.** Se considera la desigualdad $-7 \leq x < 3$. El intervalo correspondiente a esta desigualdad sería $[-7, 3)$.

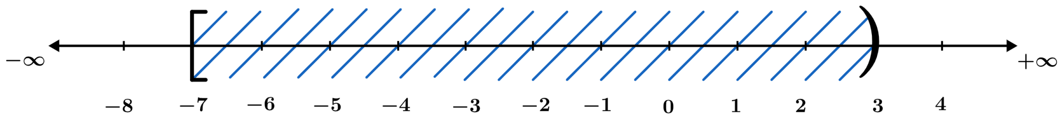


Figura 3.11: Gráfico del intervalo $[-7, 3)$.

■ **Ejemplo 3.16 — Intervalo que corresponde a una desigualdad con extremo infinito.** Se considera la desigualdad $x > -\sqrt[3]{5}$. El intervalo correspondiente a esta desigualdad sería $(-\sqrt[3]{100}, +\infty)$.

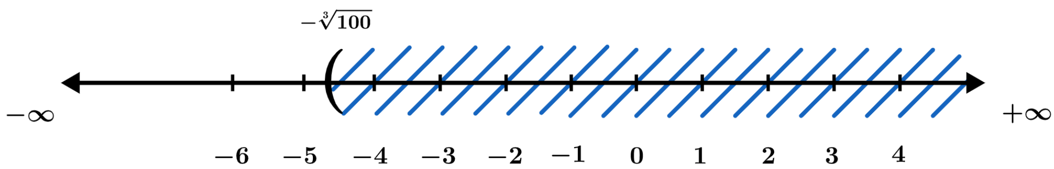


Figura 3.12: Gráfico del intervalo $(-\sqrt[3]{100}, +\infty)$.

3.3.2 Operaciones con intervalos

Dado que los intervalos son básicamente conjuntos, se pueden considerar las mismas operaciones que se hizo con los conjuntos. En esta sección se utilizarán la unión, intersección y diferencia, teniendo en cuenta que existen infinitas posibilidades de operar entre conjuntos y por tanto intervalos. De este modo, se ejemplificará abarcando la mayor cantidad de casos que se podrían presentar esperando que el lector se familiarice con la forma de operar intervalos.

Para varios intervalos es conveniente graficarlos como niveles que se diferencien sobre una misma recta real, donde un extremo abierto finito se podrá graficar con un pequeño círculo sin pintar y un extremo cerrado finito se grafica con un pequeño círculo pintado. Los extremos infinitos se denotan sencillamente con flechas.

■ **Ejemplo 3.17 — Operaciones con intervalos.** Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tal que $a < b < c < d < e < f$. Considérese los intervalos $]-\infty, b]$, $[a, c[$, $[c, d]$, $[d, +\infty[$ y $]e, f]$. De ser posible simplificar las siguientes operaciones con conjuntos dando su respuesta en forma de intervalo, o con algún conjunto unitario o con el conjunto vacío, si no es posible, indicar este hecho.

a) $]-\infty, b] \cup [a, c[$.

b) $]-\infty, b] \cap [a, c[$.

c) $]-\infty, b] \setminus [a, c[$.

d) $[a, c[\setminus]-\infty, b]$.

e) $[a, c[\cup[c, d]$.

f) $[a, c[\cap[c, d]$.

g) $[a, c[\setminus[c, d]$.

h) $[c, d] \setminus [a, c[$.

i) $[c, d] \cup [d, +\infty[$.

j) $[c, d] \cap [d, +\infty[$.

k) $[c, d] \setminus [d, +\infty[$.

l) $[d, +\infty[\setminus[c, d]$.

m) $[d, +\infty[\cup]e, f]$.

n) $[d, +\infty[\cap]e, f]$.

ñ) $[d, +\infty[\setminus]e, f]$.

o) $]e, f] \setminus [d, +\infty[$.

p) $[a, c[\cup[d, +\infty[$.

q) $[a, c[\cup[c, d] \cup [d, +\infty[$.

Solución: La gráfica correspondiente a los intervalos considerados en el Ejemplo 3.17 es la siguiente:

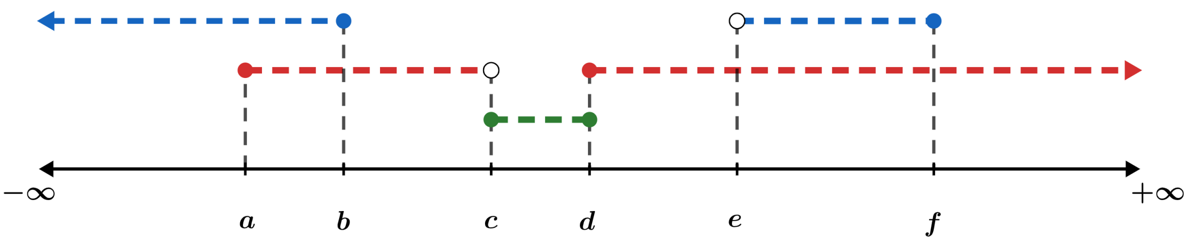


Figura 3.13: Gráfica del Ejemplo 3.17.

Considerando la Figura 3.13 se tiene directamente las respuestas a los ítems propuestos, las cuales son

a) $]-\infty, b] \cup [a, c[=]-\infty, c[$.

b) $]-\infty,b]\cap[a,c[=[a,b]$.

c) $]-\infty,b]\setminus[a,c[=]-\infty,a[$.

d) $[a,c[\setminus]-\infty,b]=]b,c[$.

e) $[a,c[\cup[c,d]=[a,d]$.

f) $[a,c[\cap[c,d]=\emptyset$.

g) $[a,c[\setminus[c,d]=[a,c[$.

h) $[c,d]\setminus[a,c[=[c,d]$.

i) $[c,d]\cup[d,+\infty[=[c,+\infty[$.

j) $[c,d]\cap[d,+\infty[=\{d\}$.

k) $[c,d]\setminus[d,+\infty[=[c,d[$.

l) $[d,+\infty[\setminus[c,d]=]d,+\infty[$.

m) $[d,+\infty[\cup]e,f]=[d,+\infty[$.

n) $[d,+\infty[\cap]e,f]=]e,f]$.

ñ) $[d,+\infty[\setminus]e,f]=[d,e]\cup]f,+\infty[$.

o) $]e,f]\setminus[d,+\infty[=\emptyset$.

p) $[a,c[\cup[d,+\infty[$ no se puede simplificar más.

q) $[a,c[\cup[c,d]\cup[d,+\infty[=[a,+\infty[$.

3.3.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.4 — Desigualdad, intervalo y gráfica. Exprese cada una de las desigualdades como un intervalo y dibuje su gráfica.

1. $3>x$,
2. $x\geq -4$,
3. $-4\leq x<7$,
4. $5<-x$,
5. $-x<\dfrac{5}{3}$,
6. $x>4$,
7. $-7>-x$,
8. $x\geq -3$,
9. $-5\geq x\geq -10$,
10. $x\geq -\dfrac{7}{2}$.

Ejercicio 3.5 — Desigualdad y conjunto. Utilice desigualdades para describir los siguientes conjuntos:

1. $]0,5[$,
2. $]-3,1]$,
3. $[8,+\infty[$,
4. $[-3,2]$,
5. $\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$,
6. $]-\infty,1]\cup[3,5[$,
7. $[2,1[\cap[0,4[$,
8. $]-2,100]-\{0\}$,
9. $]-\infty,5]\cup[7,+\infty[-\{2,10\}$,
10. $]-\infty,8]\cap[-3,25[-\{5\}$.

Ejercicio 3.6 — Operaciones con intervalos. De ser posible simplificar las siguientes operaciones con conjuntos dando su respuesta en forma de intervalo, o con algún conjunto unitario o con el conjunto vacío, si no es posible, indicar este hecho.

1. $[-2,5[\cup[-1,8]$,
2. $]-4,0]\cap]-3,+\infty[$,
3. $[-2,+\infty[\setminus[5,7]$,
4. $]-\infty,4]\cup[3,5[\cup]6,9[$,
5. $]-4,+\infty]\cap[-1,3[\cap]-2,5[$,
6. $[-100,-2]\cap[-7,15]-\{-1\}$,
7. $\left]\frac{10}{3},+\infty\right[\cup\left]0,\frac{5}{2}\right]$,
8. $[-\infty,2]\cup[1,45]-\{2\}$,
9. $]6,8]\cap]7,9[-\{8\}$,
10. $]-20,15]\cap[25,120[$.

3.4 Conjuntos acotados

Definición 3.9 — Cota Superior y Cota Inferior. Sea el conjunto $A\subset\mathbb{R}$, donde $A\neq\emptyset$. Si para todo $a\in A$ se tiene que un número $b\in\mathbb{R}$ tal que $a\leqslant b$, entonces b se denomina cota superior de A. Además, si para todo $c \in A$ se tiene que un número $a \in \mathbb{R}$ tal que $c \leqslant a$, entonces c se denomina cota inferior de A.

Observación 3.11 — Cota Superiores. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Si $b \in \mathbb{R}$ es cota superior de A y $b' \in \mathbb{R}$ tal que $b' > b$, entonces por definición de cota superior se tiene que para todo $a \in A$ se cumple

$$a \leqslant b < b',$$

luego $a \leqslant b'$, por lo que b' también es cota superior de A. Esto muestra que en un conjunto que posee una cota superior, tiene también infinitas cotas superiores. Análogamente, si un conjunto posee una cota inferior, entonces tiene infinitas cotas inferiores.

Definición 3.10 — Conjuntos acotados. Si $A \subset \mathbb{R}$ no vacío posee una cota superior, entonces se dice que A es acotado superiormente. Si A posee una cota inferior, entonces se dice que es acotado inferiormente. Además, si A es acotado superior e inferiormente se dice que A es acotado.

■ **Ejemplo 3.18** Existen tipos de conjuntos con diferente naturaleza:

a) Si $A =]-3, 4]$, entonces es acotado. En general, cualquier intervalo con extremos finitos es acotado.
b) Si $B = [2, +\infty[$, entonces es acotado inferiormente.
c) Si $C =]-\infty, -4[$, entonces es acotado superiormente.
d) Si $D =]-\infty, +\infty[$, entonces no es acotado.

■ **Ejemplo 3.19 — Cotas.** Dado el conjunto $A = [3, 6[$, se tiene que todos los números menores o iguales a 3 son cotas inferiores como por ejemplo 2, -7 y $-\sqrt{2}$. En cambio, todos los números mayores o iguales a 6 son cotas superiores, por ejemplo 7, 8 y 100.

Definición 3.11 — Máximo y Mínimo. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que es cota superior de A y $b \in A$, entonces b se denomina máximo de A y se denota $b = \text{máx} A$. Si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que c es cota inferior de A y $c \in A$, entonces c se denomina mínimo de A y se denota $c = \text{mín} A$.

Proposición 3.19 — El máximo. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío, si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \text{máx} A$, entonces b es único. Por esta razón se dice que b es máximo de A y no se habla de varios máximos.

Demostración: Por reducción al absurdo, se supone que existen $b,\ b' \in \mathbb{R}$ tales que son máximos de A y $b \neq b'$. Por definición de máximo, para todo $a \in A$, se tiene

$$a \leqslant b \tag{3.7}$$

$$a \leqslant b' \tag{3.8}$$

y además $b, b^{'} \in A$. Por tanto al remplazar $b^{'}$ en (3.7) y remplazando b en (3.8), se tiene que

$$b^{'} \leqslant b$$
$$b \leqslant b^{'},$$

por lo tanto $b = b^{'}$. Esta contradicción establece que el máximo de un conjunto es único.

Proposición 3.20 — El mínimo. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \text{mín} A$, entonces c es único.

■ **Ejemplo 3.20 — Máximo y Mínimo.** Considere el conjunto $A =]-3, 5]$, $B = [-2, +\infty[$ y $C =]-\infty, 7[$. Entonces, se tiene que A solo tiene máximo ($\text{máx} A = 5$), B solo tiene mínimo ($\text{mín} A = -2$), mientras que C no tiene máximo y mínimo.

Definición 3.12 — Supremo. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Si $b \in \mathbb{R}$ cumple con las condiciones:

i) b es cota superior de A,

ii) si $b^{'}$ es cota superior de A, $b \leqslant b^{'}$.

Entonces, se dice que b es el supremo de A y se denota $b = \sup A$.

Observación 3.12 De la definición anterior, se tiene que el supremo de un conjunto se debe entender como la menor de cotas superiores.

Definición 3.13 — Ínfimo. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Si $c \in \mathbb{R}$ cumple con las condiciones:

i) c es cota inferior de A,

ii) si $c^{'}$ es cota inferior de A, $c \geqslant c^{'}$.

Entonces, se dice que c es el ínfimo de A y se denota $c = \text{ínf} A$.

Teorema 3.21 Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Si existen $\sup A$ e $\text{ínf} A$, entonces estos son únicos.

■ **Ejemplo 3.21 — Supremo e Ínfimo.** De los siguientes conjuntos, indicar el supremo o ínfimo si los hubiere, de otro modo indicar también este hecho.

a) $A =]-\infty, 3]$

b) $B =]6, +\infty[$

c) $C =]7, 8]$

d) $D =]-5, 0] \cup]3, +\infty[$

Solución: De acuerdo con la definición de supremo e ínfimo, se tiene:

a) $\sup A = 3$

$\text{ínf} A$ no existe,

b) $\sup B$ no existe

$\text{ínf} B = 6$,

c) $\sup C = 8$

$\text{ínf} C = 7$,

d) $\sup D$ no existe

$\text{ínf} D = -5$.

Observación 3.13 — Máximo y Supremo. Si un conjunto posee máximo, entonces posee supremo y ambos coinciden. Por otra parte, si un conjunto posee supremo, no necesariamente posee máximo.

■ **Ejemplo 3.22** Dado el conjunto $A =]-3, 6]$, entonces

$$6 = \text{máx} A = \sup A,$$

$$-3 = \text{ínf} A,$$

pero $\text{mín} A$ no existe.

3.4.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.7 Determinar el máximo y mínimo de los siguientes intervalos.

1. $[-7, 18]$.
2. $]0, 10]$.
3. $]-3, 12[$.
4. $[-7, 12[$.
5. $]2, 7[\cap]5, 9[$.

De los siguientes conjuntos, indicar el supremo o ínfimo si los hubiere, de otro modo, indicar también este hecho.

1. $[-10, 2] \cap [0, 5]$.
2. $[0, 20]$.
3. $[-\infty, 2] \cap [3, 45]$.
4. $[2, 8] \cup]7, 15[$.
5. $]-\infty, 15] \cap [-2, 240[$.

3.5 Axioma de completitud

Axioma 3.22 — Completez. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, entonces existe $b = \sup B$

Observación 3.14 El Axioma 3.22 es conocido como el axioma de completitud e indica que todo subconjunto acotado de números reales posee supremo. La escencia de este axioma es que los números reales no poseen huecos y dan una idea de continuidad necesaria para fortalecer a los números reales con propiedades consistentes.

■ **Ejemplo 3.23 — Incompletitud de los números racionales.** A continuación, se va probar que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ no es completo, es decir, no cumple el axioma de completitud. Para esto, se procederá por contradicción, es decir, se debe hallar un $B \subset \mathbb{Q}$ acotado superiormente tal que no posea supremo en los números racionales. En efecto, sea $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$. Se observa que este conjunto es acotado superiormente y se tiene $b = \sup B$, donde $b = \sqrt{2}$, pero $b \neq \mathbb{Q}$, lo que indica que B no posee supremo en los números racionales. Es así, que el axioma de completitud que cumple $\mathbb{R}$ hace que tenga sentido el considerar a $\mathbb{R}$ para una teoría consistente.

Teorema 3.23 — Conjunto acotado inferiormente. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente, entonces existe $c = \text{ínf} A$.

Demostración: Sea $-A = \{-a \in \mathbb{R} \mid a \in A\}$. Por hipótesis A es acotado inferiormente, entonces existe una cota inferior de A, es decir, existe $c' \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$ se tiene $c' \leq a$, luego $-c' \geq -a$, lo cual indica que $-c$ es una cota superior de $-A$ y por lo tanto, se tiene que $-A$ es acotado superiormente. Luego, por el axioma de completitud en $\mathbb{R}$ se tiene que $-A$ posee supremo; se denota este elemento como $-c \in \mathbb{R}$, es decir, existe $-c = \sup(-A) = \sup\{-a \in \mathbb{R} \mid a \in A\}$, luego por un ejercicio anterior $c = -\sup\{-a \in \mathbb{R} \mid a \in A\} = \text{ínf} A$ y dado que $-c$ existe, también existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \text{ínf} A$.

Observación 3.15 Por definición un conjunto acotado es acotado superiormente e inferiormente, entonces por el Axioma 3.22 y el Teorema 3.23 se sigue que todo conjunto acotado posee ínfimo y supremo.

■ **Ejemplo 3.24** Sea $A \in \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, mostrar que $\text{ínf} A = -\sup\{-x \mid x \in A\}$.

Solución: Se define $-A = \{-x \mid x \in A\}$, suponga que existe $p = \sup(-A) \in \mathbb{R}$ entonces se cumple:

i) $\forall -a \in -A: \quad p \geq -a.$

ii) Si p' es cota superior de $-A$ entonces $p \leq p'$.

Por otra parte, suponga que existe $q = \text{ínf} A \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

iii) $\forall a \in A : q \leq a$.

iv) Si $q^{'}$ es cota inferior de A entonces $q \geq q^{'}$.

De i) multiplicando por -1 a $p \geq -a$, se tiene que

$$\forall a \in A : \quad -p \leq a$$

lo que muestra según iii) que $-p$ es cota inferior de A. De iv) se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} q &\geq -p \\ -q &\leq p. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por otra parte de iii) multiplicando por -1 a $q \leq a$ se sigue que

$$\forall -a \in -A : -q \geqslant -a$$

que muestra según i) que $-q$ es cota superior de $-A$. De ii) se tiene entonces que

$$p \leqslant -q. \tag{3.10}$$

De (3.9) y (3.10) se tiene que $p = -q$, es decir:

$$\begin{aligned} \sup(-A) &= -\text{ínf} A \\ -\sup\{-x \mid x \in A\} &= \text{ínf} A. \end{aligned}$$

Teorema 3.24 Sea $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$. Si b es cota superior de A, se cumple que $b = \sup A$ si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \quad a + \varepsilon > b \tag{3.11}$$

Demostración: Como el enunciado es un si y solo si, se tiene que demostrar ambas implicaciones. Suponga que $b = \sup A$. Por reducción al absurdo, se va a suponer la negación de (3.11), es decir

$$\exists \varepsilon > 0, \forall a \in A : \quad a + \varepsilon \leq b.$$

Luego, $a \leq b - \varepsilon$, para todo $a \in A$. Por definición, se tiene que $b - \varepsilon$ es una cota superior de A.

Además, como $\varepsilon > 0$, entonces

$$b - \varepsilon < b \tag{3.12}$$

lo que contradice que $b = \sup A$, pues b debería ser la menor cota superior. Así, se ha mostrado que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a + \varepsilon > b.$$

Recíprocamente, dado que b es cota superior de A, se tiene que si se toma $b^{'}$ como una cota superior de A, entonces para que $b = \sup A$ se debe probar que b es la menor de las cotas superiores, es decir, se debe probar que $b \leq b^{'}$.

Suponga que $b > b^{'}$, luego $b - b^{'} > 0$ por hipótesis

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \quad a + \varepsilon > b,$$

en particular, para $\varepsilon = b - b^{'}$, existe $a \in A$ tal que:

$$b < a + (b - b^{'})$$

$$b^{'} < a.$$

Lo que contradice el hecho que $b^{'}$ es cota superior y por lo tanto se tiene que $b = \sup A$.

3.5.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.8 Realizar las siguientes demostraciones:

1. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq 0$. Demostrar que $\sup A = -\operatorname{ínf}\{-x \mid x \in A\}$.
2. Demostrar que en general: $c = \sup A\{xy \mid x \in A, y \in B\} \neq (\sup A)(\sup B)$.
3. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Si $A \subset B$ y B es acotado, demostrar que A es acotado.
4. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados superiormente. Si $c = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$, entonces existe $\sup C$ y además $\sup C = \sup A + \sup B$.
5. Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado. Demostrar que $\operatorname{ínf} A \leq \sup A$.

3.6 Inducción matemática

El primer matemático en hacer una exposición explícita del Principio de Inducción Matemática fue **Blaise Pascal** $(1623 - 1662)$. También es importante mencionar las contribuciones que hizo en este campo **Pierre de Fermat** $(1601/8 - 1665)$, quien usó ampliamente su método del Descenso Infinito, el cual es una variante del Principio de Inducción Matemática. Finalmente, en el siglo XIX, con base en los trabajos de **Giuseppe Peano** $(1858 - 1932)$ y **Richard Dedekind** $(1831 - 1916)$, se establece de manera definitiva el tratamiento sistemático y riguroso que se usa hoy en día para realizar demostraciones por Inducción Matemática.

Axioma 3.25 — Axiomas de Peano. Los axiomas se establecen como:

i) $1 \in \mathbb{N}$.
ii) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(n+1) \in \mathbb{N}$. ($n+1$ es llamado el sucesor de n)
iii) 1 no es sucesor de número natural alguno, debido a que es el primer elemento del conjunto $\mathbb{N}$.
iv) Si los sucesores de dos números naturales n y m son iguales, entonces n y m son números naturales iguales.
v) Si un conjunto de números contiene al 1 y a los sucesores de cada uno de sus elementos, entonces contiene a todos los números naturales.

Axioma 3.26 — Axioma de inducción. El último postulado se conoce como *Axioma de Inducción*, y permite probar resultados con los números naturales de forma general.

Teorema 3.27 — Inducción Matemática. Si $P(n)$ es una propiedad sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, tal que

i) $P(1)$ es verdadero. *(Base Inducción)*
ii) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. *(Paso Inductivo)*

Entonces, $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

■ **Ejemplo 3.25 — Suma de los n primeros números naturales.** Pruebe que para todo número natural n, se cumple la propiedad:

$$P(n) : 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{3.13}$$

Solución: Se va a probar por inducción (3.13).

i) Para $n = 1$, es inmediato que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1(1+1)}{2} \\ 1 &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $P(1)$ es verdadero.

ii) Se probará que

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $P(n)$ es verdadero, es decir, que

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{3.14}$$

La ecuación (3.14) se le llama *Hipótesis Inductiva*. Ahora, se va probar que

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

En efecto, de la ecuación (3.14), se tiene que

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\\
&= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $P(n+1)$ es verdadero.

Finalmente, de i) y ii) se demostró que

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

■ **Ejemplo 3.26 — Suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.** Pruebe que para todo numero natural n, se cumple la propiedad:

$$P(n): 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{3.15}$$

Solución: Se va probar por inducción (3.15).

i) Para $n=1$,

$$\begin{aligned}
1^2 &= \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}\\
1 &= \frac{1(2)(3)}{6}\\
1 &= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(1)$ es verdadero.

ii) Se probará que

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, suponga que $P(n)$ es verdadero, es decir, que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{3.16}$$

Ahora, se va a probar que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

En efecto, de la ecuación (3.16), se tiene que

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)}{6}[n(2n+1) + 6(n+1)] \\
&= \frac{(n+1)}{6}\left(2n^2 + n + 6n + 6\right) \\
&= \frac{(n+1)}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right) \\
&= \frac{(n+1)}{6}(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $P(n+1)$ es verdadero.

Finalmente, de i) y ii) se demostró que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

■ **Ejemplo 3.27 — Suma de las primeras n potencias de 2.** Pruebe que para todo número natural n, se cumple la propiedad:

$$P(n) : 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2\left(2^n - 1\right).$$

Solución Se va a probar por inducción (3.27).

i) Para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
2 &= 2\left(2^1 - 1\right) \\
2 &= 2(1) \\
2 &= 2.
\end{aligned}$$

Por tanto, $P(1)$ es verdadero.

ii) Se probará que

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, supongamos que $P(n)$ es verdadero, es decir, que

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2\left(2^n - 1\right). \tag{3.17}$$

Ahora, se va a probar que

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2(2^{n+1} - 1).$$

En efecto, de la ecuación (3.17), se tiene que

$$\begin{aligned}
2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} &= \left(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n\right) + 2^{n+1} \\
&= 2\left(2^n - 1\right) + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 \\
&= 2\left(2^{n+1} - 1\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, $P(n+1)$ es verdadero.

Finalmente, de i) y ii) se demostró que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2\left(2^n - 1\right).$$

■ **Ejemplo 3.28** Pruebe que todo número impar $n \in \mathbb{N}$, cumple la propiedad:

$$P(n) : n^2 - 1 \text{ es divisible entre } 8. \tag{3.18}$$

Solución: Se va a probar por inducción (3.18).

i) Para $n = 1$, es inmediato que

$$1^2 - 1 = 0, \text{ es divisible entre } 8.$$

Por tanto, $P(1)$ es verdadero.

ii) Se probará que, para todo número impar $n \in \mathbb{N}$

$$P(n) \Rightarrow P(n+2).$$

Esto es porque $n+2$ es el siguiente numero impar a n. Sea $n = 2k-1$, con $k \in \mathbb{N}$. Suponga que $P(n)$ es verdadero, es decir, que $n^2 - 1$ es divisible entre 8, esto es,

$$\begin{aligned} \exists p \in \mathbb{Z}^+ : \quad n^2 - 1 &= 8p \\ (2k-1)^2 - 1 &= 8p. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ahora, se va a probar que $(n+2)^2 - 1$ es divisible entre 8, es decir,

$$\exists m \in \mathbb{Z}^+ : \quad (n+2)^2 - 1 = 8m.$$

En efecto, de la ecuación (3.19) se sigue que existe $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$(2k-1)^2 - 1 = 8p.$$

Así, tomando $m = p + k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} (n+2)^2 - 1 &= [(2k-1)+2]^2 - 1 \\ &= (2k-1)^2 + 4(2k-1) + 4 - 1 \\ &= \left[(2k-1)^2 - 1\right] + 8k - \cancel{4} + \cancel{4} \\ &= 8p + 8k \\ &= 8(p+k) \\ &= 8m. \end{aligned}$$

Por tanto, $P(n+2)$ es verdadero.

Finalmente, de i) y ii) se demostró que para todo numero impar $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - 1$ es divisible entre 8.

3.6.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.9 Realizar las siguientes demostraciones:

1. Pruebe que para todo número impar n, el número $x^2 - 1$ es divisible para 8.
2. Pruebe que $n! > 3^{n-2}$, para todo número natural $n \geq 3$.
3. Pruebe que 3 es divisor de $n^3 + 2n$, para todo número entero positivo n.
4. Pruebe si n es un entero positivo cualquiera, entonces se cumple la siguiente fórmula para la suma de cubos
$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
5. Pruebe que para todo entero positivo n
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

3.7 Binomio de Newton

El Binomio de Newton, llamado así por Isaac Newton a quién se atribuye su descubrimiento, consiste en un algoritmo para hallar el desarrollo de una potencia de un binomio cualquiera mediante coeficientes binomiales, los mismos que a su vez, consisten en números combinatorios consecutivamente. Si bien un binomio elevado a un exponente 2 ó 3 se puede calcular de manera sencilla a través de productos notables; la importancia del Binomio de Newton radica en que permite desarrollar un binomio elevado a cualquier potencia mayor o incluso permite determinar un término específico de dicho desarrollo.

Definición 3.14 — Factorial. Sea $n \in \mathbb{N}$, se define su factorial denotado $n!$ como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Por definición se tiene $0! = 1$.

Definición 3.15 — Número combinatorio. Sean $n \in \mathbb{N}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n$. Se define
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Teorema 3.28 — Binomio de Newton. El binomio $(a+b)^n$, está desarrollado por:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n} b^n, \tag{3.20}$$

dónde $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Observación 3.16 — Término genérico. Cualquier término del desarrollo del binomio $(a+b)^n$ estaría dado por

$$\binom{n}{i} a^{n-i} b^i, \tag{3.21}$$

dónde

- n, es el exponente del binomio,
- i, es la posición del término en cuestión en el desarrollo del binomio disminuido en 1,
- a, b, son los sumandos del binomio.

■ **Ejemplo 3.29 — Binomio al cuadrado.** Desarrollar el binomio $(x+y)^2$ aplicando el teorema del Binomio de Newton (3.20).

Solución: Primero se identifica que $a = x$, $b = y$ y $n = 2$. Aplicando el teorema del Binomio de Newton (3.20)

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} x^{2-1} y + \binom{2}{2} x^{2-2} y^2 \\
&= \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} xy + \binom{2}{2} y^2.
\end{aligned}$$

Utilizando la Definición 3.14 y la Definición 3.15 se tiene

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= \frac{2!}{0!(2-0)!} x^2 + \frac{2!}{1!(2-1)!} xy + \frac{2!}{2!(2-2)!} y^2 \\
&= \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} x^2 + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} xy + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} y^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2.
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.30 — Término central.** Encontrar el término central en el desarrollo de

$$\left(x^{1/5} + y^{1/5}\right)^{10}.$$

Solución: Como $n = 10$, entonces la cantidad de términos es 11 y el término central es el sexto, con lo que $i = 5$. Aplicando la ecuación (3.21), el sexto término tiene la forma

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i} a^{n-i} b^i &= \binom{10}{5} \left(x^{1/5}\right)^{10-5} \left(y^{1/5}\right)^5 \\
&= \binom{10}{5} xy.
\end{aligned}$$

Utilizando la Definición 3.14 y la Definición 3.15, se tiene

$$\begin{aligned}\binom{10}{5} &= \frac{10!}{5!(10-5)!}\\ &= \frac{10!}{5!(5)!}\\ &= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}\\ &= 252,\end{aligned}$$

por lo tanto, el término central es $252xy$.

■ **Ejemplo 3.31 — Término bajo condición.** Encontrar el término que no contiene la variable x en el desarrollo de $\left(x-\dfrac{1}{3x}\right)^8$.

Solución: Primero se identifica que $a = x$, $b = -\dfrac{1}{3x}$ y $n = 8$. El término general según (3.21) está dado por:

$$\binom{n}{i}a^{n-i}b^i = \binom{8}{i}x^{8-i}\left(-\frac{1}{3x}\right)^i.$$

Igualando el término general a un término de grado cero de la variable x, se tiene

$$\begin{aligned}x^{8-i}\left(\frac{1}{x}\right)^i &= x^0\\ x^{8-i}\left(\frac{1^i}{x^i}\right) &= x^0\\ x^{8-i}x^{-i} &= x^0\\ x^{8-i-i} &= x^0\\ x^{8-2i} &= x^0.\end{aligned}$$

Igualando los exponentes de x,

$$\begin{aligned}8-2i &= 0\\ 8 &= 2i\\ i &= 4.\end{aligned}$$

Debido a que i representa la posición del término en cuestión disminuido en 1, el término buscado es el quinto pues $i+1=4+1=5$. Aplicando nuevamente (3.21),

$$\binom{n}{i}a^{n-i}b^{i}=\binom{8}{4}x^{8-4}\left(-\frac{1}{3x}\right)^{4},$$

utilizando la Definición 3.14 y la Definición 3.15 se tiene

$$\begin{aligned}\binom{n}{i}&=\frac{n!}{i!(n-i)!}\\ \binom{8}{4}&=\frac{8!}{4!(8-4)!}\\ &=\frac{8!}{4!(4)!}\\ &=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}\\ &=70,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\binom{8}{4}x^{8-4}\left(-\frac{1}{3x}\right)^{4}&=70x^{8-4}\left(-\frac{1}{3x}\right)^{4}\\ &=70x^{4}\left[\frac{1^{4}}{(3x)^{4}}\right]\\ &=70x^{4}\left(\frac{1}{81x^{4}}\right)\\ &=\frac{70}{81},\end{aligned}$$

por tanto, el quinto término es $\frac{70}{81}$ que efectivamente no contiene la variable x.

■ **Ejemplo 3.32 — Término bajo condición.** Determine el valor de un número entero z para que el coeficiente del cuarto término en el desarrollo del binomio $\left(a+\frac{2b}{z}\right)^{5}$ sea un número entero positivo.

Solución: Según (3.21) el cuarto término del desarrollo del binomio es

$$\binom{n}{i}a^{n-i}b^{i}=\binom{5}{3}x^{5-3}\left(\frac{2b}{z}\right)^{3}$$

entonces, utilizando la Definición 3.14, la Definición 3.15 y desarrollando se tiene que el coeficiente de dicho término es,

$$\binom{5}{3}\left(\frac{2}{z}\right)^{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot\frac{8}{z^{3}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!(2\cdot 1)}\cdot\frac{8}{z^3}\\ &= \frac{80}{z^3}\\ &= \frac{2^4\cdot 5}{z^3}, \end{aligned}$$

por lo tanto, el número entero z tal que dicho coeficiente sea entero, puede ser $z = 1$ o $z = 2$.

3.7.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.10 Desarrollar los siguientes binomios aplicando el teorema del Binomio de Newton (3.20):

1. $(a+b)^2$.
2. $(a-b)^2$.
3. $(a+b)^3$.
4. $(a-b)^3$.
5. $(a+1)^2$.
6. $(a-1)^3$.
7. $(3a-1)^3$.
8. $\left(-\frac{1}{a}-1\right)^3$.
9. $\left(-\frac{1}{a}+a\right)^3$.
10. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^3$.
11. $\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{8}y\right)^4$.

Ejercicio 3.11 Si en el desarrollo del binomio $(x+z)^4$ el coeficiente de x^2 es 6, entonces el valor de z es:

a) -1.

b) 1.

c) ± 1.

d) ± 2.

Ejercicio 3.12 Realizar los siguientes ejercicios de términos puntuales

1. Hallar el tercer término en el desarrollo de: $(2-3a)^7$.

2. Hallar el quinto término en el desarrollo de: $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$.
3. Hallar el cuarto término en el desarrollo de: $\left(\frac{1}{2}x - 3y\right)^7$.
4. Hallar el término central en el desarrollo de: $\left(\frac{4}{x} - 2y\right)^8$.
5. Hallar el término central en el desarrollo de: $\left(\frac{4}{x} - \frac{12x}{5}\right)^{12}$.
6. Hallar el término final en el desarrollo de: $\left(\frac{x}{4} + \frac{2y}{7}\right)^{13}$.

Ejercicio 3.13 Encontrar el término que no contiene la variable x en el desarrollo de: $\left(x - \frac{1}{5x^2}\right)^8$.

Ejercicio 3.14 Determine el valor de un número entero y para que el coeficiente del cuarto término en el desarrollo del binomio $\left(a^5 - \frac{2b^6}{y}\right)^5$ sea un número entero positivo.

3.8 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación de primer grado o ecuación lineal es una ecuación algebraica que se expresa en la forma más simple como:

$$ax + b = 0,$$

donde:

- x es la variable real.
- a y b son constantes reales, con $a \neq 0$.

La solución de esta ecuación consiste en encontrar el valor de x que satisface la igualdad. Para resolverla, se despeja x de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

En este capítulo nos enfocaremos en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 3.16 — Sistema de ecuaciones lineales. Un conjunto de ecuaciones lineales formado por dos o más ecuaciones lineales se denomina sistema de ecuaciones, en donde, al resolverlo se obtienen valores que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones planteadas.

Un sistema de ecuaciones con dos variables se tiene que es un sistema de 2×2 cuando está conformado por 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

Observación 3.17 Existen o se pueden establecer sistemas de ecuaciones más complejos como 3×3 o incluso 3×2, 2×3, etc. Sin embargo, son problemas que no consideraremos ni trataremos en el presente libro.

■ **Ejemplo 3.33 — Sistema de ecuaciones lineales de 2×2.** Se establece el sistema

$$\begin{cases} x - 5y = -3 \\ -4x + 3y = 8 \end{cases}$$

en donde las letras x, y corresponden a las incógnitas del sistema, cuyos valores se determinarán para que se cumpla cada igualdad.

3.8.1 Clasificación de un sistema de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones de 2×2 se pueden clasificar en función de la solución obtenida. Pueden ser de tres tipos:

- Sistema compatible determinado.
- Sistema compatible indeterminado.
- Sistema incompatible.

Sistema compatible determinado

Un sistema es compatible determinado cuando tiene única solución, es decir, las incógnitas x, y pueden tomar un solo valor.

■ **Ejemplo 3.34 — Sistema compatible determinado.**

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases}$$

El sistema tiene una sola solución, es decir, un solo punto de intersección: $x = -2$, $y = 5$.

Sistema compatible indeterminado

Un sistema es compatible indeterminado cuando tiene infinitas soluciones.

■ **Ejemplo 3.35 — Sistema compatible indeterminado.**

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

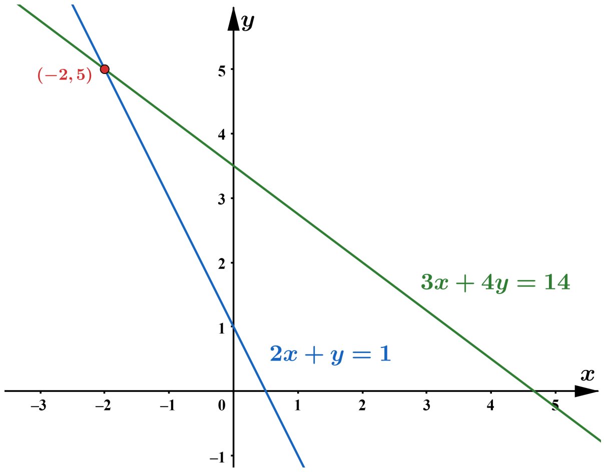


Figura 3.14: Sistema compatible determinado.

El sistema tiene infinitas soluciones, es decir, infinitos puntos de intersección. Otra manera de ver

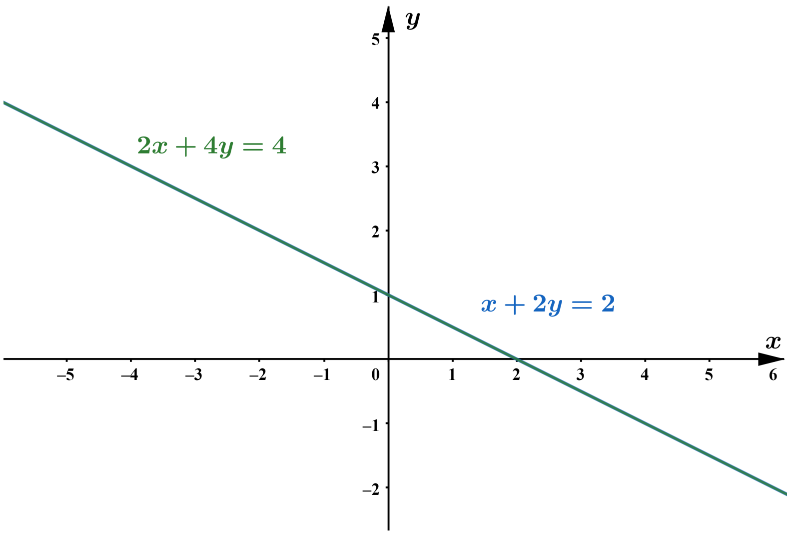


Figura 3.15: Sistema compatible indeterminado.

es que básicamente las dos ecuaciones definen la misma recta.

Sistema incompatible

Un sistema es incompatible cuando no tiene solución.

■ Ejemplo 3.36 — Sistema incompatible.

$$\begin{cases} 2x+5y=15 \\ 6x+15y=20 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución, es decir, no existen puntos de intersección. Otra manera de ver es que

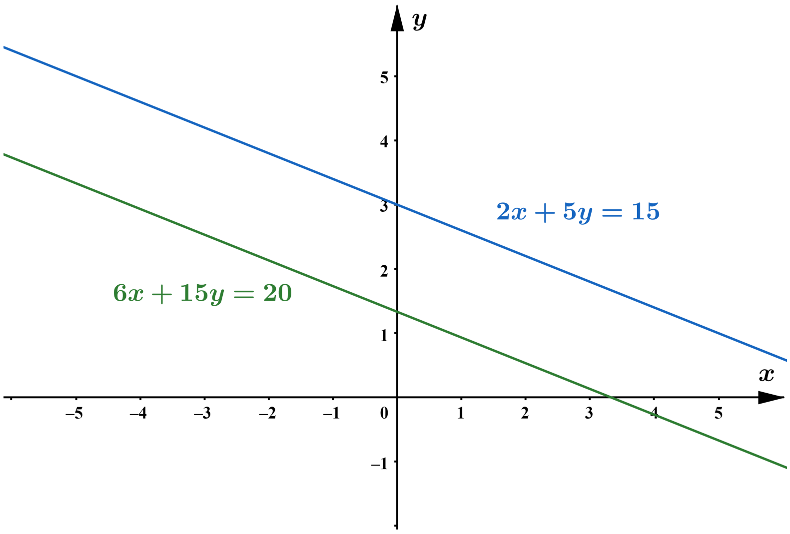


Figura 3.16: Sistema incompatible.

las rectas son paralelas.

3.9 Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones

3.9.1 Método de reducción o eliminación

Este método consiste en eliminar una incógnita x o y mediante una suma algebraica de las ecuaciones planteadas, para luego resolver la ecuación resultante y obtener la respuesta de una variable.

Para hallar el valor de la otra incógnita, se remplaza el valor anterior en cualquier ecuación.

■ **Ejemplo 3.37** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ x - 3y = 2. \end{cases}$$

Solución: En este ejemplo no se puede eliminar ninguna variable al sumar o restar las ecuaciones, por lo que se multiplica a cualquiera de las ecuaciones por algún valor constante de tal forma que se igualen los coeficientes y difiera el signo de alguna variable, en este caso x.

Se multiplica por (-5) a la ecuación $x - 3y = 2$ y se resuelve

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 8 \\ -5x + 15y = -10 \\ \hline 0x + 13y = -2 \end{array}$$

se despeja y

$$\begin{aligned} 13y &= -2 \\ y &= -\frac{2}{13} \end{aligned}$$

y se reemplaza en la ecuación $x - 3y = 2$,

$$\begin{aligned} x - 3\left(-\frac{2}{13}\right) &= 2 \\ x + \frac{6}{13} &= 2 \\ x &= 2 - \frac{6}{13} \\ x &= \frac{20}{13}. \end{aligned}$$

En conclusión

$$x = \frac{20}{13}; \qquad y = -\frac{2}{13}.$$

El resultado obtenido se lo puede comprobar remplazando los valores de x, y en cualquier ecuación. En este caso se lo realizará en la ecuación $x - 3y = 2$

$$\begin{aligned} \frac{20}{13} - 3\left(-\frac{2}{13}\right) &= 2 \\ \frac{20}{13} + \frac{6}{13} &= 2 \\ \frac{26}{13} &= 2 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.38** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} 4(x-1) - y = 9 \\ 2(x+3) = 2y - 1. \end{cases}$$

Solución: Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta y suma respectivamente en las dos ecuaciones

$$\begin{cases} 4x - 4 - y = 9 \\ 2x + 6 = 2y - 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 13 \\ 2x - 2y = -7, \end{cases}$$

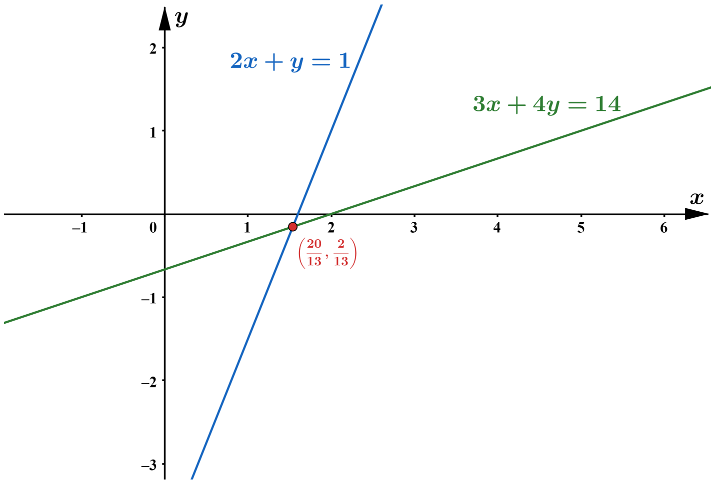


Figura 3.17: La solución del sistema es $(x,y) = \left(\frac{20}{13}, -\frac{2}{13}\right)$.

se multiplica por (-2) a la ecuación $4x - y = 13$ para eliminar la variable y al sumar las ecuaciones

$$\begin{array}{r} -8x+2y=-26 \\ 2x-2y=-7 \\ \hline -6x+0y=-33 \end{array}$$

se despeja x

$$\begin{aligned} -6x &= -33 \\ x &= \frac{-33}{-6} \\ x &= \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

y se reemplaza en la ecuación $2x - 2y = -7$

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{11}{2}\right) - 2y &= -7 \\ 11 - 2y &= -7 \\ -2y &= -7 - 11 \\ -2y &= -18 \\ y &= 9. \end{aligned}$$

En conclusión

$$x = \frac{11}{2};\, y = 9.$$

El resultado se comprueba remplazando los valores de x, y en la ecuación $2x-2y=-7$

$$2\left(\frac{11}{2}\right)-2(9)=-7$$

$$11-18=-7$$

$$-7=-7.$$

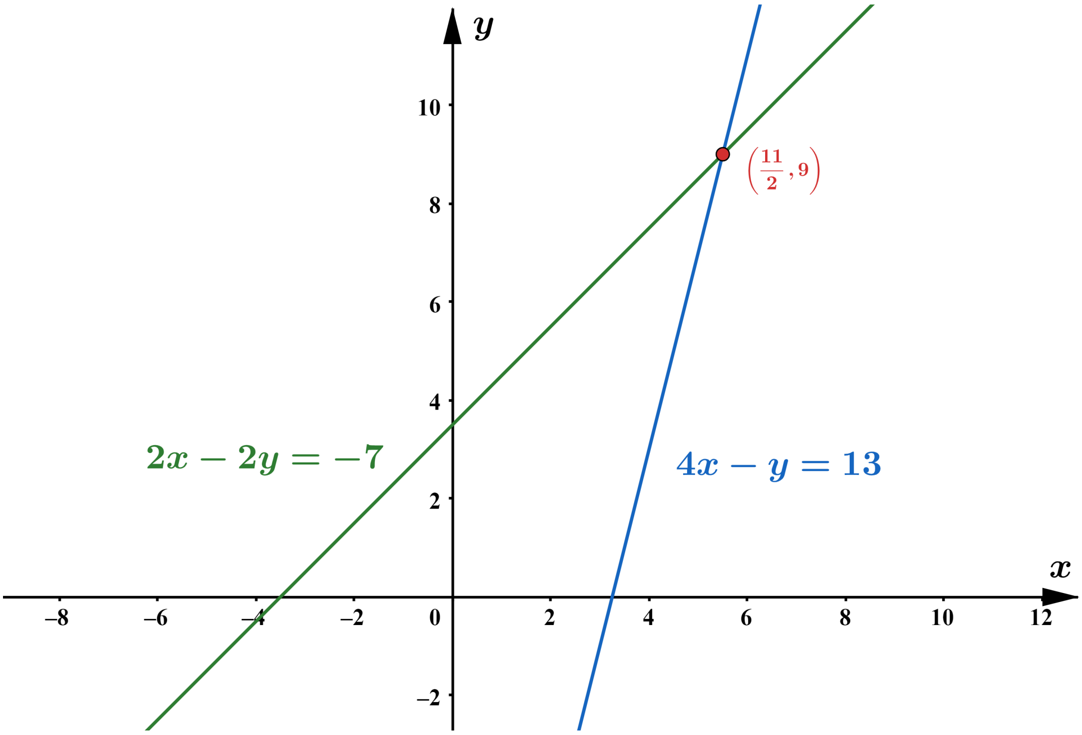


Figura 3.18: La solución del sistema es $(x,y)=\left(\frac{11}{2},9\right)$.

■ **Ejemplo 3.39** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} 8x-3y=-3 \\ 5x-2y=-1. \end{cases}$$

Solución: En principio, se multiplica por (-2) a la ecuación $8x-3y=-3$, y por (3) a la ecuación $5x-2y=-1$ para eliminar la variable y

$$\begin{array}{c} -16x+6y=6 \\ 15x-6y=-3 \\ \hline -x+0y=3, \end{array}$$

se despeja x

$$x = -3,$$

y se reemplaza en la ecuación $8x - 3y = -3$

$$8(-3) - 3y = -3$$
$$-24 - 3y = -3$$
$$-3y = -3 + 24$$
$$-3y = 21$$
$$y = -7.$$

En conclusión

$$x = -3;\ y = -7.$$

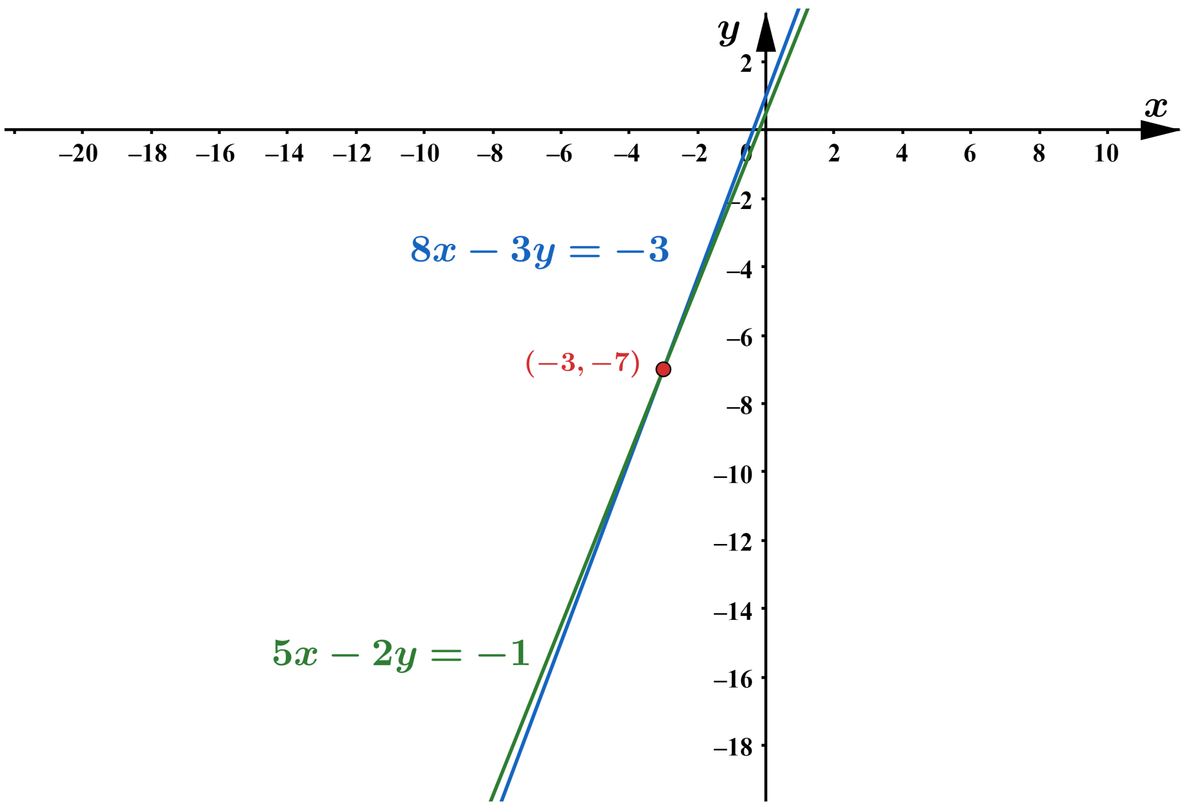


Figura 3.19: La solución del sistema es $(x, y) = (-3, -7)$.

3.9.2 Método de sustitución

Este método consiste en despejar una de las incógnitas de cualquier ecuación, y la expresión obtenida reemplazarla en la otra ecuación; para luego resolver la ecuación obtenida.

Para hallar el valor de la otra incógnita, se reemplaza el valor anterior en cualquier ecuación y resolvemos.

■ **Ejemplo 3.40** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 2y = 7. \end{cases}$$

Solución: Se despeja y de la ecuación $2x - y = 5$

$$\begin{aligned} -y &= 5 - 2x \\ y &= 2x - 5, \end{aligned}$$

se reemplaza la expresión despejada en la ecuación $3x - 2y = 7$

$$\begin{aligned} 3x - 2(2x - 5) &= 7 \\ 3x - 4x + 10 &= 7 \\ -x &= -3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

luego, se reemplaza el valor de x en la ecuación $2x - y = 5$

$$\begin{aligned} 2(3) - y &= 5 \\ 6 - y &= 5 \\ -y &= 5 - 6 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

En conclusión

$$x = 3; \qquad y = 1$$

■ **Ejemplo 3.41** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución y mostrar

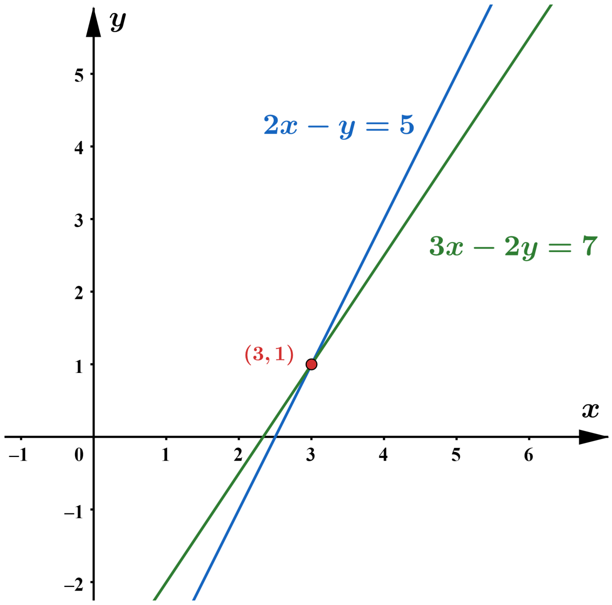


Figura 3.20: La solución del sistema es $(x,y) = (3,1)$.

la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 6. \end{cases}$$

Solución: Se restan las fracciones en las dos ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{6} = 2 \\ \dfrac{3x-8y}{12} = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-2y = 12 \\ 3x-8y = 72 \end{cases}$$

se despeja x de la ecuación $3x - 2y = 12$

$$3x = 12 + 2y$$
$$x = \frac{12+2y}{3},$$

se reemplaza la expresión despejada en la ecuación $3x - 8y = 72$

$$3\left(\frac{12+2y}{3}\right) - 8y = 72$$
$$12 + 2y - 8y = 72$$
$$-6y = 60$$
$$y = -10,$$

luego, se reemplaza el valor de y en la ecuación $3x-2y=12$

$$\begin{aligned} 3x-2(-10)&=12\\ 3x+20&=12\\ 3x&=-8\\ x&=-\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

En conclusión

$$x=-\frac{8}{3};\ y=-10.$$

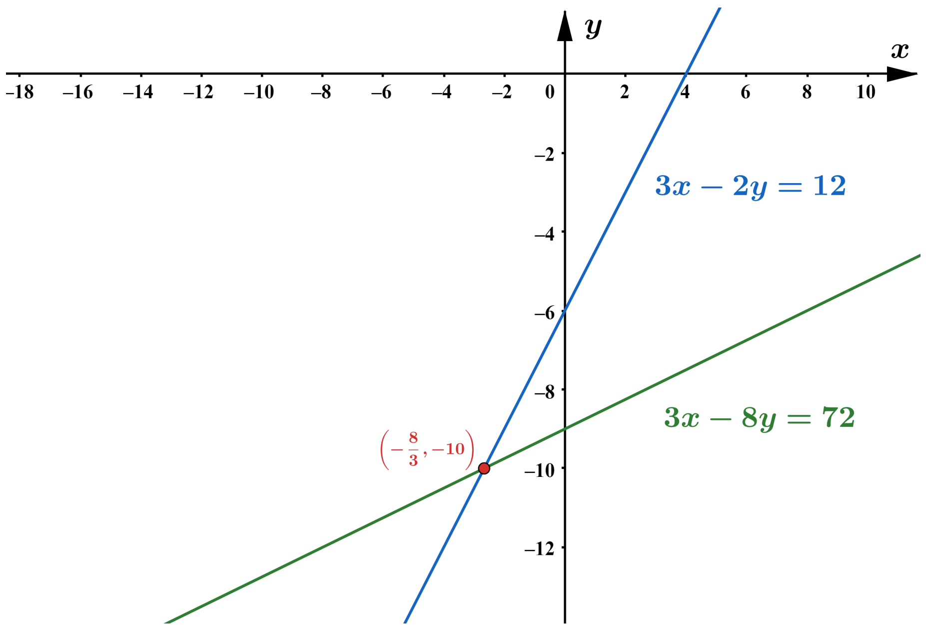


Figura 3.21: La solución del sistema es $(x,y)=\left(-\frac{8}{3},-10\right)$.

■ **Ejemplo 3.42** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{4}\\ \dfrac{y}{3}-\dfrac{x}{3}=-1. \end{cases}$$

Solución: Se multiplica en cruz y se hace la resta de fracciones en las dos ecuaciones, respectivamente

$$\begin{cases} 4x=5y\\ \dfrac{y-x}{3}=-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x-5y=0\\ -x+y=-3 \end{cases}$$

se despeja x de la ecuación $-x+y=-3$

$$-x=-3-y$$
$$x=3+y,$$

se reemplaza la expresión despejada en la ecuación $4x-5y=0$

$$4(3+y)-5y=0$$
$$12+4y-5y=0$$
$$-y=-12$$
$$y=12,$$

luego, se reemplaza el valor de y en la ecuación $-x+y=-3$

$$-x+12=-3$$
$$-x=-3-12$$
$$-x=-15$$
$$x=15.$$

En conclusión

$$x=15;\ y=12.$$

3.9.3 Método de igualación

Este método consiste en despejar la misma variable de cada ecuación luego, se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación resultante.

Para hallar el valor de la otra incógnita, se reemplaza el valor anterior en cualquier ecuación y se opera.

■ **Ejemplo 3.43** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} 4x+y=13 \\ -2x+3y=-17. \end{cases}$$

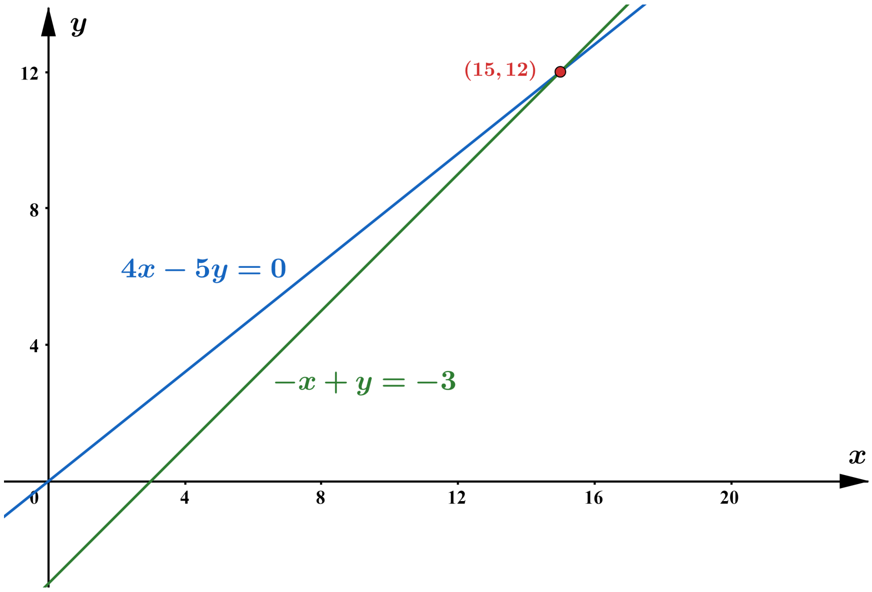


Figura 3.22: La solución del sistema es $(x,y) = (15,12)$.

Solución: Se despeja la variable y de las dos ecuaciones

$$4x + y = 13$$
$$y = 13 - 4x$$
$$-2x + 3y = -17$$
$$3y = -17 + 2x$$
$$y = \frac{2x - 17}{3}.$$

se iguala las expresiones obtenidas y se despeja x

$$13 - 4x = \frac{2x - 17}{3}$$
$$39 - 12x = 2x - 17$$
$$-12x - 2x = -17 - 39$$
$$-14x = -56$$
$$x = 4,$$

se reemplaza el valor de x en la ecuación $4x + y = 13$

$$4(4) + y = 13$$

$$16 + y = 13$$

$$y = 13 - 16$$

$$y = -3.$$

En conclusión

$$x = 4;\ y = -3.$$

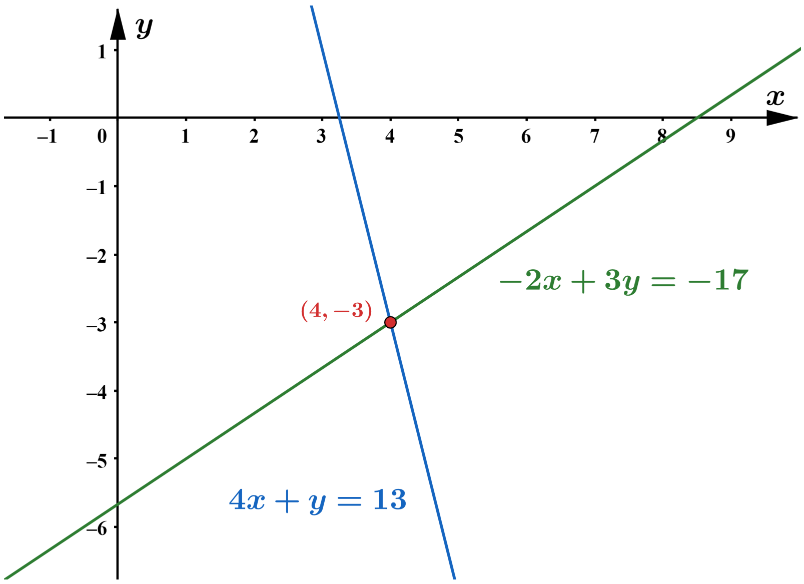


Figura 3.23: La solución del sistema es $(x, y) = (4, -3)$.

■ **Ejemplo 3.44** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} 4x - 1 = -y \\ x - 16 = 2y. \end{cases}$$

Solución: Se despeja la variable x de las dos ecuaciones

$$4x - 1 = -y$$

$$4x = -y + 1$$

$$x = \frac{-y+1}{4}$$

$$x - 16 = 2y$$

$$x = 2y + 16$$

se iguala las expresiones obtenidas y se despeja y

$$\frac{-y+1}{4} = 2y+16$$
$$-y+1 = 8y+64$$
$$-y-8y = 64-1$$
$$-9y = 63$$
$$y = -7$$

se reemplaza el valor de y en la ecuación $4x-1=-y$

$$4x-1 = -(-7)$$
$$4x = 7+1$$
$$4x = 8$$
$$x = 2.$$

En conclusión

$$x = 2;\, y = -7.$$

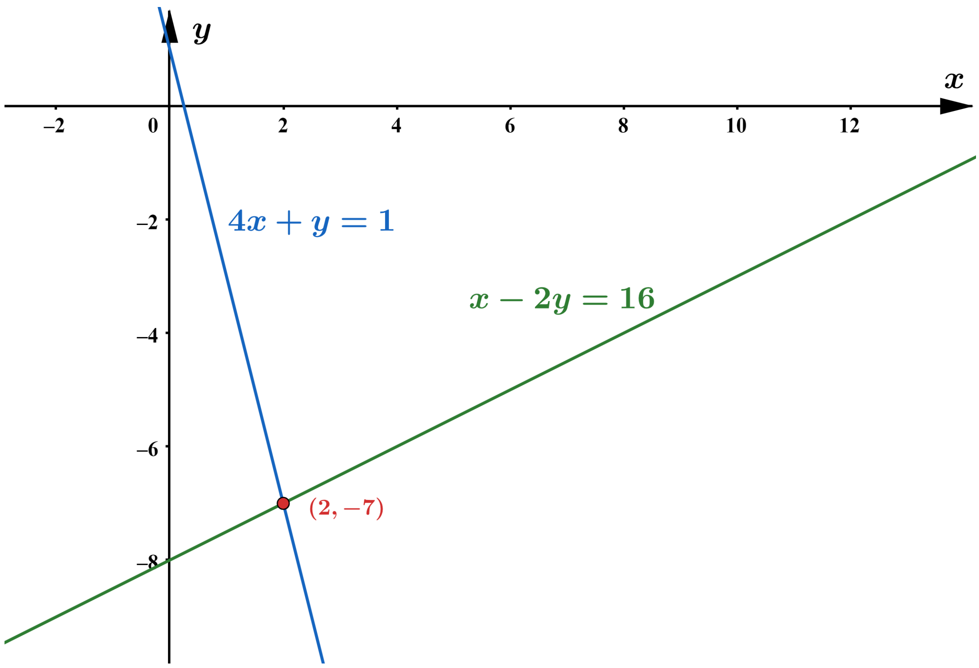


Figura 3.24: La solución del sistema es $(x,y) = (2,-7)$.

■ **Ejemplo 3.45** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} 15x - 11y = -87 \\ -12x - 5y = -27. \end{cases}$$

Solución: Se despeja la variable x de las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 15x - 11y &= -87 \\ 15x &= -87 + 11y \\ x &= \frac{-87 + 11y}{15} \\ -12x - 5y &= -27 \\ -12x &= -27 + 5y \\ x &= \frac{27 - 5y}{12} \end{aligned}$$

se igualan las expresiones obtenidas y se despeja y

$$\begin{aligned} \frac{-87 + 11y}{15} &= \frac{27 - 5y}{12} \\ \frac{-87 + 11y}{5} &= \frac{27 - 5y}{4} \\ -348 + 44y &= 135 - 25y \\ 69y &= 483 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

se reemplaza el valor de y en la ecuación $15x - 11y = -87$

$$\begin{aligned} 15x - 11(7) &= -87 \\ 15x - 77 &= -87 \\ 15x &= -10 \\ x &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

En conclusión

$$x = -\frac{2}{3};\ y = 7.$$

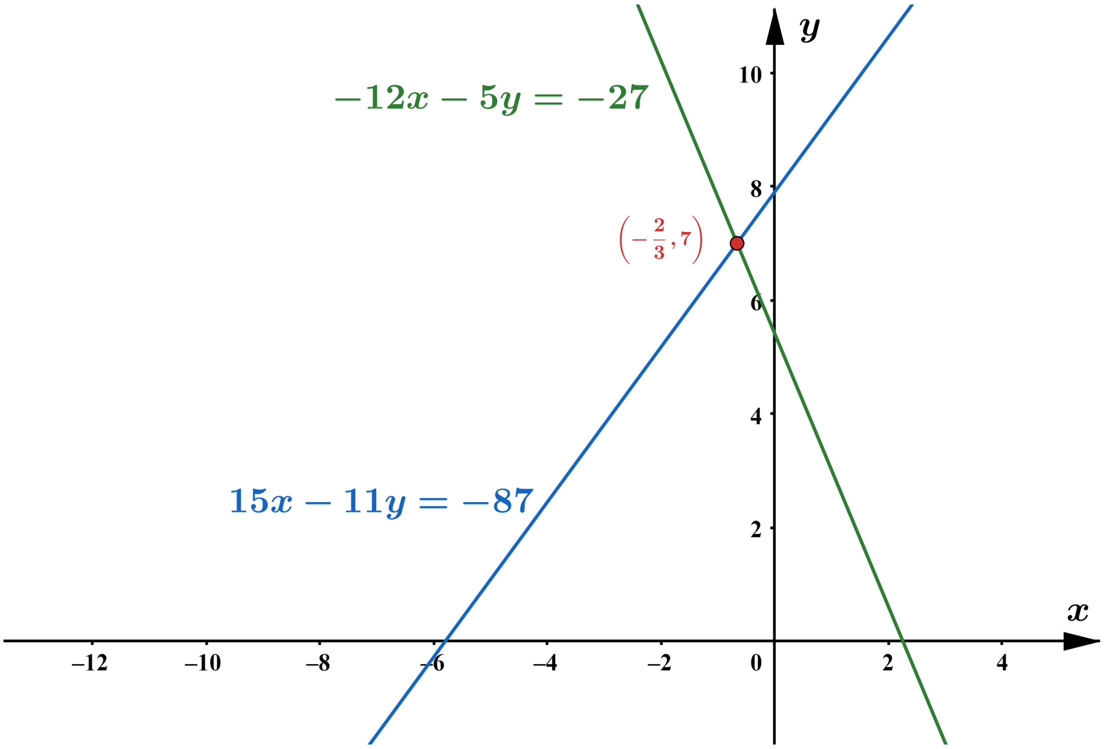


Figura 3.25: La solución del sistema es $(x,y)=\left(-\frac{2}{3},7\right)$.

3.9.4 Regla de Cramer

Este método consiste en resolver el sistema de ecuaciones mediante determinantes, el cual es un arreglo de números en filas y columnas; que se resuelve multiplicando la diagonal principal, menos el producto de la diagonal secundaria.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

■ **Ejemplo 3.46 — Cálculo de un determinante de 2×2.**

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = [(3)\cdot(5)]-[(2)\cdot(4)] = 15-8=7.$$

Para resolver un sistema de ecuaciones mediante la regla de Cramer se procede de la siguiente manera:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}=\frac{c\cdot e-f\cdot b}{a\cdot e-d\cdot b};\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}=\frac{a\cdot f-d\cdot c}{a\cdot e-d\cdot b}.$$

■ **Ejemplo 3.47** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Cramer y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} 2x+6y=-1 \\ x+8y=2. \end{cases}$$

Solución: Se tiene directamente

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}=\frac{[(-1)\cdot(8)]-[(2)\cdot(6)]}{[(2)\cdot(8)]-[(1)\cdot(6)]}=\frac{-8-12}{16-6}=\frac{-20}{10}=-2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}=\frac{[(2)\cdot(2)]-[(1)\cdot(-1)]}{[(2)\cdot(8)]-[(1)\cdot(6)]}=\frac{4+1}{16-6}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

En conclusión

$$x=-2;\, y=\frac{1}{2}.$$

■ **Ejemplo 3.48** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Cramer y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} 6x+3y=-4 \\ 9x+5y=-6. \end{cases}$$

Solución: Se tiene directamente

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{[(-4)\cdot(5)]-[(-6)\cdot(3)]}{[(6)\cdot(5)]-[(9)\cdot(3)]}=\frac{-20+18}{30-27}=\frac{-2}{3}$$

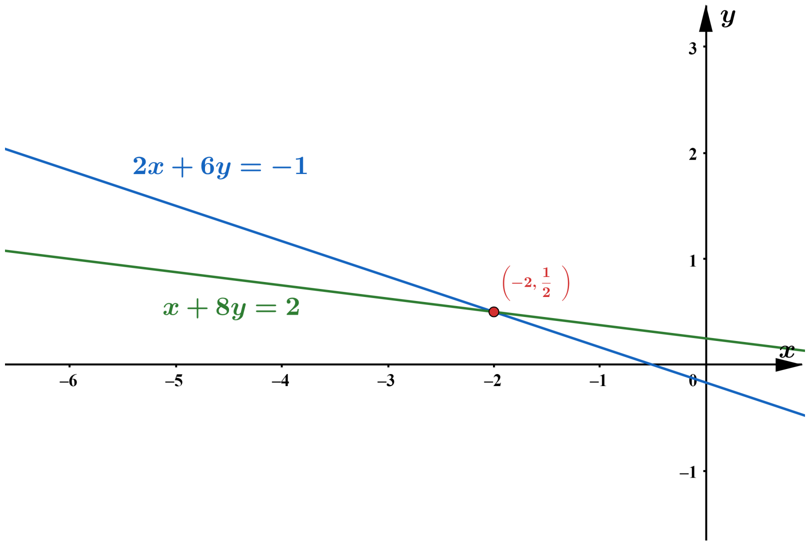


Figura 3.26: La solución del sistema es $(x,y)=\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$.

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{[(6)\cdot(-6)]-[(9)\cdot(-4)]}{[(6)\cdot(5)]-[(9)\cdot(3)]}=\frac{-36+36}{30-27}=\frac{0}{3}=0.$$

En conclusión

$$x=-\frac{2}{3};\, y=0.$$

■ **Ejemplo 3.49** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Cramer y mostrar la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5}x+\dfrac{6}{5}y=\dfrac{31}{10} \\ 2x+y=9. \end{cases}$$

Solución: Se tiene directamente

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \frac{31}{10} & \frac{6}{5} \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\left[\left(\dfrac{31}{10}\right)\cdot(1)\right]-\left[(9)\cdot\left(\dfrac{6}{5}\right)\right]}{\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)\cdot(1)\right]-\left[(2)\cdot\left(\dfrac{6}{5}\right)\right]}=\frac{\dfrac{31}{10}-\dfrac{54}{5}}{\dfrac{1}{5}-\dfrac{12}{5}}=\frac{-\dfrac{77}{10}}{-\dfrac{11}{5}}=\frac{7}{2}$$

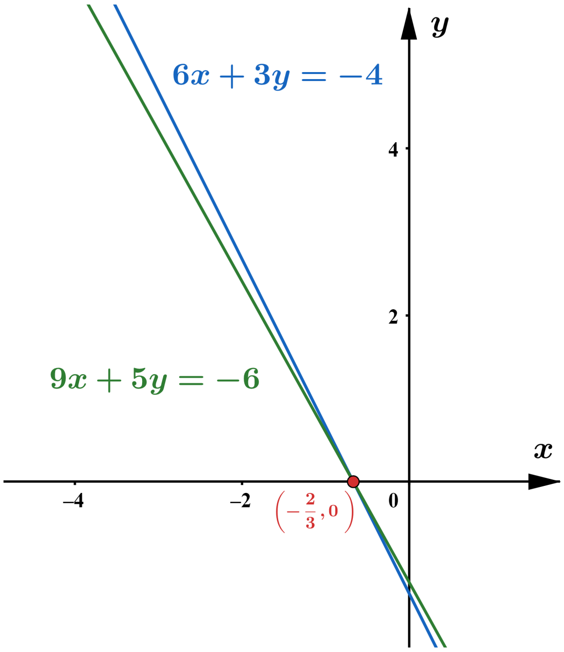


Figura 3.27: La solución del sistema es $(x,y)=\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$.

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{5} & \frac{31}{10}\\ 2 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{1}{5} & \frac{6}{5}\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)\cdot(9)\right]-\left[(2)\cdot\left(\dfrac{31}{10}\right)\right]}{\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)\cdot(1)\right]-\left[(2)\cdot\left(\dfrac{6}{5}\right)\right]}=\frac{\dfrac{9}{5}-\dfrac{31}{5}}{\dfrac{1}{5}-\dfrac{12}{5}}=\frac{-\dfrac{22}{5}}{-\dfrac{11}{5}}=2.$$

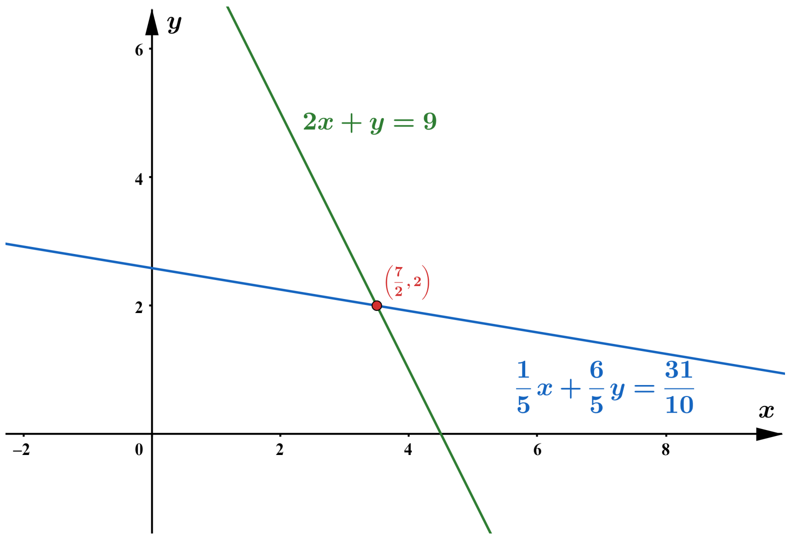


Figura 3.28: La solución del sistema es $(x,y)=\left(\dfrac{7}{2},2\right)$.

En conclusión

$$x = \frac{7}{2};\, y = 2.$$

3.9.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.15 Por el método de reducción, determinar la solución de los sistemas de ecuaciones y comprobar su respuesta a través del método gráfico.

1. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ 4x - 4y = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ 4x - y = 20 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 4y = 22 \\ -4x + y = -20 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -6x + 4y = -10 \\ -x - 2y = -7 \end{cases}$

Ejercicio 3.16 Por el método de sustitución, determinar la solución de los sistemas de ecuaciones y comprobar su respuesta a través del método gráfico.

1. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x - 4y = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3m - 3n = 6 \\ 4m - n = 20 \end{cases}$
4. $\begin{cases} p + 4q = 22 \\ q - 4p = -20 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -6a + 4b = -10 \\ -a - 2b = -7 \end{cases}$

Ejercicio 3.17 Por el método de igualación, determinar la solución de los sistemas de ecuaciones y comprobar su respuesta a través del método gráfico.

1. $\begin{cases} y - x = 10 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ x + y = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} m - n = 2 \\ 4m - n = 20 \end{cases}$
4. $\begin{cases} p + 4q = 22 \\ 4p - q = 20 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 6a + 4b = -10 \\ b - 2a = 11 \end{cases}$

Ejercicio 3.18 Por el método de Cramer, determinar la solución de los sistemas de ecuaciones y comprobar su respuesta a través del método gráfico.

1. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ 4x - 4y = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + \frac{7}{2}y = 13 \\ -4x + \frac{15}{2}y = 36 \end{cases}$
4. $\begin{cases} p + 4q = 22 \\ q - 4p = -20 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2b - 3a = -5 \\ a = 7 - 2b \end{cases}$

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

4. Funciones

Autores:
Lcdo. Jonathan Valencia
MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro
Ing. Kevin Astudillo

4.1 Relaciones

Definición 4.1 — Producto Cartesiano. Sean A, B dos conjuntos no vacíos, se define el producto cartesiano entre A y B como:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

■ **Ejemplo 4.1 — Producto Cartesiano.** Sean los conjuntos

$$A = \{1, 2\},$$

$$B = \{\square, \triangle, \bigcirc\},$$

entonces

$$A \times B = \{(1,\square);\ (1,\triangle);\ (1,\bigcirc);\ (2,\square);\ (2,\triangle);\ (2,\bigcirc)\}.$$

Note que $\text{Card}(A) = 2$, $\text{Card}(B) = 3$ y $\text{Card}(A \times B) = 6$, es decir, se cumple

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B).$$

Observación 4.1 Una representación gráfica del producto cartesiano $A \times B$ del ejemplo anterior es

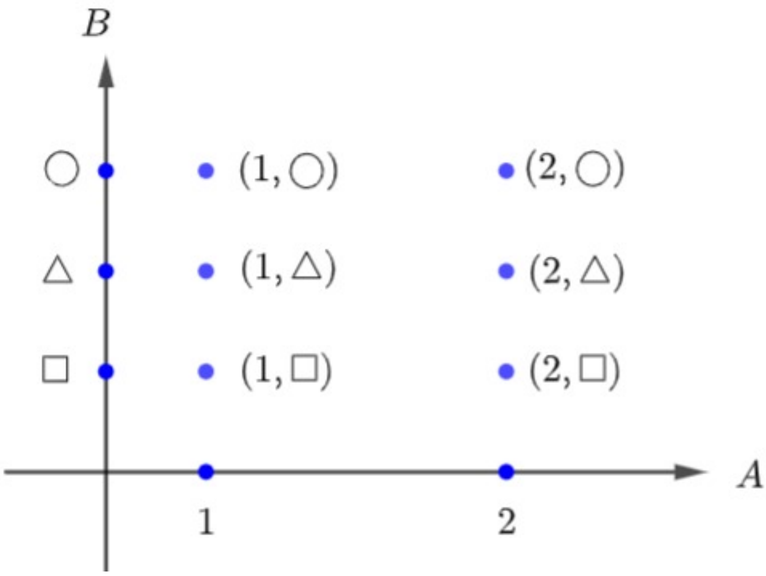


Figura 4.1: Producto cartesiano $A \times B$.

■ **Ejemplo 4.2 — Plano cartesiano.** Sean los conjuntos $A = B = \mathbb{R}$, entonces

$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Se denomina al producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como plano cartesiano y se denota $\mathbb{R}^2$, es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Observación 4.2 — Plano Cartesiano. La representación gráfica del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ es

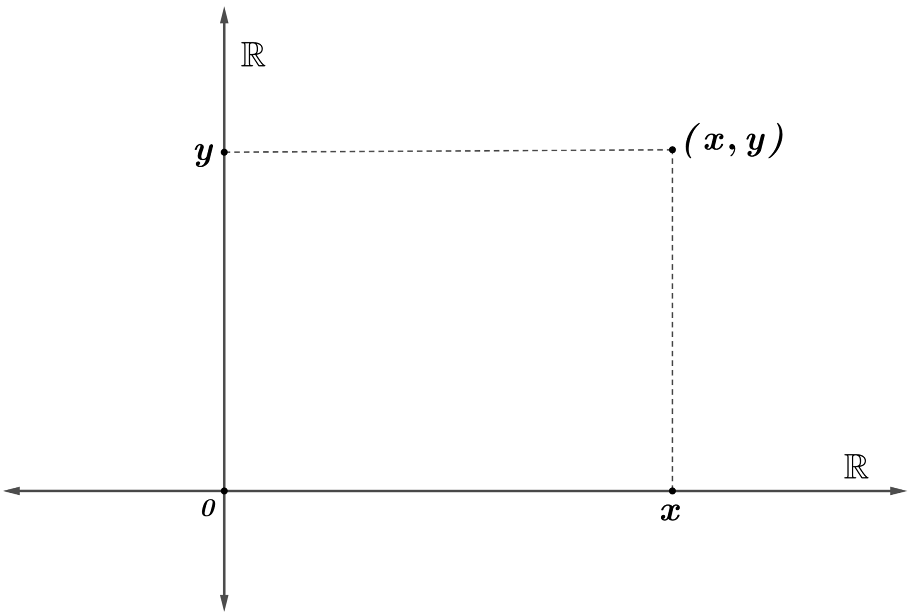


Figura 4.2: El plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Definición 4.2 — Relación. Una relación $\Re$ es un subconjunto del plano cartesiano $A\times B$, es decir,

$$\Re \subset A\times B.$$

■ **Ejemplo 4.3 — Relación matemática.** Se define los conjuntos

$$A=\{-2,\,-1,\,0,\,1,\,2\},$$
$$B=\{-1,\,3,\,5\},$$

se tienen un total de 15 pares ordenados para $A\times B$, pues

$$\operatorname{Card}(A\times B)=5\cdot 3=15,$$

los cuales, no se enunciarán, pero si se muestran a continuación algunas relaciones que se pueden considerar.

a) $x\,\Re_1\,y \;\Leftrightarrow\; xy>0,\,(x,y)\in A\times B.$

Solución: Se tiene entonces que

$$(x,y)\in\Re_1 \;\Leftrightarrow\; xy>0,$$

por lo tanto, $(-2,-2)\in\Re_1$, pues $(-2)(-1)=2>0$. Sin embargo, $(-2,3)\notin\Re_1$, pues $(-2)(-3)=-6<0$. Así, analizando cada uno de los elementos de $A\times B$, se concluye que

$$\begin{aligned}\Re_1&=\{(x,y)\in A\times B \mid xy>0\}\\&=\{(-2,-1);\,(-1,-1);\,(1,3);\,(1,5);\,(2,3);\,(2,5)\}.\end{aligned}$$

b) $x\,\Re_2\,y \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2=1,\,(x,y)\in A\times B.$

Solución: Brevemente se tiene que

$$\begin{aligned}\Re_2&=\left\{(x,y)\in A\times B \,\middle|\, x^2+y^2=1\right\}\\&=\{(-1,-1),\cdots,(1,-1)\}.\end{aligned}$$

c) $x\,\Re_3\,y \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x}{y}=10,\,(x,y)\in A\times B.$

Solución: Este ejemplo, muestra que puede haber relaciones vacías, es decir,

$$\Re_3=\left\{(x,y)\in A\times B \,\middle|\, \frac{x}{y}=10\right\}=\emptyset.$$

■ **Ejemplo 4.4 — Relaciones en $\mathbb{R}^2$.** Se considera el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, en este caso puesto que $\operatorname{Card}\left(\mathbb{R}^2\right)=\infty$, es difícil o imposible detallar todos los elementos de una relación en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto solo se expresará una relación mediante comprensión del conjunto con la ayuda de un gráfico que determinará una idea de la región o curva que satisface tal relación.

a) $x\,\Re_1 y \;\Leftrightarrow\; x=3y,\;(x,y)\in\mathbb{R}^2.$

Solución: Se tiene por comprensión

$$\Re_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x = 3y\}$$

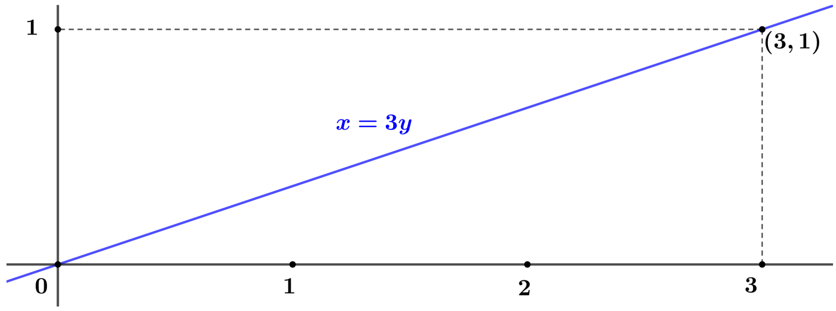


Figura 4.3: Conjunto de puntos de $\Re_1$.

b) $x\Re_2 y \ \Leftrightarrow \ x^2 - y^2 > 1, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución: Se tiene por comprensión

$$\Re_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1\}$$

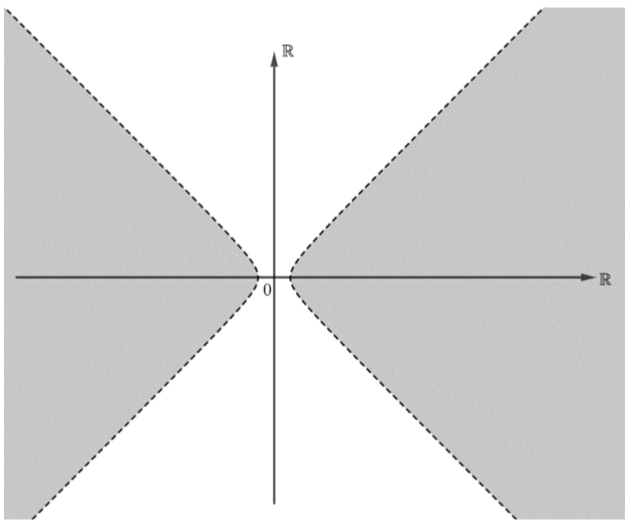


Figura 4.4: Conjunto de puntos de $\Re_2$.

Observación 4.3 Se puede usar diagrama de Venn y flechas para representar relaciones, estas representaciones se llaman diagramas digitales.

■ **Ejemplo 4.5 — Diagrama sagital.** A continuación, se presentan los tres diagramas sagitales correspondientes al Ejemplo 4.3:

a)

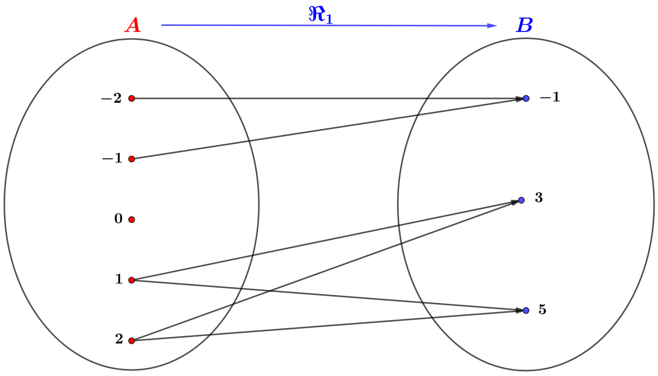


Figura 4.5: Diagrama sagital de $\Re_1$.

b)

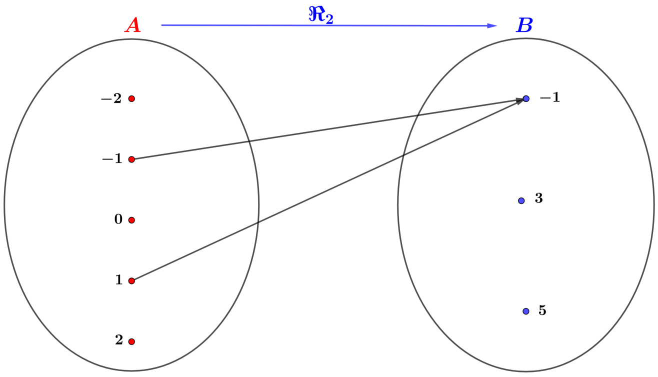


Figura 4.6: Diagrama sagital de $\Re_2$.

c)

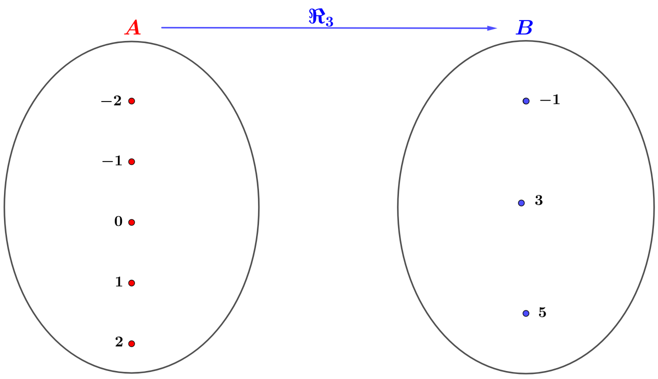


Figura 4.7: Diagrama sagital de $\Re_3$.

Observación 4.4 En una relación $\Re \subset A \times B$ se denomina a A como el conjunto de salida, B como el conjunto de llegada y para las flechas de la relación se utiliza la notación $\Re(x) = y$.

■ **Ejemplo 4.6** Para el Ejemplo 4.3 se tiene

a) Para $\Re_1$

$$\begin{aligned} \Re_1(-2) &= -1 \\ \Re_1(-1) &= -1 \\ \Re_1(1) &= 3 \\ \Re_1(1) &= 5 \\ \Re_1(2) &= 3 \\ \Re_1(2) &= 5. \end{aligned}$$

b) Para $\Re_2$

$$\Re_2(-1) = -1$$

Definición 4.3 — Dominio y recorrido de una relación. Sea una relación $\Re \subset A \times B$, se definen los conjuntos

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\Re) &= \{x \in A \mid \exists y \in B,\ \Re(x) = y\} \quad y \\ \text{Rec}(\Re) &= \{y \in B \mid \exists x \in \text{Dom}(\Re),\ \Re(x) = y\}, \end{aligned}$$

conocidos como dominio y recorrido de la relación $\Re$, respectivamente . El recorrido también suele llamarse rango.

■ **Ejemplo 4.7 — Dominio y Recorrido.** Para el Ejemplo 4.3 se tiene

a) $\text{Dom}(\Re_1) = \{-2, -1, 1, 2\}$,

$\text{Rec}(\Re_1) = \{-1, 3, 5\}$.

b) $\text{Dom}(\Re_2) = \{-1, 1\}$,

$\text{Rec}(\Re_2) = \{-1\}$.

c) $\text{Dom}(\Re_3) = \emptyset$,

$\text{Rec}(\Re_3) = \emptyset$.

4.1.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1 De acuerdo con los siguientes conjuntos de pares ordenados, determine si corresponde a una función o una relación.

1. $\left\{(0,2b), \left(a, \dfrac{4b}{2}\right), (0,b+b)\right\}$;
2. $\left\{(3,6), \left(-3,\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2},9\right)\right\}$;
3. $\{(10,\ 34),\ (0,\ 20),\ (10,\ 10),\ (20,\ 5)\}$;
4. $\{(-7,\ -\pi),\ (8,\ -10),\ (\sqrt{49},\ 5)\}$;
5. $\left\{\left(\dfrac{5}{3},\ 3\right),\ \left(\dfrac{10}{6},\ 2\right),\ \left(1,\ \dfrac{5}{6}\right)\right\}$.

4.2 Funciones reales

Definición 4.4 — Función. Una función es una relación $f \subset A \times B$ que satisface 2 condiciones:

i) a cada elemento $x \in A$ le corresponde algún $y \in B$ tal que $f(x) = y$,

ii) el elemento $y \in B$ que le corresponde a $x \in A$, es único.

Observación 4.5 La primera condición aduce a la correspondencia obligatoria de los elementos del conjunto de salida con elementos del conjunto de llegada y la segunda condición aduce a la unicidad de tal correspondencia.

■ **Ejemplo 4.8 — Función.** Sean los conjuntos $A = \{-3,-1,1,3,5\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$

a) Para $f_1 = \{(-3,1);\ (-1,2);\ (1,3);\ (3,4)\}$ el diagrama sagital es

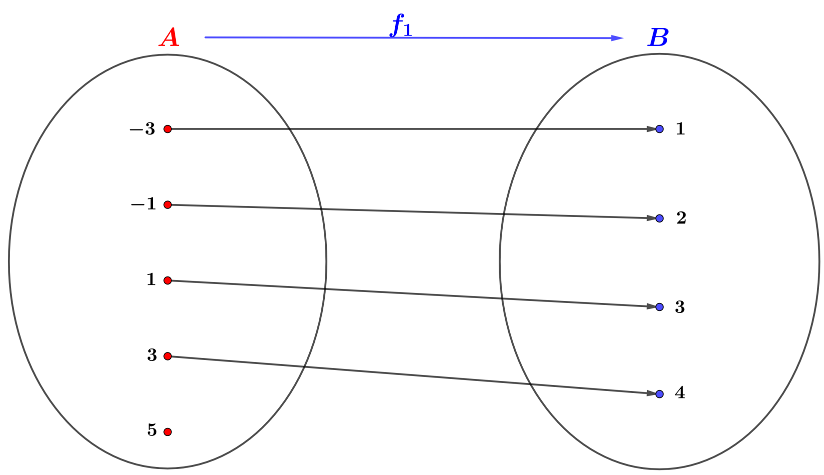


Figura 4.8: Diagrama sagital de f_1.

luego, se tiene que f_1 no es una función, pues no satisface la condición i) ya que $5 \in A$ no está en correspondencia con algún elemento de B.

b) Para $f_2 = \{(-3,1);\ (-1,3);\ (1,2);\ (3,4);\ (5,1);\ (5,4)\}$ el diagrama sagital es

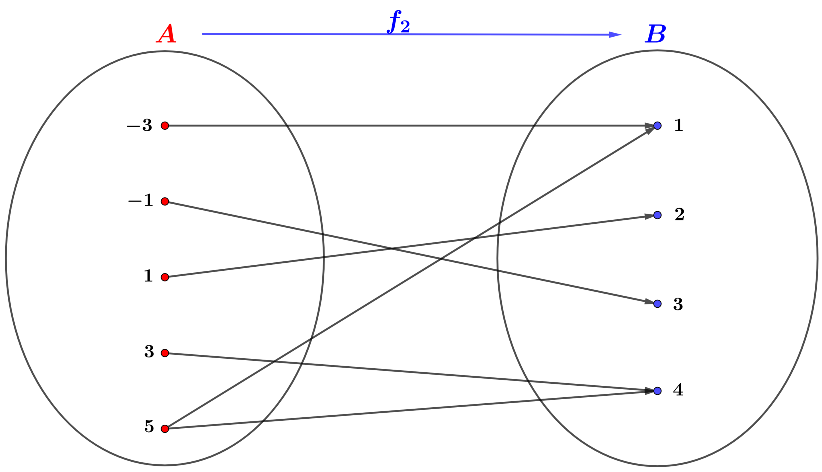


Figura 4.9: Diagrama sagital de f_2.

así, se tiene que f_2 no es una función pues pese a que si satisface la condición i), no satisface la condición ii), ya que no hay unicidad de correspondencia, es decir,

$$f_2(5) = 1 \quad \text{y} \quad f_2(5) = 4.$$

Observación 4.6 De este ejemplo, se observa que una función es un conjunto de pares ordenados, en donde no existen pares ordenados diferentes para los cuales se repita la primera componente.

c) Para $f_3 = \{(-3,2);\ (-1,4);\ (1,1);\ (3,2);\ (5,3)\}$ el diagrama sagital es

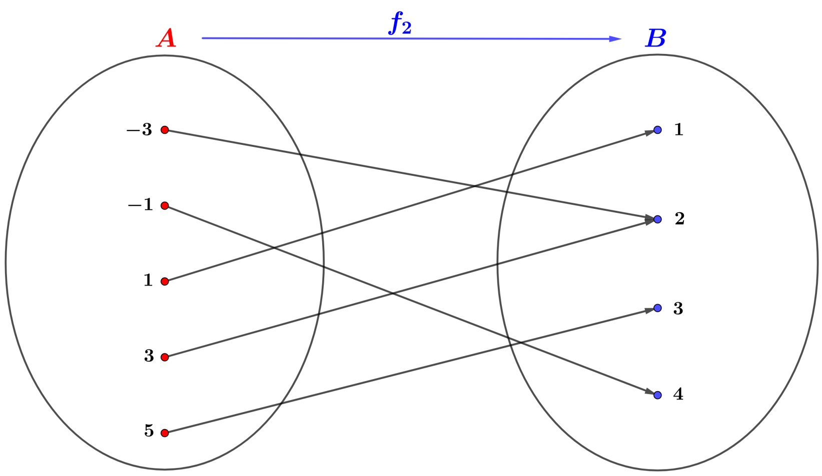


Figura 4.10: Diagrama sagital de f_3.

Luego, se tiene que f_3 sí es una función pues satisface las condiciones i) y ii).

Cuando se considera el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, se pueden considerar funciones que serán llamadas funciones reales.

Definición 4.5 — Función real. Una función real se define mediante

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x), \end{cases}$$

donde $y = f(x)$ se denomina regla de asignación que por abuso de lenguaje se le suele llamar función. Sin embargo, no se debe confundir que la función $f \subset \mathbb{R}^2$ se refiere estrictamente a todos los elementos que la componen como el conjunto de salida, conjunto de llegada y regla de asignación.

La expresión $x \to y = f(x)$ se lee: x se transforma en y mediante f.

4.2.1 Dominio y recorrido de funciones reales

Definición 4.6 — Dominio y recorrido de funciones reales. Sea $f \subset \mathbb{R}^2$ una función real. Se definen el dominio y recorrido de f como

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y\}$$

$$\mathrm{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathrm{Dom}(f),\ f(x) = y\}.$$

Observación 4.7 En el estudio de las funciones reales es común, en primera instancia, buscar el dominio de la que se llamará función. Esto se debe a que puede haber relaciones que no sean funciones pero luego de encontrar y definirlas en su dominio, estas relaciones se consideran funciones convirtiéndose en una necesidad la búsqueda inicial del dominio de una regla de asignación cualquiera.

A continuación, indicaremos funciones clásicas que se estudian en todo curso de matemática.

Funciones lineales

Definición 4.7 Una función lineal se define como

$$f(x) = mx + b, \quad m, b \in \mathbb{R}.$$

Se tiene entonces que

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Rec}(f) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } m \neq 0 \\ \{b\}, & \text{si } m = 0. \end{cases}$

Esto se debe a que toda función lineal se representa mediante una recta donde no hay restricciones a considerar y por lo tanto se define en toda la recta real. Además, cuando $m = 0$, la función es constante $f(x) = b$, y esto hace que el recorrido solo tome el valor constante $b \in \mathbb{R}$.

■ **Ejemplo 4.9 — Funciones lineales.** Se analizan las siguientes funciones lineales.

a) Para $f(x) = -2x+5$ se tiene que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Para verificar que $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$, el procedimiento general es considerar $y = f(x)$, despejar x y analizar las restricciones en y si lo hubieren. En efecto,

$$y = -2x+5$$
$$2x = 5-y$$
$$x = \frac{5-y}{2},$$

y puesto que no hay restricciones en y se tiene que $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$.

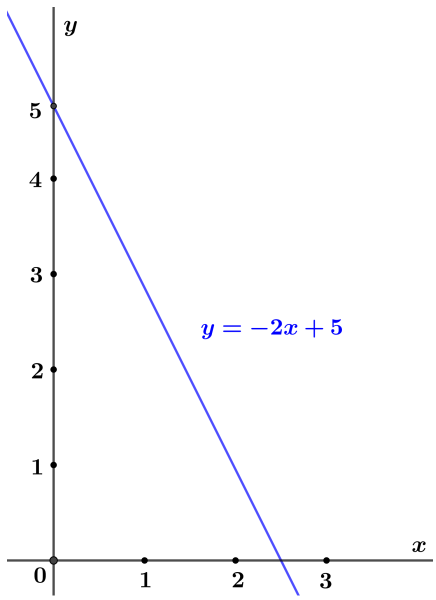


Figura 4.11: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x+5\}$.

b) Para $g(x) = 3$, se tiene que $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, pues no hay restricciones para x. Por otra parte, dado que es una función constante, se coloca $y = f(x)$, es decir,

$$y = 3,$$

es decir, y solo tiene el valor de 3, luego $\text{Rec}(g) = 3$.

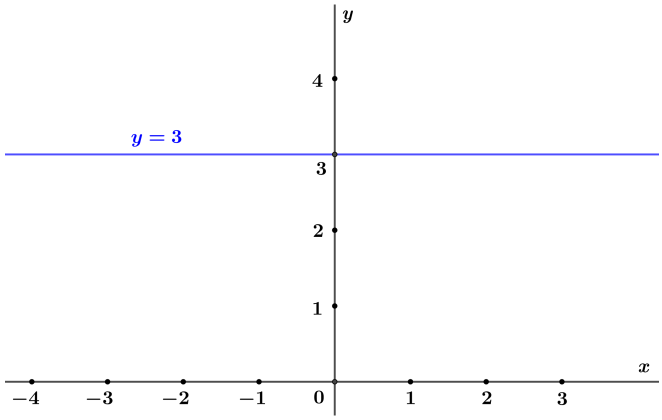


Figura 4.12: $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3\}$.

c) Sea $h(x) = 3x - 7$ y $\mathrm{Dom}(h) =]-4;5]$. Determine el recorrido a partir del dominio dado. Se tiene que

$$-4 < x \leq 5$$

luego al multiplicar por 3 se sigue

$$-12 < 3x \leq 15$$

ahora al restar -7 se obtiene

$$-19 < 3x - 7 \leq 8$$

de donde

$$-19 < y \leq 8.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Rec}(h) =]-19, 8]$, lo cual indica que lo necesario fue hallar el recorrido construyendo la función a partir de su dominio.

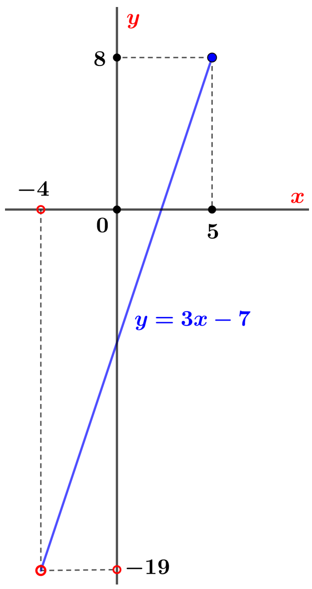


Figura 4.13: $h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x - 7 \wedge -4 < x \leq 5\}$.

d) Sea $p(x) = 2 - 5x$ y $\text{Rec}(p) = [4, 10[$. Determine el dominio a partir del recorrido dado. Se tiene que

$$4 \leq y < 10$$

sustituyendo el valor de la variable y se tiene,

$$4 \leq 2 - 5x < 10$$

ahora al restar 2 a todas las desigualdades se tiene

$$2 \leq -5x < 8$$

finalmente, al multiplicar por $-\frac{1}{5}$ se concluye

$$-\frac{2}{5} \geq x > -\frac{8}{5}.$$

Por lo tanto, $\text{Dom}(p) = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{2}{5}\right]$, en este caso lo necesario fue resolver la inecuación que resulta al colocar la condición de su recorrido.

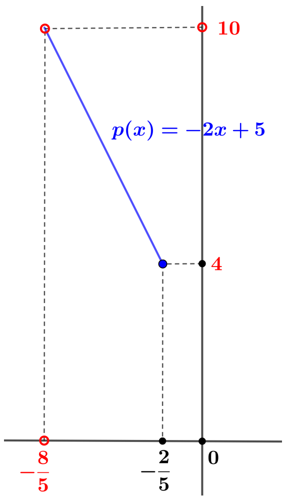


Figura 4.14: $p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x + 5 \wedge 4 \leq y < 10\}$.

Funciones cuadráticas

Definición 4.8 Una función cuadrática se define como:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se tiene entonces que

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- $\operatorname{Rec}(f) = \begin{cases} \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right), & \text{si } a > 0 \\ \left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right], & \text{si } a < 0 \end{cases}$

donde $\Delta = b^2 - 4ac$, es el denominado discriminante. Como se observa no existen restricciones en x, y por lo tanto se deduce que $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Para deducir el recorrido de manera general se analiza

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$0 = ax^2 + bx + c - y$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a},$$

de donde se tiene la restricción de la raíz que solo admiten números no negativos, entonces

$$b^2 - 4ac + 4ay \geq 0$$
$$4ay \geq -(b^2 - 4ac)$$
$$4ay \geq -\Delta.$$

Aquí, se analizan dos casos:
i) Si $a > 0$

$$4ay \geq -\Delta$$
$$y \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

entonces, $\operatorname{Rec}(f) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$.

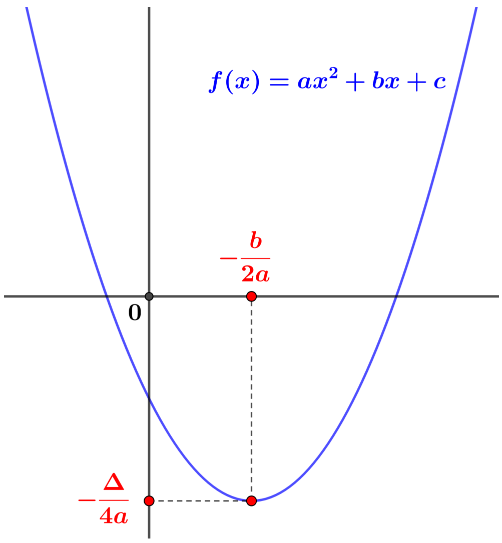


Figura 4.15: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c \wedge a > 0\}$.

ii) Si $a < 0$

$$4ay \geq -\Delta$$
$$y \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

entonces, $\text{Rec}(f) = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

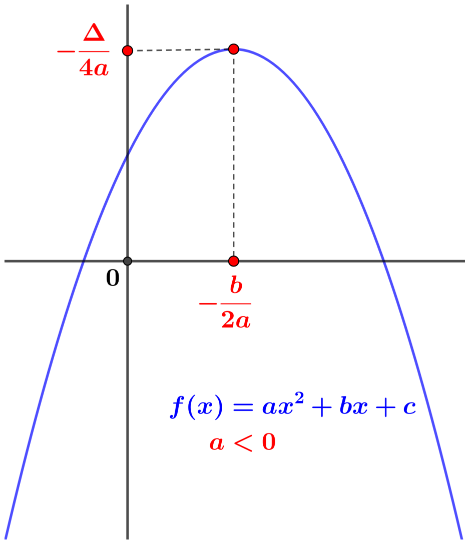


Figura 4.16: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c \wedge a < 0\}$.

■ **Ejemplo 4.10 — Funciones cuadráticas.**

a) Hallar el dominio y recorrido de $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

Solución: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Como $a = 2 > 0$, se calcula

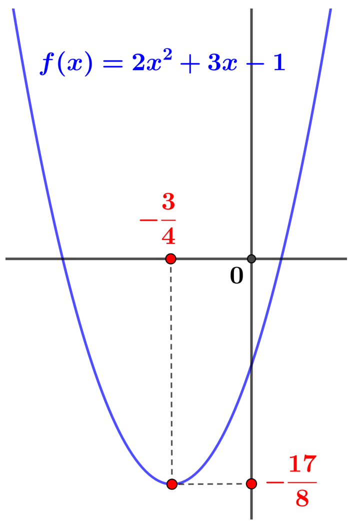


Figura 4.17: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x^2 + 3x - 1\}$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{\Delta}{4a} &= -\frac{3^2-4(2)(-1)}{4(2)}\\
&= -\frac{9+8}{8}\\
&= -\frac{17}{8}
\end{aligned}
$$

entonces, $\text{Rec}(f) = \left[-\frac{17}{8}, +\infty\right)$.

b) Hallar el dominio y recorrido de $g(x) = -3x^2+5x+4$.

Solución: $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$. Como $a = -3 < 0$, se calcula

$$
\begin{aligned}
\Delta = (5)^2 - 4(-3)(4) = 25+48 = 73\\
-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{73}{4(-3)} = \frac{73}{12}
\end{aligned}
$$

entonces, $\text{Rec}(g) = \left(-\infty, \frac{73}{12}\right]$.

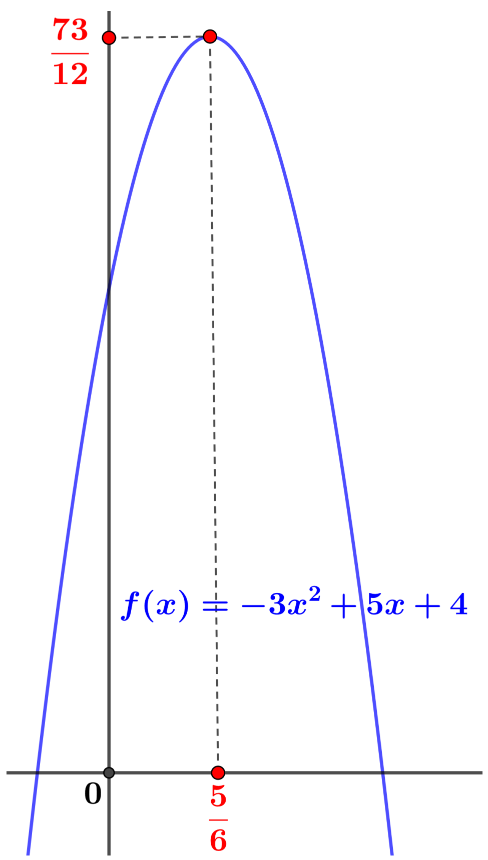


Figura 4.18: $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -3x^2+5x+4\}$.

Funciones racionales

Definición 4.9 Una función racional se define como

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$.

Se tiene entonces que

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
- $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{a}{c} \right\}$.

Para hallar el dominio, efectivamente se observan restricciones, pues la división para cero no esta definida, entonces

$$\begin{aligned} cx + d &\neq 0 \\ cx &\neq -d \\ x &\neq -\frac{d}{c}, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Para hallar el recorrido se tiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{cx+d} \\ cxy + dy &= ax + b \\ cxy - ax &= b - dy \\ x(cy - a) &= b - dy \\ x &= \frac{b - dy}{cy - a}, \end{aligned}$$

y las restricción para y,

$$\begin{aligned} cy - a &\neq 0 \\ cy &\neq a \\ y &\neq \frac{a}{c}, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$.

Observación 4.8 Se admite sin demostración que las rectas $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$ son asíntotas vertical y horizontal de f, respectivamente.

■ **Ejemplo 4.11 — Funciones racionales.** Se analizan los siguientes ejemplos.

a) Para
$$f(x) = \frac{2x-3}{5x+7}$$
se tiene $a = 2,\ \ b = -3,\ \ c = 5\ $ y $\ d = 7$. Entonces,
$$-\frac{d}{c} = -\frac{7}{5}$$
$$\frac{a}{c} = \frac{2}{5},$$
luego,
$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{5}\right\}$$
$$\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{5}\right\},$$
además, $x = -\frac{7}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ son asíntotas de f.

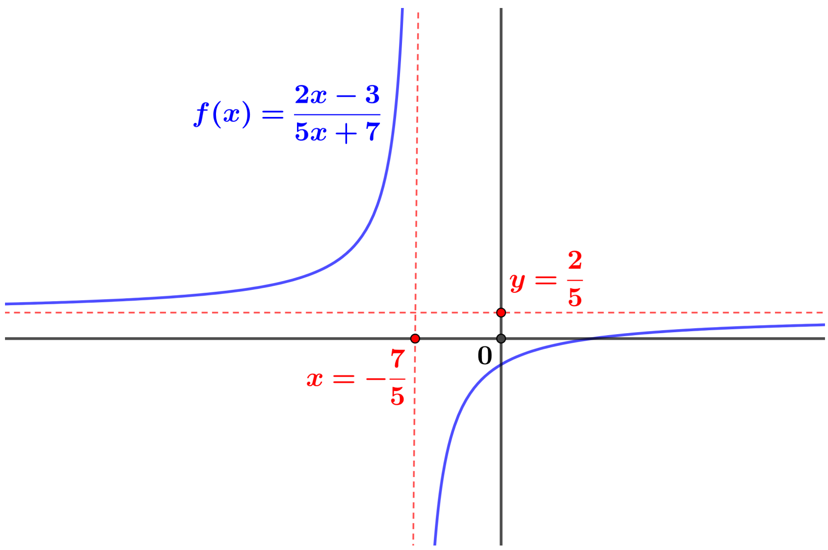


Figura 4.19: $f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{2x-3}{5x+7}\right\}$.

b) Para
$$g(x) = \frac{2-3x}{5-4x}.$$
Entonces,

- $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{4}\right\}$,

- $\text{Rec}(g) = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{4}\right\}$,

sin embargo, se va a realizar la prueba de la forma tradicional.

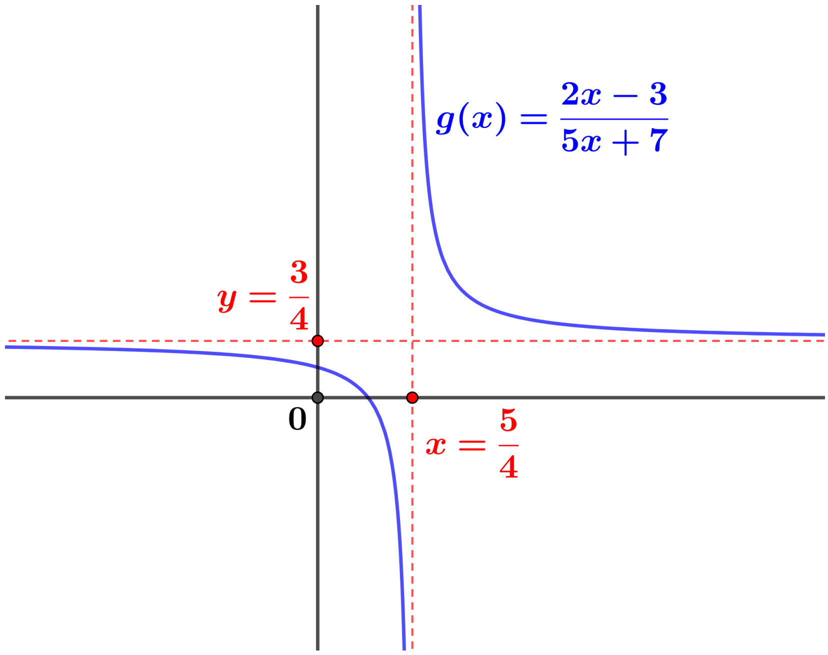


Figura 4.20: $f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{2-3x}{5-4x}\right\}$.

Para el dominio, se tiene la restricción

$$
\begin{aligned}
5 - 4x &\neq 0 \\
5 &\neq 4x \\
x &\neq \frac{5}{4},
\end{aligned}
$$

entonces, $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{4}\right\}$. Para hallar el recorrido se tiene

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2-3x}{5-4x} \\
5y - 4xy &= 2 - 3x \\
3x - 4xy &= 2 - 5y \\
x(3-4y) &= 2 - 5y \\
x &= \frac{2-5y}{3-4y},
\end{aligned}
$$

y la restricción para y,

$$\begin{aligned} 3-4y &\neq 0 \\ 3 &\neq 4y \\ y &\neq \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathrm{Rec}(g) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{4} \right\}$.

Funciones con radicales

Definición 4.10 Una función con radical se define como

$$f(x) = \sqrt[n]{p(x)},$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y p es un polinomio.

Se tiene entonces que

$$\mathrm{Dom}(f) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \geq 0\}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathbb{R}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es decir, la restricción es solo cuando n es un número par, y esta consiste en notar que la raíz enésíma de un número negativo no esta definida. Por otra parte para hallar el recorrido de una función con radical, no hay una forma general, pues depende de la forma del polinomio y del dominio de la función.

■ **Ejemplo 4.12 — Funciones con radicales.** Se analizan los siguientes ejemplos.

a) Sea $f(x) = \sqrt{1-3x}$. Puesto que $n = 2$ es par se tiene que la restricción para hallar el dominio es

$$\begin{aligned} 1-3x &\geq 0 \\ 1 &\geq 3x \\ \frac{1}{3} &\geq x, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathrm{Dom}(f) = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$. Para hallar el recorrido se tiene

$$x \in \mathrm{Dom}(f) = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$$

$$x \leq \frac{1}{3}$$
$$3x \leq 1$$
$$0 \leq 1-3x$$
$$0 \leq \sqrt{1-3x}$$
$$0 \leq y,$$

entonces, $\text{Rec}(f) = [0,+\infty[$.

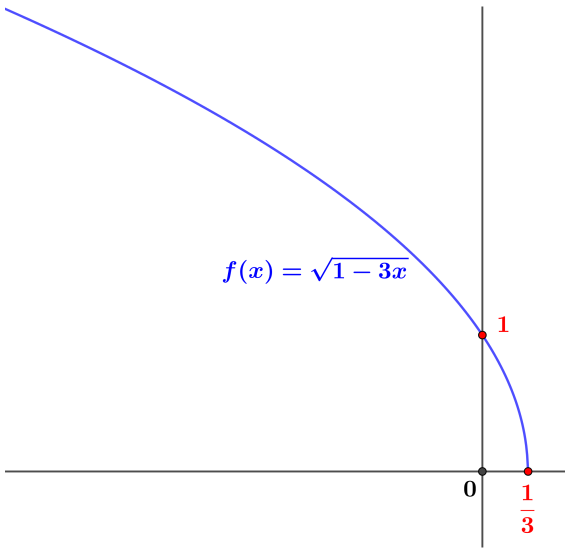


Figura 4.21: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{1-3x}\}$.

b) Sea $g(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$. Dado que $n = 3$ es impar, se tiene que $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$. Para determinar el recorrido, se tiene que

$$x \in \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$$
$$x^2 \geq 0$$
$$-x^2 \leq 0$$
$$1-x^2 \leq 1$$
$$\sqrt[3]{1-x^2} \leq \sqrt[3]{1}$$
$$y \leq 1,$$

por lo tanto, $\text{Rec}(g) =]-\infty, 1]$.

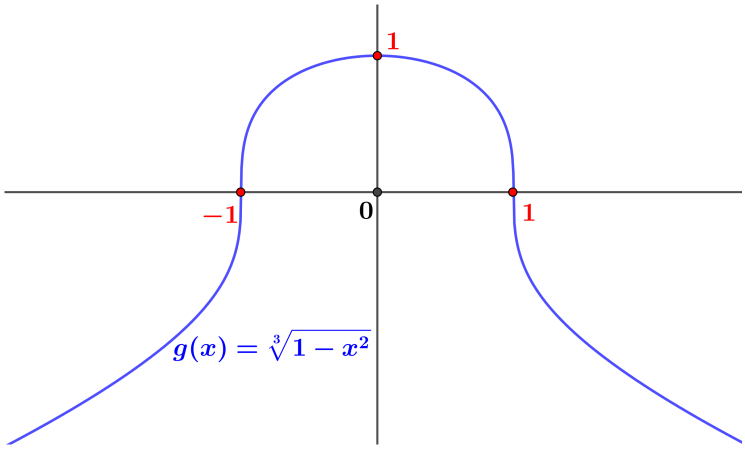


Figura 4.22: $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt[3]{1-x^2}\}$.

c) Sea $h(x) = \sqrt[4]{3-7x^2}$. Dado que $n = 4$, entonces la restricción para hallar el dominio es

$$3 - 7x^2 \geq 0$$
$$(\sqrt{3} + \sqrt{7}x)(\sqrt{3} - \sqrt{7}x) \geq 0$$
$$x = -\sqrt{-\frac{3}{7}} \quad , \quad x = -\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$-\infty \qquad -\sqrt{\frac{3}{7}} \qquad \sqrt{\frac{3}{7}} \qquad +\infty$

$\sqrt{3} + \sqrt{7}x$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt{3} - \sqrt{7}x$	$+$	$+$	$-$
	$-$	$+$	$-$

entonces, $\mathrm{Dom}(h) = \left[-\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\right]$. Para hallar el recorrido se tiene que

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Dom}(h) = \left[-\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\right] &\Longrightarrow -\sqrt{\frac{3}{7}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{7}} \\ &\Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{3}{7} \\ &\Longrightarrow 0 \leq 7x^2 \leq 3 \\ &\Longrightarrow 0 \geq -7x^2 \geq -3 \\ &\Longrightarrow \sqrt[4]{3} \geq \sqrt[4]{3-7x^2} \geq \sqrt[4]{0} \\ &\Longrightarrow \sqrt[4]{3} \geq y \geq 0, \end{aligned}$$

entonces, $\mathrm{Rec}(h) = [0, \sqrt[4]{3}]$.

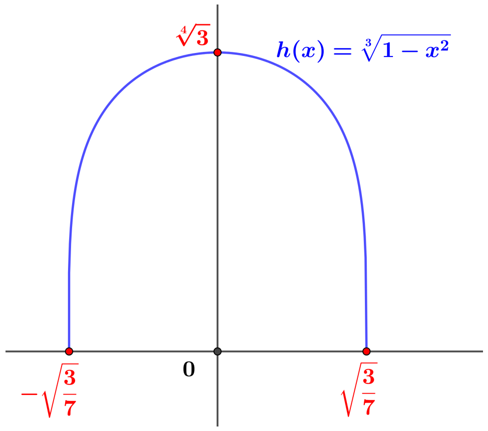


Figura 4.23: $h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{1-3x}\}$.

4.2.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.2 Dados los siguientes grupos de funciones reales:

1. Determine el dominio de las siguientes funciones lineales:
   a) $3x - 3y - 6 = 0$ si $y \geq 0$,
   b) $f(x) = 11x - 7$ si $f(x) \leq \frac{1}{2}$,
   c) $5y - 4x - 6 = 0$ si $y \geq -1$,
   d) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$ si $f(x) \geq -6$,
   e) $y - 7x = 9$ si $y \leq 3$.
2. Determine el recorrido de las siguientes funciones cuadráticas:
   a) $f(x) = x^2 + 2x - 15$,
   b) $g(x) = x^2 + 2x + 15$,
   c) $h(x) = x - 3x^2 - 7$,
   d) $i(x) = 5x^2 + 15$,
   e) $j(x) = x^2 + 2x - 15$.
3. Determine el recorrido de las siguientes funciones racionales:
   a) $f(x) = \dfrac{6x-5}{4-3x}$,
   b) $g(x) = \dfrac{x-5}{1-3x}$,
   c) $h(x) = \dfrac{x}{5x-2}$,
   d) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x}$,
   e) $g(x) = \dfrac{x+5}{x-4}$.

4. De las siguientes funciones radicales:

   a) Determine el dominio de $h(x) = \sqrt{-x+5}$,

   b) Determine el recorrido de $f(x) = 4 + \sqrt{x-5}$,

   c) Determine el dominio de $g(x) = \sqrt{7x-8} - 4$,

   d) Determine el recorrido de $i(x) = \sqrt{9+x}$,

   e) Determine el dominio de $j(x) = 6 + \sqrt{-x+12}$.

4.3 Características de funciones

4.3.1 Monotonía de funciones

Definición 4.11 Sea I un intervalo, se dice que

i) f es creciente en I si y solo si
$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
ii) f es decreciente en I si y solo si
$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
iii) f es constante en I si y solo si
$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Observación 4.9 Obsérvese la Figura 4.24.

Geométricamente se tiene que la función en (a) es creciente, la función en (b) es decreciente y la función en (c) es constante.

■ **Ejemplo 4.13 — Función decreciente.** Mostrar que la función $f(x) = -2x+3$ es decreciente en $I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Solución: Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Longrightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ &\Longrightarrow -2x_1 + 3 > -2x_2 + 3 \\ &\Longrightarrow f(x_1) > f(x_2), \end{aligned}$$

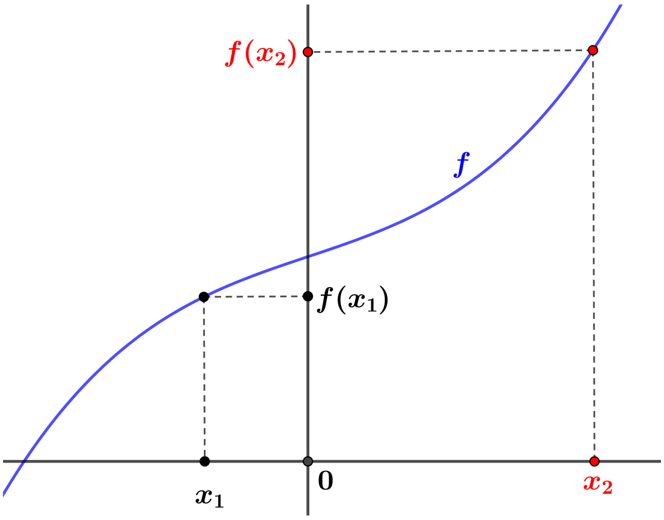
luego, se tiene que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

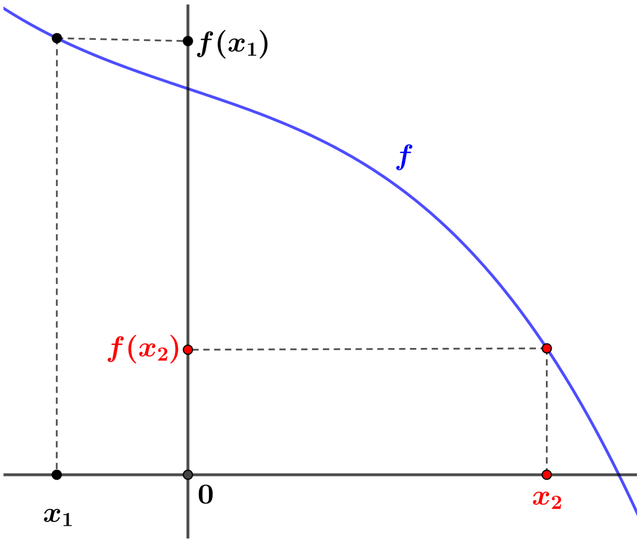
entonces f es decreciente en $\mathbb{R}$. Observe la Figura 4.25.

■ **Ejemplo 4.14 — Función creciente.** Mostrar que la función $g(x) = x^2 - 3x + 1$ es creciente en $I = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

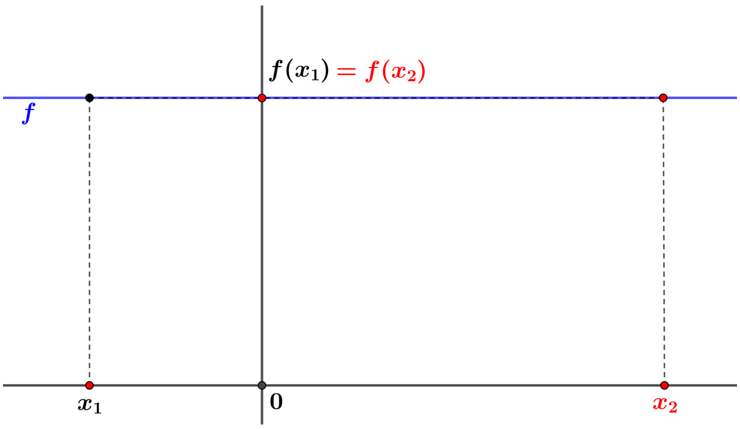
Solución: Primero se coloca a la función g en una forma conveniente completando el trinomio



(a) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$



(b) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$



(c) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Figura 4.24: Monotonía de funciones.

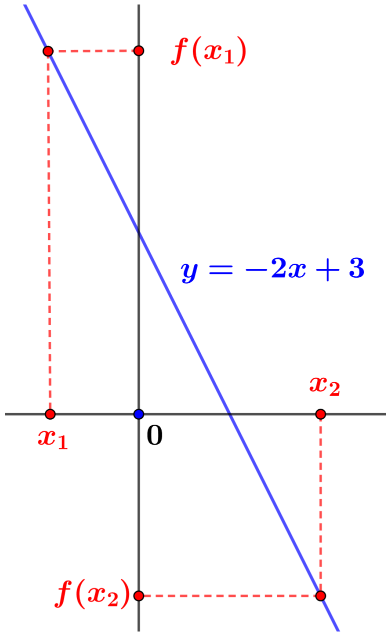


Figura 4.25: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x+3\}$.

cuadrado perfecto

$$g(x) = x^2 - 3x + 1 = \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 1 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Sean $x_1, x_2 \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, entonces

$$\frac{3}{2} \leq x_1 < x_2 \Longrightarrow 0 \leq x_1 - \frac{3}{2} < x_2 - \frac{3}{2},$$

donde se ha multiplicado por $-\frac{3}{2}$, como a una desigualdad de números positivos, al elevar al cuadrado esta desigualdad no cambia entonces se sigue

$$\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 < \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 \Longrightarrow \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$
$$\Longrightarrow g(x_1) < g(x_2),$$

luego, se tiene que para $x_1, x_2 \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2),$$

por lo tanto, g es creciente en $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

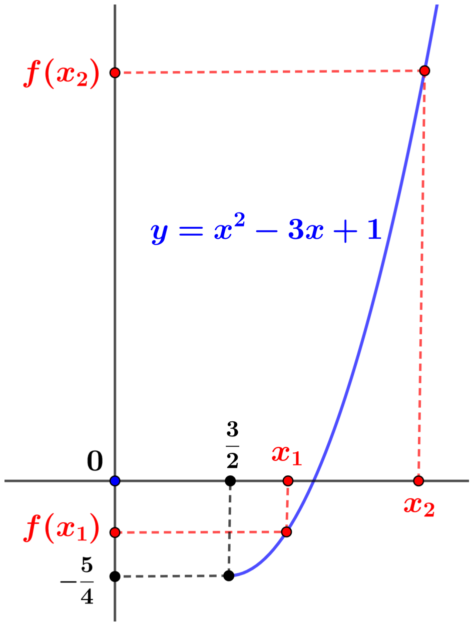


Figura 4.26: $g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 3x + 1 \wedge x \geq \frac{3}{2}\right\}$.

■ **Ejemplo 4.15 — Función constante.** Mostrar que la función $h(x) = -2$ es constante en $I = \mathbb{R}$.

Solución: Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tal que $x_1 < x_2$, entonces

$$h(x_1) = -2$$
$$h(x_2) = -2,$$

es decir, $h(x_1) = h(x_2)$. Así, se tiene para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) = h(x_2),$$

entonces h es constante en $\mathbb{R}$.

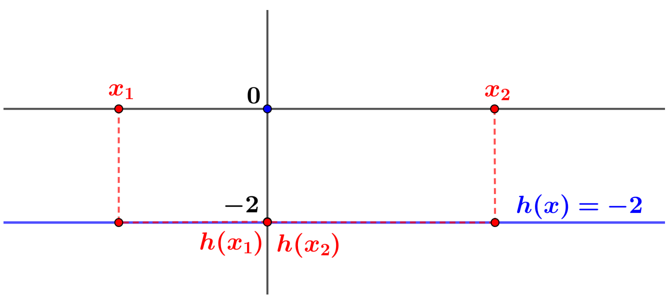


Figura 4.27: $h = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2\right\}$.

Definición 4.12 — Intervalos de monotonía. Son aquellos en donde se definen de manera única cualquiera de las tres opciones de monotonía: creciente, decreciente y constante.

■ **Ejemplo 4.16** Sea f la función descrita en la gráfica entonces se tiene que

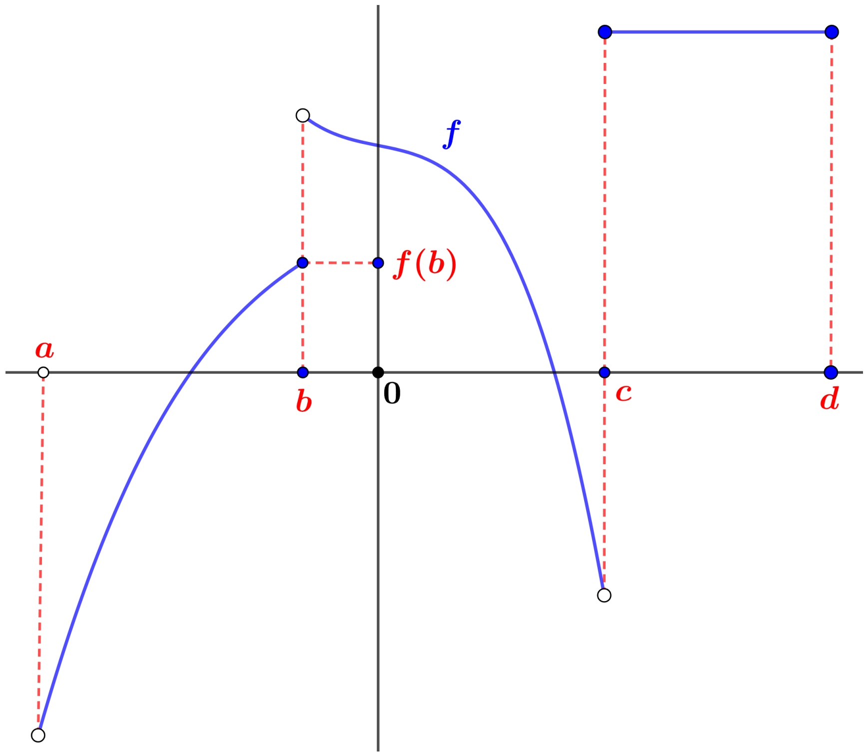


Figura 4.28: Intervalos de monotonía de f.

- f es creciente en (a,b)
- f es decreciente en (b,c)
- f es constante en $[e,d]$.

■ **Ejemplo 4.17 — Intervalos de monotonía de una función cuadrática.** Considere la función definida en el Ejemplo 4.14 como $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Se ha probado que g es creciente en $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, ahora se pide mostrar que g es decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

Solución: Sean $x_1, x_2 \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &< \frac{3}{2} \\ x_1 - \frac{3}{2} < x_2 - \frac{3}{2} &< 0. \end{aligned}$$

Como a una desigualdad de números negativos, al elevar al cuadrado esta desigualdad cambia

$$\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2>\left(x_2-\frac{3}{2}\right)^2 \Longrightarrow \left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}>\left(x_2-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$
$$\Longrightarrow g(x_1)>g(x_2),$$

entonces, para $x_1,x_2\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

$$x_1<x_2\Rightarrow g(x_1)>g(x_2),$$

por lo tanto, g es decreciente en $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.

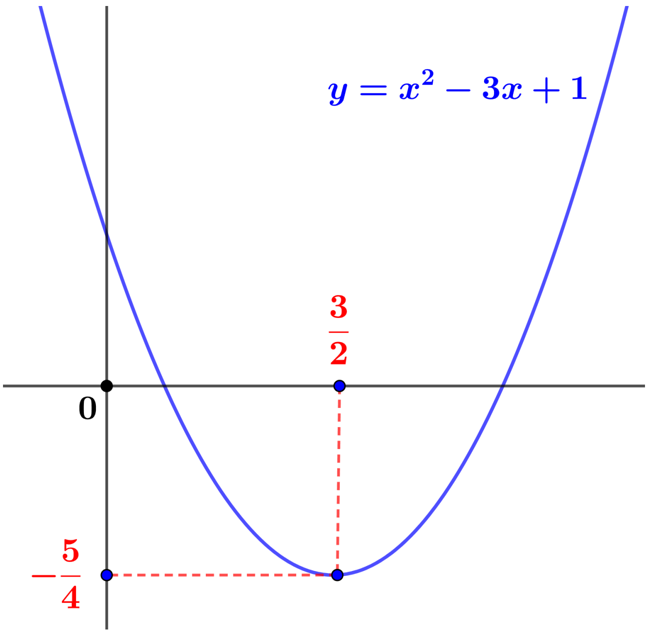


Figura 4.29: $g=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2-3x+1\right\}$.

Se resume los siguientes intervalos de monotonía:

- g es decreciente en $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$,
- g es creciente en $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

■ **Ejemplo 4.18 — Intervalos de monotonía de una función racional.** Analizar los intervalos de monotonía de la función $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+5}$.

Solución: Se nota que f es una función racional, la forma de abordar el problema es realizar la división de tal manera que se pueda utilizar el teorema del residuo, obteniendo una expresión como:

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+5}=2-\frac{13}{x+5},$$

note que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty)$, entonces de manera natural, se debe analizar en estos dos intervalos:

- Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, -5)$

$$x_1 < x_2 < -5$$
$$x_1 + 5 < x_2 + 5 < 0.$$

  Por propiedades de las desigualdades, al tomar los recíprocos de los números negativos, la desigualdad cambia pero siguen siendo negativos (aunque es irrelevante la última afirmación), entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1+5} > \frac{1}{x_2+5} &\Longrightarrow -\frac{13}{x_1+5} < -\frac{13}{x_2+5}\\ &\Longrightarrow 2-\frac{13}{x_1+5} < 2-\frac{13}{x_2+5}\\ &\Longrightarrow f(x_1) < f(x_2),\end{aligned}$$

  luego, para $x_1, x_2 \in (-\infty, -5)$, se tiene
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
  por lo tanto, f es creciente en $(-\infty, -5)$.

- Sean $x_1, x_2 \in (-5, +\infty)$. Por argumentos similares, se tiene

$$\begin{aligned}-5 < x_1 < x_2 &\Longrightarrow 0 < x_1+5 < x_2+5\\ &\Longrightarrow \frac{1}{x_1+5} > \frac{1}{x_2+5} > 0\\ &\Longrightarrow -\frac{13}{x_1+5} < -\frac{13}{x_2+5}\\ &\Longrightarrow 2-\frac{13}{x_1+5} < 2-\frac{13}{x_2+5}\\ &\Longrightarrow f(x_1) < f(x_2),\end{aligned}$$

  entonces, f es creciente en $(-5, +\infty)$.

En resumen sería:

- f es creciente en $(-\infty, -5)$,
- f es creciente en $(-5, +\infty)$.

Observación 4.10 Notar que en el ejemplo anterior, se está tentado a escribir que f es creciente en $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$, pero esto no es cierto. Para mostrar esto se toma $x_1 = -6$ y $x_2 = -4$,

$$f(x_1) = f(-6) = \frac{2(-6)-3}{(-6)+5} = 15,$$
$$f(x_2) = f(-4) = \frac{2(-4)-3}{(-4)+5} = -15,$$

entonces
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$
pero esto contradice el hecho de que f sea creciente como se demostró en los respectivos intervalos. Por lo tanto, de manera general, no es correcto unir los intervalos de monotonía.

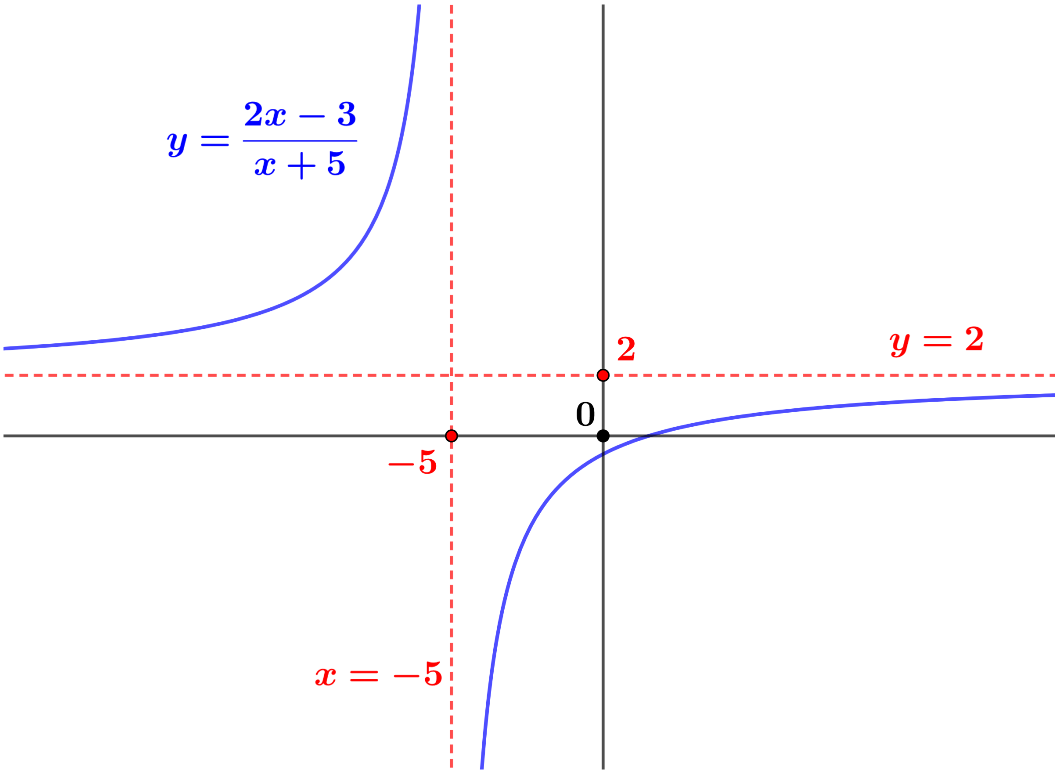


Figura 4.30: Intervalos de monotonía de f.

4.3.2 Paridad de funciones

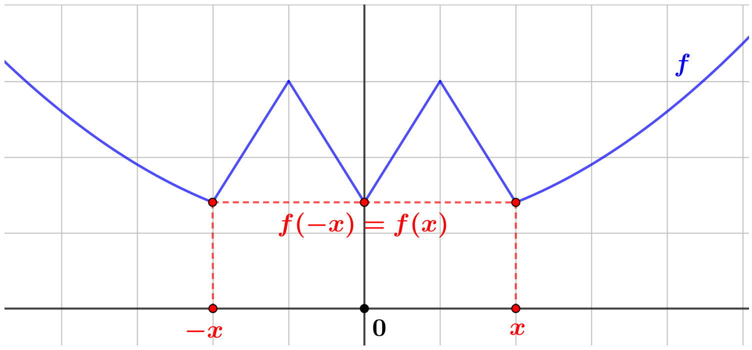
Definición 4.13 Sea $f \subset \mathbb{R}^2$ una función real, entonces se dice que:

i) f es par si
$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f): \quad f(-x) = f(x),$$

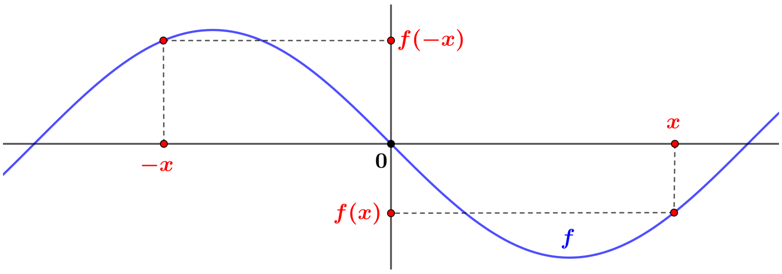
ii) f es impar si
$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f): \quad f(-x) = -f(x),$$

ii) f no es par ni impar si
$$\exists x \in \mathrm{Dom}(f): \quad f(-x) \neq f(x) \wedge f(-x) \neq -f(x).$$

Observación 4.11 Geométricamente, la propiedad de que una función sea par significa que es simétrica con respecto al eje Y, y que sea impar significa que sea simétrica con respecto al origen.



(a)



(b)

Figura 4.31: La función en (a) es par y la función en (b) es impar.

■ **Ejemplo 4.19 — Función par.** Mostrar que la función $f(x) = 3x^2 - 2$, es par.

Solución: Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, entonces para $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^2 - 2 \\ &= 3x^2 - 2 \\ &= f(x), \end{aligned}$$

por lo tanto, f es una función par.

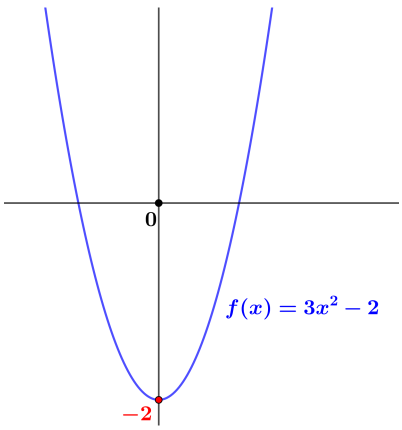


Figura 4.32: f es par y simétrica con respecto al eje Y.

■ **Ejemplo 4.20 — Función impar.** Mostrar que la función $g(x) = \dfrac{x^2+4}{x(2x^2+3)}$ es impar.

Solución: Como $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, entonces para $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, se tiene:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(-x)^2+4}{(-x)(2(-x)^2+3)} \\ &= \frac{x^2+4}{-x(2x^2+3)} \\ &= -\frac{x^2+4}{x(2x^2+3)} \\ &= -g(x), \end{aligned}$$

por lo tanto, g es una función impar.

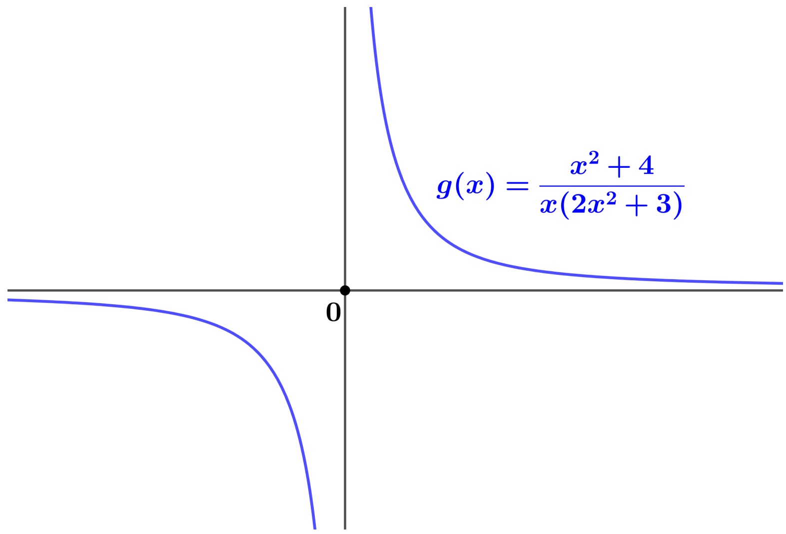


Figura 4.33: g es impar y simétrica con respecto al origen.

Teorema 4.1 Dada una función $f \subset \mathbb{R}^2$, se define $\bar{f}(x) = f(-x)$, entonces f se puede descomponer como la suma de una función par f_p y una función impar f_i, definidas como

$$f_p(x) = \frac{f(x)+\bar{f}(x)}{2} \quad , \quad f_i(x) = \frac{f(x)-\bar{f}(x)}{2},$$

donde

$$\mathrm{Dom}(f_p) = \mathrm{Dom}(f_i) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(\bar{f}).$$

Demostración: Sea la función $f \subset \mathbb{R}^2$. Como

$$f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad , \quad f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

se tiene que f_p es par y f_i es impar. En efecto,

$$\begin{aligned}
f_p(-x) &= \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} \\
&= \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\
&= f_p(x)
\end{aligned}$$

luego, f_p es par. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
f_i(-x) &= \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} \\
&= \frac{-(-f(-x)+f(x)}{2} \\
&= -\frac{f(x)-f(-x)}{2} \\
&= -f_i(x),
\end{aligned}$$

luego, f_i es impar. Además,

$$\begin{aligned}
f_p(x)+f_i(x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2} \\
&= \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} \\
&= \frac{2f(x)}{2} \\
&= f(x),
\end{aligned}$$

lo que prueba la primera parte del teorema.

Por otra parte, las funciones f_p y f_i se componen de las funciones f y $\bar{f}$, entonces directamente se tiene

$$\text{Dom}(f_p) = \text{Dom}(f_i) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(\bar{f}),$$

lo que completa la prueba del teorema.

■ **Ejemplo 4.21** Sea $f(x) = 3x^2+2x-3$, hallar f_p y f_i.

Solución: Se tiene que

$$f(-x) = 3(-x)^2+2(-x)-3 = 3x^2-2x-3$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
f_p(x) &= \frac{(3x^2+2x-3)+(3x^2-2x-3)}{2} \\
&= \frac{6x^2-6}{2} \\
&= 3x^2-3
\end{aligned}
$$

y

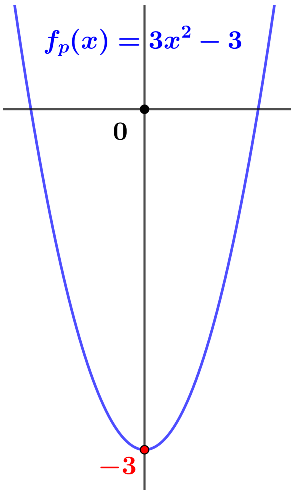


Figura 4.34: $f_p(x) = 3x^2 - 3$.

$$
\begin{aligned}
f_i(x) &= \frac{(3x^2+2x-3)-(3x^2-2x-3)}{2} \\
&= \frac{4x}{2} \\
&= 2x.
\end{aligned}
$$

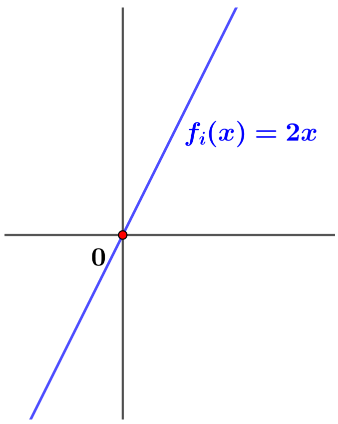


Figura 4.35: $f_i(x) = 2x$.

Note que

$$\operatorname{Dom}(f_p) = \operatorname{Dom}(f_i) = \operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R},$$

y además,

$$f_p(x) \neq f_i(x),$$

$$f_p(x) + f_i(x) = (3x^2 - 3) + (2x) = f(x).$$

■ **Ejemplo 4.22** Sea $g(x) = \dfrac{3x-2}{x+5}$, hallar g_p y g_i. **Solución:** Note que, $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Además,

$$\bar{g}(x) = g(-x) = \frac{3(-x)-2}{-x+5} = \frac{-(3x+2)}{-(x-5)} = \frac{3x+2}{x-5}$$

así, $\operatorname{Dom}(\bar{g}) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \frac{\dfrac{3x-2}{x+5} + \dfrac{3x+2}{x-5}}{2} \\ &= \frac{(3x-2)(x-5)+(3x+2)(x+5)}{2(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{3x^2-15x-2x+10+3x^2+15x+2x+10}{2(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{3x^2+10}{x^2-25} \end{aligned}$$

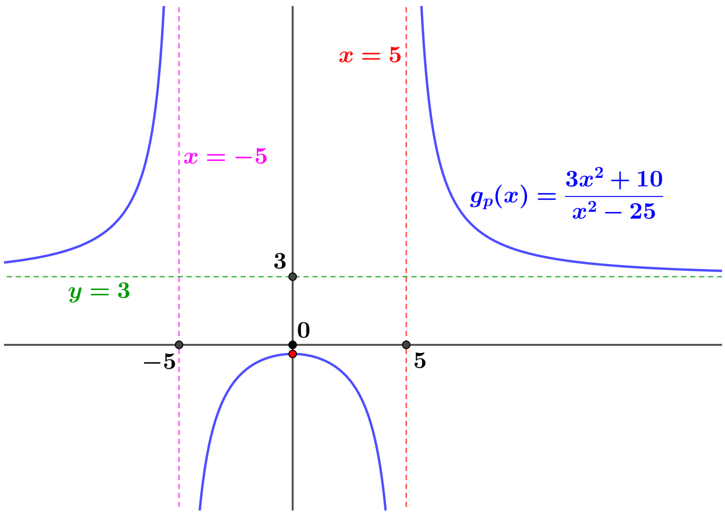


Figura 4.36: $g_p(x) = \dfrac{3x^2+10}{x^2-25}$.

y

$$g_i(x) = \frac{\dfrac{3x-2}{x+5} - \dfrac{3x+2}{x-5}}{2}$$

$$= \frac{3x^2 - 15x - 2x + 10 - 3x^2 - 15x - 2x - 10}{2(x+5)(x-5)}$$
$$= -\frac{17x}{x^2 - 25}.$$

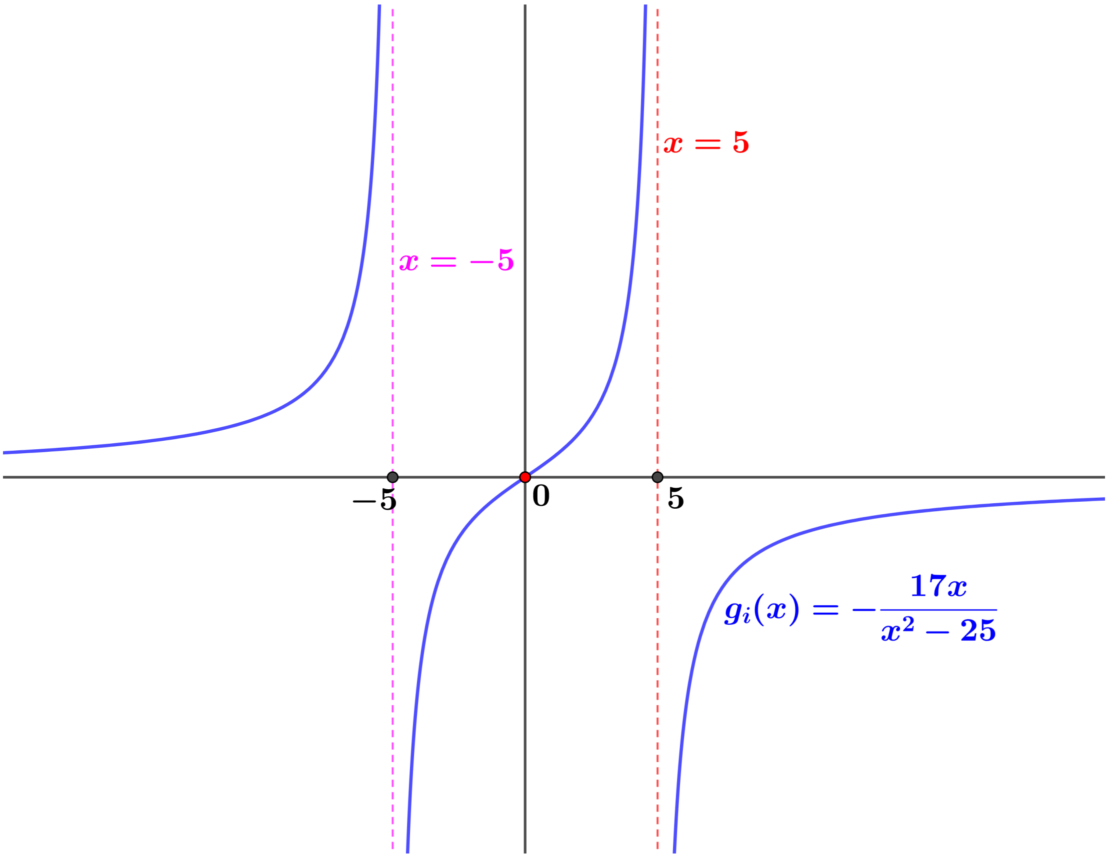


Figura 4.37: $g_i(x) = -\dfrac{17x}{x^2 - 25}$.

Note que,

$$\mathrm{Dom}(g_p) = \mathrm{Dom}(g_i) = (\mathbb{R} \setminus \{-5\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{5\}) = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\},$$

además,

$$\begin{aligned} g_p(x) + g_i(x) &= \frac{3x^2 + 10}{x^2 - 25} + \frac{-17x}{x^2 - 25} \\ &= \frac{3x^2 - 17x + 10}{x^2 - 25} \\ &= \frac{(3x-2)(x-5)}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{3x-2}{x+5} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.23** Sea $h(x) = \sqrt{2x+3}$, hallar h_p y h_i.

Solución: Note que, $\text{Dom}(h) = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Además,

$$\bar{h}(x) = h(-x) = \sqrt{2(-x)+3} = \sqrt{-2x+3}$$

Así, $\text{Dom}(\bar{h}) = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$. Entonces,

$$h_p(x) = \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{-2x+3}}{2}$$

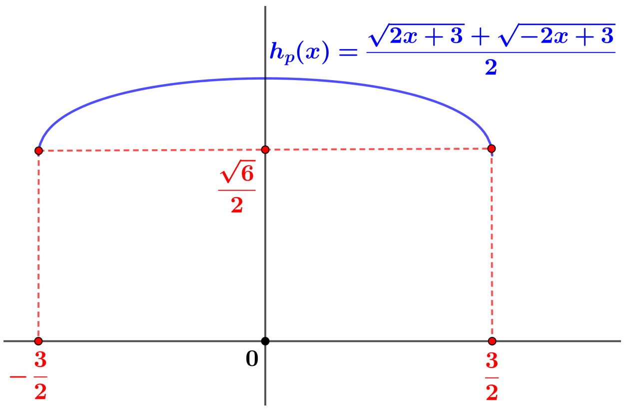


Figura 4.38: $h_p(x) = \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{-2x+3}}{2}$.

y

$$h_i(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{-2x+3}}{2}.$$

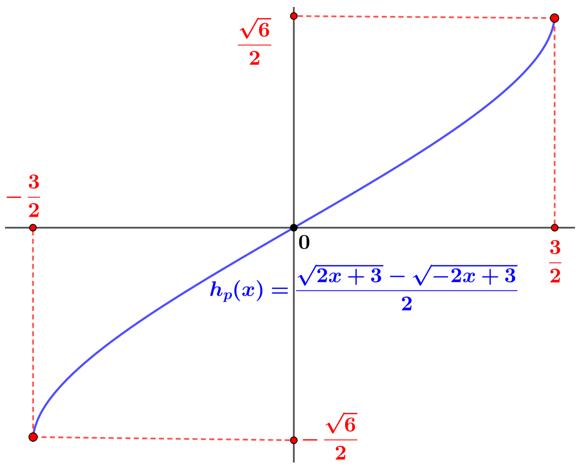


Figura 4.39: $h_i(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{-2x+3}}{2}$.

Note que,

$$\text{Dom}(h_p) = \text{Dom}(h_i) = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right) \bigcap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

además,

$$\begin{aligned} h_p(x) + h_i(x) &= \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{-2x+3}}{2} + \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{-2x+3}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2x+3}}{2} \\ &= \sqrt{2x+3} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

4.3.3 Traslaciones de funciones

Dada un función $f \subset \mathbb{R}^2$, la idea es definir nuevas funciones las cuales son traslaciones de f. Estas pueden ser traslaciones horizontales, verticales o una mezcla de ambas.

Definición 4.14 — Traslaciones horizontales y verticales. Sea $f \subset \mathbb{R}^2$ y $a, b > 0$. Se define

i) $f_a^r(x) = f(x-a)$, la función trasladada a unidades hacia la derecha (right en inglés).

ii) $f_a^l(x) = f(x+a)$, la función trasladada a unidades hacia la izquierda (left en inglés).

iii) $f_b^u(x) = f(x)+b$, la función trasladada b unidades hacia arriba (up en inglés).

iv) $f_b^d(x) = f(x)-b$, la función trasladada b unidades hacia la abajo (down en inglés).

■ **Ejemplo 4.24 — Traslaciones horizontales y verticales.** Sea $f(x) = 3x^2-2x+1$, hallar f_2^r, f_2^l, f_2^u y f_2^d.

Solución: Representemos gráficamente a la función f:

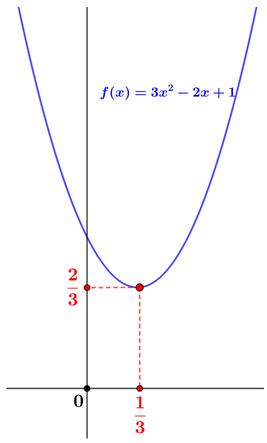


Figura 4.40: $f(x) = 3x^2-2x+1$.

i) La función trasladada de f en dos unidades hacia la derecha se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_2^r(x) &= 3(x-2)^2 - 2(x-2) + 1 \\ &= 3(x^2-4x+4) - 2x + 4 + 1 \\ &= 3x^2 - 12x + 12 - 2x + 4 + 1 \end{aligned}$$

$$= 3x^2 - 14x + 17.$$

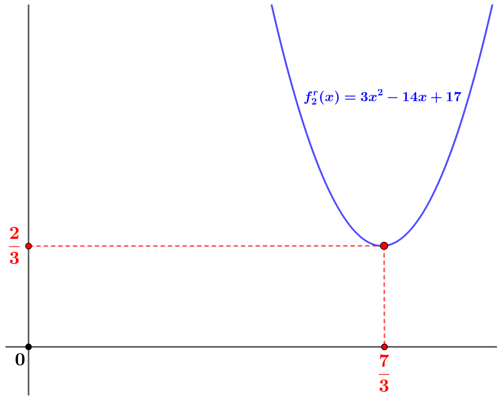


Figura 4.41: $f_2^r(x) = 3x^2 - 14x + 17$.

ii) La función trasladada de f en dos unidades hacia la izquierda se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_2^l(x) &= 3(x+2)^2 - 2(x+2) + 1 \\ &= 3(x^2 + 4x + 4) - 2x - 4 + 1 \\ &= 3x^2 + 12x + 12 - 2x - 4 + 1 \\ &= 3x^2 + 10x + 9. \end{aligned}$$

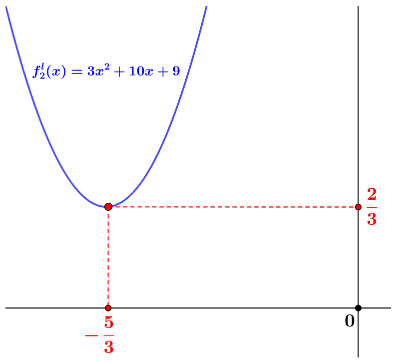


Figura 4.42: $f_2^l(x) = 3x^2 + 10x + 9$.

iii) La función trasladada de f en dos unidades hacia arriba se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_2^u(x) &= (3x^2 - 2x + 1) + 2 \\ &= 3x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

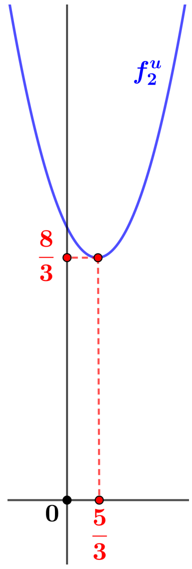


Figura 4.43: $f_2^u(x) = 3x^2 - 2x + 3$.

iv) La función trasladada de f en dos unidades hacia abajo se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_2^d(x) &= (3x^2 - 2x + 1) - 2 \\ &= 3x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

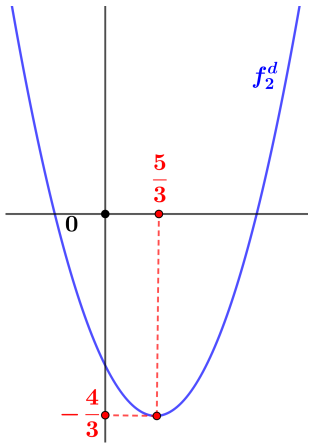


Figura 4.44: $f_2^d(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Observación 4.12 — Traslación general. De manera general se puede trasladar una función con respecto de un punto $(a, b) \subset \mathbb{R}^2$, mediante la fórmula:

$$f_{(a,b)}(x) = f(x - a) + b. \tag{4.1}$$

Note que para $a,b>0$, se tiene $f_{(a,0)} = f_a^r$, $f_{(-a,0)} = f_a^l$, $f_{(0,b)} = f_b^u$ y $f_{(0,-b)} = f_b^d$.

■ **Ejemplo 4.25 — Traslación general con respecto a un punto** (a,b). Sea $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Se desea trasladar f con respecto al punto $(1,-4) \in \mathbb{R}^2$.

Solución: De acuerdo con (4.1), se tiene

$$\begin{aligned} f_{(1,-4)}(x) &= f(x-1)-4 \\ &= \sqrt{2(x-1)-3}-4 \\ &= \sqrt{2x-5}-4. \end{aligned}$$

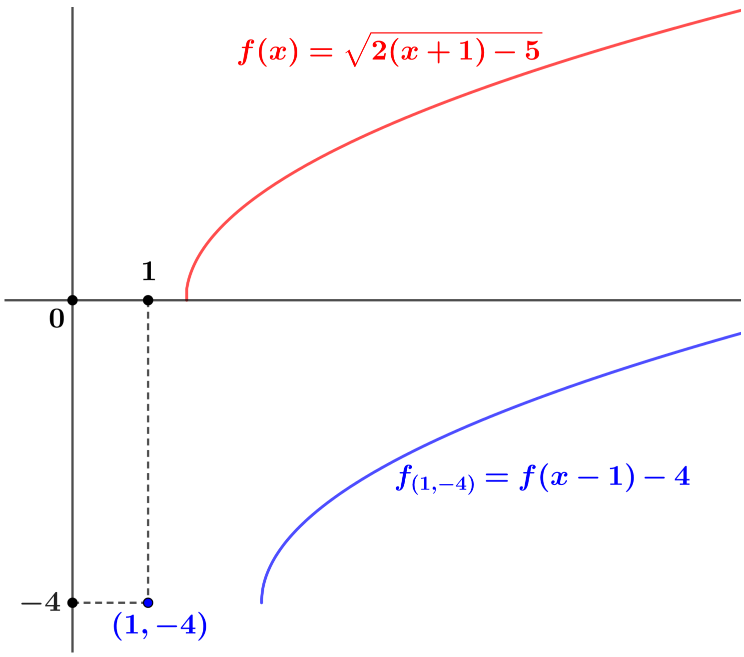


Figura 4.45: Traslación general con respecto al punto $(1,-4) \in \mathbb{R}^2$.

■ **Ejemplo 4.26 — Traslaciones de una semicircunferencia.** Sea $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, halle diferentes traslaciones de f con respecto a los puntos $(2,1)$, $(-3,2)$, $(-1,-3)$ y $(4,-1)$.

Solución: Se tiene según (4.1) que

$$f_{(2,1)}(x) = f(x-2)+1 = \sqrt{1-(x-2)^2}+1$$

$$f_{(-3,2)}(x) = f(x+3)+2 = \sqrt{1-(x+3)^2}+2$$

$$f_{(-1,-3)}(x) = f(x+1)-3 = \sqrt{1-(x+1)^2}-3$$

$$f_{(4,-2)}(x) = f(x-4)-2 = \sqrt{1-(x-4)^2}-2.$$

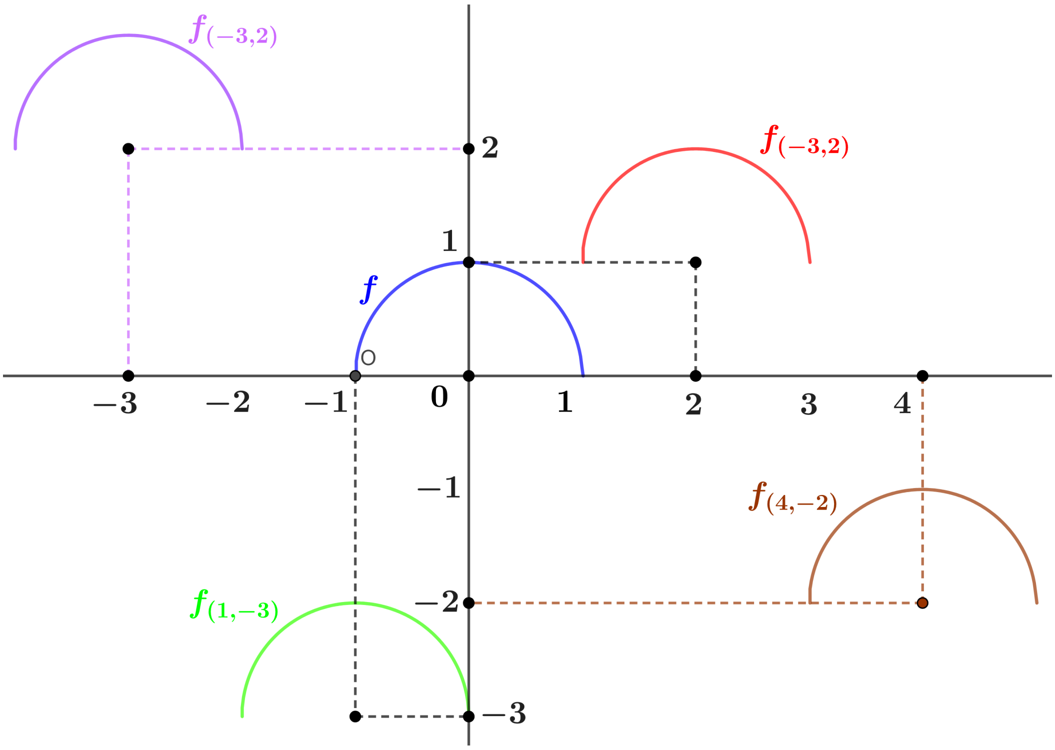


Figura 4.46: Traslaciones de una semicircunferencia.

4.3.4 Alargamientos y compresiones

Definición 4.15 — Alargamientos y compresiones. Sea la función real $f \subset \mathbb{R}^2$. Se definen las funciones

$$f_a^1(x) = af(x),$$
$$f_a^2(x) = f(ax),$$

para $a \in \mathbb{R}$.

La naturaleza de estas funciones f_a^1 y f_a^2 depende de que tipo de función se esté analizando. Para las funciones estudiadas hasta el momento no se observa el efecto del alargamiento o compresión, ya sea horizontal o vertical. Para lo que llamaremos más adelante las funciones trigonométricas si se observará con fuerza el concepto de alargamiento y compresión horizontal o vertical.

■ **Ejemplo 4.27** Sea la función $f(x) = 2x - 1$. Para $a = \frac{1}{2}, 2, 3$ determinar y graficar f_a^1, f_a^2.

Solución: Según la Definición 4.15 se tiene

- Para $a = \frac{1}{2}$

$$f_{\frac{1}{2}}^1(x) = \frac{1}{2}(2x-1) = x - \frac{1}{2},$$

$$f^2_{\frac{1}{2}}(x) = 2\left(\frac{1}{2}x\right) - 1 = x - 1.$$

- Para $a = 2$

$$f^1_2(x) = 2(2x-1) = 4x-2,$$

$$f^2_2(x) = 2(2x) - 1 = 4x-1.$$

- Para $a = 3$

$$f^1_3(x) = 3(2x-1) = 6x-3,$$

$$f^2_3(x) = 2(3x) - 1 = 6x-1.$$

La gráfica para f, $f^1_{\frac{1}{2}}$, f^1_2 y f^1_3 sería:

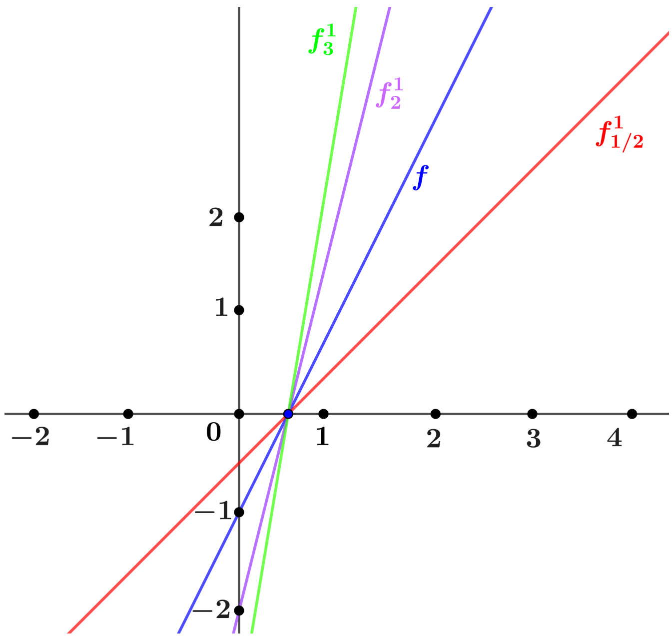


Figura 4.47: Alargamiento y compresión f^1_a.

La gráfica para f, $f^2_{\frac{1}{2}}$, f^2_2 y f^2_3 sería la Figura 4.27:

Observación 4.13 — Reflexiones con respecto a los ejes X, Y. Cuando $a = -1$, se tienen casos particulares, estos casos corresponden a la función f^1_{-1}, a la cual denominamos la reflexión de f con respecto al eje X y a la función f^2_{-1}, a la cual denominamos la reflexión de f con respecto al eje Y.

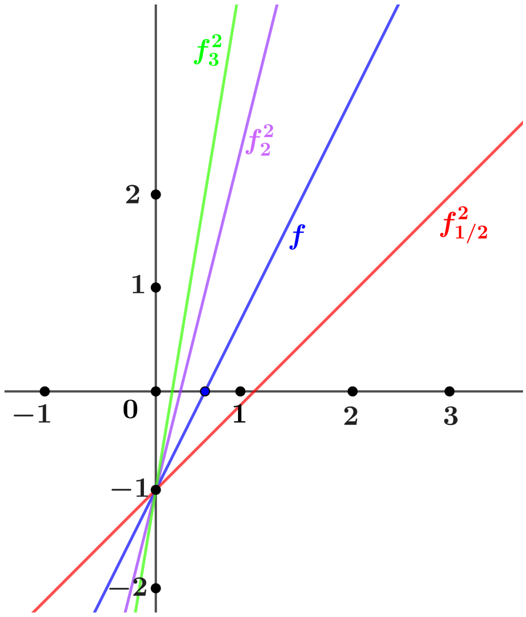


Figura 4.48: Alargamiento y compresión f_a^2.

■ **Ejemplo 4.28 — Reflexiones con los ejes de una función cuadrática.** Se considera la función cuadrática $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Hallar las reflexiones de f con respecto a los ejes X, Y respectivamente y gráficar.

Solución: Según la Definición 4.15 se tiene

a) La reflexión de f con respecto al eje X sería

$$\begin{aligned} f_{-1}^{1}(x) &= -(3x^2 + 2x - 1) \\ &= -3x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

b) La reflexión de f con respecto al eje Y sería

$$\begin{aligned} f_{-1}^{2}(x) &= 3(-x)^2 + 2(-x) - 1 \\ &= -3x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

4.3.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.3 Determinar las características de las funciones propuestas a continuación:

1. Indicar los intervalos de monotonía de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 9x - 6$,

   b) $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$,

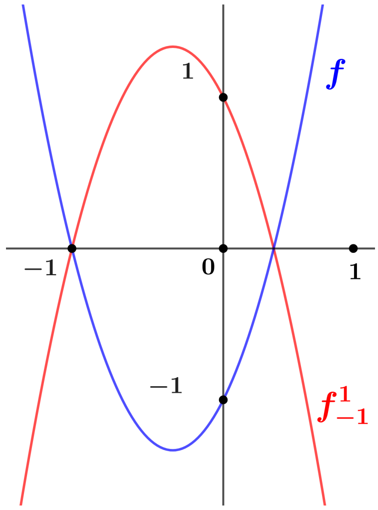


Figura 4.49: Reflexión de f con respecto al eje X.

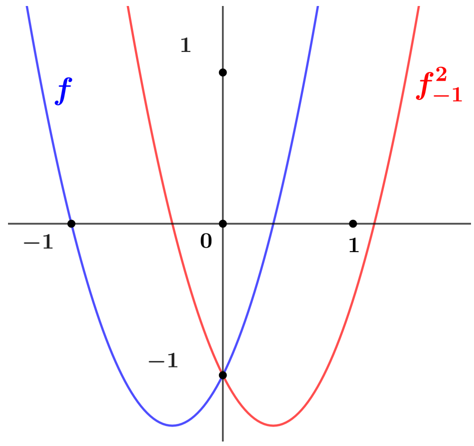


Figura 4.50: Reflexión de f con respecto al eje Y.

c) $g(x) = x - 2x^2 + 3$,

d) $h(x) = \dfrac{x-6}{1+x}$,

e) $j(x) = 3 + 5\sqrt{3-7x}$.

2. Indicar la paridad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$,

b) $g(x) = x - x^2 + 6$,

c) $h(x) = x^3 + 3x^2 - 2$,

d) $j(x) = \dfrac{x+5}{4-x}$,

e) $k(x) = 5x + 2x^3$.

3. Aplicando los criterios de traslación de funciones, dibuje las respectivas gráficas:
   a) $f(x) = (x-4)^2 - 2$,
   b) $g(x) = 4 + \sqrt{x-5}$,
   c) $h(x) = -\sqrt{2-x}$,
   d) $j(x) = \dfrac{1}{x+5} - 4$,
   e) $k(x) = (x+3) - 7$.
4. Aplicando los criterios de alargamiento y contracción de funciones, realice las gráficas partiendo de la gráfica de su respectiva función estándar.
   a) $f(x) = 2(x+1)^2$,
   b) $g(x) = \sqrt{-2x+5}$,
   c) $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$,
   d) $g(x) = 10(x^3 + x^2)$,
   e) $j(x) = \dfrac{15}{(x^3 + x^2)}$.

4.4 Funciones algebraicas

En esta sección se analizan funciones algebraicas, éstas se denominan así debido a que satisfacen ecuaciones polinómicas.

4.4.1 Función lineal

Definición 4.16 Sea $f \subseteq \mathbb{R}^2$ una función real definida por

$$f(x) = mx + b,$$

donde $m, b \in \mathbb{R}$, se denomina función lineal. En particular, si $m = 0$, se tiene $f(x) = b$, la cual se llama función constante.

Propiedades de la función lineal

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Rec}(f) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } m \neq 0, \\ \{b\}, & \text{si } m = 0. \end{cases}$
- Corte con el eje X:

- Si $m \neq 0$, corta el eje X en
$$\left(-\frac{b}{m}, 0\right) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $m = 0$, se tienen dos posibilidades
  i) si $b \neq 0$, f no corta al eje X,
  ii) si $b = 0$, f coincide con todo el eje X.

- Corta con el eje Y en $(0, b) \in \mathbb{R}^2$.
- Monotonía
  i) f es creciente si $m > 0$ en $\mathbb{R}$,
  ii) f es decreciente si $m < 0$ en $\mathbb{R}$,
  iii) f es constante si $m = 0$ en $\mathbb{R}$.
- Paridad
  i) f es par si $m = 0$, $b \neq 0$,
  ii) f es impar si $b = 0$, $m \neq 0$,
  iii) f no es par ni impar si $m \neq 0$ y $b \neq 0$,
  iv) f es par e impar al mismo tiempo si $m = 0$ y $b = 0$.

Ejemplo 4.29 — Análisis de una función lineal. Analizar la función $f(x) = -3x + 2$.

Solución: Considerando que la regla de asignación $f(x) = -3x + 2$ corresponde a una función lineal, se concuye:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$.
- Corta al eje X en $\left(\frac{2}{3}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$.
- Corta al eje Y en $(0, 2) \in \mathbb{R}^2$.
- f es decreciente en $\mathbb{R}$.
- f no es par ni impar.

4.4.2 Función cuadrática

Definición 4.17 Sea $f \subseteq \mathbb{R}^2$ una función real definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, se denomina función cuadrática. Note que, si $a = 0$, f es una función lineal.

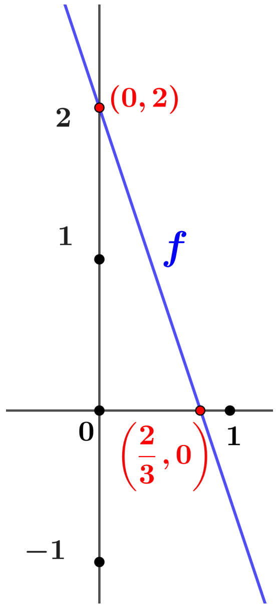


Figura 4.51: La función lineal $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -3x+2\}$.

Propiedades de la función cuadrática

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Rec}(f) = \begin{cases} \left[-\frac{\triangle}{4a}, +\infty\right), & \text{si } a > 0, \\ \left(-\infty, -\frac{\triangle}{4a}\right], & \text{si } a < 0, \end{cases}$ donde $\triangle = b^2 - 4ac$, es el llamado discriminante.
- Corte con el eje X:
  - Si $\triangle > 0$, corta al eje X en
  $$\left(\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}, 0\right) \in \mathbb{R}^2,$$
  - Si $\triangle = 0$, corta al eje X en
  $$\left(-\frac{b}{2a}, 0\right) \in \mathbb{R}^2,$$
  - Si $\triangle < 0$, f no corta al eje X.
- Corta con el eje Y en $(0,b) \in \mathbb{R}^2$.
- Monotonía
  - si $a > 0$
    i) f es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$,
    ii) f es creciente en $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$,
  - si $a < 0$
    i) f es creciente en $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$,
    ii) f es decreciente en $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

- Paridad
  i) f es par si $b = 0$,
  ii) f no es par ni impar si $b \neq 0$.

■ **Ejemplo 4.30 — Análisis de una función cuadrática.** Analizar la función

$$f(x) = -4x^2 + 2x - 1.$$

Solución: Considerando que la regla de asignación $f(x) = -4x^2 + 2x - 1$ corresponde a una función lineal, se concuye:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Como $a = -4 < 0$, se tiene

$$-\frac{\triangle}{4a} = -\frac{2^2 - 4(-4)(-2)}{4(-4)} = -\frac{3}{4}.$$

  Entonces,

$$\text{Rec}(f) = \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right].$$

- Como $\triangle = -12 < 0$, entonces f no corta con el eje X.
- f corta al eje Y en $(0,-1) \in \mathbb{R}^2$.
- Se tiene

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-4)} = \frac{1}{4},$$

  entonces
  - f es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$,
  - f es decreciente en $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.
- Como $b = 2 \neq 0$, entonces f no es par ni impar.

4.4.3 Función por partes

Definición 4.18 Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n \subseteq \mathbb{R}^2$, n funciones reales. Se define una función por partes como

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in I_1, \\ f_2(x), & \text{si } x \in I_2, \\ & \vdots \\ f_n(x), & \text{si } x \in I_n, \end{cases}$$

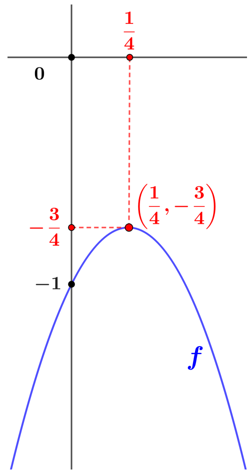


Figura 4.52: La función cuadrática $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -4x^2 + 2x - 1\}$.

donde I_i, con $i = 1,2,\ldots,n$ son intervalos de la recta real tales que $I_i \cap I_j = \emptyset$ para $i, j \in \{1,\ldots,n\}$. Lo que quiere decir es que son disjuntos dos a dos entre todos ellos.

■ **Ejemplo 4.31 — Función por partes.** Graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{si } x \leq 1, \\ 2(x-1)^2, & \text{si } 1 < x < 2, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Solución: Se puede poner f en forma de intervalos de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{si } x \in]-\infty,\, 1], \\ 2(x-1)^2, & \text{si } x \in]1,\, 2[, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \in]3,\, +\infty[, \end{cases}$$

entonces se tiene

4.4.4 Función valor absoluto

Definición 4.19 Sea $f \subseteq \mathbb{R}^2$ la función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Esta se llama la función valor absoluto y como es utilizada con frecuencia se denota como

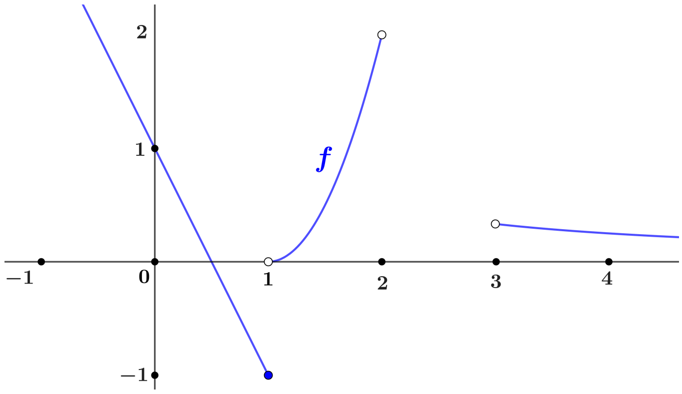


Figura 4.53: Función por partes f.

$|\cdot| \subseteq \mathbb{R}^2$, es decir, se tiene

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La gráfica de la función valor absoluto es

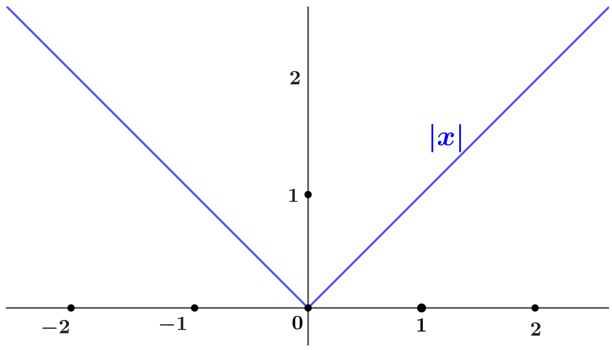


Figura 4.54: Función valor absoluto.

Propiedades de la función valor absoluto

- $\text{Dom}(|\cdot|) = \mathbb{R}$.
- $\text{Rec}(|\cdot|) = [0, +\infty)$.
- Corta con el eje X en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
- Corta con el eje Y en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
- Monotonía
  - i) $|\cdot|$ es decreciente en $(-\infty, 0)$,
  - ii) $|\cdot|$ es creciente en $(0, +\infty)$.
- $|\cdot|$ es una función par.

■ **Ejemplo 4.32 — Análisis de una función con valor absoluto.** Estudiar la siguiente función que depende de un valor absoluto,

$$f(x) = |2 - 3x|.$$

Solución: Considerando la función valor absoluto se tiene

$$f(x) = |2-3x| = \begin{cases} 2-3x, & \text{si } 2-3x \geq 0, \\ -(2-3x), & \text{si } 2-3x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-3x, & \text{si } x \leq \frac{2}{3}, \\ -2+3x, & \text{si } x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Se decuce que

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\text{Rec}(f) = [0, +\infty)$.
- Corta con el eje X en $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$.
- Puesto que $0 \leq \dfrac{2}{3}$, se debe hacer

$$2 - 3(0) = y$$
$$y = 2$$

  luego, el corta con el eje Y es en $(0,2) \in \mathbb{R}^2$.
- Monotonía
  i) f es decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}, \right]$,
  ii) f es creciente en $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.
- f no es una función ni par ni impar.
- La gráfica de f es

4.4.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.4 Analizar las siguientes funciones lineales.

1. $f(x) = -x$,
2. $g(x) = 2x + 3$,
3. $h(x) = -5x + 8$,
4. $p(x) = \dfrac{3}{2}x - 7$,
5. $q(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{3}$.

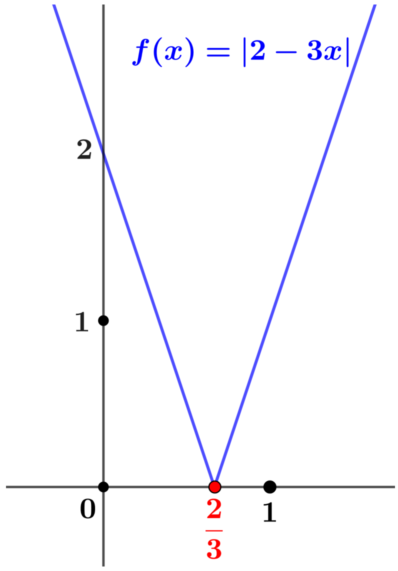


Figura 4.55: Función con un valor absoluto.

Ejercicio 4.5 Analizar las siguientes funciones cuadráticas.

1. $f(x) = x^2 - 4$.
2. $g(x) = -x^2 - 2$.
3. $h(x) = 5x^2 - 7x + 3$.
4. $p(x) = x^2 - 5x + 6$.
5. $q(x) = -6x^2 - 2x$.

Ejercicio 4.6 Analizar y graficar las siguientes funciones por partes.

1. $f(x) = \begin{cases} x - 5, & \text{si} \quad x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} |x - 10|, & \text{si} \quad x < -5, \\ x^2 - 2, & \text{si} \quad x \geq 5. \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & \text{si} \quad x < \frac{5}{2}, \\ |-6x + 4|, & \text{si} \quad \frac{5}{2} < x \leq 10, \\ -7x - 2, & \text{si} \quad x > 10. \end{cases}$
4. $p(x) = \begin{cases} -5x^2 + 2x + 6, & \text{si} \quad x \in [-\infty, -4[, \\ 2x - 3, & \text{si} \quad x \in [-4, 4], \\ -|x| + 2, & \text{si} \quad x \in [4, +\infty]. \end{cases}$

5. $q(x) = \begin{cases} 7x^2 - 5x + 3, & \text{si} \quad x \in [-\infty, -6[, \\ 2 - 7x, & \text{si} \quad x \in [-6, 8], \\ x^2, & \text{si} \quad x \in [8, +\infty]. \end{cases}$

Ejercicio 4.7 Analizar las siguientes funciones con valor absoluto.

1. $f(x) = |-x + 2|$,
2. $g(x) = -|x|$,
3. $h(x) = \left|\dfrac{x}{2} - 6\right|$,
4. $p(x) = \left|-\dfrac{2x}{3} + 7\right|$,
5. $q(x) = \left|-\dfrac{7x}{3} - 5\right|$.

5. Análisis de Funciones

Autores:
Ing. Diego Carrillo
MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro
Ing. Kevin Astudillo

5.1 Operaciones con funciones

Definición 5.1 Sean $f, g \subset \mathbb{R}^2$ dos funciones reales. Se definen las siguientes operaciones:

- Suma

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

- Resta

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

- Multiplicación

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

- División

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

siempre y cuando $g(x) \neq 0$.

■ **Ejemplo 5.1 — Operaciones con funciones.** Sea $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = 2x^2 + 7$. Hallar $f + g$,

$f-g$, $f\cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$.

Solución: Según la Definición 5.1 se tiene

i) La suma de f con g sería

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= (3x-4)+(2x^2+7)\\ &= 2x^2+3x+3.\end{aligned}$$

ii) La resta de f con g sería

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= (3x-4)-(2x^2+7)\\ &= -2x^2+3x-11.\end{aligned}$$

iii) La multiplicación de f con g sería

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= (3x-4)\cdot(2x^2+7)\\ &= 6x^3+21x-8x^2-28\\ &= 6x^3-8x^2+21x-28.\end{aligned}$$

iv) La división de f con g sería

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x-4}{2x^2+7}.$$

Observación 5.1 Se debe considerar lo siguiente:

1. Se tiene que

$$\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f-g) = \mathrm{Dom}(f\cdot g) = \mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)$$

y

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = [\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)]\setminus\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)=0\}.$$

2. Se tiene que $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$, también son funciones reales.
3. Definiendo la función nula como

$$\mathbb{O}:\begin{cases}\mathbb{R} & \longrightarrow & \{0\}\\ x & \longmapsto & \mathbb{O}(x)=0\end{cases}$$

se tiene para $f\subseteq\mathbb{R}^2$ que

$$\begin{aligned}(\mathbb{O}+f)(x) &= \mathbb{O}(x)+f(x)\\ &= 0+f(x)\\ &= f(x),\end{aligned}$$

de manera análoga se obtiene que $(f+\mathbb{O})(x) = f(x)$.

4. Se define la función unidad como:

$$\mathbb{I}:\begin{cases}\mathbb{R} & \longrightarrow & \{1\}\\ x & \longmapsto & \mathbb{I}(x)=1\end{cases}$$

se tiene para $f\subseteq\mathbb{R}^2$ que:

$$\begin{aligned}(\mathbb{I}\cdot f)(x)&=\mathbb{I}(x)\cdot f(x)\\&=1\cdot f(x)\\&=f(x),\end{aligned}$$

de manera análoga se obtiene que $(f\cdot\mathbb{I})(x)=f(x)$.

5. Para $f\subseteq\mathbb{R}^2$, se define

$$-f:\begin{cases}\mathrm{Dom}\,(-f) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (-f)\,(x)=-f\,(x)\end{cases}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}[f+(-f)](x)&=f(x)+(-f)(x)\\&=f(x)+[-f(x)]\\&=f(x)-f(x)\\&=0\\&=\mathbb{O}(x),\end{aligned}$$

de manera análoga se obtiene que $[(-f)+f](x)=\mathbb{O}(x)$.

6. Para $f\subseteq\mathbb{R}^2$, se define

$$\frac{1}{f}:\begin{cases}\mathrm{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}\end{cases}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\left[f\cdot\left(\frac{1}{f}\right)\right](x)&=f(x)\cdot\left(\frac{1}{f}\right)(x)\\&=f(x)\cdot\frac{1}{f\,(x)}\end{aligned}$$

$$= 1$$

$$= \mathbb{I}(x),$$

de manera análoga se obtiene que $\left[\left(\frac{1}{f}\right) \cdot f\right](x) = \mathbb{I}(x)$.

7. Se establece la relación de igualdad entre funciones

$$f = g \text{ si y solo si } f(x) = g(x).$$

5.1.1 El conjunto de funciones $\mathscr{F}(\mathbb{R})$

Definición 5.2 Se define el conjunto de funciones como

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es una función real}\}.$$

Propiedades del conjunto de funciones $\mathscr{F}(\mathbb{R})$

Sean f, g, $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1) Cerrado bajo adición y multiplicación:

$$f + g,\ f \cdot g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}).$$

2) Conmutatividad para la adición y multiplicación:

$$f + g = g + f,$$

$$f \cdot g = g \cdot f.$$

3) Asociatividad para la adición y multiplicación:

$$(f + g) + h = f + (g + h),$$

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h).$$

4) Existencia de elementos neutros de la adición y multiplicación:

Existen $\mathbb{O}$, $\mathbb{I} \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, tales que

$$f + \mathbb{O} = \mathbb{O} + f = f,$$

$$f \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot f = f.$$

5) Existencia de elementos opuestos para la adición y multiplicación:

Existen $-f$, $\frac{1}{f} \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, tales que

$$f + (-f) = (-f) + f = \mathbb{O},$$

$$f \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \cdot f = \mathbb{I}; \quad \text{donde } f \neq \mathbb{O}.$$

6) Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma:

$$f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h.$$

Por las propiedades mencionadas, $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ se denomina el cuerpo de funciones.

5.1.2 Composición de funciones

Definición 5.3 Sea $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$. Se define la operación denominada composición de funciones como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

donde $f \circ g \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$.

■ **Ejemplo 5.2 — Composición de funciones.** Considérese la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y la función cuadrática $g(x) = 2x^2 - 3$. Hallar $f(y)$, $f(4)$, $g(-2)$, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f \circ f$ y $g \circ f \circ g$.

Solución: Según la Definición 5.2 se tiene

i) Se evalúa y en la función f,

$$f(y) = \frac{1}{y-1}.$$

ii) Se evalúa 4 en la función f,

$$f(4) = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}.$$

iii) Se evalúa -2 en la función g,

$$g(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 5.$$

iv) Se compone f con g y se obtiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\left(2x^2-3\right)\\ &= \frac{1}{(2x^2-3)-1}\\ &= \frac{1}{2x^2-4}.\end{aligned}$$

v) Se compone g con f y se obtiene

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\left(\frac{1}{x-1}\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 3\\ &= \frac{2-3(x-1)^2}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

vi) Se compone tres veces f y se obtiene

$$(f \circ f \circ f)(x) = f\left(f\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= f\left(\frac{1}{\dfrac{1}{x-1}-1}\right)\\
&= f\left(\frac{x-1}{2-x}\right)\\
&= \frac{1}{\dfrac{x-1}{2-x}-1}\\
&= \frac{2-x}{2x-3}.
\end{aligned}
$$

vii) De iv) se tiene

$$
\begin{aligned}
(g\circ f\circ g)(x) &= g\left((f\circ g)(x)\right)\\
&= g\left(\frac{1}{2x^2-4}\right)\\
&= 2\cdot\left(\frac{1}{2x^2-4}\right)^2-3.
\end{aligned}
$$

5.1.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1 Dadas las funciones $f(x)=x^2+x-2$ y $g(x)=x-1$. Determinar:

1. $f+g$,
2. $f-g$,
3. $f\cdot g$,
4. $\dfrac{f}{g}$,
5. Evaluar las funciones anteriores cuando $x=2$.

Ejercicio 5.2 Dadas las funciones $f(x)=(x+4)^2$ y $g(x)=-2x^2+3x-4$. Determinar:

1. $f+g$,
2. $f-g$,
3. $f\cdot g$,
4. $\dfrac{f}{g}$,
5. Evaluar las funciones anteriores cuando $x=0$.

Ejercicio 5.3 Dadas las funciones $f(x)=2x+5,\ g(x)=x^2+1$ y $h(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$. Determinar:

1. $f+g-h$,
2. $f\cdot h-3h$,

3. $\dfrac{3f-h}{g}$,
4. $\dfrac{f\cdot g}{h}$,
5. Evaluar las funciones anteriores cuando $x=1$.

Ejercicio 5.4 Para las funciones dadas, realizar las siguientes composiciones: $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$ y $g\circ g$.

1. $f(x)=x-3,\ g(x)=x^2+1$;
2. $f(x)=-4x,\ g(x)=x+8$;
3. $f(x)=\sqrt{x-1},\ g(x)=x^2+1$;
4. $f(x)=\dfrac{1}{x+2},\ g(x)=x-2$;
5. $f(x)=3-x,\ g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

Ejercicio 5.5 Sean $f(x)=4x+3,\ g(x)=-x^2+1$ y $h(x)=\dfrac{1}{x+3}$. Obtener:

1. $f\circ g$,
2. $g\circ h$,
3. $f\circ h\circ g$,
4. $g\circ f+h\circ f$,
5. Evaluar las composiciones anteriores cuando $x=3$.

5.2 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

En la siguiente sección se estudiarán características de las funciones que determinarán condiciones necesarias para lo que más adelante denominaremos función inversa.

5.2.1 Inyectividad

Definición 5.4 Sea $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R})$, se dice que f es inyectiva si y solo si

$$\forall x_1,x_2\in \operatorname{Dom}(f): x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$$

Interpretación geométrica

i) f es inyectiva pues $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

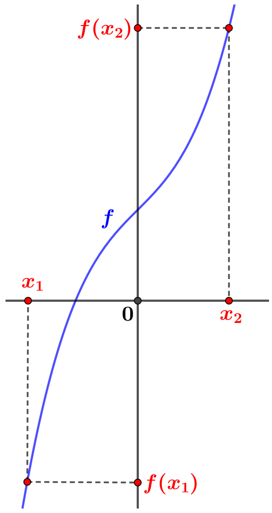


Figura 5.1: Función inyectiva.

ii) f no es inyectiva pues $x_1 \neq x_2$ pero $f(x_1) = f(x_2)$.

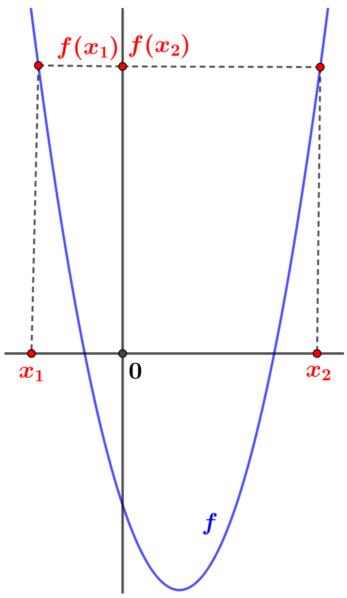


Figura 5.2: Función no inyectiva.

Observación 5.2 — Criterio de la recta horizontal. Geométricamente, se tiene que una función $f \subseteq \mathbb{R}^2$ es inyectiva si cualquier recta horizontal corta máximo en un punto de f.

■ **Ejemplo 5.3 — Funciones inyectivas.** Analizar la inyectividad de las siguientes gráficas que corresponden a ciertas funciones

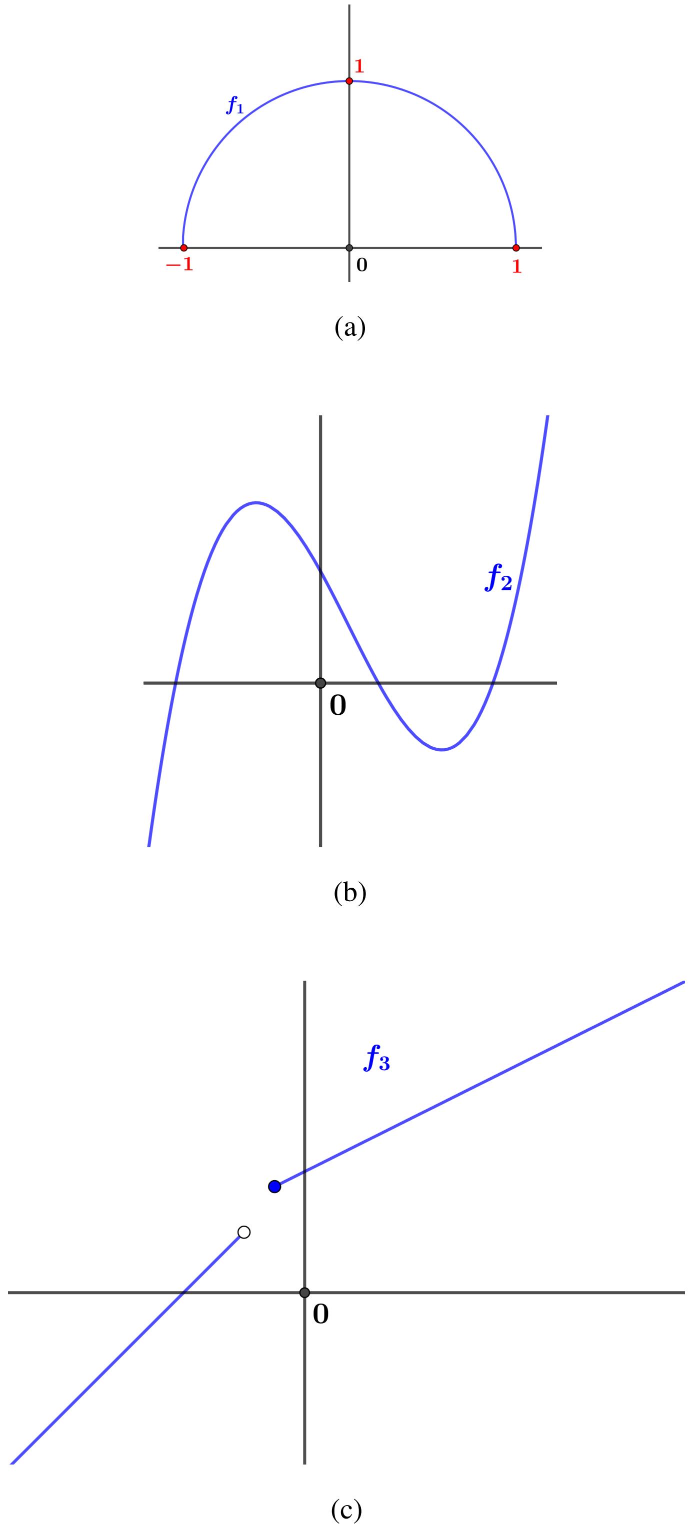


Figura 5.3: Tipos de funciones.

Solución: Según el criterio de la recta horizontal dada en la Observación 5.2, se observa que f_3 es inyectiva, mientras que, f_1 y f_2 no son inyectivas.

Observación 5.3 — Definición equivalente de inyectividad. Dado que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

es una tautología, se tiene que una forma equivalente de representar la inyectividad de una función es

$$x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f) : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Esta es la forma más común para analizar algebraicamente la inyectividad de una función.

Ejemplo 5.4 — Inyectividad de funciones. Resolver los siguientes ejercicios algebraicamente.

a) Analizar la inyectividad de la función lineal $f(x) = -3x + 5$.

Solución: Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ -3x_1 + 5 &= -3x_2 + 5 \\ -3x_1 &= -3x_2 \\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

por lo tanto, f es inyectiva.

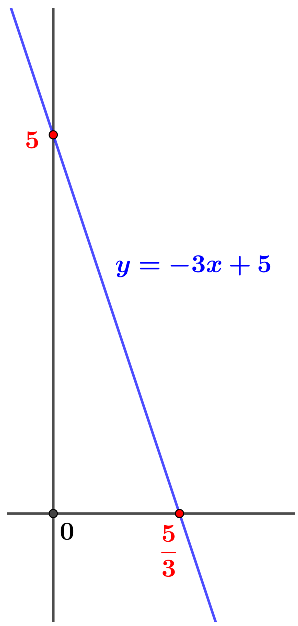


Figura 5.4: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -3x + 5\}$.

b) Analizar la inyectividad de la función cuadrática $g(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

Solución: Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, entonces:

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$2x_1^2+3x_1-1=2x_2^2+3x_2-1$$
$$2\left(x_1^2-x_2^2\right)+3\left(x_1-x_2\right)=0$$
$$2\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)+3\left(x_1-x_2\right)=0$$
$$\left(x_1-x_2\right)\left(2x_1+2x_2+3\right)=0$$
$$x_1-x_2=0 \quad \vee \quad 2x_1+2x_2+3=0$$
$$x_1=x_2 \quad \vee \quad x_1=\frac{-3-2x_2}{2},$$

de donde se tiene

$$g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right) \Rightarrow \left(x_1=x_2 \quad \vee \quad x_1=\frac{-3-2x_2}{2}\right),$$

por lo tanto, g no es inyectiva.

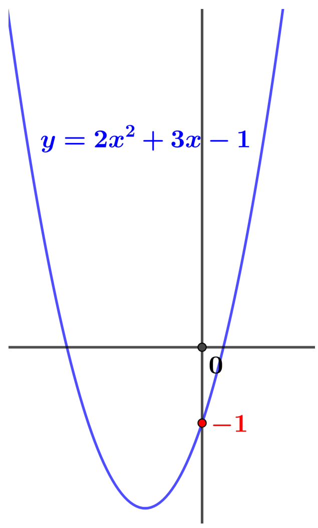


Figura 5.5: $g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x^2+3x-1\}$.

c) Analizar la inyectividad de la siguiente función cuadrática restringida su dominio:

$$h(x)=2x^2+3x-1, \quad x\in\left(-\frac{3}{4},+\infty\right).$$

Solución: Primero, note que $h(x)=g(x)$ pero no están definidas en el mismo dominio, esto se denota como

$$g|_I=h,$$

donde $I=\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$, y se dice que h es la restricción de g en el conjunto I. Ahora, se va a probar que a pesar de que g no es inyectiva, h si lo es. Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(h) = \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} h(x_1) &= h(x_2) \\ 2x_1^2 + 3x_1 - 1 &= 2x_2^2 + 3x_2 - 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \quad &\vee \quad 2x_1 + 2x_2 + 3 = 0 \\ x_1 = x_2 \quad &\vee \quad x_1 = \frac{-3 - 2x_2}{2}, \end{aligned}$$

dado que $x_2 \in \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$, se tiene:

$$\begin{aligned} x_2 > -\frac{3}{4} &\Longrightarrow -2x_2 < \frac{3}{2} \\ &\Longrightarrow -3 - 2x_2 < -\frac{3}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{-3 - 2x_2}{2} < -\frac{3}{4} \\ &\Longrightarrow x_1 < -\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

pero $x_1 \in \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$, entonces resulta una contradicción. Esto indica que el caso donde $x_1 = \frac{-3 - 2x_2}{2}$ no puede ocurrir, por lo tanto se tiene que $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Luego h es inyectiva.

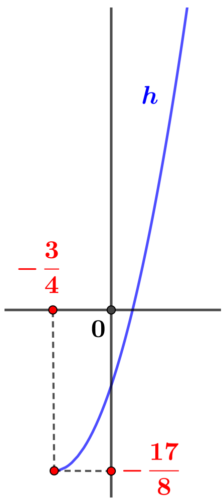


Figura 5.6: $h = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x^2 + 3x - 1 \wedge x > -\frac{3}{4}\right\}$.

Observación 5.4 — Restricción del dominio para obtener funciones inyectivas. El item b) y

c) de los ejemplos anteriores muestran que dada una función g tal que no es inyectiva, se puede restringir a un dominio I tal que el resultado $h = g|_I$ sea inyectiva.

■ **Ejemplo 5.5 — Restricción de dominio de una función cuadrática.** Dada la función $f(x) = -x^2 + 7x - 1$, hallar los conjuntos $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ tales que $f|_{I_1}$ y $f|_{I_2}$ sean inyectivas, donde $I_1 \cup I_2 = \mathbb{R}$.

Solución: De acuerdo con la monotonía de una función cuadrática, se tiene que

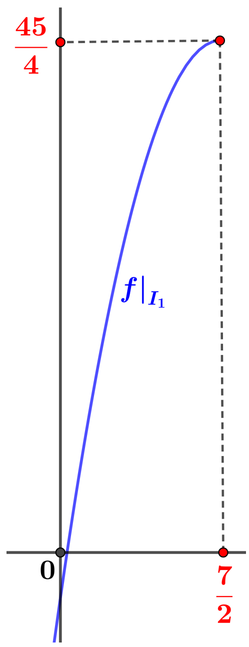
$$f \text{ es creciente en } \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$$
$$f \text{ es de creciente en } \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$$

pues $a = -1 < 0$, donde

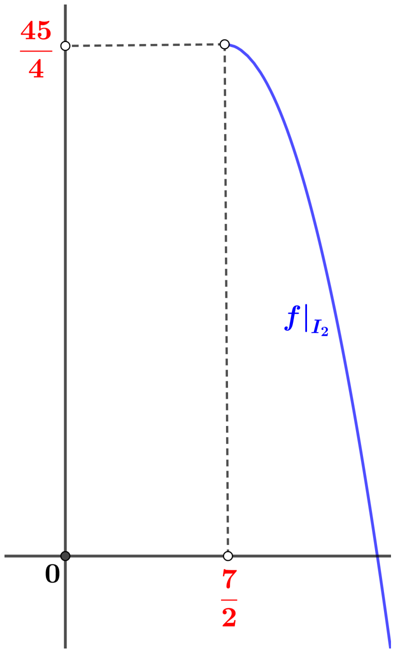
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2(-1)} = \frac{7}{2},$$

entonces poniendo $I_1 = \left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$ e $I_2 = \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ se tiene que $f|_{I_1}$ y $f|_{I_2}$ son inyectivas. Además

$$I_1 \cup I_2 = \left(-\infty, \frac{7}{2}\right] \bigcup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R}.$$



(a) $f|_{I_1}$



(b) $f|_{I_2}$

Figura 5.7: (a) $f|_{I_1}$, (b) $f|_{I_2}$.

5.2.2 Sobreyectividad

Definición 5.5 Sea $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ de la forma

$$f : \begin{cases} \mathrm{Dom}(f) & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & y = f(x). \end{cases}$$

Se dice que f es sobreyectiva sí y solo sí

$$\forall y \in B, \exists x \in \mathrm{Dom}(f) : y = f(x).$$

Interpretación geométrica

i) *Función sobreyectiva.*

Supongamos que para la función que se aprecia en la Figura 5.8, se tiene que $\mathrm{Dom}(g) = [a, +\infty)$ y $B = [b, +\infty)$, entonces para $y_0 \in [b, +\infty)$ existe $x_0 \in \mathrm{Dom}(g) = [a, +\infty)$ tal que $y_0 = f(x_0)$, por lo tanto se tiene que g es sobreyectiva.

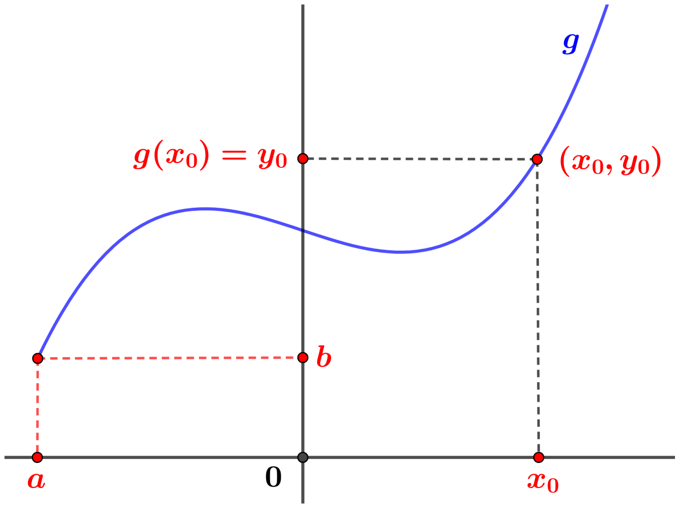


Figura 5.8: Función sobreyectiva.

ii) *Función no sobreyectiva.*

Supongamos que para la función que se aprecia en la Figura 5.9, se tiene que $\mathrm{Dom}(f) = [-1, +\infty)$ y $B = \mathbb{R}$, entonces para $y_0 \in B$ no existe $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $y = f(x)$, por lo tanto f no es sobreyectiva.

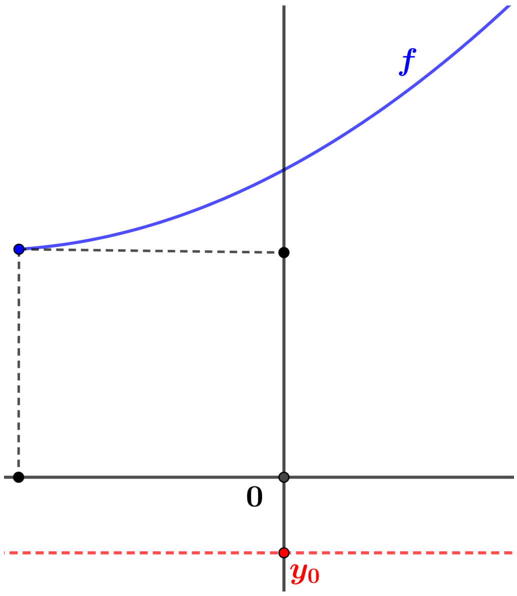


Figura 5.9: Función no sobreyectiva.

Observación 5.5 — Relación entre el recorrido y el concepto de sobreyectividad. Note que por definición se tiene

$$\mathrm{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathrm{Dom}(f), y = f(x)\},$$

entonces, analíticamente basta que $B \subseteq \text{Rec}(f)$ para que f sea sobreyectiva. Esto implica que

$$f:\begin{cases} \text{Dom}(f) & \longrightarrow & \text{Rec}(f) \\ x & \longmapsto & y=f(x) \end{cases}$$

siempre es sobreyectiva.

■ **Ejemplo 5.6 — Sobreyectividad de funciones.** Se presentan los siguientes ejemplos.

i) Sea la función

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{2-x}{3x-1}. \end{cases}$$

Analizar la sobreyectividad

Solución: Por la observación anterior basta que $\mathbb{R} \subseteq \text{Rec}(f)$ para que sea sobreyectiva. A continuación, se calcula su recorrido

$$\begin{aligned} y &= \frac{2-x}{3x-1} \\ 3xy-y &= 2-x \\ 3xy+x &= 2+y \\ x(3y+1) &= 2+y \\ x &= \frac{2+y}{3y+1}, \end{aligned}$$

analizando la restricción en y, se tiene

$$\begin{aligned} 3y+1 &\neq 0 \\ y &\neq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

luego, $\text{Rec}(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$, pero es imposible que

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\},$$

por lo tanto, f no es sobreyectiva.

ii) Sea la función

$$g:\begin{cases} \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\} \\ x & \longmapsto & g(x)=\dfrac{2-x}{3x-1}. \end{cases}$$

Analizar la sobreyectividad.

Solución: Nótese que la función g difiere de la función f del literal anterior solamente en el conjunto de salida. Así, del literal anterior se tiene que $\operatorname{Rec}(g) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ y por lo tanto g es sobreyectiva.

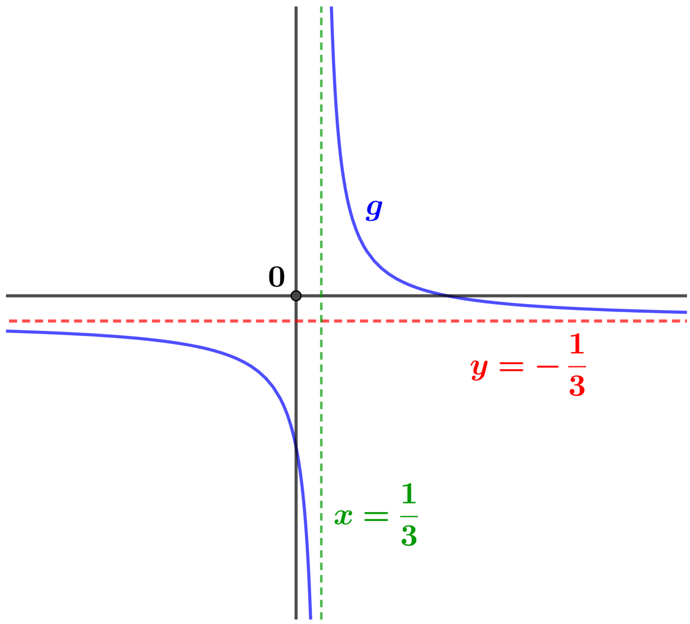


Figura 5.10: La función g es sobreyectiva.

5.2.3 Biyectividad

Definición 5.6 Una función $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ se dice biyectiva sí y solo sí es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

5.2.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.6 Determine si las siguientes funciones son inyectivas.

1. $f(x) = x+7$,
2. $f(x) = -4x+10$,
3. $f(x) = (x-3)^2$,
4. $f(x) = \dfrac{x}{x-9}$,
5. $f(x) = \sqrt{x+5}$,
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,
7. $f(x) = x^4 - 12$,
8. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$,

9. $f(x) = \dfrac{5-3x}{2x-1}$.

Ejercicio 5.7 Si las siguientes funciones tienen $\mathrm{Dom}(f) = A$ y $\mathrm{Rec}(f) = B$. Indique cuáles son sobreyectivas.

1. $f(x) = 3x+7,\ A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = (x-2)^3,\ A = \mathbb{R},\ B = [0, +\infty[$;
3. $f(x) = x^2,\ A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}+4,\ A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}$;
5. $f(x) = \sqrt{x^2+5},\ A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 5.8 Las siguientes funciones tienen $\mathrm{Dom}(f) = A$ y $\mathrm{Rec}(f) = B$. Indique cuáles son biyectivas.

1. $f(x) = 7x-10,\ A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = \sqrt{x},\ A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}^+$;
3. $f(x) = |x-6|,\ A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}$;
4. $f(x) = 4-x^3,\ A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}$;
5. $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ A =]-1, 0],\ B =]-\infty, 0]$.

5.3 Función inversa

Definición 5.7 Dada una función

$$f : \begin{cases} \mathrm{Dom}(f) & \longrightarrow & \mathrm{Rec}(f) \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{cases}$$

biyectiva, entonces se define la función inversa de f como

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathrm{Rec}(f) & \longrightarrow & \mathrm{Dom}(f) \\ x & \longmapsto & y = f^{-1}(x) \end{cases}$$

tal que

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x. \tag{5.1}$$

Observación 5.6 Es importante tener en cuenta que:

a) De la definición se tiene que la condición necesaria para que una función f tenga inversa es que f sea biyectiva.

b) Se tiene

$$\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Rec}(f),$$
$$\mathrm{Rec}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Dom}(f).$$

c) La función f^{-1} es biyectiva.

d) Se tiene $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

e) Las gráficas de f, $f^{-1} \subseteq \mathbb{R}^2$ son simétricas entre sí con respecto a la recta

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\right\}.$$

■ **Ejemplo 5.7 — Función inversa para una función lineal.** Sea

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = -2x+3. \end{cases}$$

Verificar la biyectividad de f, hallar su inversa y comprobar las observaciones antes mencionadas.

Solución:

- *Inyectividad:* Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ -2x_1 + 3 &= -2x_2 + 3 \\ -2x_1 &= -2x_2 \\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

  luego, f es inyectiva.

- *Sobreyectividad:* Como $B = \mathbb{R} = \mathrm{Rec}(f)$, entonces f es sobreyectiva.
- *Biyectividad:* Como f es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo, entonces es biyectiva.
- *Inversa:* La forma estándar de hallar la inversa es considerar $y = f(x)$ y luego se despejar la x,

$$y = -2x + 3$$

$$\begin{aligned} 2x &= 3-y \\ x &= \frac{3-y}{2}, \end{aligned}$$

así, se obtiene una expresión de la forma $x = g(y)$, es decir,

$$x = g(y) = \frac{3-y}{2},$$

por lo tanto $f^{-1}(x) = g(x)$, es decir,

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{2}.$$

Como

$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathrm{Rec}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R},$$

entonces

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \frac{3-x}{2}. \end{cases}$$

Ahora, se va a analizar f^{-1}.

- *Comprobación:* Se debe comprobar que se cumple (5.1),

  i)

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= f\left(\frac{3-x}{2}\right) \\ &= -2\left(\frac{3-x}{2}\right) + 3 \\ &= -3 + x + 3 \\ &= x. \end{aligned}$$

  ii)

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(-2x+3) \\ &= \frac{3-(-2x+3)}{2} \\ &= \frac{3+2x-3}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \end{aligned}$$

$$= x.$$

- *Inyectividad de f^{-1}:* Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_1) &= f^{-1}(x_2) \\ \frac{3-x_1}{2} &= \frac{3-x_2}{2} \\ 3-x_1 &= 3-x_2 \\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

  luego, f^{-1} es inyectiva.

- *Sobreyectividad de f^{-1}:* Como $\mathrm{Rec}(f^{-1}) = \mathbb{R} = B$ entonces f^{-1} es sobreyectiva.
- *Biyectividad de f^{-1}:* Como f^{-1} es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo, entonces es biyectiva.
- *Inversa de f^{-1}:* Según la forma estándar de hallar una inversa, se tiene

$$\begin{aligned} y &= f^{-1}(x) \\ y &= \frac{3-x}{2} \\ 2y &= 3-x \\ x &= 3-2y, \end{aligned}$$

  por lo tanto,
$$(f^{-1})^{-1}(x) = 3-2x = f(x).$$

- *Gráfica de f y f^{-1}:*

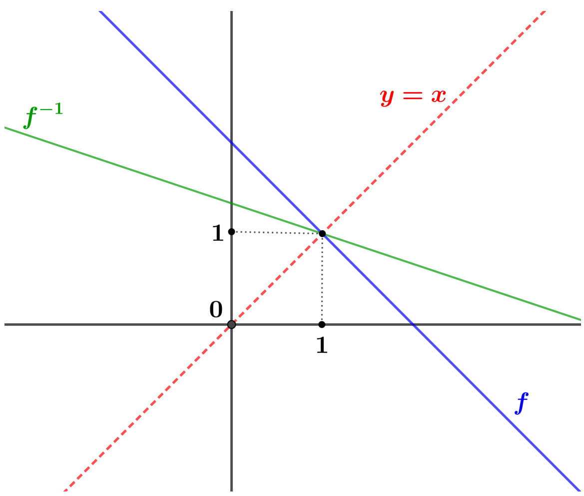


Figura 5.11: Simetría de f y su inversa f^{-1} con respecto a la recta $y = x$.

■ **Ejemplo 5.8 — Función inversa para una función racional.** Sea

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{3}{2} \right\} & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{5+x}{2x-3}. \end{cases}$$

Hallar B para que f sea sobreyectiva y calcule su inversa. Además, hacer la comprobación y graficar la simetría de f con f^{-1}.

Solución:

- *Sobreyectividad:* Según la Observación 5.5, es suficiente hallar el recorrido y hacerlo coincidir con el conjunto B, así,

$$\begin{aligned} y &= \frac{5+x}{2x-3} \\ 2xy - 3y &= 5 + x \\ 2xy - x &= 5 + 3y \\ x(2y-1) &= 5 + 3y \\ x &= \frac{5+3y}{2y-1}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

la restricción de la variable y conduce a

$$\begin{aligned} 2y - 1 &\neq 0 \\ y &\neq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$B = \operatorname{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

- *Inversa:* Note que de la sobreyectividad ya se obtiene $x = g(y)$ en (5.2), luego

$$f^{-1}(x) = \frac{5+3x}{2x-1},$$

así,

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{1}{2} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{3}{2} \right\} \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \dfrac{5+3x}{2x-1}. \end{cases}$$

- *Comprobación:* Se debe comprobar que se cumple (5.1), i)

$$\begin{aligned}(f\circ f^{-1})(x) &= f\left(\frac{5+3x}{2x-1}\right)\\ &= \frac{5+\dfrac{5+3x}{2x-1}}{2\left(\dfrac{5+3x}{2x-1}\right)-3}\\ &= \frac{\dfrac{10x-5+5+3x}{2x-1}}{\dfrac{10+6x-6x+3}{2x-1}}\\ &= x.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ f)(x) &= f^{-1}\left(\frac{5+x}{2x-3}\right)\\ &= \frac{5+3\left(\dfrac{5+x}{2x-3}\right)}{2\left(\dfrac{5+x}{2x-3}\right)-1}\\ &= \frac{\dfrac{10x-15+15+3x}{2x-3}}{\dfrac{10+2x-2x+3}{2x-3}}\\ &= x.\end{aligned}$$

- *Gráfica de f y f^{-1}:*

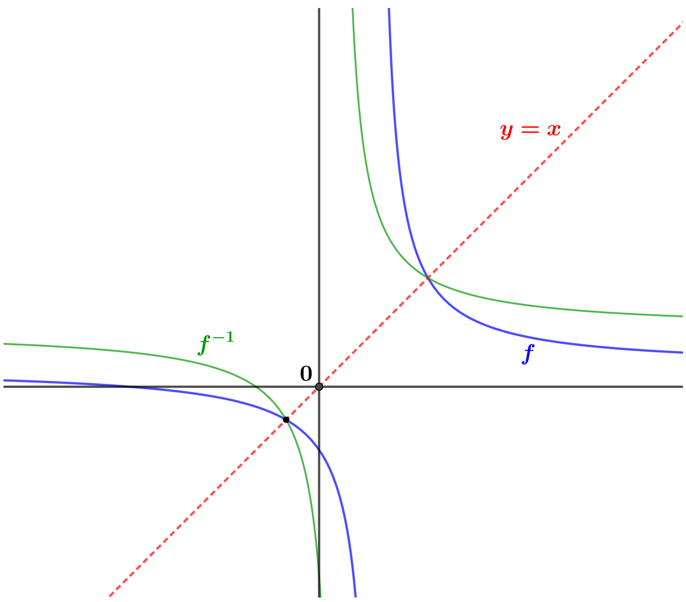


Figura 5.12: Simetría de f y su inversa f^{-1} con respecto a la recta $y=x$.

5.3.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.9 Para cada regla de asignación dada, determine los conjuntos A y B tales que sean biyectivas, hallar su inversa, hacer la comprobación y graficar f y f^{-1}:

1. $f(x) = 2x+1$,
2. $f(x) = \dfrac{1-2x}{4}$,
3. $f(x) = x^2-3,\ A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}$;
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$,
5. $f(x) = \sqrt[3]{x-12}$,
6. $f(x) = 3-7x$,
7. $f(x) = \dfrac{3x-5}{2}$,
8. $f(x) = 2x^2-3x+1$
9. $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x-5}$,
10. $f(x) = \sqrt{6-7x}$.

6. Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Autores:
MSc. Henrry Verdugo
MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro
Ing. Kevin Astudillo

En lo que resta del libro se trata de estudiar funciones que no se pueden definir mediante polinomios, tales funciones se denominan funciones trascendentales. Entre este tipo de funciones son de especial interés las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Aunque existen muchas más funciones de este tipo, no serán abarcadas mas que las mencionadas.

En partícular, en este capítulo se estudian las funciones exponenciales y logarítmicas. Puesto que entre ellas se guarda una estrecha relación (son inversas entre ellas), se hace un estudio sistemático preliminar que consta de sus propiedades y leyes. Luego, se muestra ejemplos con lo que se puede comprender la teoría desarrollada al inicio.

6.1 Funciones exponenciales

Definición 6.1 Sea $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ un número fijo. Se define la función exponencial en base a como:

$$\exp_a(x) = a^x.$$

Observación 6.1 Note que existen infinitas funciones exponenciales, cada una dependiendo del número a que se haya elegido al principio.

6.1.1 Gráficas de $\exp_a$

- Si $a \in]0,1[$.

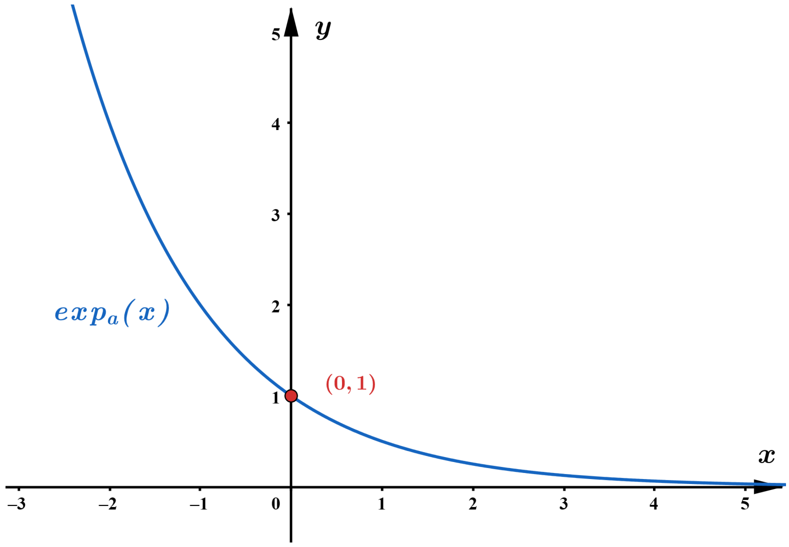


Figura 6.1: Función exponencial $\exp_a$ cuando $a \in]0,1[$.

- Si $a \in]1,+\infty[$.

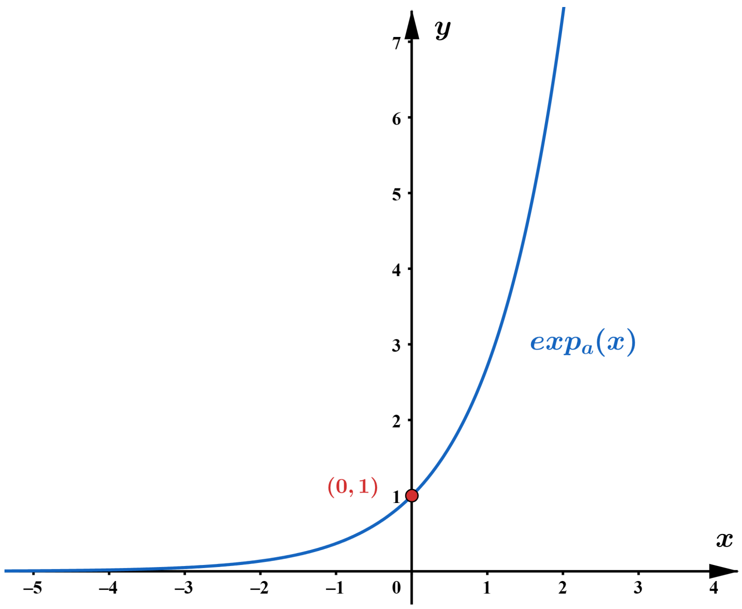


Figura 6.2: Función exponencial $\exp_a$ cuando $a \in]1,+\infty[$.

6.1.2 Propiedades de la función exponencial

- $\mathrm{Dom}(\exp_a) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Rec}(\exp_a) =]0,+\infty[$.

- No corta al eje X.
- Corta al eje Y en $(0,1) \in \mathbb{R}^2$, entonces para todo $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$\exp_a(0) = a^0 = 1.$$

- *Monotonía:*
  i) Si $a \in]0,\, 1[$, $\exp_a$ es decreciente en $\mathbb{R}$.
  ii) Si $a \in]1,\, +\infty[$, $\exp_a$ es creciente en $\mathbb{R}$.
- $\exp_a$ no es par ni impar.
- Cuando se considera

$$\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\, +\infty[\\ x & \longmapsto & \exp_a(x) = a^x, \end{cases}$$

se tiene que la función $\exp_a$ es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva, por lo tanto existe su inversa llamada logaritmo en base a, definida como

$$\exp_a^{-1} : \begin{cases}]0,\, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp_a^{-1}(x) = \log_a(x). \end{cases}$$

6.1.3 Leyes de exponentes

Para $a, b \in]0,\, 1[\cup]1,\, +\infty[$, se tienen las siguientes leyes de exponentes:

- $a^0 = 1 \;\; , \;\; a > 0$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}.$

6.1.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.1 Utilizando las propiedades de los exponentes, reducir las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{10^9}{10^6}$,
2. $\dfrac{x^{10}}{x^{-7}}$,
3. $\left[(4)^{-2}\right]^{-1} \cdot 2^{-4}$,

4. $\dfrac{5 \cdot (3^2 \cdot 10)^2}{30^2 \cdot 60^2}$,
5. $\dfrac{2^{-3} \cdot (-2)^4 \cdot (-4)^{-1}}{-2}$,
6. $\dfrac{25^2 \cdot 36^2 \cdot 32}{30^4 \cdot 8^3}$.

Ejercicio 6.2 Simplifique las siguientes expresiones:

1. $7^{2x-3}\left(-7^{3x-1}\right)^2$,
2. $\left(16x^2y^4\right)\left(\dfrac{1}{4}x^5y\right)$,
3. $2^{\frac{x+3}{2}} \cdot 8^{x-3} \cdot 16^{\frac{2x-5}{4}}$,
4. $\dfrac{8x^4y^{-8}}{4x^{-1}y^3}$,
5. $\dfrac{5x^{-3}y^7}{2x^{-3}y^{-7}}$,
6. $\dfrac{\left(3^{x+2}\right)^3\left(9^{-x}\right)^2}{81^{-x+2} \cdot 3^{3x}}$.

6.2 Funciones logarítmicas

Definición 6.2 Sea $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ un número fijo. Se define la función logarítmica en base a como:

$$\log_a(x) = \exp_a^{-1}(x).$$

Observación 6.2 Note que existen infinitas funciones logarítmicas, cada una dependiendo del número a que se haya elegido al principio.

6.2.1 Propiedades de la función logarítmica

- $\mathrm{Dom}(\log_a) =]0, +\infty[$
- $\mathrm{Rec}(\log_a) = \mathbb{R}$
- Corta al eje X en $(1,0) \in \mathbb{R}^2$, entonces para todo $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$\log_a(1) = 0.$$

- No corta al eje Y.
- *Monotonia:*
  i) Si $a \in]0, 1[$, $\log_a$ es decreciente en $]0, +\infty[$.
  ii) Si $a \in]1, +\infty[$, $\log_a$ es creciente en $]0, +\infty[$.

- $\log_a$ no es par ni impar.
- Cuando se considera

$$\log_a : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_a(x) = \exp_a^{-1}(x), \end{cases}$$

se tiene que la función $\log_a$ es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva, por lo tanto existe su inversa que, de hecho, coincide con la función exponencial en base a, es decir,

$$\log_a^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \log_a^{-1}(x) = \exp_a(x). \end{cases}$$

Observación 6.3 La función $\exp_a$ y la función $\log_a$ son inversas cuando $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ es un número fijo. Se obtienen las siguientes identidades

$$\log_a(a^x) = x,$$
$$a^{\log_a(x)} = x.$$

6.2.2 Gráficas de $\log_a$

- Si $a \in]0, 1[$.

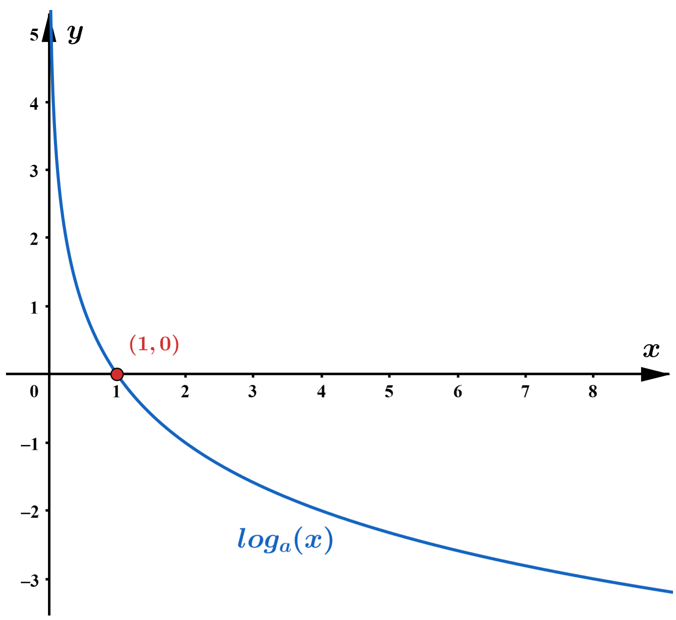


Figura 6.3: Función logarítmica $\log_a$ cuando $a \in]0,1[$.

- Si $a \in]1, +\infty[$

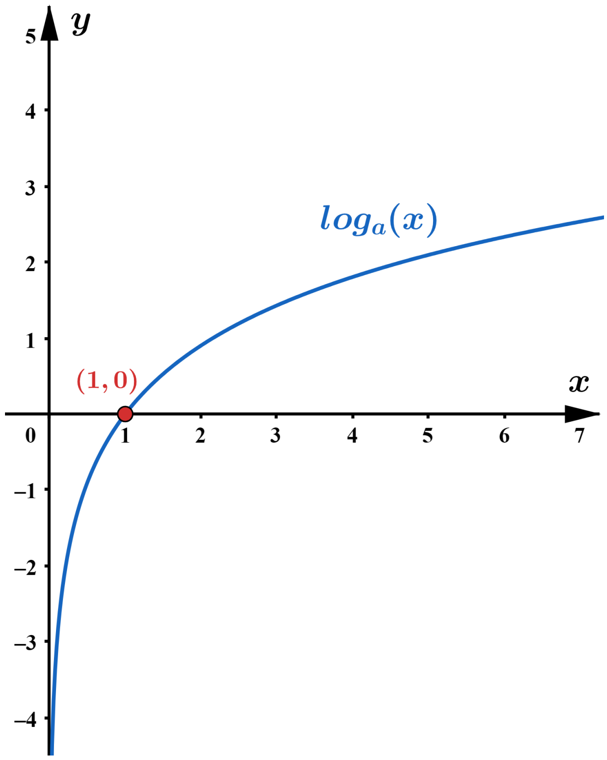


Figura 6.4: Función logarítmica $\log_a$ cuando $a \in]1, +\infty[$.

6.2.3 Leyes de logaritmos

Para $a, b \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ y $M, N > 0$ se tienen las siguientes leyes de logaritmos:

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(M \cdot N) = \log_a(M) + \log_a(N)$
- $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$
- $\log_a\left(M^{\frac{p}{q}}\right) = \dfrac{p}{q}\log_a(M), \quad q \neq 0$
- $\log_a(M) = \dfrac{\log_b(M)}{\log_b(a)}$
- $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)}$.

6.2.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.3 Simplifique las siguientes expresiones:

1. $\log_3\left(\dfrac{9^4}{27^3}\right)$,
2. $\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{32}{243}\right)$,
3. $\log_{7^{x+1}}\left(7^{x^2-1}\right)$,

4. $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$,
5. $\log_4 \log_{25} \log_2 32$,
6. $\log_2 \sqrt[5]{2} + \log_2 8 + \log_2 \frac{1}{4}$,
7. $\frac{1}{2}\log_2 x + 6\log_2 y - \frac{2}{5}\log_2 z$,
8. $9\log a + 7\log b + \log c - 5\log d$,
9. $\log(x-3) - \log\left(x^2-9\right) - \log\frac{1}{3}$,
10. $2\log(x+3) - \log\left(x^2+2x-3\right) - \log 1$.

6.3 Análisis de funciones exponenciales y logarítmicas

■ **Ejemplo 6.1 — Análisis de una función exponencial.** Analizar la siguiente función exponencial $f(x) = -3 + 2\cdot 3^{1-4x}$.

Solución: Se observa que f se desprende de la función exponencial $\exp_3$, con esto en mente se tiene:

- Como $\mathrm{Dom}(\exp_3) = \mathbb{R}$, entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Como $\mathrm{Rec}(\exp_3) =]0, +\infty[$, entonces

$$\begin{aligned} 3^{1-4x} &> 0 && \cdot(2) \\ 2\cdot 3^{1-4x} &> 0 && -(3) \\ -3+2\cdot 3^{1-4x} &> -3 \\ y &> -3, \end{aligned}$$

  por lo tanto, $\mathrm{Rec}(f) =]-3, +\infty[$.
- *Corte con el eje X:* se resuelve la ecuación

$$0 = -3 + 2\cdot 3^{1-4x},$$

  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 3 &= 2\cdot 3^{1-4x} \\ \frac{3}{2} &= 3^{1-4x} \\ \log_3\left(\frac{3}{2}\right) &= \log_3\left(3^{1-4x}\right) \\ \log_3\left(\frac{3}{2}\right) &= 1-4x \end{aligned}$$

$$4x = 1 - \log_3\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$x = \frac{1 - \log_3\left(\frac{3}{2}\right)}{4},$$

entonces, $f \subset \mathbb{R}^2$ corta al eje X en el punto

$$\left(\frac{1 - \log_3\left(\frac{3}{2}\right)}{4},\ 0\right) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Corte con el eje Y:* se tiene

$$y = -3 + 2 \cdot 3^{1-4(0)}$$
$$y = -3 + 2 \cdot 3$$
$$y = 3,$$

por lo tanto, $f \subset \mathbb{R}^2$ corta al eje Y en el punto $(0,\ 3) \in \mathbb{R}^2$.

- *Monotonia:* Como la base es $3 \in]1, +\infty[$, se tiene para $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, tales que $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned}
0 < 3^{x_1} < 3^{x_2} & \qquad ([\cdot]^{-4}) \\
3^{-4x_2} < 3^{-4x_1} & \qquad \cdot(3) \\
3^{1-4x_2} < 3^{1-4x_1} & \qquad \cdot(2) \\
2 \cdot 3^{1-4x_2} < 2 \cdot 3^{1-4x_1} & \qquad -(3) \\
-3 + 2 \cdot 3^{1-4x_2} < -3 + 2 \cdot 3^{1-4x_1} & \\
f(x_2) < f(x_1), &
\end{aligned}$$

por lo tanto, f es decreciente en $\mathbb{R}$.

- f no es par ni impar.
- Cuando se considera

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad]-3, +\infty[\\ x & \longmapsto \quad f(x) = -3 + 2 \cdot 3^{1-4x_1}, \end{cases}$$

se tiene para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$-3 + 2 \cdot 3^{1-4x_1} = -3 + 2 \cdot 3^{1-4x_2}$$
$$2 \cdot 3^{1-4x_1} = 2 \cdot 3^{1-4x_2}$$

$$\begin{aligned}
3^{1-4x_1} &= 3^{1-4x_2} \\
1-4x_1 &= 1-4x_2 \\
4x_2 &= 4x_1 \\
x_1 &= x_2,
\end{aligned}$$

es decir, f es inyectiva y como en el conjunto de llegada se ha colocado el recorrido, se tiene que f es sobreyectiva, y por lo tanto es biyectiva. Así, existe su inversa que se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
y &= -3+2\cdot 3^{1-4x} \\
y+3 &= 2\cdot 3^{1-4x} \\
\frac{y+3}{2} &= 3^{1-4x} \\
\log_3\left(\frac{y+3}{2}\right) &= 1-4x \\
4x &= 1-\log_3\left(\frac{y+3}{2}\right) \\
x &= \frac{1-\log_3\left(\frac{y+3}{2}\right)}{4}, \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$f^{-1}: \begin{cases}]-3,+\infty[& \longrightarrow \qquad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad f^{-1}(x) = \dfrac{1-\log_3\left(\frac{x+3}{2}\right)}{4}. \end{cases}$$

- *Comprobación:* En esta parte se ejemplifica la relación entre las funciones exponencial y logarítmica. Se debe comprobar que se cumple (5.1),

$$\begin{aligned}
\text{i)}\quad (f\circ f^{-1})(x) &= f\left(\frac{1-\log_3\left(\frac{x+3}{2}\right)}{4}\right) \\
&= -3+2\cdot 3^{1-4\left(\frac{1-\log_3\left(\frac{x+3}{2}\right)}{4}\right)} \\
&= -3+2\cdot 3^{1-1+\log_3\left(\frac{x+3}{2}\right)} \\
&= -3+2\cdot 3^{\log_3\left(\frac{x+3}{2}\right)} \\
&= -3+2\cdot\frac{x+3}{2} \\
&= -3+x+3 \\
&= x,
\end{aligned}$$

$$\text{ii)}\quad (f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(-3+2\cdot 3^{1-4x})$$
$$= \frac{1-\log_3\left(\dfrac{-3+2\cdot 3^{1-4x}+3}{2}\right)}{4}$$
$$= \frac{1-\log_3\left(\dfrac{2\cdot 3^{1-4x}}{2}\right)}{4}$$
$$= \frac{1-\log_3(3^{1-4x})}{4}$$
$$= \frac{1-(1-4x)}{4}$$
$$= \frac{4x}{4}$$
$$= x.$$

Observación 6.4 Note que de (6.1) también se puede obtener el recorrido de f, ya que al analizar esa expresión y recordando que $\mathrm{Dom}(\log_a) =]0,+\infty[$, se tiene la restricción

$$\frac{y+3}{2} > 0$$
$$y+3 > 0$$
$$y > -3$$

luego, $\mathrm{Rec}(f) =]-3,+\infty[$.

- *Gráfica de f y f^{-1}:*

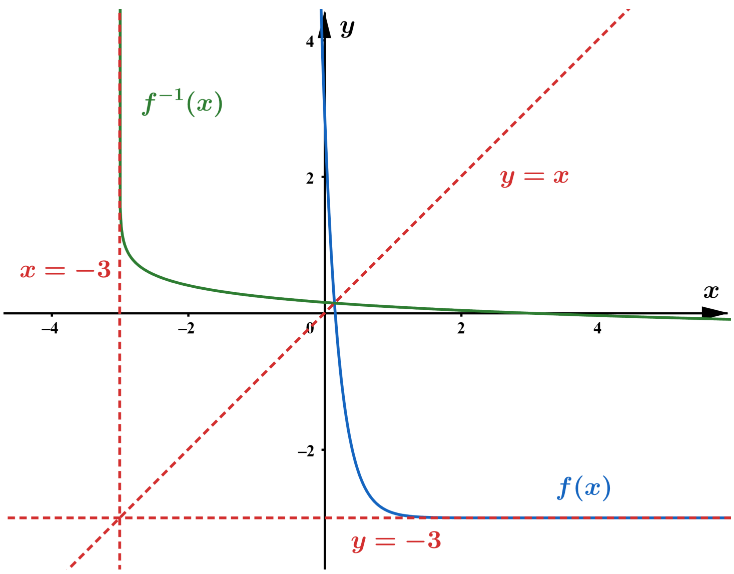


Figura 6.5: Simetría de f y su inversa f^{-1} con respecto a la recta $y = x$.

■ **Ejemplo 6.2 — Análisis de una función logarítmica.** Analizar la siguiente función logarítmica $f(x) = 2 - 3\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)$.

Solución: Se observa que f se desprende de la función logarítmica $\log_{\frac{1}{2}}$, con esto en mente se tiene:

- Para analizar el dominio de f se tiene la restricción del argumento del logaritmo, es decir, $\text{Dom}\left(\log_{\frac{1}{2}}\right) =]0, +\infty[$, entonces

$$\begin{aligned} 2x - 5 &> 0 \\ 2x &> 5 \\ x &> \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

  por lo tanto, $\text{Dom}(f) = \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
- De la función f, se tiene que

$$\begin{aligned} y &= 2 - 3\log_{\frac{1}{2}}(2x-5) \\ 3\log_{\frac{1}{2}}(2x-5) &= 2 - y \\ \log_{\frac{1}{2}}(2x-5) &= \frac{2-y}{3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-y}{3}} \\ 2x - 5 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-y}{3}} \\ 2x &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-y}{3}} + 5 \\ x &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-y}{3}} + 5}{2}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

  entonces, no se tiene ningún tipo de restricción. Luego, $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$.
- *Corte con el eje X:* se resuelve la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= 2 - 3\log_{\frac{1}{2}}(2x-5) \\ 3\log_{\frac{1}{2}}(2x-5) &= 2 \\ \log_{\frac{1}{2}}(2x-5) &= \frac{2}{3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$2x-5=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$2x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+5$$
$$x=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+5}{2},$$

entonces, $f\subset\mathbb{R}^2$ corta al eje X en el punto

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+5}{2},\,0\right)\in\mathbb{R}^2.$$

- *Corte con el eje Y:* se tiene

$$y=2-3\log_{\frac{1}{2}}(2(0)-5)$$
$$y=2-3\log_{\frac{1}{2}}(-5),$$

lo cual no tiene sentido, pues no existe el logaritmo de un número negativo. Luego, se concluye que $f\subset\mathbb{R}^2$ no corta al eje Y.

- *Monotonía:* Como la base es $\dfrac{1}{2}\in]0,1[$ se tiene para $x_1,x_2\in\mathrm{Dom}(f)=\left]\dfrac{5}{2},+\infty\right[$ tales que $\frac{5}{2}<x_1<x_2$

$$\begin{aligned}
5<2x_1&<2x_2 && -(5)\\
0<2x_1-5&<2x_2-5\\
\log_{\frac{1}{2}}(2x_1-5)&>\log_{\frac{1}{2}}(2x_2-5) && -(3)\\
-3\log_{\frac{1}{2}}(2x_1-5)&<-3\log_{\frac{1}{2}}(2x_2-5) && +(2)\\
2-3\log_{\frac{1}{2}}(2x_1-5)&<2-3\log_{\frac{1}{2}}(2x_2-5)\\
f(x_1)&<f(x_2),
\end{aligned}$$

por lo tanto, f es creciente en $\left]\dfrac{5}{2},+\infty\right[$.

- f no es par ni impar.
- Cuando se considera

$$f:\begin{cases}\left]\dfrac{5}{2},+\infty\right[& \longrightarrow \quad \mathbb{R}\\ \quad x & \longmapsto \quad f(x)=2-3\log_{\frac{1}{2}}(2x-5),\end{cases}$$

se tiene para $x_1, x_2 \in \left]\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2)\\
2 - 3\log_{\frac{1}{2}}(2x_1 - 5) &= 2 - 3\log_{\frac{1}{2}}(2x_2 - 5)\\
-3\log_{\frac{1}{2}}(2x_1 - 5) &= -3\log_{\frac{1}{2}}(2x_2 - 5)\\
\log_{\frac{1}{2}}(2x_1 - 5) &= \log_{\frac{1}{2}}(2x_2 - 5)\\
2x_1 - 5 &= 2x_2 - 5\\
2x_1 &= 2x_2\\
x_1 &= x_2,
\end{aligned}$$

es decir, f es inyectiva y como en el conjunto de llegada se ha colocado el recorrido, se tiene que f es sobreyectiva y por lo tanto es biyectiva. Así, existe su inversa que se obtiene de (6.2) como

$$f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \left]\dfrac{5}{2}, +\infty\right[\\ x & \longmapsto \quad f^{-1}(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-x}{3}} + 5}{2}. \end{cases}$$

- *Comprobación:* Se debe comprobar que se cumple (5.1),

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad (f \circ f^{-1})(x) &= f\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-x}{3}} + 5}{2}\right)\\
&= 2 - 3\log_{\frac{1}{2}}\left(2\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-x}{3}} + 5}{2}\right] - 5\right)\\
&= 2 - 3\log_{\frac{1}{2}}\left(\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{2-x}{3}} + 5 - 5\right)\\
&= 2 - 3\log_{\frac{1}{2}}\left(\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{2-x}{3}}\right)\\
&= 2 - 3\left(\frac{2-x}{3}\right)\\
&= 2 - (2 - x)\\
&= x.\\
\text{ii)} \quad (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}\left(2 - 3\log_{\frac{1}{2}}(2x - 5)\right)\\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-(2-3\log_{1/2}(2x-5))}{3}} + 5}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3\log_{1/2}(2x-5)}{3}}+5}{2}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)}+5}{2}\\
&= \frac{(2x-5)+5}{2}\\
&= \frac{2x}{2}\\
&= x.
\end{aligned}
$$

Gráfica de f y f^{-1}:

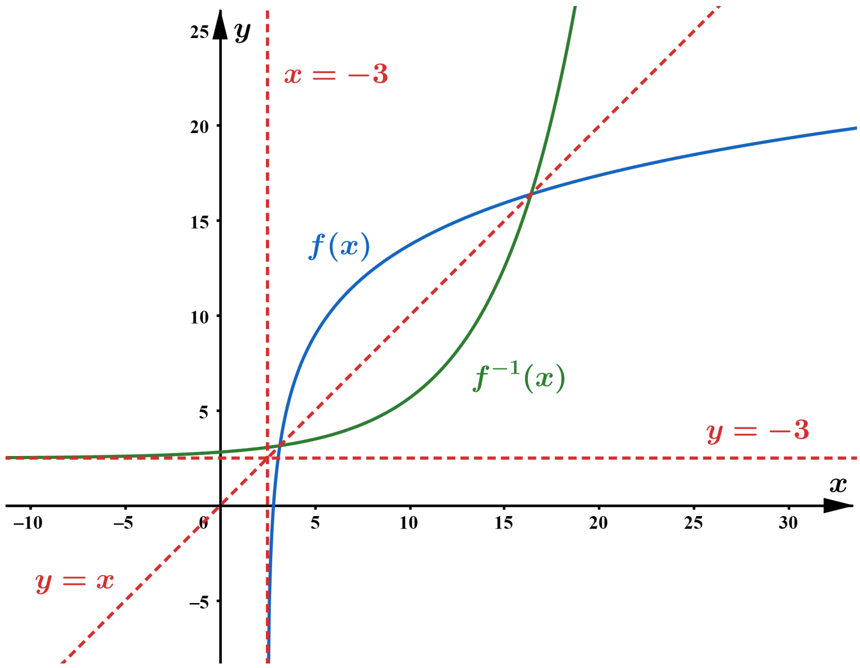


Figura 6.6: Simetría de f y su inversa f^{-1} con respecto a la recta $y = x$.

Observación 6.5 Estos ejemplos muestran la importancia de relacionar la teoría de funciones exponenciales con la teoría de funciones logarítmicas. Además, debido a que una es la inversa de la otra para la misma base, es necesario saber manejarlas a la par.

Es útil entender que el manejo de ecuaciones exponenciales y logarítmicas se necesita para conocer los cortes con el eje X, igualmente, adiestra al lector para el manejo fluido de este tipo de funciones.

Observación 6.6 Existe un número conocido como "número de Euler"denotado por e, tal número pertenece al conjunto de los números irracionales $(\mathbb{I})$, cuyo valor es aproximadamente $e \approx 2,71828\ldots$. Cuando se tiene por base este número, se pueden definir la función exponencial y la función logarítmica en base e, las cuales son de gran importancia en diversos ámbitos de la ciencia. Además, la base e es llamada la base natural, se tiene así una notación especial,

$$\log_e(x) = \ln(x),$$

el cual se denomina el logaritmo natural de x. La base 10 también se sobreentiende sin la necesidad de escribir el 10 en su base, es decir

$$\log_{10}(x) = \log(x).$$

Note que según la notación explicada recientemente se tiene

$$e^{\ln(x)} = x, \qquad 10^{\log(x)} = x,$$

$$\ln(e^x) = x, \qquad \log(10^x) = x.$$

6.3.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.4 Analizar las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

1. $f(x) = 2^{3x+1}$,
2. $g(x) = 4 + 3 \cdot 2^{1-x}$,
3. $h(x) = -5 + \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}$,
4. $p(x) = 4 + \log_2(x-3)$,
5. $q(x) = -1 - 2\log_3(4x+5)$,
6. $r(x) = 7 + 3\log_{\frac{2}{3}}(5-2x)$.

6.4 Ecuaciones exponenciales

En esta sección resolveremos ecuaciones exponenciales, según la forma de como nos presenten la ecuación, podemos elegir un método de resolución adecuado para resolver tal ecuación.

Muchas veces una ecuación exponencial se reduce a igualar las bases de una igualdad y utilizar la inyectividad de la función exponencial para obtener la solución de una ecuación.

■ **Ejemplo 6.3 — Igualación de bases.** Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2^x = 4$.

Solución:

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2.$$

b) $3^{-x+3} = \dfrac{1}{9^{2x+1}}$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3^{-x+3} &= \frac{1}{9^{2x+1}} \\ 3^{-x+3} &= (3^{-2})^{2x+1} \\ 3^{-x+3} &= 3^{-4x-2} \\ -x+3 &= -4x-2 \\ 3x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1} = 8(4^{x-3})^2$.

Solución:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} &= 8(4^{x-3})^2 \\ (2^{-1})^{2x-1} &= 2^3\left[(2^2)^{x-3}\right]^2 \\ 2^{-2x+1} &= 2^{3+4(x-3)} \\ -2x+1 &= 3+4x-12 \\ 10 &= 6x \\ x &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Otras veces, cuando no es posible igualar las bases de ambos lados de una ecuación, se puede hacer uso de logaritmos para resolver la ecuación.

■ **Ejemplo 6.4 — Utilizando logaritmos.** Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3^{2x-1} = 2^{x-10}$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3^{2x-1} &= 2^{x-10} \\ \ln(3^{2x-1}) &= \ln(2^{x-10}) \\ (2x-1)\ln(3) &= (x-10)\ln(2) \\ 2x\ln(3) - \ln(3) &= x\ln(2) - 10\ln(2) \end{aligned}$$

$$2x\ln(3) - x\ln(2) = \ln(3) - 10\ln(2)$$

$$x(2\ln(3) - \ln(2)) = \ln(3) - 10\ln(2)$$

$$x = \frac{\ln(3) - 10\ln 2}{2\ln(3) - \ln(2)}$$

$$x \approx -3,878\ldots$$

b) $3^{2x-1} = 2^{x-10}$.

Solución:

$$3^{2x-1} = 2^{x-10}$$

$$\log_3(3^{2x-1}) = \log_3(2^{x-10})$$

$$2x - 1 = (x-10)\log_3(2)$$

$$2x - 1 = x\log_3(2) - 10\log_3(2)$$

$$2x - x\log_3(2) = 1 - 10\log_3(2)$$

$$x(2 - \log_3(2)) = 1 - 10\log_3(2)$$

$$x = \frac{1 - 10\log_3(2)}{2 - \log_3(2)}$$

$$x \approx -3,878\ldots$$

Observación 6.7 Note que el mismo ejercicio ha sido resuelto de dos maneras distintas. De hecho, la solución se puede poner de infinitas formas, dependiendo de la base del logaritmo que se utilice para resolver el problema.

■ **Ejemplo 6.5 — Utilizando un logaritmo genérico.** Resolver la ecuación $3^{2x-1} = 2^{x-10}$.

Solución: Sea $a \in\,]0,\, 1[\, \cup\,]1,\, +\infty[$, entonces,

$$3^{2x-1} = 2^{x-10}$$

$$\log_a(3^{2x-1}) = \log_a(2^{x-10})$$

$$(2x-1)\log_a(3) = (x-10)\log_a(2)$$

$$2x\log_a(3) - \log_a(3) = x\log_a(2) - 10\log_a(2)$$

$$2x\log_a(3) - x\log_a(2) = \log_a(3) - 10\log_a(2)$$

$$x(2\log_a(3) - \log_a(2)) = \log_a(3) - 10\log_a(2)$$

$$x = \frac{\log_a(3) - 10\log_a(2)}{2\log_a(3) - \log_a(2)}$$

$$x = \frac{\log_a\left(\frac{3}{2^{10}}\right)}{\log_a\left(\frac{3^2}{2}\right)}$$

$$x \approx -3,878\ldots,$$

para todo $a \in \,]0,\,1[\cup]1,\,+\infty[$.

Surgen ecuaciones exponenciales que se resuelven mediante cambios de variable que reducen la ecuación exponencial a ecuaciones simples, lo más común es que sea una ecuación cuadrática, luego de resolverla se deshace el cambio de variable, obteniendo la solución al problema planteado.

■ **Ejemplo 6.6 — Mediante un cambio de variable.** Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(5^x)^2 - 26(5^x) + 25 = 0$.

Solución: Se hace el cambio de variable

$$5^x = t$$

así, se obtiene

$$t^2 - 26t + 25 = 0$$

$$(t-25)(t-1)$$

$$t = 25 \quad \vee \quad t = 1,$$

deshaciendo el cambio de variable, se sigue que

$$5^x = 25 \quad \vee \quad 5^x = 1$$

$$5^x = 5^2 \quad \vee \quad 5^x = 5^0$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 0,$$

luego, la solución se puede poner como

$$x \in \{0, 2\}.$$

b) $(5^x)^2 - 2(5^x) - 1 = 0$.

Solución: Se hace el cambio de variable

$$5^x = t$$

así, se obtiene

$$\begin{aligned}
t^2-2t-1&=0\\
t&=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}\\
t&=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}\\
t&=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}\\
t&=1\pm\sqrt{2},
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
5^x&=1+\sqrt{2} &\vee\quad 5^x&=1-\sqrt{2}\\
\log_5(5^x)&=\log_5(1+\sqrt{2}) &\vee\quad \log_5(5^x)&=\log_5(1-\sqrt{2})\\
x&=\log_5(1+\sqrt{2}) &\vee\quad x&=\log_5(1-\sqrt{2}),
\end{aligned}$$

sin embargo, $\log_5(1-\sqrt{2})$ no está definido pues $1-\sqrt{2}<0$, luego no puede ser solución. Por lo tanto, la única solución es

$$x=\log_5(1+\sqrt{2}).$$

c) $2^x+2^{-x}=2$.

Solución: En este ejemplo, el lector se verá tentado a tratar de igualar las bases, utilizar el logaritmo en base 2 o alguna otra idea que conduce a un callejón sin salida, pues es bastante común este tipo de errores. El camino que se debe seguir es manipular un poco a la ecuación hasta que se pueda realizar un cambio de variable, en efecto,

$$\begin{aligned}
2^x+2^{-x}&=2\\
2^x+\frac{1}{2^x}&=2,
\end{aligned}$$

haciendo $t=2^x$, se tiene

$$\begin{aligned}
t+\frac{1}{t}&=2 \quad \cdot(t)\\
t^2+1&=2t\\
t^2-2t+1&=0
\end{aligned}$$

$$(t-1)^2 = 0$$
$$t-1 = 0$$
$$t = 1,$$

luego,

$$2^x = 1$$
$$2^x = 2^0,$$

por lo tanto, la única solución es

$$x = 0.$$

6.4.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.5 Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $5^x = 125,$
2. $2^x \cdot 3^x = 216,$
3. $3^{x^2-8} = \dfrac{1}{81},$
4. $2^{x+4} = 256,$
5. $6^{x+5} = 1296^x,$
6. $10^{\frac{2x+5}{x-3}} = 0{,}001^3,$
7. $25^{x-5} = \sqrt{625},$
8. $\dfrac{1}{3^{x^2}} = 27^3 \cdot 3^{-6x},$
9. $8^{x^2-2x-15} = 1,$
10. $11^{x^2-\frac{14}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{121}}.$

6.5 Ecuaciones logarítmicas

De manera similar que las ecuaciones exponenciales, las ecuaciones logarítmicas utilizan técnicas similares, considerando la igualación de bases, la teoría de funciones exponenciales, funciones logarítmicas y hasta cambios de variables.

■ **Ejemplo 6.7 — Ecuaciones logarítmicas.** Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\ln(x) = \ln(5) + \ln(9)$.

Solución: Igualando logaritmos de igual base se tiene

$$\ln(x) = \ln(5 \cdot 9)$$
$$x = 45.$$

b) $\log_3(81)^x - \log_3(3^{2x}) = 3$.

Solución: Por propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas se tiene

$$x \log_3(3^4) - 2x \log_3(3) = 3$$
$$4x - 2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}.$$

c) $\dfrac{\log_2(8^x)}{\log_2\left(\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{1}{2}$.

Solución: Por propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas se tiene

$$\frac{x \log_2(2^3)}{\log_2(2^{-2})} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3x}{-2} = \frac{1}{2}$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}.$$

d) $\log_2(x-3) - \log_2(2x+1) = \log_2(4)$.

Solución: Por propiedades de las funciones logarítmicas e igualando logaritmos de igual base se tiene

$$\log_2\left(\frac{x-3}{2x+1}\right) = \log_2(4^{-1})$$
$$\frac{x-3}{2x+1} = \frac{1}{4}$$
$$4x - 12 = 2x + 1$$
$$2x = 13$$
$$x = \frac{13}{2}.$$

e) $\log_2(x)+\log_2(x-2)=3.$

Solución: Por propiedades de las funciones logarítmicas e igualando logaritmos de igual base se tiene

$$\begin{aligned}
\log_2[x(x-2)] &= \log_2(2^3)\\
x^2-2x &= 8\\
x^2-2x-8 &= 0\\
(x-4)(x+2) &= 0\\
x=4 \quad &\vee \quad x=-2.
\end{aligned}$$

Aquí, se tiene la necesidad de indicar que en las ecuaciones logarítmicas se pueden encontrar soluciones aparentes, como es el caso de este ejemplo con $x=-2$, ya que si se hace la comprobación se tendría

$$\log_2(-2)+\log_2(-2-2)=3,$$

lo cual no tiene sentido, pues el argumento en el logaritmo solo puede ser positivo. Es así, que de ahora en adelante, para las ecuaciones logarítmicas se deben comprobar las soluciones en la ecuación original. Luego la única solución es

$$x=4.$$

f) $\ln(x+3)+\ln(x-4)-\ln(x)=\ln(3).$

Solución: Por propiedades de las funciones logarítmicas e igualando logaritmos de igual base se tiene

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{(x+3)(x-4)}{x}\right) &= \ln(3)\\
\frac{(x+3)(x-4)}{x} &= 3\\
x^2-x-12 &= 3x\\
x^2-4x-12 &= 0\\
(x-6)(x+2) &= 0\\
x=6 \quad &\vee \quad x=-2.
\end{aligned}$$

Al comprobar estas posibles soluciones, se tiene que

$$\begin{aligned}
\ln(6+3)+\ln(6-4)-\ln(6) &= \ln(3)\\
\ln(9)+\ln(2)-\ln(6) &= \ln(3)\\
\ln\left(\frac{9\cdot 2}{6}\right) &= \ln(3)\\
\ln(3) &= \ln(3),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene una igualdad, mientras que con $x=-2$, se tendría que

$$\ln(-2+3)+\ln(-2-4)-\ln(-2)=\ln(3),$$

lo cual no es posible, ya que se tienen argumentos negativos. Por lo tanto, la única solución es

$$x=6.$$

g) $\log_2(\log_3(x))=4$.

Solución: Por propiedades de las funciones exponenciales, funciones logarítmicas e igualando logaritmos de igual base se tiene

$$\begin{aligned}
\log_2(\log_3(x)) &= \log_2(2^4)\\
\log_3(x) &= 16\\
x &= 3^{16}.
\end{aligned}$$

h) $\log_4(x^2)=(\log_4(x))^2$.

Solución: Por propiedades de las funciones logarítmicas se tiene

$$2\log_4(x)=(\log_4(x))^2,$$

tomando el cambio de variable

$$t=\log_4(x),$$

se tiene

$$2t=t^2$$

$$0 = t^2 - 2t$$
$$0 = t(t-2)$$
$$t = 0 \quad \vee \quad t = 2,$$

luego, deshaciendo el cambio de variable se tiene

$$\log_4(x) = 0 \quad \vee \quad \log_4(x) = 2$$
$$\log_4(x) = \log_4(4^0) \quad \vee \quad \log_4(x) = \log_4(4^2)$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = 16.$$

Al hacer la comprobación no surge ningún problema. Luego, la solución es

$$x \in \{1, 16\}.$$

6.5.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.6 Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. $\log_2 x = 6$,
2. $\log_3(2x+1) = 2$,
3. $\log_2\left(\frac{x-4}{2}\right) = 5$,
4. $\log\sqrt{x} = -1$,
5. $\log_2\left(\frac{3x+1}{x-7}\right) = 2$,
6. $2\log x - \log(2x+3) = 0$,
7. $\log(22-x) = \log(x-1)$,
8. $\log x + \log(x+9) = 1$,
9. $\log_4(x-8) + \log_4 6 = 3$,
10. $\log_3\left(4^{x-1}+7\right) - 3 = \log_3\left(2^{x-1}+1\right)$.

7. Funciones Trigonométricas

Autores:
Ing. Jenny Romero
MSc. Henry Cumbal
Ing. Javier Castro
Ing. Kevin Astudillo

El siguiente capítulo está dedicado a encargarse de otro tipo de funciones trascendentales, las denominadas funciones trigonométricas, las cuales permiten innumerables aplicaciones en diversos campos de la ciencia.

Sea S^1 la circunferencia unitaria, es decir,

$$\mathrm{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Cuando un punto $p = p(x,y)$ recorre por la circunferencia unitaria S^1 en sentido antihorario empezando desde el punto $(1,0)$ se define un ángulo $\theta \in [0,2\pi[$, en una sola vuelta.

Entonces geométricamente se definen las funciones trigonométricas principales como

$$x = \cos(\theta) \quad \wedge \quad y = \operatorname{sen}(\theta).$$

Cuando el ángulo θ recorre más de una vuelta en sentido antihorario $(\theta \geq 2\pi)$, o recorre vueltas en sentido horario $(\theta < 0)$, se pueden definir las funciones trigonométricas para $\theta \in \mathbb{R}$, considerando que definen funciones periódicas que son definidas en la primera sección.

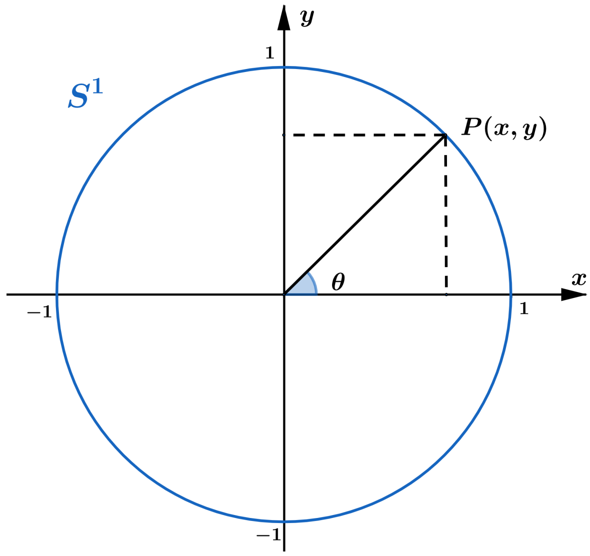


Figura 7.1: Circunferencia unitaria S^1.

Observación 7.1 Las funciones trigonométricas se definieron geométricamente a partir del punto que recorre por S^1 y define un ángulo θ. En el análisis de funciones trigonométricas, se sustituye θ por x para analizarlas como funciones.

7.1 Función periódica

Definición 7.1 Sea $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, se dice que f es periódica si para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, existe $T \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x+T) = f(x). \tag{7.1}$$

Al número T se le denomina periodo de f y al menor número positivo con esta propiedad se le denomina período fundamental.

■ **Ejemplo 7.1 — Función periódica.** Sea f la función que se muestra a continuación:

Se tiene que $T_1 = 5$ y $T_2 = 10$ son períodos de f pero $T_1 = 5$ es el periodo fundamental, pues es el menor número positivo con la propiedad (7.1).

Observación 7.2 Note que si T es el período fundamental de f, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que kT es un período de f. En efecto, los tres casos posibles son:

- Si $k = 0$,

$$f(x+0T) = f(x).$$

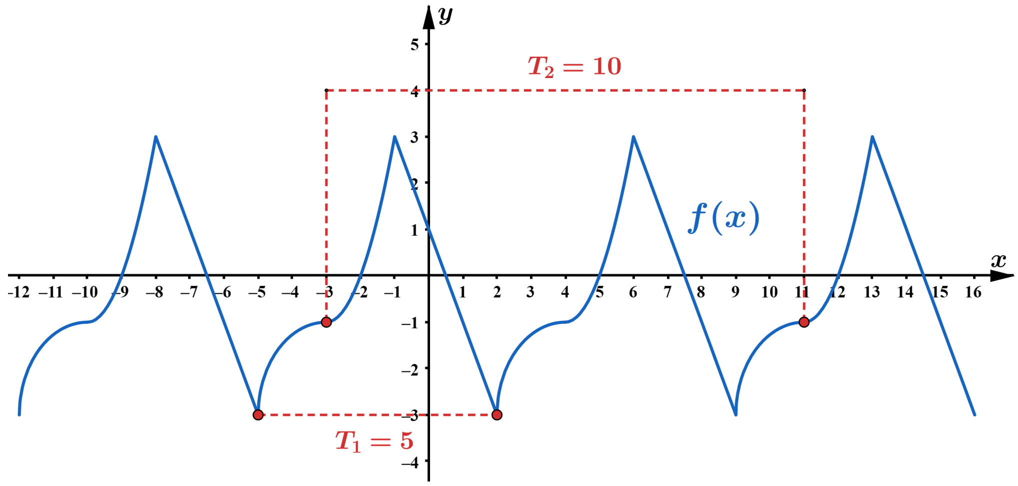


Figura 7.2: Función periódica.

- Si $k > 0$,

$$\begin{aligned} f(x+kT) &= f(x+(k-1)T+T) \\ &= f(x+(k-1)T) \\ &= f(x+(k-2)T) \\ &\ \ \vdots \\ &= f(x). \end{aligned}$$

- Si $k < 0$, entonces $-k > 0$ y por el ítem anterior

$$\begin{aligned} f(x+kT) &= f(x+kT-kT) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Así, que para un período fundamental $T \in \mathbb{R}$ se tiene que para todo $k \in \mathbb{Z}$,

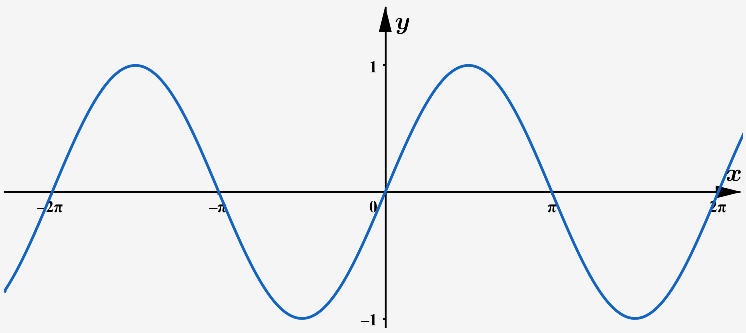
$$f(x+kT) = f(x).$$

Por lo anterior, se tiene que es suficiente encontrar el período fundamental de una función, ya que los demás se basan a partir de este. Es así que, abusando del lenguaje, se hace referencia simplemente como período al período fundamental.

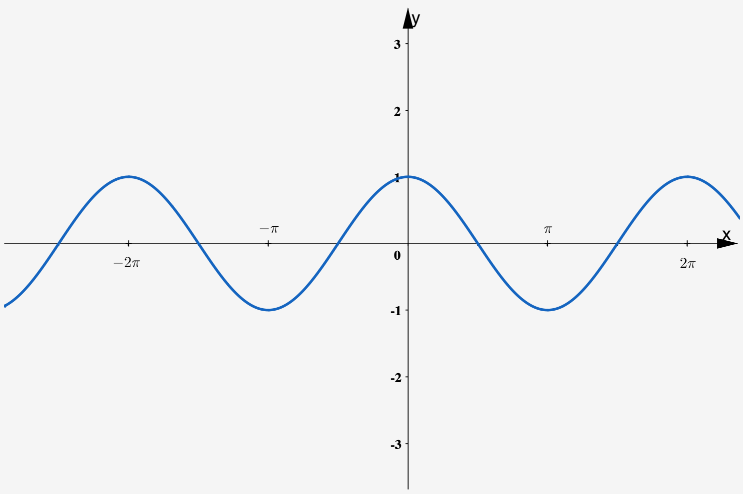
7.1.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.1 Determinar el período fundamental de las siguientes funciones:

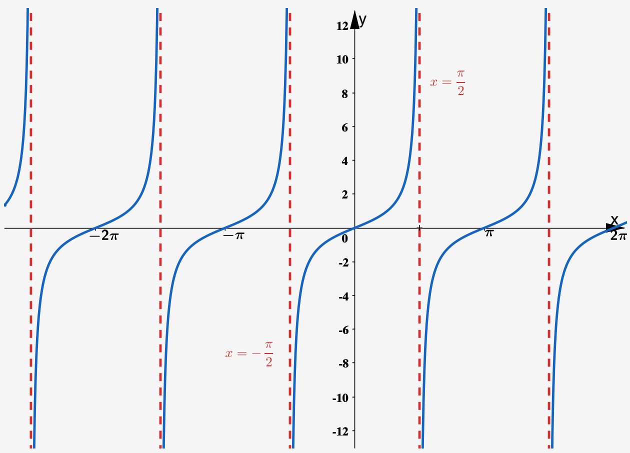
a) Gráfica 1



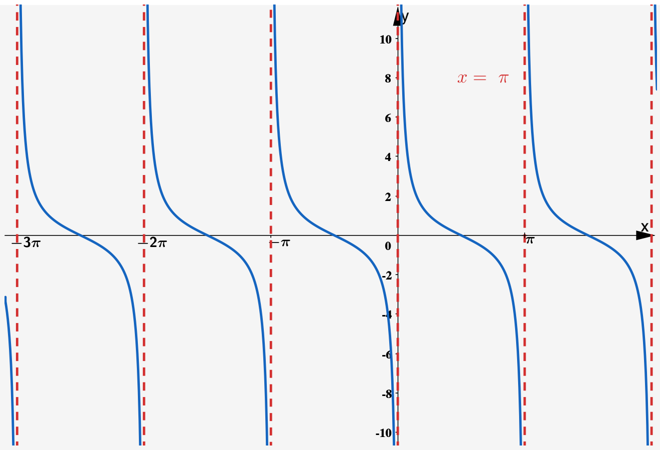
b) Gráfica 2



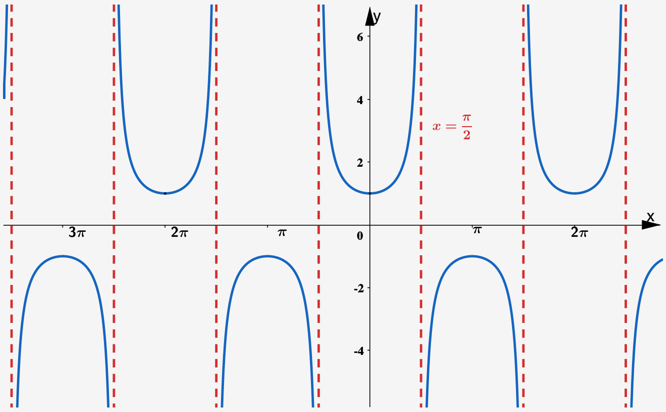
c) Gráfica 3



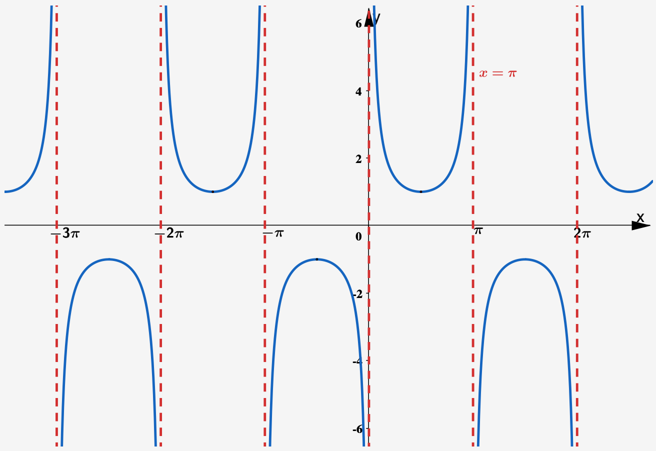
d) Gráfica 4



e) Gráfica 5



f) Gráfica 6



7.2 Función seno

Definición 7.2 Se define la función seno como

$$\operatorname{sen}: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

donde $\operatorname{sen}(x)$ es la coordenada en el eje Y que se obtiene cuando un punto p recorre por $\mathbb{S}^1$ y define un ángulo $x \in \mathbb{R}$.

7.2.1 Gráfica

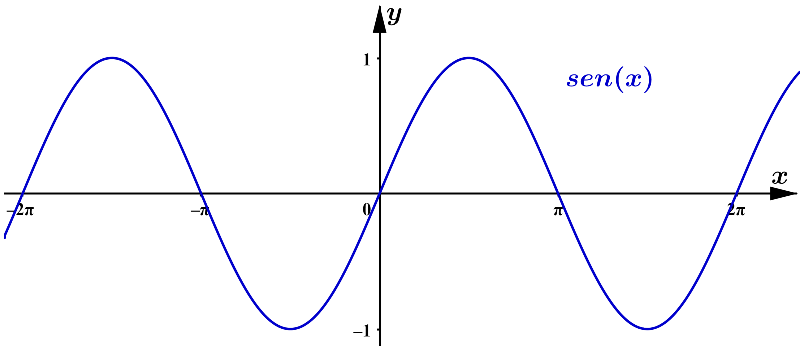


Figura 7.3: Función seno.

7.2.2 Propiedades

- $\operatorname{Dom}(\operatorname{sen}) = \mathbb{R}$.
- $\operatorname{Rec}(\operatorname{sen}) = [-1, 1]$.
- Corta con el eje X en

$$(k\pi, 0) \in \mathbb{R}^2,$$

  donde $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$\operatorname{sen}(k\pi) = 0.$$

- Corta con el eje Y en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.
- *Monotonía:*

  i) Es creciente en todos los intervalos de la forma

$$\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ii) Es decreciente en todos los intervalos de la forma

$$\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Es impar, es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x).$$

- Es periódica, con periodo fundamental

$$T = 2\pi,$$

es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen}(x+2k\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- La función seno no es inyectiva. Para subsanar esto, se restringe su dominio. Así, sea

$$\operatorname{sen} : \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen}(x), \end{cases}$$

entonces es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Por lo tanto, posee inversa denotada por

$$\operatorname{sen}^{-1} : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen}^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen}(x). \end{cases}$$

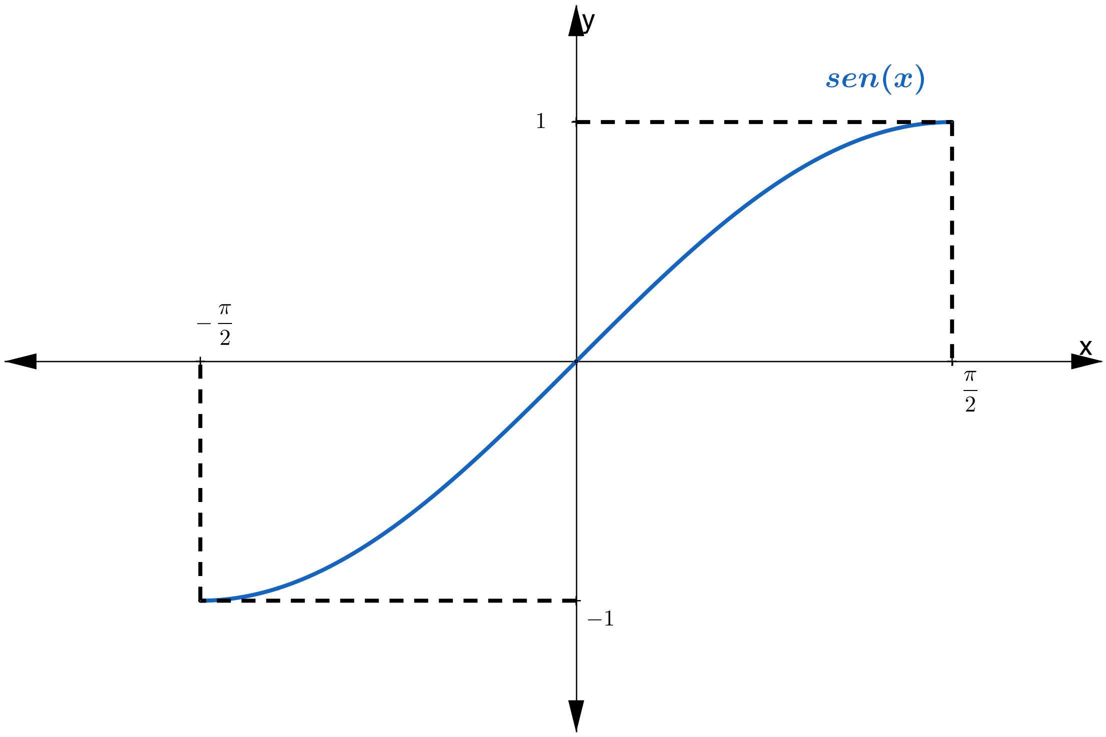
Geométricamente

7.3 Función coseno

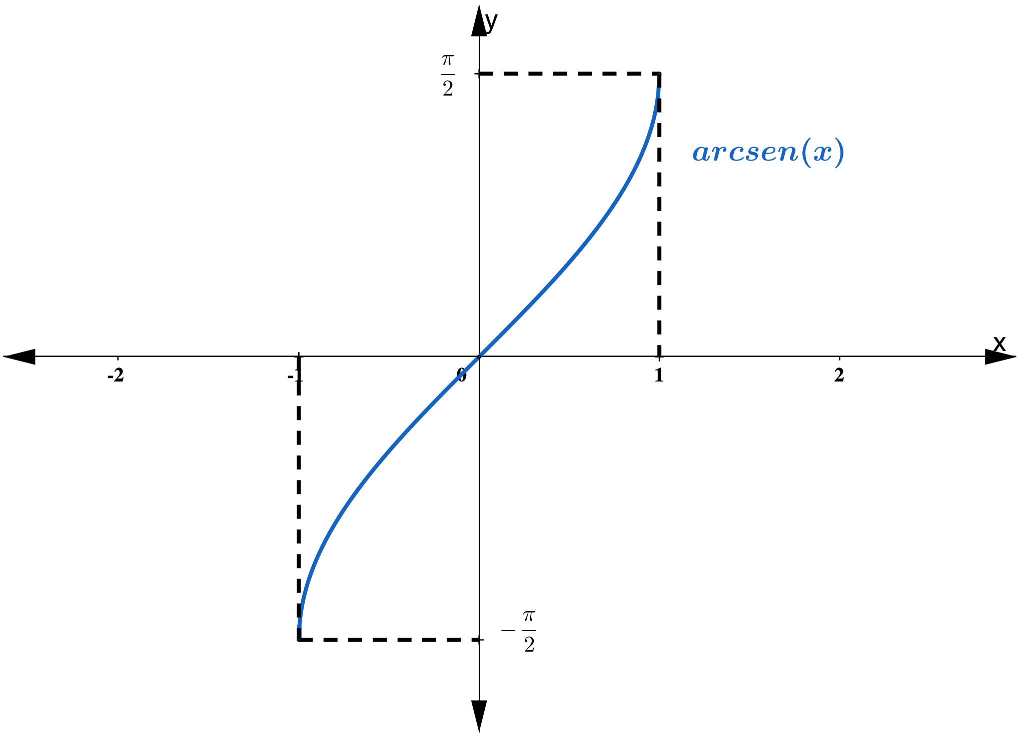
Definición 7.3 Se define la función coseno como

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{cases}$$

donde $\cos(x)$ es la coordenada en el eje X que se obtiene cuando el punto p recorre por S^1 y define un ángulo $x \in \mathbb{R}$.



(a) Función Seno



(b) Función Arcoseno

Figura 7.4: Funciones seno y arcoseno.

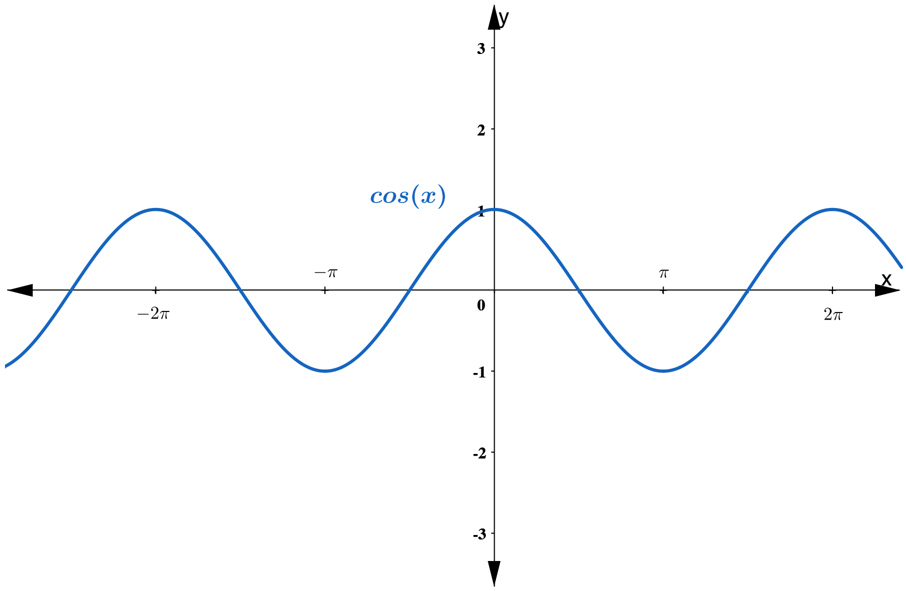


Figura 7.5: Función coseno.

7.3.1 Gráfica

7.3.2 Propiedades

- $\mathrm{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Rec}(\cos) = [-1, 1]$.
- Corte con el eje X en
$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) \in \mathbb{R}^2,$$
donde $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$
- Corte con el eje Y en
$$(0, 1) \in \mathbb{R}^2,$$
entonces,
$$\cos(1) = 0.$$
- *Monotonía:*
  i) Es decreciente en todos los intervalos de la forma
$$]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ii) Es creciente en todos los intervalos de la forma

$$](2k-1)\pi,\, 2k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Es par, es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

- Es periódica, con período fundamental

$$T = 2\pi,$$

es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+2k\pi) = \cos(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

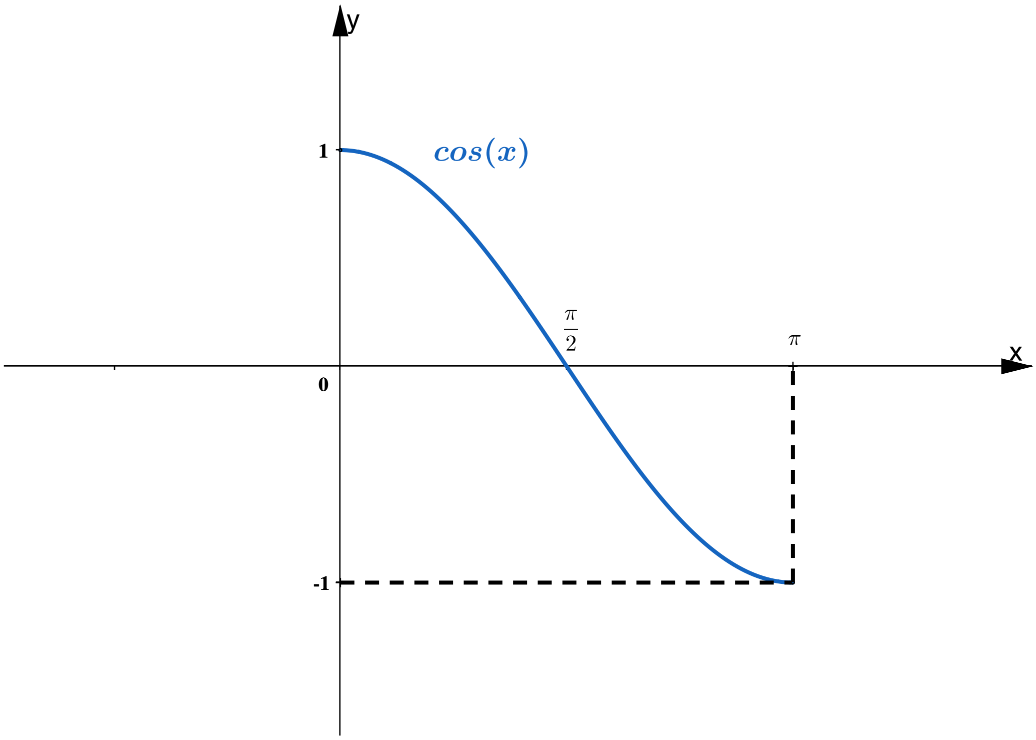
- La función coseno no es inyectiva. Para subsanar esto, se restringe su dominio. Así, sea

$$\cos : \begin{cases} [0,\, \pi] & \longrightarrow & [-1,\, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x), \end{cases}$$

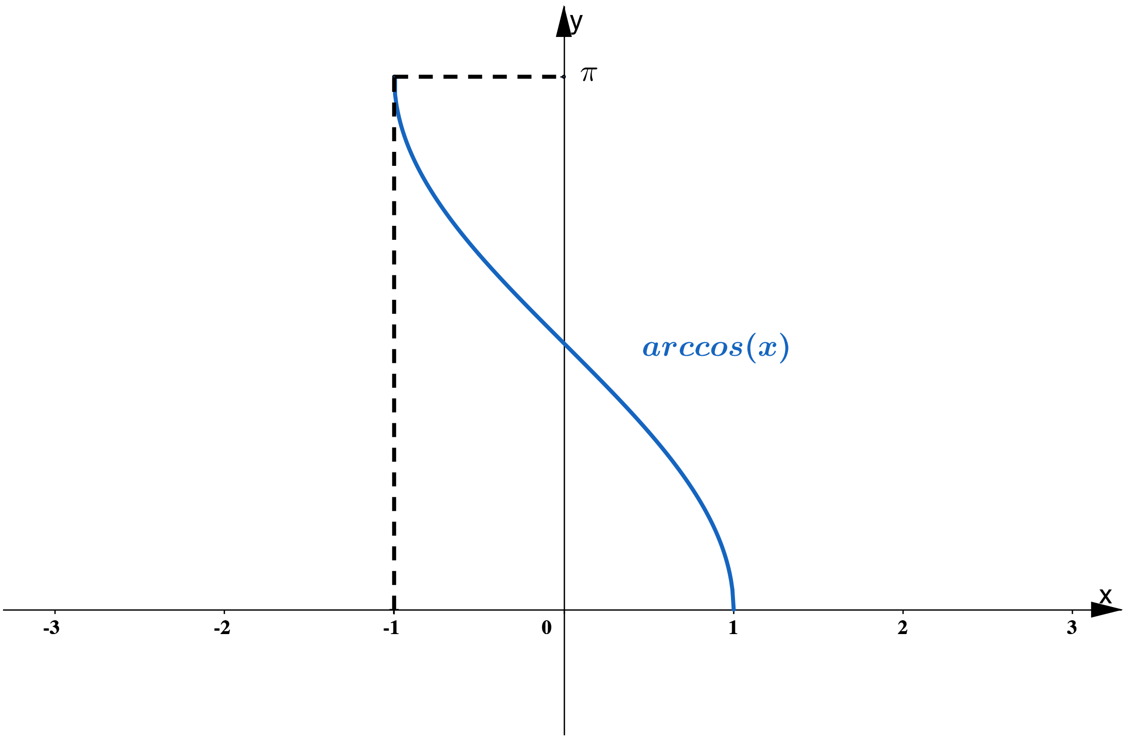
entonces es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Por lo tanto, posee inversa denotada por

$$\cos^{-1} : \begin{cases} [-1,\, 1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \cos^{-1}(x) = \arccos(x). \end{cases}$$

Geométricamente



(a) Función Coseno



(b) Función Arcocoseno

Figura 7.6: Funciones coseno y arcocoseno.

Definición 7.4 — Asíntota. Una función

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene asíntotas verticales definidas de la forma $x = x_0$ cuand0 $g(x_0) = 0$ y $f(x_0) \neq 0$.

7.4 Función tangente

Definición 7.5 Se define la función tangente como

$$\tan : \begin{cases} \operatorname{Dom}(\tan) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}. \end{cases}$$

7.4.1 Gráfica

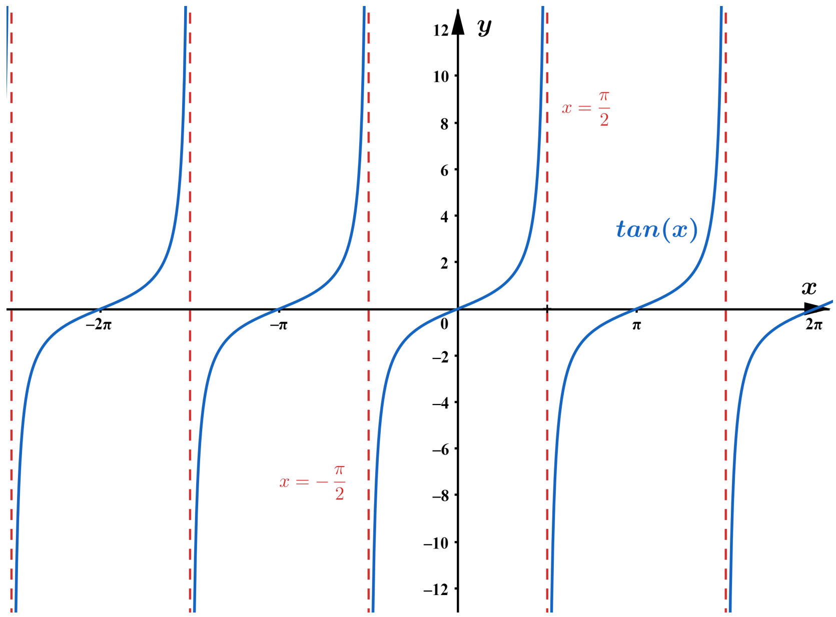


Figura 7.7: Función tangente.

7.4.2 Propiedades

- $\operatorname{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Para $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ que es una asíntota vertical.
- $\operatorname{Rec}(\tan) = \mathbb{R}$.
- Corta al eje X en los puntos

$$(k\pi, 0) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$\tan(k\pi) = 0.$$

- Corta al eje Y en el punto
$$(0,0) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Monotonía:* Es creciente en cada intervalo de la forma
$$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Es impar, es decir, para todo $x \in \operatorname{Dom}(\tan)$
$$\tan(-x) = -\tan(x).$$

- Es periódica, con período fundamental
$$T = \pi,$$
es decir, para todo $x \in \operatorname{Dom}(\tan)$
$$\tan(x + k\pi) = \tan(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- La función tangente no es inyectiva. Para subsanar esto, se restringe su dominio. Así, sea
$$\tan : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad \tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \end{cases}$$
entonces es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Por lo tanto, posee inversa denotada por
$$\tan^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto \quad \tan^{-1}(x) = \arctan(x). \end{cases}$$

Geométricamente

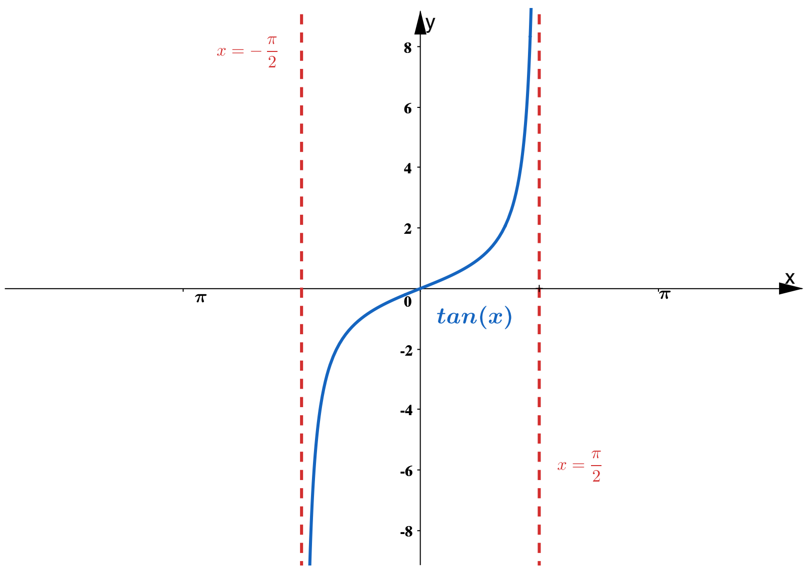


Figura 7.8: Función tangente.

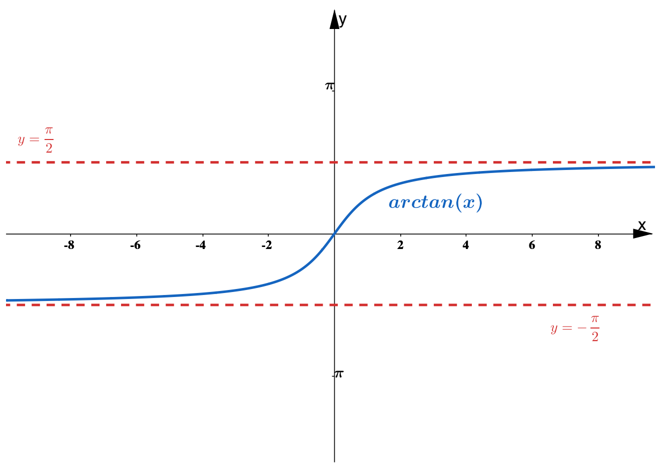


Figura 7.9: Función arcotangente.

7.5 Función cotangente

Definición 7.6 Se define la función cotangente como

$$\cot : \begin{cases} \mathrm{Dom}(\cot) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}. \end{cases}$$

7.5.1 Gráfica

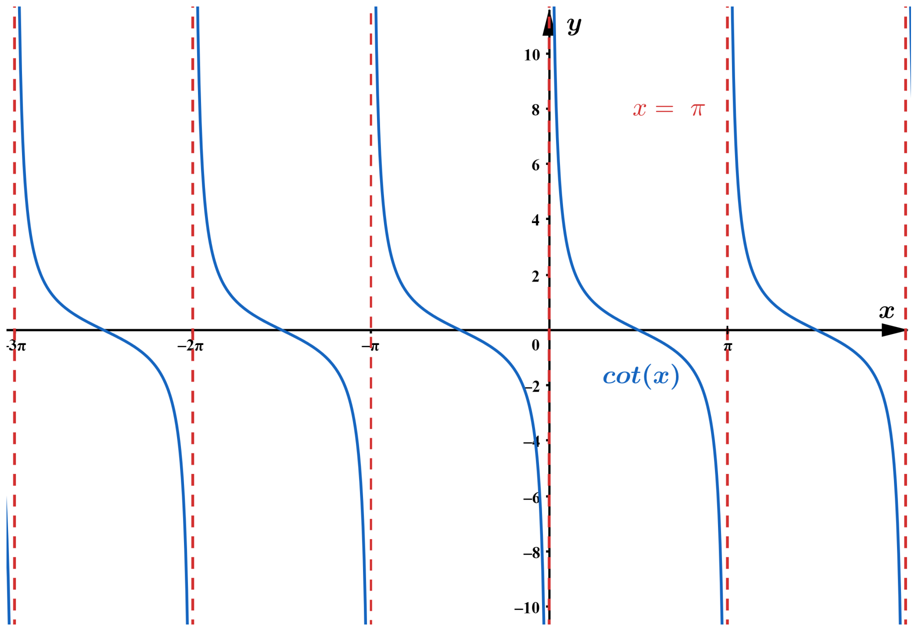


Figura 7.10: Función cotangente.

7.5.2 Propiedades

- $\mathrm{Dom}(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Para $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que
$$x = k\pi$$
es una asíntota vertical.
- $\mathrm{Rec}(\cot) = \mathbb{R}$.
- Corta al eje X en los puntos
$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) \in \mathbb{R}^2$$
donde $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene:
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$
- No corta al eje Y.
- *Monotonía:* es decreciente en cada intervalo de la forma
$$]k\pi, (k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Es impar, es decir, para todo $x \in \text{Dom}\,(\cot)$

$$\cot(-x) = -\cot(x).$$

- Es periódica, con periodo fundamental

$$T = \pi,$$

es decir, para todo $x \in \text{Dom}\,(\cot)$

$$\cot(x + k\pi) = \cot(\text{x}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- La función cotangente no es inyectiva. Para subsanar esto, se restringe su dominio. Así, sea

$$\cot : \begin{cases}]0,\,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}, \end{cases}$$

entonces es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Por lo tanto, posee inversa denotada por

$$\cot^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\,\pi[\\ x & \longmapsto & \cot^{-1}(x) = \text{arc}\cot(x). \end{cases}$$

Geométricamente

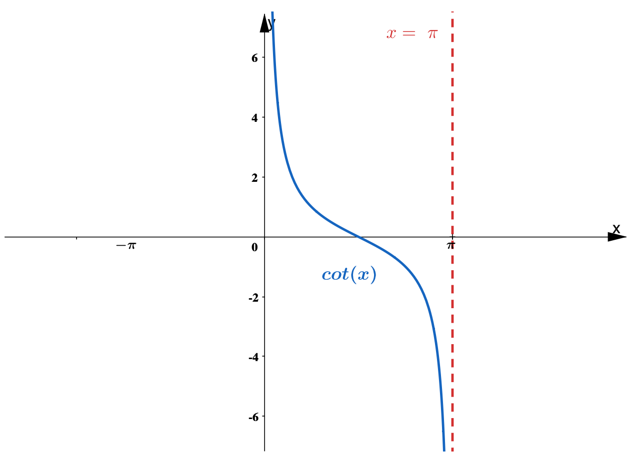


Figura 7.11: Función cotangente.

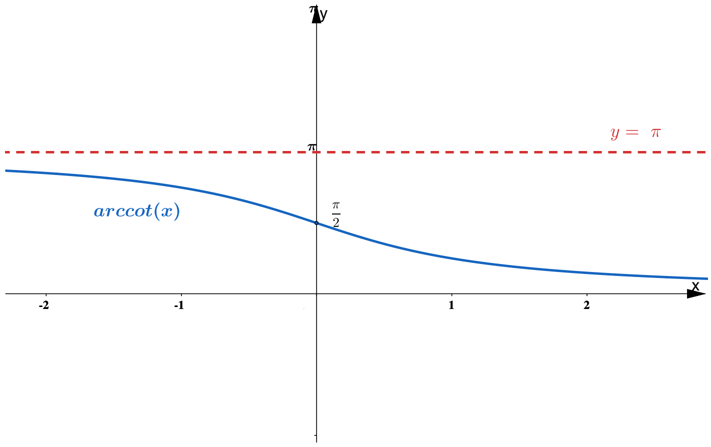


Figura 7.12: Función arcocotangente.

7.6 Función secante

Definición 7.7 Se define la función secante como

$$\sec : \begin{cases} \mathrm{Dom}(\sec) & \longrightarrow &]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}. \end{cases}$$

7.6.1 Gráfica

7.6.2 Propiedades

- $\mathrm{Dom}(\sec) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- Para $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

  es una asíntota vertical.
- $\mathrm{Rec}(\sec) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$
- No corta al eje X, entonces

$$\sec(x) = 0$$

  no tiene solución.
- Corta al eje Y en

$$(0, 1) \in \mathbb{R}^2,$$

  entonces,

$$\sec(0) = 1.$$

- *Monotonía:*

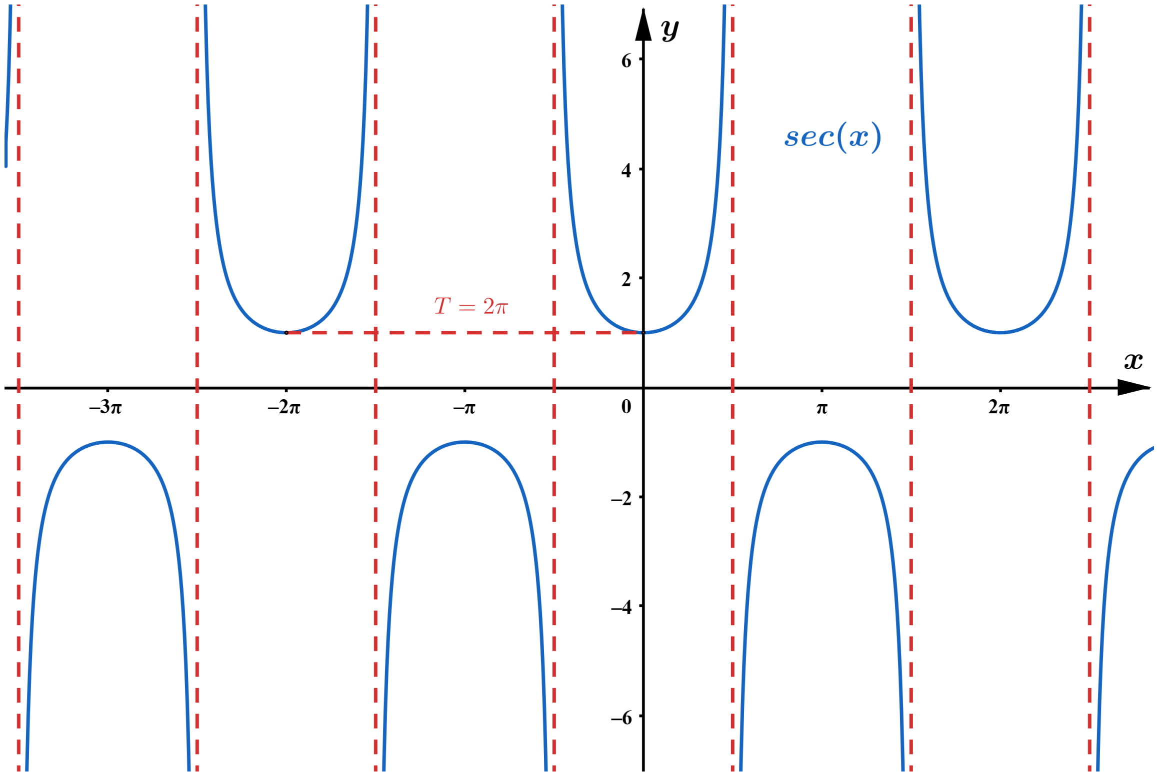


Figura 7.13: Función secante.

i) Es creciente en todos los intervalos de la forma

$$\left]2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

y

$$\left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2\mathrm{k}+1)\,\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ii) Es decreciente en todos los intervalos de la forma

$$\left](2\mathrm{k}+1)\,\pi, \frac{3\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

y

$$\left]\frac{3\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi, 2\pi\,(k+1)\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Es par, es decir, para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(\sec)$

$$\sec(-x) = \sec(x).$$

- Es periódica, con periodo fundamental

$$T = 2\pi,$$

es decir, para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(\sec)$

$$\sec(x + 2k\pi) = \sec(\mathrm{x}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- La función secante no es inyectiva. Para subsanar esto, se restringe su dominio. Así, sea

$$\sec : \begin{cases} [0,\, \pi] \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} \right\} & \longrightarrow \quad]-\infty,\, -1] \cup [1,\, +\infty[\\ \qquad x & \longmapsto \quad \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}, \end{cases}$$

entonces es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Por lo tanto, posee inversa denotada por

$$\sec^{-1} : \begin{cases}]-\infty,\, -1] \cup [1,\, +\infty[& \longrightarrow \quad [0,\, \pi] \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} \right\} \\ \qquad x & \longmapsto \quad \sec^{-1}(x) = \operatorname{arc}\sec(x). \end{cases}$$

Geométricamente

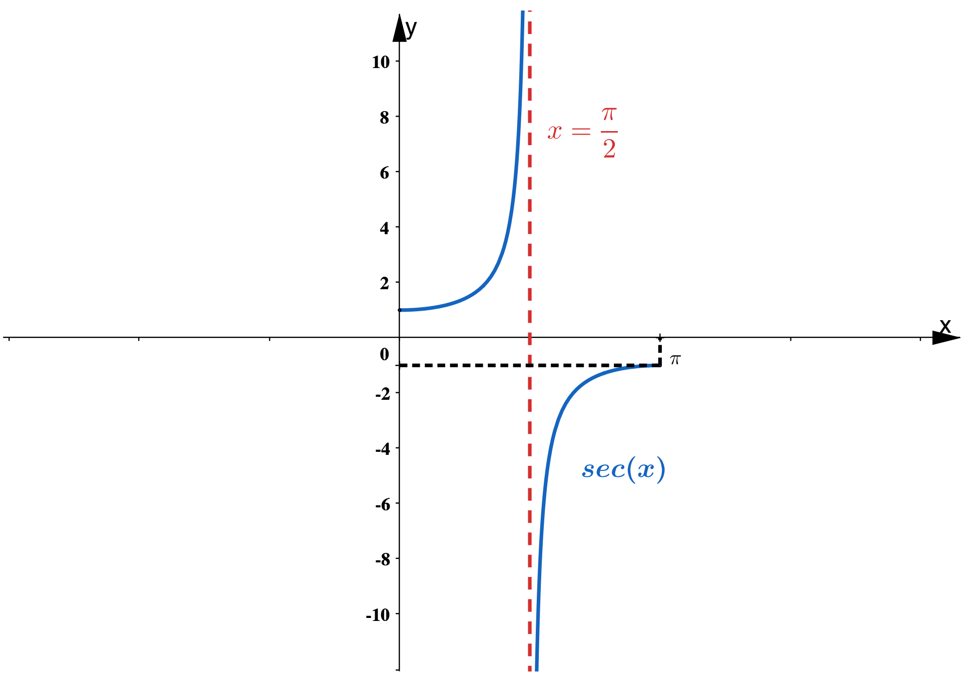


Figura 7.14: Función secante.

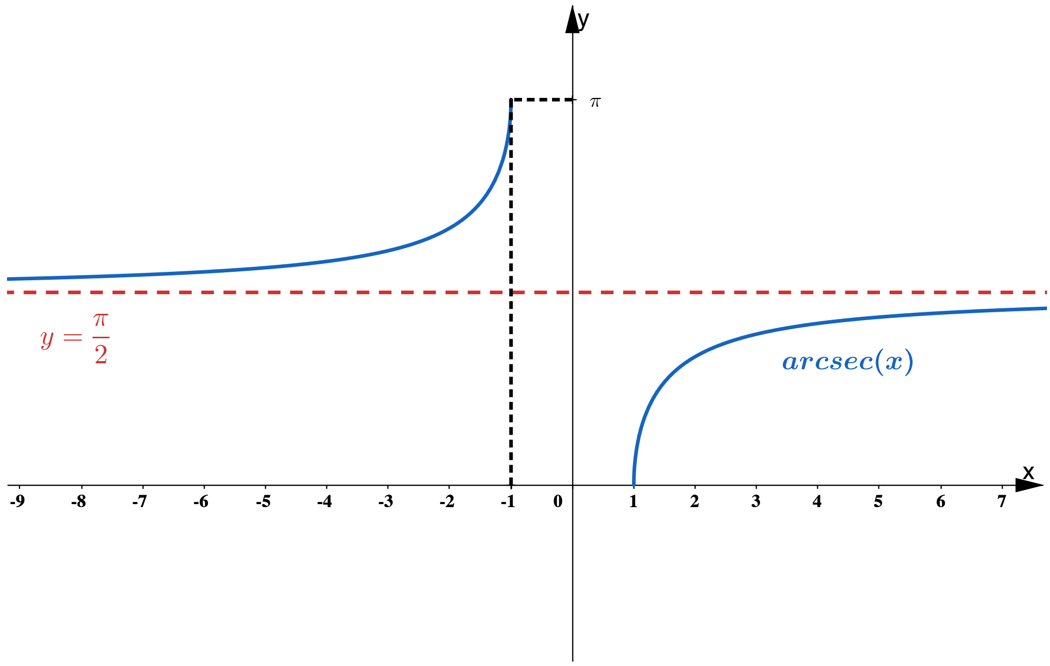


Figura 7.15: Función arcosecante.

7.7 Función cosecante

Definición 7.8 Se define la función cosecante como

$$\csc : \begin{cases} \mathrm{Dom}(\csc) & \longrightarrow &]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \csc(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}. \end{cases}$$

7.7.1 Propiedades

- $\mathrm{Dom}(\csc) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Para $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $x = k\pi$ es una asíntota vertical.
- $\mathrm{Rec}(\csc) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- No corta al eje X, entonces

  $$\csc(x) = 0$$

  no tiene solución.
- No corta al eje Y.
- *Monotonía:*

  i) Es decreciente en todos los intervalos de la forma

  $$\left]2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

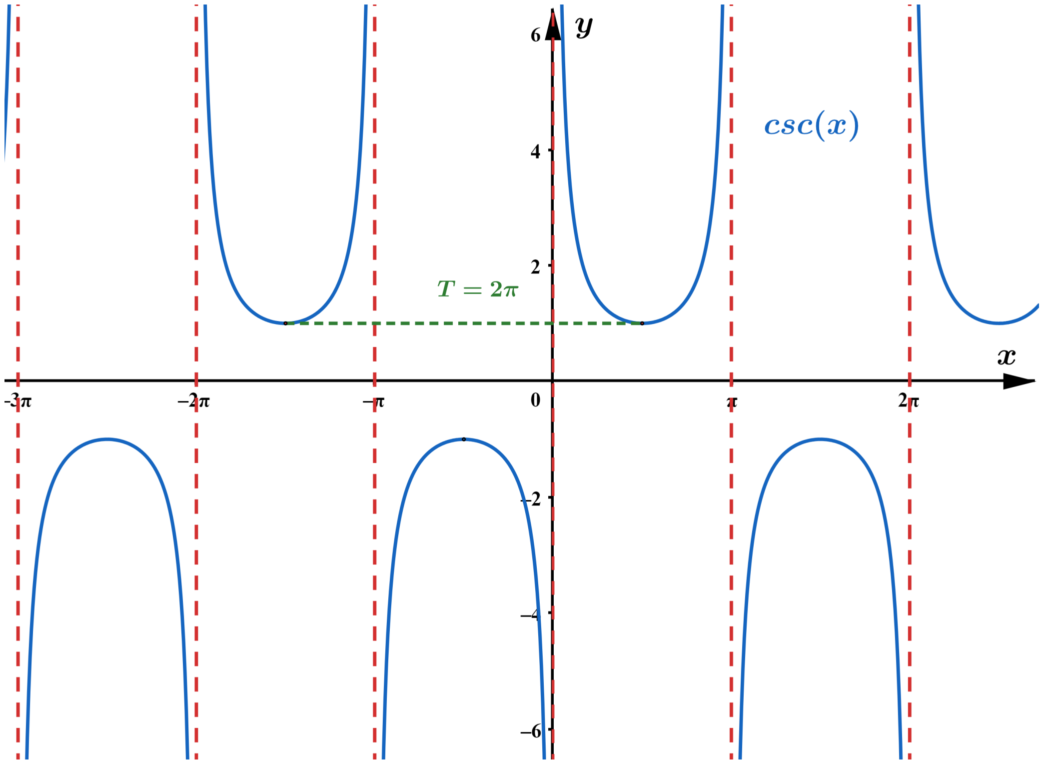


Figura 7.16: Función cosecante.

y

$$\left]\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\, 2\pi\,(k+1)\right[,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

ii) Es creciente en todos los intervalos de la forma

$$\left]\frac{\pi}{2}+2\mathrm{k}\pi,\, (2\mathrm{k}+1)\,\pi\right[,\quad k\in\mathbb{Z}$$

y

$$\left](2k+1)\,\pi,\, \frac{3\pi}{2}+2\mathrm{k}\pi\right[,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

- Es impar, es decir, para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(\csc)$

$$\csc(-x) = -\csc(x).$$

- Es periódica, con periodo fundamental

$$T = 2\pi$$

es decir, para todo $x \in \mathrm{Dom}\,(\csc)$

$$\csc(x + 2\mathrm{k}\pi) = \csc(\mathrm{x}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- La función cosecante no es inyectiva. Para subsanar esto, se restringe su dominio. Así, sea

$$\csc : \begin{cases} \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} & \longrightarrow \quad]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ \qquad x & \longmapsto \quad \csc(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)}, \end{cases}$$

entonces es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Por lo tanto, posee inversa denotada por

$$\csc^{-1} : \begin{cases}]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[& \longrightarrow \quad \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ \qquad x & \longmapsto \quad \csc^{-1}(x) = \mathrm{arc}\csc(x). \end{cases}$$

Geométricamente

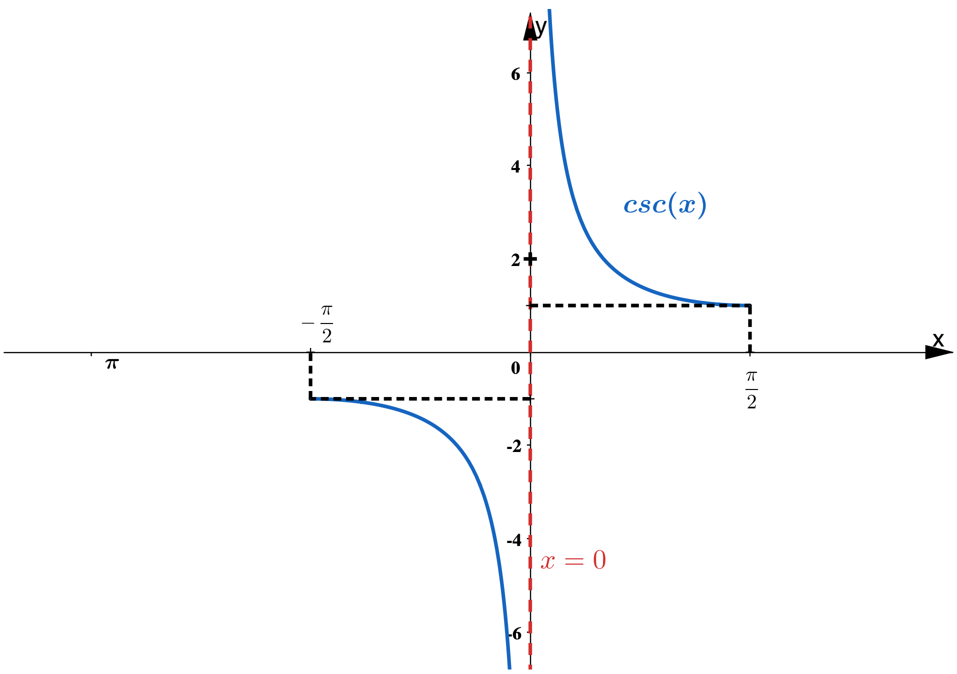


Figura 7.17: Función cosecante.

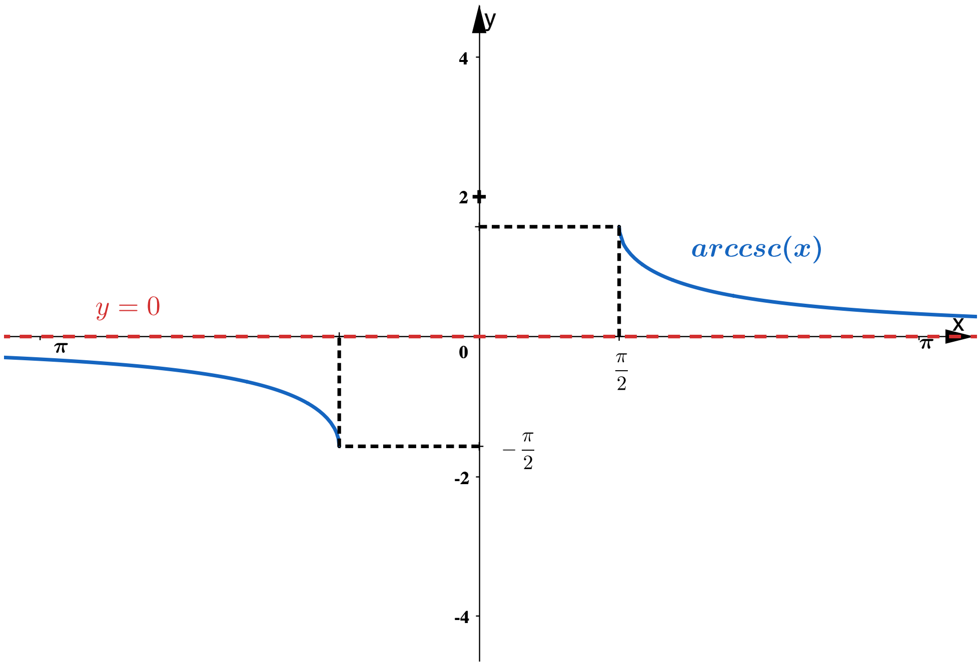


Figura 7.18: Función arcocosecante.

7.8 Análisis de funciones trigonométricas

Observación 7.3 — Periodo. Si una función f es periódica con periodo fundamental T, entonces se va a determinar el periodo fundamental de una función g definida como:

$$g(x) = f(wx).$$

Por hipótesis, se tiene que $f(x+T) = f(x)$, para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Luego, para que g tenga periodo fundamental T' debe cumplirse para todo $x \in \mathrm{Dom}(g)$,

$$\begin{aligned} g\left(x+T'\right) &= g(x) \\ f\left(w\left(x+T'\right)\right) &= f(wx) \\ f\left(wx+wT'\right) &= f(wx+T), \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} wT' &= T \\ T' &= \frac{T}{w}. \end{aligned}$$

En resumen, si T es el periodo fundamental de una función f, entonces $\frac{T}{w}$ es el período fundamental de una función g definida como

$$g(x) = f(wx).$$

Observación 7.4 — Amplitud. Hallar el recorrido de las funciones:

1. $f(x) = A\operatorname{sen}(x) \pm B, \quad A > 0.$

   Dado que

$$\begin{aligned} -1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1 & \qquad \cdot(A) \\ -A \leq A\operatorname{sen}(x) \leq A & \qquad \pm(B) \\ -A \pm B \leq A\operatorname{sen}(x) \pm B \leq A \pm B, & \end{aligned}$$

   entonces, $\operatorname{Rec}(f) = [-A \pm B, A \pm B]$.

2. $f(x) = -A\operatorname{sen}(x) \pm B, \quad A > 0.$

   Dado que

$$\begin{aligned} -1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1 & \qquad \cdot(-A) \\ A \geq -A\operatorname{sen}(x) \geq -A & \qquad \pm(B) \\ A \pm B \geq -A\operatorname{sen}(x) \pm B \geq -A \pm B & \end{aligned}$$

   luego, $\operatorname{Rec}(f) = [-A \pm B, A \pm B]$.

De forma general para

$$f(x) = A\operatorname{sen}(x) \pm B, \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

se tiene

$$\operatorname{Rec}(f) = [-|A| \pm B,\ |A| \pm B],$$

donde $|A|$ es denominada la amplitud de la función f.

Lo mismo ocurre para una función del tipo

$$g(x) = A\cos(x) \pm B.$$

■ **Ejemplo 7.2 — Análisis de una función que depende de la función seno.** Analizar la función $f(x) = -3\operatorname{sen}(2x-1) + 5$.

Solución:

- Como $\operatorname{Dom}(\operatorname{sen}) = \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Como $|-3| = 3$, entonces $\operatorname{Rec}(f) = [-3+5, 3+5] = [2, 8]$.

- Del recorrido se puede observar que no corta al eje X. Otra forma sería tratar de resolver

$$-3\,\text{sen}(2x-1)+5=0$$
$$\text{sen}(2x-1)=\frac{5}{3}$$

teniendo en cuenta que el seno nunca puede ser mayor a 1. Se tiene entonces que la ecuación no tiene solución y por lo tanto no corta al eje X.

- Haciendo $x=0$, se tiene

$$y=-3\,\text{sen}(2(0)-1)+5$$
$$y=-3\,\text{sen}(-1)+5$$
$$y=3\,\text{sen}(1)+5,$$

entonces, f corta al eje Y en
$$(0,\,3\,\text{sen}(1)+5)\in\mathbb{R}^2.$$

- f no es par ni impar.
- f es periódica con período
$$T'=\frac{2\pi}{\pi}=\pi$$
pues, $T=2\pi$ es el periodo de la función seno.
- *Gráfica:*

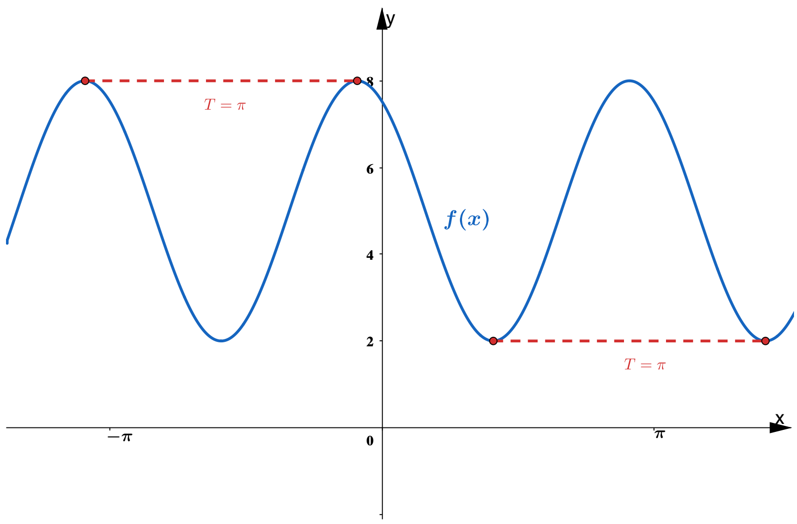


Figura 7.19: $f(x)=-3\,\text{sen}(2x-1)+5$.

- Como la función seno es biyectiva cuando $\mathrm{Dom}(\mathrm{sen}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces para f se tiene

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \leq 2x-1 \leq \frac{\pi}{2} & \qquad +(1)\\
-\frac{\pi}{2}+1 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}+1 & \qquad \cdot\left(\frac{1}{2}\right)\\
\frac{-\pi+2}{4} \leq x \leq \frac{\pi+2}{4}, &
\end{aligned}$$

luego, f es biyectiva cuando se define como

$$f : \begin{cases} \left[\dfrac{-\pi+2}{4}, \dfrac{\pi+2}{4}\right] & \longrightarrow \qquad [2, 8] \\ \qquad x & \longmapsto \quad f(x) = -3\,\mathrm{sen}(2x-1)+5. \end{cases}$$

- Su inversa se determina haciendo

$$\begin{aligned}
y &= -3\,\mathrm{sen}(2x-1)+5\\
3\,\mathrm{sen}(2x-1) &= 5-y\\
\mathrm{sen}(2x-1) &= \frac{5-y}{3}\\
2x-1 &= \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{5-y}{3}\right)\\
x &= \frac{\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{5-y}{3}\right)+1}{2},
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$f^{-1} : \begin{cases} [2, 8] & \longrightarrow \qquad \left[\dfrac{-\pi+2}{4}, \dfrac{\pi+2}{4}\right] \\ \quad x & \longmapsto \quad f^{-1}(x) = \dfrac{\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{5-x}{3}\right)+1}{2}. \end{cases}$$

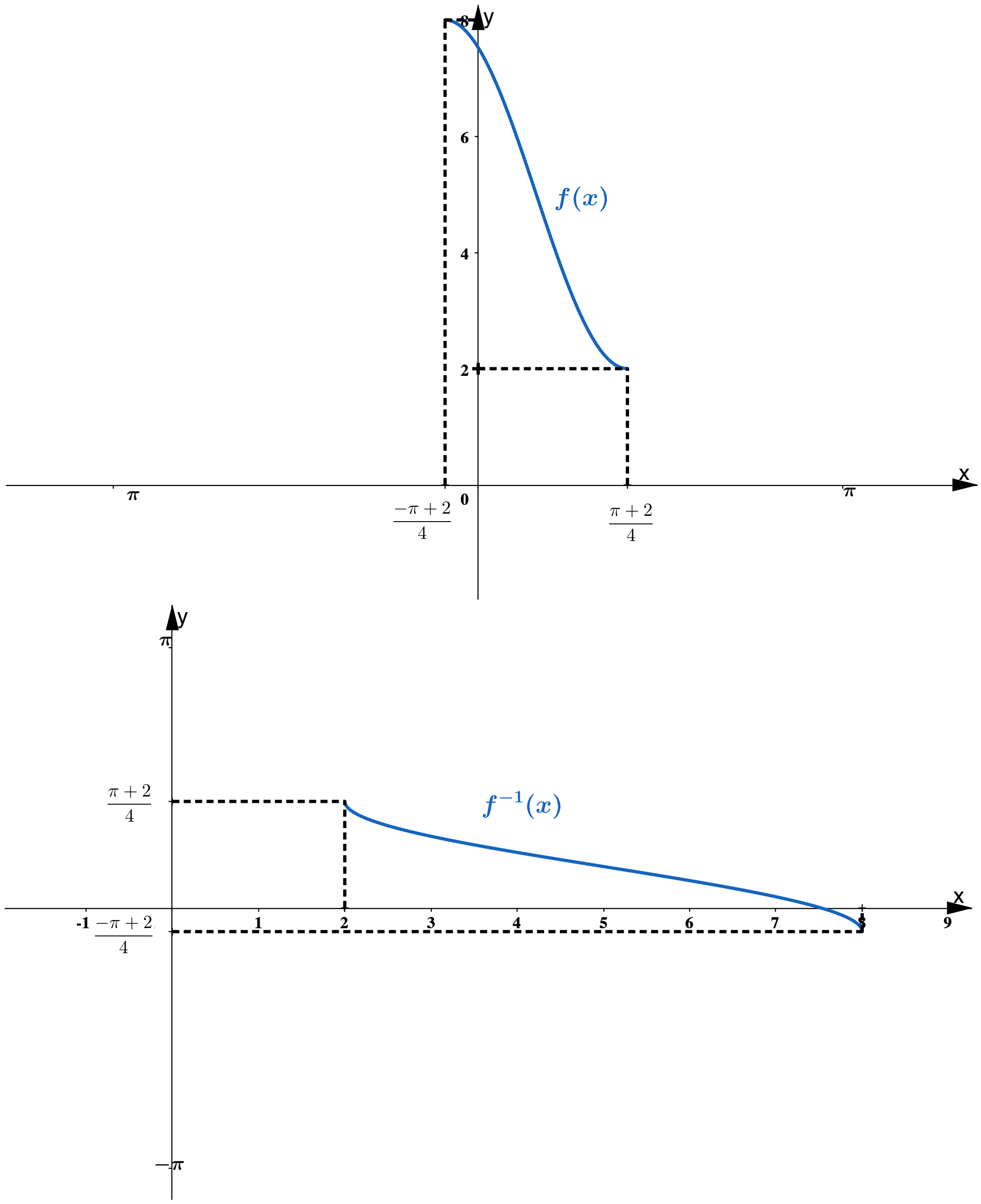


Figura 7.20: Gráficas de f y f^{-1}.

■ **Ejemplo 7.3 — Análisis de una función que depende de la función coseno.** Analizar la función $g(x) = 4\cos(3x+1) - 2$.

Solución:

- Como $\mathrm{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$. entonces $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.
- Como $|4| = 4$, entonces $\mathrm{Rec}(f) = [-4-2, 4-2] = [-6, 2]$.

- Haciendo $y = 0$, se tiene

$$4\cos(3x+1)-2=0.$$

Resolver este tipo de ecuaciones y hallar todas sus soluciones, puede resultar agotador, sin embargo, en esta sección, se van a determinar todas. Por una parte considerando que el coseno es periódico con período $T = 2\pi$, se tiene para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos(3x+1+2k\pi) = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - 2k\pi}{3}.$$

Por otra parte, considerando que el coseno es impar, se tiene para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos(-3x-1-2k\pi) = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 1 + 2k\pi}{-3},$$

entonces g corta al eje X en los puntos:

$$\left(\frac{\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - 2k\pi}{3},\ 0\right) \in \mathbb{R}^2$$
$$\left(\frac{\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 1 + 2k\pi}{-3},\ 0\right) \in \mathbb{R}^2,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- Haciendo $x = 0$, se tiene

$$y = 4\cos(3(0)+1)-2$$
$$y = 4\cos(1)-2,$$

entonces g corta al eje Y en

$$(0, 4\cos(1)-2) \in \mathbb{R}^2.$$

- g no es par ni impar.

- g es periódica con período
$$T' = \frac{2\pi}{3}.$$
pues, $T = 2\pi$ es el período de la función coseno.
- *Gráfica:*

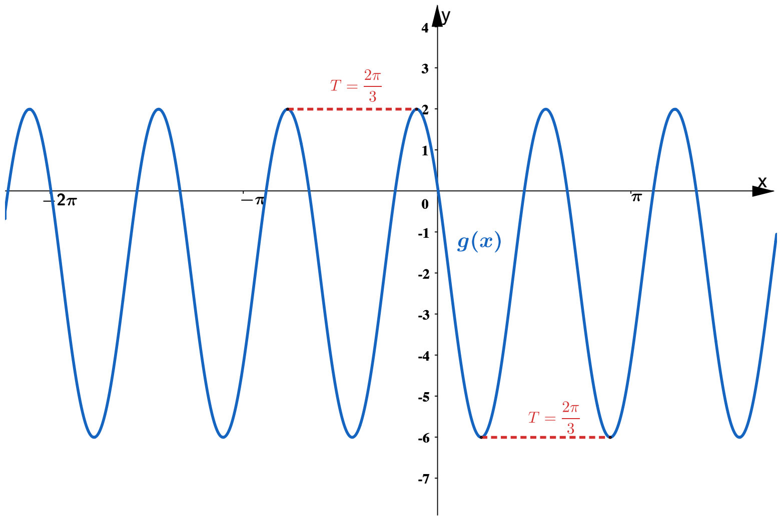


Figura 7.21: $g(x) = 4\cos(3x+1) - 2$.

- Como la función coseno es biyectiva cuando $\mathrm{Dom}(\cos) = [0,\, \pi]$, entonces para g se tiene

$$\begin{aligned} 0 \leq 3x+1 &\leq \pi & -(1)\\ -1 \leq 3x &\leq \pi - 1 & \cdot\left(\frac{1}{3}\right)\\ -\frac{1}{3} \leq x &\leq \frac{\pi-1}{3}, \end{aligned}$$

luego, g es biyectiva cuando se define como

$$g : \begin{cases} \left[-\frac{1}{3}, \frac{\pi-1}{3}\right] & \longrightarrow \qquad [-6,\, 2] \\ \qquad x & \longmapsto \quad g(x) = 4\cos(3x+1) - 2. \end{cases}$$

- Su inversa se determina haciendo

$$\begin{aligned} y &= 4\cos(3x+1) - 2\\ \frac{y+2}{4} &= \cos(3x+1)\\ \frac{\cos^{-1}\left(\frac{y+2}{4}\right) - 1}{3} &= x, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$g^{-1}:\begin{cases}[-6,2] & \longrightarrow & \left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{\pi-1}{3}\right]\\ x & \longmapsto & g^{-1}(x)=\dfrac{\cos^{-1}\left(\frac{x+2}{4}\right)-1}{3}.\end{cases}$$

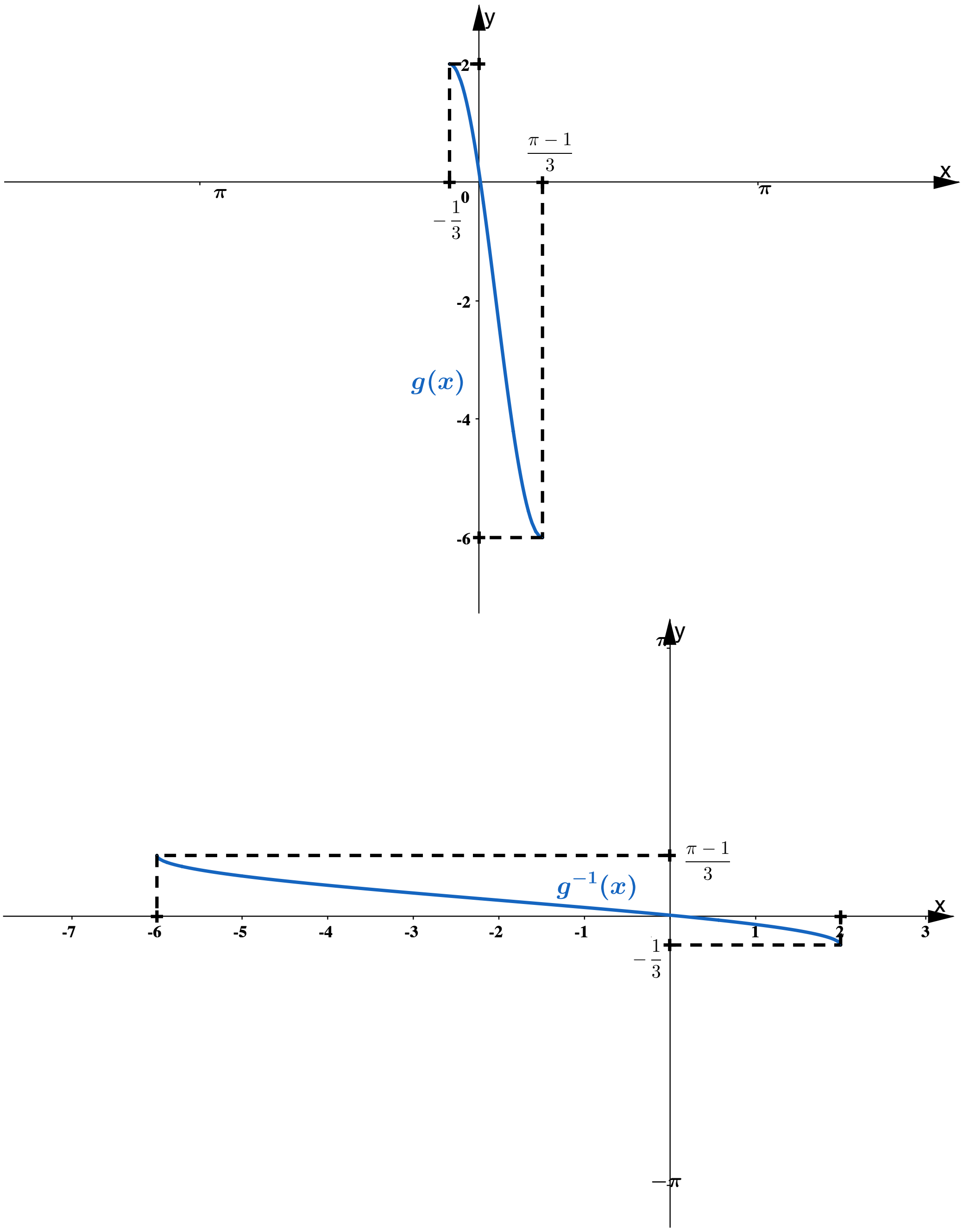


Figura 7.22: Gráficas de g y g^{-1}.

Las funciones tangente y cotangente tienen tratamientos similares entre ellas, es así que, a continuación solo se ejemplifica una de ellas.

■ **Ejemplo 7.4 — Análisis de una función que depende de la función tangente.** Analizar la función $h(x) = -\tan\left(\frac{x}{2}+3\right)+1$.

Solución:

- Como $\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}+3 &\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \qquad \cdot(2) \\ x+6 &\neq \pi+2k\pi \\ x &\neq (2k+1)\,\pi-6, \end{aligned}$$

  por lo tanto, $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\,\pi-6 \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

- Para $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$x = (2k+1)\,\pi-6$$

  es una asíntota vertical.

- Como $\mathrm{Rec}(\tan) = \mathbb{R}$, entonces $\mathrm{Rec}(h) = \mathbb{R}$.

- Haciendo $y = 0$, se tiene

$$-\tan\left(\frac{x}{2}+3\right)+1 = 0$$

  luego, considerando que la tangente es periódica con periodo $T = \pi$, se obtiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \tan\left(\frac{x}{2}+3+k\pi\right) \\ \tan^{-1} &= \frac{x}{2}+3+k\pi \\ \frac{\pi}{4} &= \frac{x}{2}+3+k\pi \qquad \cdot(4) \\ \pi &= 2x+12+4k\pi \\ \frac{\pi-12-4k\pi}{2} &= x, \end{aligned}$$

  entonces la función h corta al eje X en

$$\left(\frac{\pi(1-4k)-12}{2}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$$

  para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- Haciendo $x = 0$, se tiene

$$y = -\tan\left(\frac{0}{2}+3\right)+1$$

$$y = -\tan(3)+1$$

entonces h corta al eje Y en $(0,-3\tan(3)+1)\in\mathbb{R}^2$.

- h no es par ni impar.
- h es periódica con período

$$T^{'}=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$$

pues, $T=\pi$ es el período de la función tangente.

- *Gráfica:*

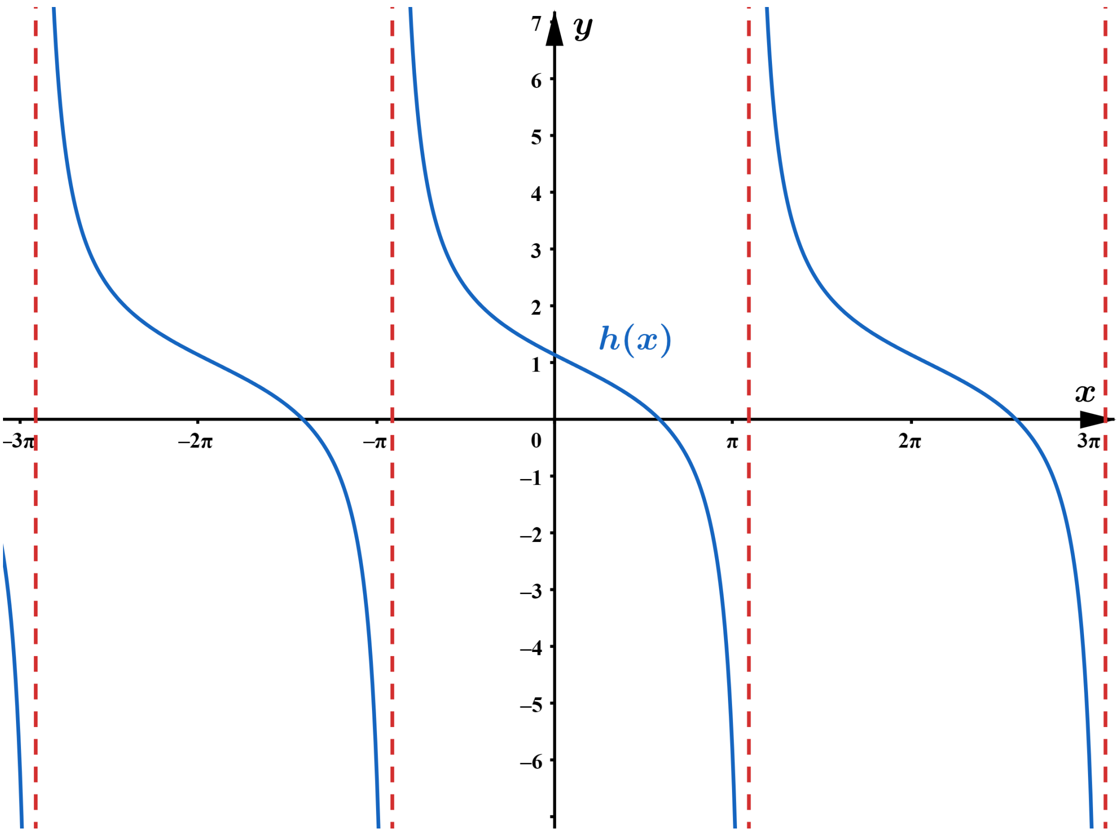


Figura 7.23: $h(x)=-\tan\left(\frac{x}{2}+3\right)+1$.

- Como la función tangente es biyectiva cuando $\mathrm{Dom}(\tan)=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, entonces para h se tiene

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}+3<\frac{\pi}{2} &\qquad \cdot(2)\\
-\pi<x+6<\pi &\qquad -(6)\\
-\pi-6<x<\pi-6 &
\end{aligned}$$

luego, h es biyectiva cuando se define como

$$h:\begin{cases}]-\pi-6,\,\pi-6[& \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad h(x) = -\tan\left(\dfrac{x}{2}+3\right)+1. \end{cases}$$

- Su inversa se determina haciendo

$$\begin{aligned} y &= -\tan\left(\frac{x}{2}+3\right)+1 \\ \tan\left(\frac{x}{2}+3\right) &= 1-y \\ \frac{x}{2}+3 &= \tan^{-1}(1-y) \qquad \cdot(2) \\ x+6 &= 2\tan^{-1}(1-y) \\ x &= 2\tan^{-1}(1-y)-6 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$h^{-1}:\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad]-\pi-6,\,\pi+6[\\ x & \longmapsto \quad h^{-1}(x) = 2\tan^{-1}(1-x)-6. \end{cases}$$

Las funciones secante y cosecante tienen tratamientos similares entre ellas, es así que, a continuación solo se ejemplifica una de ellas.

Ejemplo 7.5 — Análisis de una función que depende de la función cosecante. Analizar la función $p(x) = -2\csc(2x+1)-3$.

Solución:

- Como $\mathrm{Dom}(\csc) = \mathbb{R}\setminus\{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, entonces

$$\begin{aligned} 2x+1 &\neq k\pi \\ x &\neq \frac{k\pi-1}{2} \end{aligned}$$

luego, $\mathrm{Dom}(p) = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi-1}{2} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Para $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$x = \frac{k\pi-1}{2}$$

es una asíntota vertical.

- Como $\mathrm{Rec}(\csc) = \mathbb{R}\setminus]-1,1[$, entonces

$$\begin{aligned} \csc(2x+1) \leq -1 \quad &\vee \quad \csc(2x+1) \geq 1 \\ -2\csc(2x+1) \geq 2 \quad &\vee \quad -2\csc(2x+1) \leq -2 \end{aligned}$$

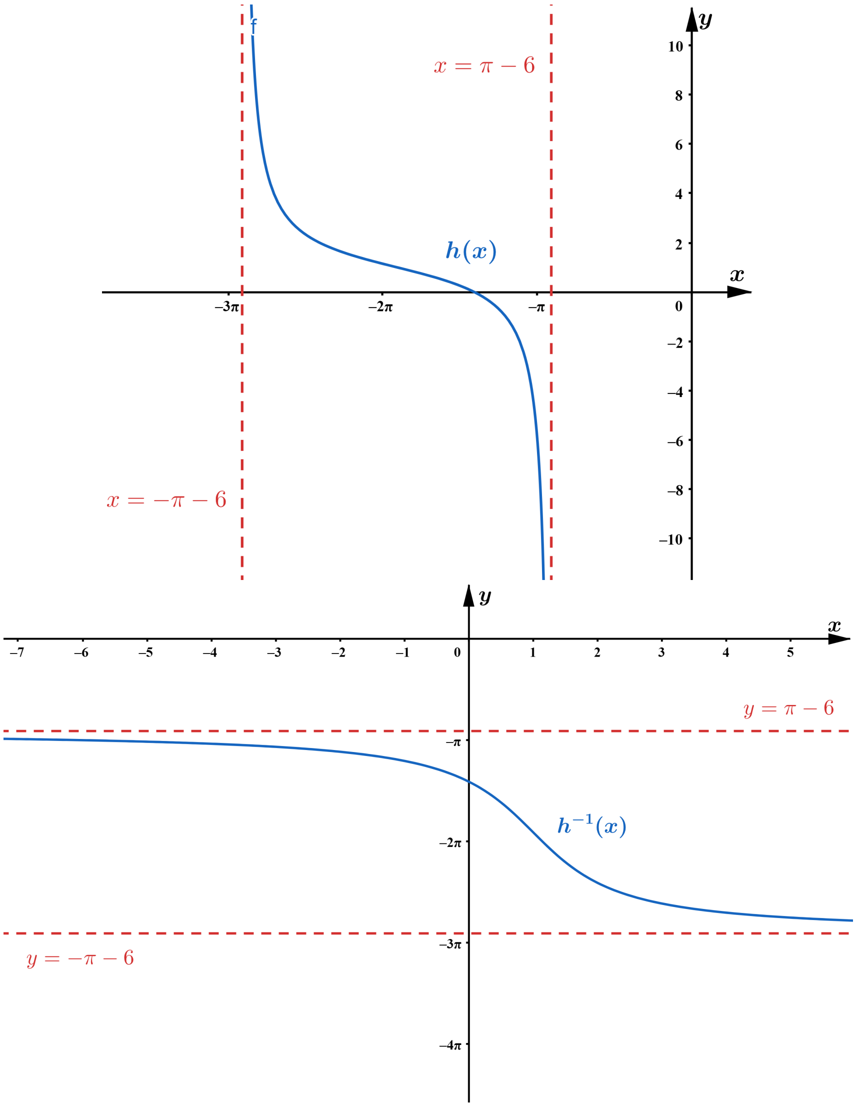


Figura 7.24: Gráficas de h y h^{-1}.

$$-2\csc(2x+1)-3 \geq -1 \quad \vee \quad -2\csc(2x+1)-3 \leq -5,$$

entonces

$$\text{Rec}(p) = \mathbb{R} \setminus]-5,-1[.$$

- Haciendo $y = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} -2\csc(2x+1)-3 &= 0 \\ -\frac{2}{\text{sen}(2x+1)} &= 3 \\ -\frac{2}{3} &= \text{sen}(2x+1). \end{aligned}$$

Considerando que el seno es periódico con período $T = 2\pi$ se tiene

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{3} &= \operatorname{sen}(2x+1+2k\pi)\\
\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) &= 2x+1-2k\pi\\
\frac{\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)-1+2k\pi}{2} &= x.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, considerando que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x+\pi)$$

y la periodicidad del seno se tiene

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{3} &= -\operatorname{sen}(2x+1+\pi+2k\pi)\\
\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) &= 2x+1+(2k+1)\pi\\
\frac{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)-1-(2k+1)\pi}{2} &= x,
\end{aligned}
$$

entonces p corta al eje X en los puntos:

$$
\left(\frac{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)-1+2k\pi}{2}, 0\right) \in \mathbb{R}^2
$$
$$
\left(\frac{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)-1-(2k+1)\pi}{2}, 0\right) \in \mathbb{R}^2,
$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- Haciendo $x = 0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{-2}{\operatorname{sen}(2(0)+1)} - 3\\
y &= -\frac{2}{\operatorname{sen}(1)} - 3
\end{aligned}
$$

entonces p corta al eje Y en el punto

$$\left(0,-\frac{2}{\operatorname{sen}(1)}-3\right)\in\mathbb{R}^2.$$

- p no es par ni impar.
- p es periódica con período
$$T'=\frac{2\pi}{2}=\pi$$
pues, $T=2\pi$ es el período de la función cosecante.

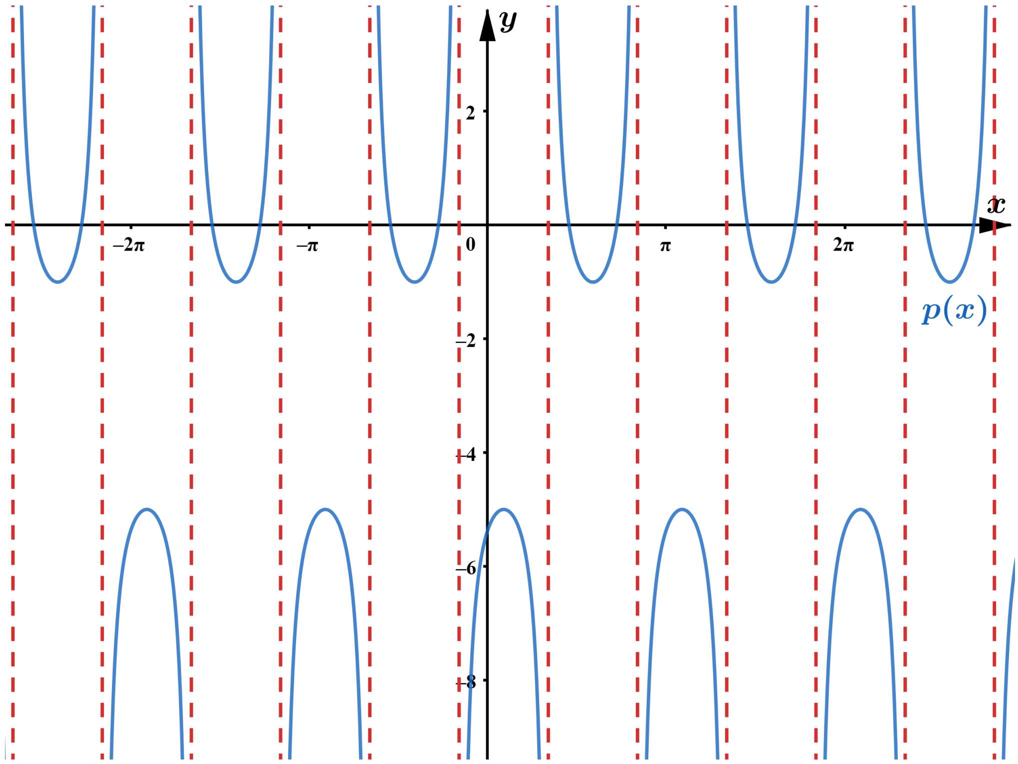


Figura 7.25: $p(x)=-2\csc(2x+1)-3$.

- Como la función cosecante es biyectiva cuando
$$\operatorname{Dom}(\csc)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$$
entonces para p se tiene
$$-\frac{\pi}{2}\le 2x+1\le\frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{\pi}{2}-1\le 2x\le\frac{\pi}{2}-1$$

$$\frac{-\pi-2}{4} \leq x \leq \frac{\pi-2}{4}$$

y

$$\begin{aligned} 2x+1 &\neq 0 \\ x &\neq -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

luego, p es biyectiva cuando se define como

$$p : \begin{cases} \left[\frac{-\pi-2}{4}, \frac{\pi-2}{4}\right] \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus]-5, -1[\\ x & \longmapsto & p(x) = -2\csc(2x+1) - 3. \end{cases}$$

- Su inversa se determina haciendo

$$\begin{aligned} y &= -2\csc(2x+1) - 3 \\ \csc(2x+1) &= \frac{-3-y}{2} \\ 2x+1 &= \csc^{-1}\left(\frac{-3-y}{2}\right) \\ x &= \frac{\csc^{-1}\left(\frac{-3-y}{2}\right) - 1}{2}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$p^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus]-5, -1[& \longrightarrow & \left[\frac{-\pi-2}{4}, \frac{\pi-2}{4}\right] \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \\ x & \longmapsto & p^{-1}(x) = \dfrac{\csc^{-1}\left(\frac{-3-x}{2}\right) - 1}{2}. \end{cases}$$

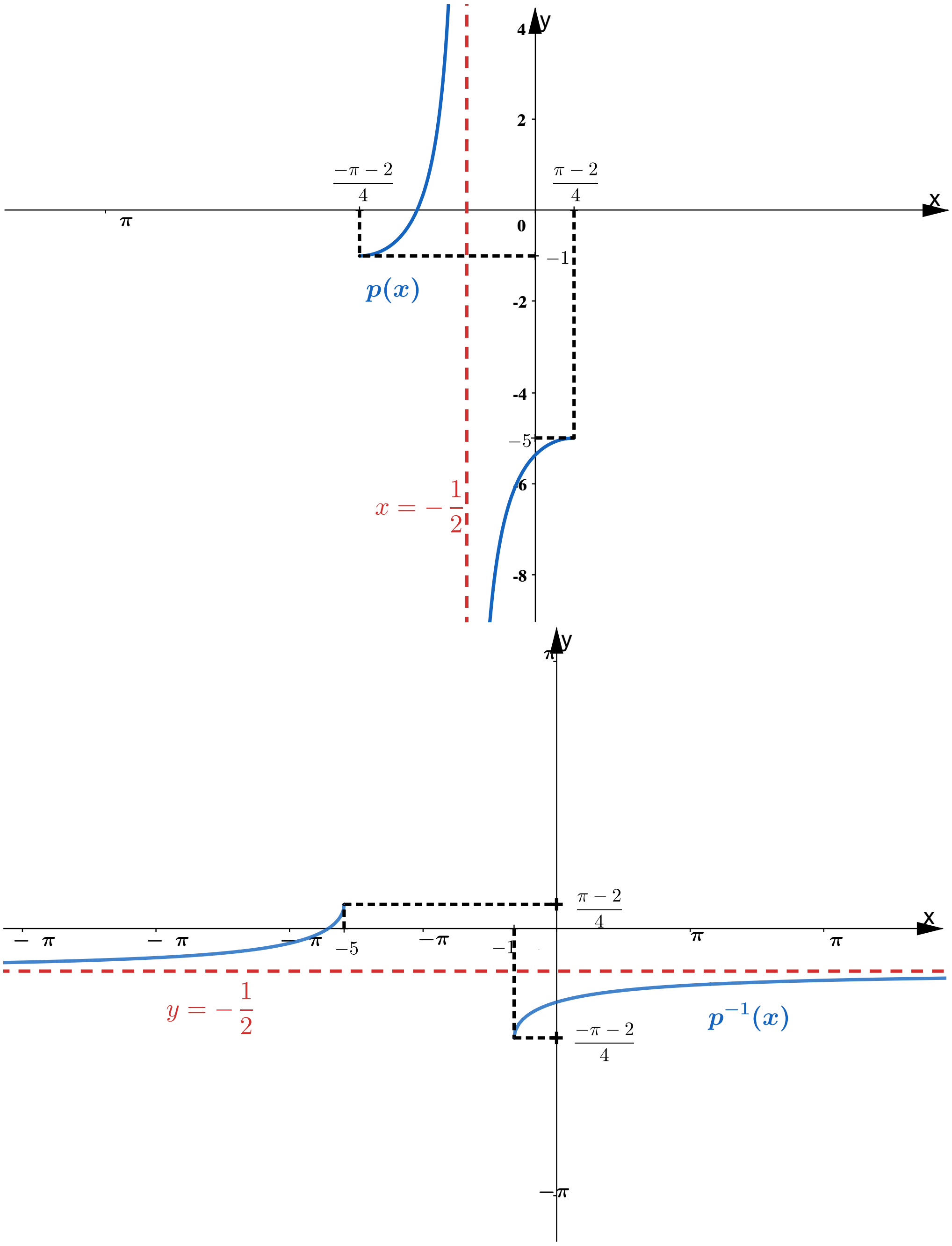


Figura 7.26: Gráfica de p y p^{-1}.

7.8.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.2 En los siguientes ejercicios determinar el dominio y rango de las funciones, asíntotas verticales, cortes con los ejes X y Y, paridad, periodo, definir la función inversa y realizar las respectivas gráficas.

1. $f(x) = 8\,\text{sen}\,(4x-1)-5$,

2. $f(x) = -7\cos\left(\frac{5}{3}x+4\right)+3$,
3. $f(x) = \tan\left(6x-\frac{1}{4}\right)-8$,
4. $f(x) = -4\csc(x+3)-\frac{1}{5}$,
5. $f(x) = \frac{2}{5}\sec(2x+3)-7$,
6. $f(x) = 3\cot(9x+7)-\frac{3}{5}$.

7.9 Identidades trigonométricas

En esta sección, se muestran relaciones entre las funciones trigonométricas que serán utilizadas para la demostración de identidades trigonométricas. A continuación, un resumen de las principales identidades trigonométricas.

7.9.1 Identidades trigonométricas básicas

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{\csc(x)} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$
$$\operatorname{sen}(x)\cdot\csc(x) = 1$$
$$\cos(x) = \frac{1}{\sec(x)} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$
$$\cos(x)\cdot\sec(x) = 1$$
$$\tan(x) = \frac{1}{\cot(x)} \qquad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$
$$\tan(x)\cdot\cot(x) = 1$$
$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

7.9.2 Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2(x) = 1-\cos^2(x) \\ \operatorname{sen}(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2(x) = 1-\operatorname{sen}^2(x) \\ \cos(x) = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan^2(x)+1=\sec^2(x) \\ 1+\cot^2(x)=\csc^2(x) \end{cases}$$

7.9.3 Identidades de paridad

i) Funciones pares

$$\cos(-x)=\cos(x)$$
$$\sec(-x)=\sec(x)$$

ii) Funciones impares

$$\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}(x)$$
$$\tan(-x)=-\tan(x)$$
$$\cot(-x)=-\cot(x)$$
$$\csc(-x)=-\csc(x)$$

7.9.4 Fórmulas de adición

$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)\pm\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

7.9.5 Fórmulas para ángulos dobles

$$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x)=\begin{cases} \cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x) \\ 1-2\operatorname{sen}^2(x) \\ 2\cos^2(x)-1 \end{cases}$$
$$\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

7.9.6 Fórmulas para ángulos medios

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$$

7.9.7 Identidades de producto a suma

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

7.9.8 Identidades de suma a producto

$$\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\beta) = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha)-\operatorname{sen}(\beta) = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

A continuación, se presenta una serie de ejemplos que indican la forma de trabajar con las identidades trigonométricas para establecer nuevas identidades.

■ **Ejemplo 7.6 — Identidades trigonométricas.** Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\cos(t)\left[\csc(t)+\tan(t)\right] = \cot(t)+\operatorname{sen}(t)$.

Solución:

$$\begin{aligned}\cos(t)\left[\csc(t)+\tan(t)\right] &= \cos(t)\left[\frac{1}{\operatorname{sen}(t)}+\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}\right]\\ &= \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}+\frac{\operatorname{sen}(t)\cos(t)}{\cos(t)}\\ &= \cot(t)+\operatorname{sen}(t).\end{aligned}$$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}+\dfrac{1+\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} = 2\csc(\theta)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}+\frac{1+\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} &= \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)+[1+\cos(\theta)]^2}{\operatorname{sen}(\theta)\,[1+\cos(\theta)]}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)+1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)\,[1+\cos(\theta)]}\\
&= \frac{2+2\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)\,[1+\cos(\theta)]}\\
&= \frac{2\,[1+\cos(\theta)]}{\operatorname{sen}(\theta)\,[1+\cos(\theta)]}\\
&= \frac{2}{\operatorname{sen}(\theta)}\\
&= 2\csc(\theta).
\end{aligned}$$

c) $\sec^4(\alpha)-\tan^4(\alpha)=\dfrac{1+\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\sec^4(\alpha)-\tan^4(\alpha) &= \left[\sec^2(\alpha)+\tan^2(\alpha)\right]\left[\sec^2(\alpha)-\tan^2(\alpha)\right]\\
&= \left[\tan^2(\alpha)+1+\tan^2(\alpha)\right]\left[\tan^2(\alpha)+1-\tan^2(\alpha)\right]\\
&= 2\tan^2(\alpha)+1\\
&= \frac{2\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}+1\\
&= \frac{2\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)+\left[\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right]}{\cos^2(\alpha)}\\
&= \frac{1+\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}.
\end{aligned}$$

d) $\operatorname{sen}^3(\eta)\,[1+\cot(\eta)]+\cos^3(\eta)\,[1+\tan(\eta)]=\operatorname{sen}(\eta)+\cos(\eta)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^3(\eta)\,[1+\cot(\eta)]+\cos^3(\eta)\,[1+\tan(\eta)]\\
&\qquad= \operatorname{sen}^3(\eta)\left[1+\frac{\cos(\eta)}{\operatorname{sen}(\eta)}\right]+\cos^3(\eta)\left[1+\frac{\operatorname{sen}(\eta)}{\cos(\eta)}\right]\\
&\qquad= \operatorname{sen}^3(\eta)\left[\frac{\operatorname{sen}(\eta)+\cos(\eta)}{\operatorname{sen}(\eta)}\right]+\cos^3(\eta)\left[\frac{\cos(\eta)+\operatorname{sen}(\eta)}{\cos(\eta)}\right]\\
&\qquad= \operatorname{sen}^2(\eta)\,[\operatorname{sen}(\eta)+\cos(\eta)]+\cos^2(\eta)\,[\operatorname{sen}(\eta)+\cos(\eta)]\\
&\qquad= [\operatorname{sen}(\eta)+\cos(\eta)]\left[\operatorname{sen}^2(\eta)+\cos^2(\eta)\right]
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{sen}(\eta)+\cos(\eta).$$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{1-\cos(t)} = \dfrac{1+\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}.$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(t)}{1-\cos(t)} &= \frac{\operatorname{sen}(t)}{1-\cos(t)} \cdot \frac{1+\cos(t)}{1+\cos(t)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(t)\,[1+\cos(t)]}{1-\cos^2(t)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(t)\,[1+\cos(t)]}{\operatorname{sen}^2(t)} \\
&= \frac{1+\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}.
\end{aligned}$$

f) $\dfrac{1+\tan^4(\upsilon)}{\tan^2(\upsilon)+\cot^2(\upsilon)} = \tan^2(\upsilon).$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{1+\tan^4(\upsilon)}{\tan^2(\upsilon)+\cot^2(\upsilon)} &= \frac{1+\dfrac{\operatorname{sen}^4(\upsilon)}{\cos^4(\upsilon)}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2(\upsilon)}{\cos^2(\upsilon)}+\dfrac{\cos^2(\upsilon)}{\operatorname{sen}^2(\upsilon)}} \\
&= \frac{\dfrac{\cos^4(\upsilon)+\operatorname{sen}^4(\upsilon)}{\cos^4(\upsilon)}}{\dfrac{\operatorname{sen}^4(\upsilon)+\cos^4(\upsilon)}{\cos^2(\upsilon)\operatorname{sen}^2(\upsilon)}} \\
&= \frac{\left[\cos^4(\upsilon)+\operatorname{sen}^4(\upsilon)\right]\cos^2(\upsilon)\operatorname{sen}^2(\upsilon)}{\cos^4(\upsilon)\,[\cos^4(\upsilon)+\operatorname{sen}^4(\upsilon)]} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(\upsilon)}{\cos^2(\upsilon)} \\
&= \left[\frac{\operatorname{sen}(\upsilon)}{\cos(\upsilon)}\right]^2 \\
&= \tan^2(\upsilon).
\end{aligned}$$

g) $1+\dfrac{\cos(x)\cdot\tan^2(x)}{1+\cos(x)} = \sec(x).$

Solución:

$$1+\frac{\cos(x)\cdot\tan^2(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1+\cos(x)+\cos(x)\cdot\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}}{1+\cos(x)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1+\cos(x)+\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}}{1+\cos(x)} \\
&= \frac{\dfrac{\cos(x)+\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}}{1+\cos(x)} \\
&= \frac{\dfrac{\cos(x)+1}{\cos(x)}}{1+\cos(x)} \\
&= \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)\,[1+\cos(x)]} \\
&= \frac{1}{\cos(x)} \\
&= \sec(x).
\end{aligned}
$$

h) $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}} = \sec(x)-\tan(x)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}} &= \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}} \\
&= \sqrt{\frac{[1-\operatorname{sen}(x)]^2}{1-\operatorname{sen}^2(x)}} \\
&= \frac{\sqrt{[1-\operatorname{sen}(x)]^2}}{\sqrt{\cos^2(x)}} \\
&= \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{1}{\cos(x)}-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\
&= \sec(x)-\tan(x).
\end{aligned}
$$

i) $\operatorname{sen}^4(\varphi)+\cos^4(\varphi) = 2\cos^4(\varphi)+1-2\cos^2(\varphi)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4(\varphi)+\cos^4(\varphi) &= [\operatorname{sen}^2(\varphi)]^2+\cos^4(\varphi) \\
&= [1-\cos^2(\varphi)]^2+\cos^4(\varphi) \\
&= 1-2\cos^2(\varphi)+\cos^4(\varphi)+\cos^4(\varphi) \\
&= 2\cos^4(\varphi)+1-2\cos^2(\varphi).
\end{aligned}
$$

j) $\dfrac{2\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(2x)}{2\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(2x)} = \cot^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\frac{1+\cos(x)}{2}}{\frac{1-\cos(x)}{2}}\\
&= \frac{2[1+\cos(x)]}{2[1-\cos(x)]}\\
&= \frac{[2+2\cos(x)]\operatorname{sen}(x)}{[2-2\cos(x)]\operatorname{sen}(x)}\\
&= \frac{2\operatorname{sen}(x)+2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2\operatorname{sen}(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}\\
&= \frac{2\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(2x)}{2\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(2x)}.
\end{aligned}
$$

k) $1-\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-B\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(2B)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right) &= 1-\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}\\
&= \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}\\
&= \frac{\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2B\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(2B)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(2B)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(2B)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}.
\end{aligned}
$$

l) $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2u\right) = \dfrac{1-\operatorname{sen}(4u)}{1+\operatorname{sen}(4u)}$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2u\right) &= \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan(2u)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(2u)}\right]^2\\
&= \left[\frac{1-\tan(2u)}{1+\tan(2u)}\right]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1-\frac{\operatorname{sen}(2u)}{\cos(2u)}}{1+\frac{\operatorname{sen}(2u)}{\cos(2u)}}\right]^2 \\
&= \left[\frac{\frac{\cos(2u)-\operatorname{sen}(2u)}{\cos(2u)}}{\frac{\cos(2u)+\operatorname{sen}(2u)}{\cos(2u)}}\right]^2 \\
&= \frac{[\cos(2u)-\operatorname{sen}(2u)]^2}{[\cos(2u)+\operatorname{sen}(2u)]^2} \\
&= \frac{\cos^2(2u)-2\operatorname{sen}(2u)\cos(2u)+\operatorname{sen}^2(2u)}{\cos^2(2u)+2\operatorname{sen}(2u)\cos(2u)+\operatorname{sen}^2(2u)} \\
&= \frac{1-\operatorname{sen}(4u)}{1+\operatorname{sen}(4u)}.
\end{aligned}
$$

m) $2\cos^2(x)+\cos(x)-1 = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= 2\left\{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)\right]\right\} \\
&= \cos(x)+\cos(2x) \\
&= \cos(x)+2\cos^2(x)-1.
\end{aligned}
$$

7.9.9 Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.3 Demostrar las siguientes identidades trigonométricas.

1. $(2\sin(x)+\cos(x))^2+(\sin(x)-2\cos(x))^2 = 5$,
2. $\dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{\cot(x)+\cot(y)} = \tan(x)\cdot\tan(y)$,
3. $\dfrac{(2\sin^2(x)-1)^2}{\sin^4(x)-\cos^4(x)} = 1-2\cos(x)$,
4. $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}+\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)} = \sec(x)$,
5. $\sec(x)+\tan(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$,
6. $\dfrac{\sec(x)-\cos(x)}{\sec(x)} = \sin^2(x)$,
7. $\dfrac{\sec(x)+\csc(x)}{\tan(x)+\cot(x)} = \sin(x)+\cos(x)$,
8. $\sec(x)-\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)} = \tan(x)$,

9. $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)\cdot\cos(x)} = 4\cos(x) - \sec(x)$,

10. $\tan(3x) = \dfrac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$,

11. $\dfrac{\sin}{1+\cos(x)} + \dfrac{1+\cos(x)}{\sin(x)} = 2\csc(x)$,

12. $\dfrac{\tan^2(x)}{\sec(x)+1} = \dfrac{1-\cos(x)}{\cos(x)}$,

13. $\dfrac{\cot(x)+\csc(x)\cdot\cos(x)}{\cot(x)} = 2$,

14. $\dfrac{4\tan(x)\cdot\sec^2(x) - 4\tan(x) - \sec^2(x) + 1}{4\tan^3(x) - \tan^2(x)} = 1$,

15. $\sin^2(x) + 2\cos^2(x) + \cos^2(x)\cdot\cot^2(x) = \csc^2(x)$.

7.10 Ecuaciones trigonométricas

Del análisis de funciones y aplicaciones con las funciones trigonométricas surge la necesidad de resolver ecuaciones trigonométricas. Las técnicas son variadas, es así como a continuación se dan múltiples ejemplos donde se aplican estas técnicas.

■ **Ejemplo 7.7** Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen}(x) = 0$.

Solución: Por la teoría de funciones trigonométricas se tiene

$$x = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\operatorname{sen}(x) = 0,\ x \in [0, 2\pi[$.

Solución: Del ejercicio anterior se tiene que las soluciones son

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \pi. \end{cases}$$

Observación 7.5 El literal a) del Ejemplo 7.7 muestra que las ecuaciones trigonométricas, por lo general tienen infinitas soluciones, mientras que en el literal b) se escojen de esas infinitas soluciones, solo las que cumplan la condición que se está requiriendo. Además, a) y b) muestran que se puede establecer la búsqueda de soluciones en todo $\mathbb{R}$ y luego restringir al conjunto donde se buscan las soluciones.

■ **Ejemplo 7.8** Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

c) $\cos(x) = 0,\ x \in [0, 2\pi[$.

Solución: De la teoría de funciones trigonométricas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

luego,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2}, \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

d) $\operatorname{sen}(2x) = 0,\ x \in [0, 2\pi[$.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} 2x &= k\pi \\ x &= \frac{k\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2}, \\ x_3 = \pi, \\ x_4 = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

e) $\cos(3x) = 0, x \in [0, \pi[$.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x &= \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x &= \frac{(1+2k)\pi}{6}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{6}, \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2}, \\ x_3 = \dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

f) $\cos(2x) + 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi[$.

Solución:

$$\cos(2x) + 1 = 0$$
$$\cos(2x) = -1,$$

de la teoría de funciones trigonométricas, se tiene

$$2x = \pi + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi(1+2k)}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

entonces,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2}, \\ x_2 = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

g) $\operatorname{sen}(x) - \cos(x) = 0,\ x \in [0, 2\pi[$.

Solución:

$$\operatorname{sen}(x) - \cos(x) = 0$$
$$\operatorname{sen}(x) = \cos(x),$$

luego,

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$x = \frac{(1+4k)\pi}{4}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

entonces,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4}, \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{4}. \end{cases}$$

h) $\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) = 0,\ x \in [0, 2\pi[$.

Solución: Usando identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) = 0 \qquad \cdot(-1)$$
$$\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 0$$
$$\cos(2x) = 0$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{(1+2k)\pi}{4}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

entonces,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4}, \\ x_2 = \dfrac{3\pi}{4}, \\ x_3 = \dfrac{5\pi}{4}, \\ x_4 = \dfrac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

i) $\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) = 0,\ x \in [0, 2\pi[$.

Solución: Utilizando álgebra y teoría de funciones, se tiene

$$\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) = 0$$

$$[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] \cdot [\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 0 & \vee & \operatorname{sen}(x) - \cos(x) = 0 \\ \operatorname{sen}(x) = -\cos(x) & \vee & \operatorname{sen}(x) = \cos(x) \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi & \vee & x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{(3+4k)\pi}{4} & \vee & x = \dfrac{(1+4k)\pi}{4}, \end{array}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3\pi}{4} \\ x_2 = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{\pi}{4} \\ x_4 = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

por lo tanto,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3\pi}{4}, \\ x_2 = \dfrac{7\pi}{4}, \\ x_3 = \dfrac{\pi}{4}, \\ x_4 = \dfrac{5\pi}{4}. \end{cases}$$

j) $2\cos^2(x) = \operatorname{sen}(2x),\ 0 \le x \le \pi$.

Solución:

$$2\cos^2(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$
\begin{aligned}
2\cos^2(x) - \operatorname{sen}(2x) &= 0 \\
2\cos^2(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) &= 0 \\
2\cos(x)\cdot[\cos(x) - \operatorname{sen}(x)] &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\cos(x) = 0 & \vee & \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = 0 \\
x = \frac{\pi}{2} + k\pi & \vee & \cos(x) = \operatorname{sen}(x) \\
x = \frac{(1+2k)\pi}{2} & \vee & x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\
x = \frac{(1+2k)\pi}{2} & \vee & x = \frac{(1+4k)\pi}{4},
\end{array}
$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \vee \qquad x_2 = \frac{\pi}{4}$$

por lo tanto, la solución también se puede poner en la forma

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

k) $\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos^3(x) = \dfrac{1}{4}$, $x \in [0, \pi[$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^3(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cos^3(x) &= \frac{1}{4} \\
\operatorname{sen}(x)\cos(x)\cdot[\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)] &= \frac{1}{4} \\
\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\cdot[-\cos(2x)] &= \frac{1}{4} \\
\operatorname{sen}(2x)\cos(2x) &= -\frac{1}{2} \\
2\operatorname{sen}(2x)\cdot\cos(2x) &= -\frac{1}{2}\cdot 2 \\
\operatorname{sen}(4x) &= -1 \\
4x &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\
x &= \frac{(3+4k)\pi}{8}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}
$$

entonces,

$$x \in \left\{\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}.$$

l) $4\operatorname{sen}^2(x) - 8\operatorname{sen}(x) + 3 = 0$, $x \in [0, 2\pi[$.

Solución: Haciendo el cambio de variable $t = \text{sen}(x)$, se tiene

$$t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$(2t-3)(2t-1) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} t = \dfrac{3}{2} & \vee & t = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}(x) = \dfrac{3}{2} & \vee & \text{sen}(x) = \dfrac{1}{2} \\ \text{No da ninguna solución} & \vee & \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, & \forall k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, & \forall k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \end{array}$$

entonces,

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

7.10.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.4 Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

1. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \in [0, 2\pi];$
2. $2\sin(x) - 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi];$
3. $\cos(x) + 1 = \sin(x), \quad x \in [0, 2\pi];$
4. $\tan(x) - 3\cot(x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi];$
5. $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi];$
6. $2\cos^2(x) - 7\cos(x) = -3, \quad x \in [0, 2\pi];$
7. $5\cos(x)\sin(x) + 4\cos(x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi];$
8. $4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi];$
9. $\cos(x)\sin(x) - 2\cos(x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi];$
10. $\sin^2(x) = \sin(x) + 3, \quad x \in [0, 2\pi];$
11. $4\cos(x)\sin(x) + 3\cos(x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi];$
12. $\tan(2x) + 2\sin(x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi];$
13. $\sin(3x) + \sin(x) = 0, \quad x \in [0, \pi];$
14. $2\sin^2(x) - 7\sin(x) + 3 = 0, \quad x \in [0, \pi];$

15. $4\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x) - 2\cos(x) - 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$.

Bibliografía

[1] Apostol T. (1985). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Editorial Reverté.

[2] Courant R. (1993). *Introducción al cálculo y análisis matemático. Vol. 1*. Editorial Limusa.

[3] Dankó P., Popov A. y Kozhévnikova T. (1990). *Matemáticas superiores en ejercicios y problemas, Vol.1*. Editorial MIR.

[4] Demana F., Waits B., Foley G., Kennedy D. y Blitzer R. (2009). *Matemáticas Universitarias Introductorias con Nivelador Mymathlab Tutor Interactivo Online*. Editorial MIR.

[5] Espinoza E. (2002). *Análisis Matemático para estudiantes de ciencias e ingeniería. Vol. 1 y 2*. Lima-Perú.

[6] Galindo E. y Gortaire D. (2003). *Matemáticas Superiores. Teoría y Ejercicios*. Procencia Editores.

[7] Kudriávtsev V. y Demidóvich B. (1989). *Breve curso de matemáticas superiores*. Editorial MIR.

[8] Lara J. y Arroba J. (2011). *Análisis Matemático*. Centro de Matemática-Universidad Central del Ecuador.

[9] Lara J. y Benalcázar H. (2008). *Fundamentos de Análisis Matemático*. Centro de Matemática-Universidad Central del Ecuador.

[10] Pastor R., Calleja P. y Trejo C. (1968). *Análisis Matemático*. Editorial Kapelusz.

[11] Potapov M., Alexandrov V. y Pasichenko P. (1986). *Álgebra y análisis de funciones elementales*. Editorial MIR.

[12] Sáenz R. y Lara J. (2010). *Matemáticas Básicas*. Centro de Matemática-Universidad Central del Ecuador.

[13] Silva J. (2011). *Álgebra*. Departamento de Ciencias Exactas-Escuela Politécnica del Ejército.

[14] Spivak M. (2005). *Calculus*. Editorial Reverté.

[15] Stewart J., Redlin L. y Watson S. (2017). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. Editorial Reverté.

[16] Ya. S. Bugrov y Nikolski S.M. (1984). *Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral*. Editorial MIR.

[17] Zill D. y Dewar J. (1995). *Álgebra y Trigonometría*. McGraw-Hill.

[18] Zill D. y Wright W. (2011). *Matemáticas. Cálculo Diferencial*. McGraw-Hill.

ISBN: 978-9942-33-845-7

compAs

Grupo de capacitación e investigación pedagógica

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com