

# Análisis de Fourier en Meteorología

Elmer Lluen Cumpa  
Oscar Alex Serquén Yparraguirre

# Análisis de Fourier en Meteorología

---

Elmer Lluen Cumpa  
Oscar Alex Serquén Yparraguirre

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica del mismo.

© Publicaciones Editorial Grupo Compás  
Guayaquil - Ecuador  
compasacademico@icloud.com  
<https://repositorio.grupocompas.com>

Diseño de la portada es de: Ariadna Tirado Pereira



Lluen, E., Serquén, O. (2024) Análisis de Fourier en Meteorología. Editorial Grupo Compás

© Elmer Lluen Cumpa  
Oscar Alex Serquén Yparraguirre

**ISBN: 978-9942-33-871-6**

El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones en las leyes, la producción o almacenamiento total o parcial de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de la misma por cualquiera de sus medios, tanto si es electrónico, como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización de los titulares del copyright.

## ÍNDICE

ÍNDICE .....	3
INTRODUCCIÓN .....	4
CAPITULO I: DESCRIPCIÓN DEL MODELO .....	5
1.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales .....	5
1.2. Ecuación de la Onda .....	6
□ Satisfacción de los valores de contorno.....	7
□ Clasificación de las ondas .....	9
1.3. Ondas Transversales y Longitudinales.....	10
1.4 La Atmosfera.....	10
Clasificación de la atmosfera .....	11
1.5 Los vientos .....	11
1.6 La Fuerza De Coriolis <sup>1</sup> .....	13
1.7.Las Ondas de Rossby.....	15
2.1. Ortogonalidad del Sistema Trigonométrico .....	20
2.2. Series de Fourier .....	21
2.3. Evaluación de los Coeficientes de Fourier.....	22
2.4. Series de Fourier para funciones con cualquier periodo .....	26
2.6 Forma compleja de la serie de Fourier .....	28
2.7. El Método Pseudoespectral de colocación. ....	29
2.8. El método de Galerkin <sup>4</sup> .....	35
CAPÍTULO III: SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LAS ONDAS ROSSBY <sup>5</sup> MEDIANTE EL MÉTODO ESPECTRAL DE FOURIER.....	41
3.1. Número de Onda y frecuencia angular.....	41
3.2. Simulación numérica de las Ondas Rossby.....	42
3.3 Aplicaciones.....	44
B. Segunda Aplicación: ONDA TRIDIMENSIONAL EN MATLAB .....	49
CONCLUSIONES.....	52
REFERENCIA. ....	53

## INTRODUCCIÓN

Las Ecuaciones diferenciales son la herramienta principal para la **modelación matemática**; A su vez, **los modelos matemáticos** son la representación de problemas de mecánica, física, economía, etc. Sin embargo, no todos los problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO'S) y Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP'S) permiten encontrar una solución exacta y bastará con encontrar soluciones aproximadas a tales problemas. En el presente trabajo, el fenómeno meteorológico descrito por las ondas de Rossby, puede describirse usando la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - R^2 \frac{\partial(\nabla^2 \eta)}{\partial t} - Q_0 R^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

Donde  $\eta$  es el desplazamiento,  $R$  es el radio de deformación y  $\beta_0$  es el betaparametro.

El objetivo fundamental a lograr será simular numéricamente las Ondas de Rossby mediante el método espectral de Fourier aplicado a la ecuación diferencial anterior. Los resultados obtenidos se presentan en forma gráfica usando el programa **matlab**.

## CAPITULO I: DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Todos los procesos meteorológicos ocurren en la atmósfera, por eso entender los procesos atmosféricos es clave. Dentro de la dinámica atmosférica, las Ondas de Rossby tienen un rol preponderante en la existencia de la vida humana. Dedicamos estas líneas para describir el modelo matemático del flujo de las ondas Rossby y su deducción matemática.

En el contexto de las ecuaciones diferenciales, la ecuación de la onda corresponde a uno de los modelos matemáticos expresados mediante ecuaciones en derivadas parciales (**EDP**).

### 1.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Una ecuación diferencial parcial (**EDP**) es una ecuación en la que intervienen una o más derivadas parciales de una función desconocida de dos o más variables independientes.

El orden de la ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada involucrada en la ecuación.

A continuación, mostramos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden.

1) Ecuación unidimensional de la onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2) Ecuación unidimensional del Calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3) Ecuación bidimensional de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

4) Ecuación bidimensional de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

5) Ecuación tridimensional de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

La solución de una EDP en alguna región  $R$  del espacio de las variables independientes, es una función que tiene todas las derivadas parciales que aparecen en la ecuación en algún dominio que contiene a  $R$  que satisface la ecuación en todos los puntos de  $R$ .

## 1.2. Ecuación de la Onda

La ecuación diferencial unidimensional de la onda junto con las condiciones iniciales y de contorno, constituyen el Problema de valor de contorno (**PVC**)

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l \\ u(0; t) = 0 \\ u(l; t) = 0, \forall t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = g(x) \end{cases}$$

El problema representa las vibraciones de una cuerda, describiendo su deflexión  $u(x, t)$  en cualquier punto  $x$  en cualquier tiempo  $t > 0$ , sabiendo que la cuerda esta fija en los extremos  $x = 0$  y  $x = l$ .

Se espera que la solución de la ecuación diferencial, describa de una manera razonable las vibraciones de la cuerda física de una masa homogénea sometida a una tensión.

Para encontrar la solución  $u(x; t)$  de la ecuación unidimensional de la onda, realizamos el siguiente proceso:

- **Separación de variables**

Sea  $u(x; t) = F(x) \cdot G(t)$ , entonces,

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = F(x) \cdot G'(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = F(x) \cdot G''(t)$$

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial x} = F'(x) \cdot G(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = F''(x) \cdot G(t)$$

Reemplazando en las derivadas de segundo orden,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{c^2 \partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Obtenemos:  $F(x) \cdot G''(t) = c^2 F''(x) \cdot G(t)$

Asimismo,

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

La cual es una expresión de variables separables.

Haciendo

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda$$

Se obtiene

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \dots\dots\dots(I)$$

$$G''(t) - c^2 \lambda G(t) = 0 \dots\dots\dots (II)$$

- **Satisfacción de los valores de contorno**

Las ecuaciones I y II son EDOs y bastará resolverlas por el método de coeficientes indeterminados

Dado que  $u(x; t) = F(x) \cdot G(t)$ , busquemos soluciones no triviales en (I).

En  $F''(x) - \lambda F(x) = 0$ , se tiene:

Para  $\lambda = 0$ , la solución general es  $F = c_1x + c_2$ , además  $F(0) = 0$  y  $F(l) = 0$ , entonces  $c_1 = c_2 = 0$ . Por lo tanto  $F = 0$ , lo descartamos porque es una solución trivial.

Para  $\lambda = p^2 > 0$  la solución general es

$$F(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$$

Y  $F(0) = 0$ ,  $F(l) = 0$ , se tiene  $F = 0$ , otra vez solución trivial.

Para  $\lambda = -p^2 < 0$  se tiene  $F''(x) + p^2F(x) = 0$

Y la solución general es:

$$F(x) = A\cos(px) + B\sin(px)$$

Con  $F(0) = A = 0$ ;  $F(l) = B \sin(pl) = 0$ .

Es necesario considerar  $B \neq 0$  porque de lo contrario  $F = 0$ .

En efecto,  $\sin(pl) = 0 \Leftrightarrow pl = n\pi$  de donde,

$$p = \frac{n\pi}{l}, n \in Z, \text{ con } \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

Así, para  $B = 1$ , se obtienen infinitas soluciones y denotamos

$$F(x) = F_n(x), \text{ donde } F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

En forma análoga, obtenemos la solución general para la ecuación (II) dada por  $G''(x) - c^2\lambda G(x) = 0$ , obteniendo,

$$G_n(t) = (A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)).$$

Por consiguiente, la solución  $u_n(x, t) = F_n(x) \cdot G_n(t)$  queda expresada por:

$$G_n(t) = (A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)) \sin(\lambda_n x), n = 1, 2 \dots$$

La cual satisface las condiciones de contorno o frontera del **PVC (1)**.

#### ▪ **Clasificación de las ondas**

Una onda es una señal reconocible que puede ser transferido de un lugar a otro, con una velocidad de propagación reconocible.

Las ondas son de tres tipos:

1. **ONDAS MECÁNICAS.** Son las más conocidas y con quienes estamos más familiarizados. Por ejemplo, las ondas acuáticas, las sonoras y las sísmicas. Tales ondas tienen ciertas características: son gobernadas por las leyes de Newton y pueden existir solo dentro de un medio material, tales como el agua, el aire y las piedras. Las Ondas de Rossby están incluidas en esta clasificación.
2. **ONDAS ELECTROMAGNETICAS.** Estas son menos conocidas, pero de uso constante; son ejemplos comunes las ondas de luz visible y ultravioleta, las de radio y televisión, las de microondas, las ondas de rayos x y de radar. Estas ondas no necesitan un medio material para existir. Las ondas de luz de las estrellas viajan en el vacío del espacio para llegar a nosotros. Todas las ondas electromagnéticas viajan por el vacío a la misma velocidad  $c = 299\,792\,458$  m/s
3. **ONDAS DE MATERIA.** Aunque estas suelen emplearse en tecnología moderna, es probable que no estemos familiarizados con su tipo. Están

asociadas con electrones, protones y otras partículas fundamentales, incluso átomos y moléculas.

### 1.3. Ondas Transversales y Longitudinales

Una onda que se trasmite por una cuerda estirada y tensa es la onda mecánica más simple. Si al extremo de una cuerda estirada se le da un solo movimiento de arriba hacia abajo, una onda en forma de un solo pulso viaja a lo largo de la cuerda. Este pulso y su movimiento pueden ocurrir porque la cuerda está bajo tensión. Si movemos una mano de arriba abajo en continuo movimiento armónico simple, una onda continua viaja a lo largo de la cuerda a una velocidad  $\rightarrow v$ . Como el movimiento de la mano es una función senoidal del tiempo, la onda tiene una forma senoidal en cualquier instante dado. Aquí consideramos una cuerda “ideal”, en la cual no hay fuerzas semejantes en fricción dentro de la cuerda que hagan que la onda se reduzca a medida que viaja. Podríamos ver que el desplazamiento de todos los elementos de la cuerda en oscilación es perpendicular a la dirección de avance de la onda, se dice que este movimiento es trasversal y que la onda es una onda trasversal.

En la presente investigación, analizamos Las ondas planetarias, también llamadas Ondas de Rossby en honor al meteorólogo sueco que estudio por primera vez estos fenómenos atmosféricos. Dichas ondas están representadas matemáticamente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales y tienen su accionar en la atmosfera.

### 1.4 La Atmosfera

Se llama así a la capa gaseosa que envuelve totalmente la tierra. Está formada por una mezcla de gases de los cuales el nitrógeno (78.1 %) y el oxígeno (20.9 %) ocupan el 99 % del total, el resto es argón (0.93 %), dióxido de carbono (0.03 %), vapor de agua y polvo, los cuales son de gran importancia en la determinación del clima de un determinado lugar.

## Clasificación de la atmosfera

De acuerdo a la concentración de gases y fenómenos meteorológicos, la atmosfera aparece formada por una superposición de capas, cada una de las cuales presenta sus propias características. La atmosfera terrestre representa el 0.5 % del radio de la tierra ([1]). Observa el cuadro 1.1

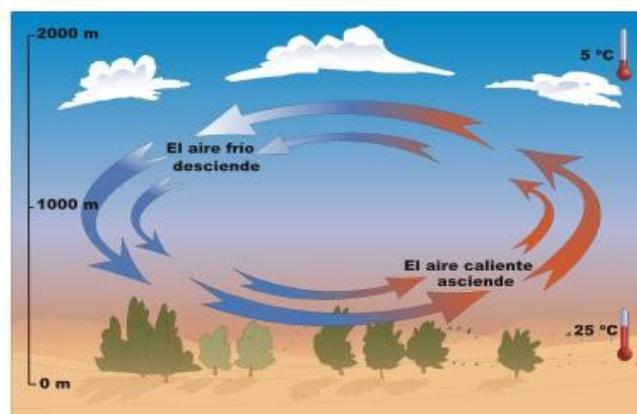
**Cuadro 1.1** Clasificación de la atmosfera

km	División
80 - ....	Termosfera
50 - 80	Mesosfera
10 - 50	Estratosfera
0 - 10	Troposfera

La atmosfera ejerce un enorme peso sobre la superficie terrestre aun cuando para nosotros pasa desapercibida, a esto le llamamos presión atmosférica. Este peso se compara con el que ejercen los océanos sobre sus fondos, análogamente nosotros estamos en el fondo de un océano gaseoso.

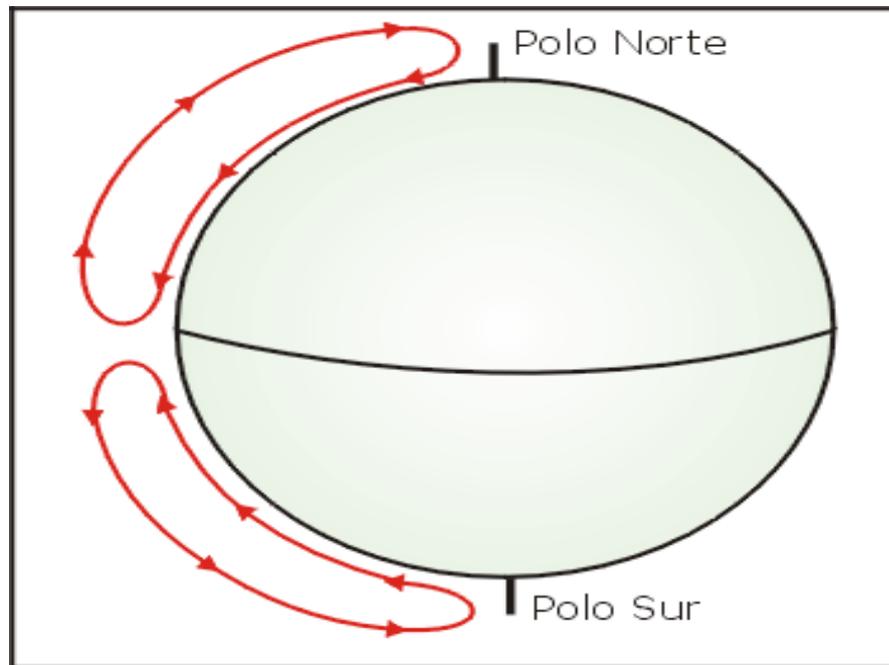
### 1.5 Los vientos

Son desplazamientos de masa de aire de las zonas de alta presión a las zonas de baja presión. Las presiones atmosféricas están íntimamente ligadas a la temperatura. Todo aire caliente pierde peso y se eleva dejando un vacío; es decir, una zona de baja presión que es ocupada por aire de los alrededores y que viene en forma de viento. La **fig.1.1** ilustra el dinamismo de los vientos.



**Fig.1.1** Dinámica de la atmosfera

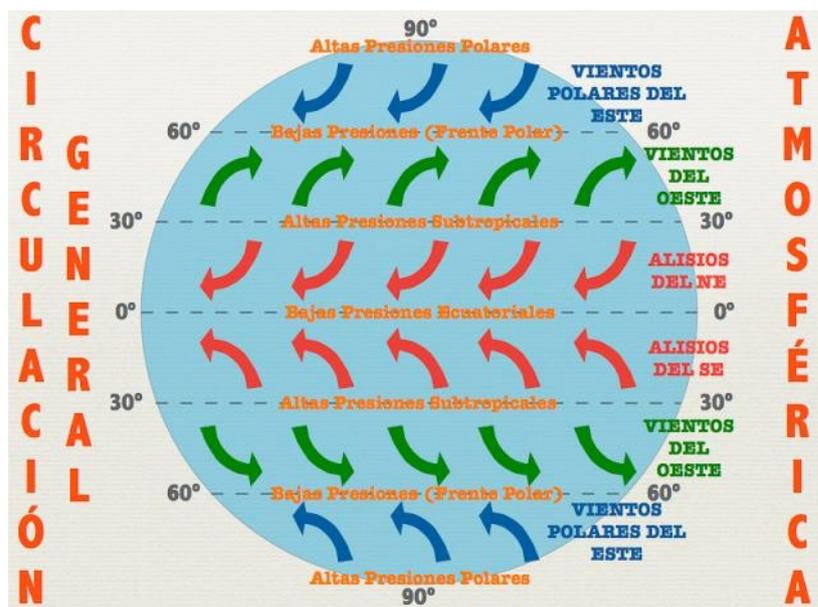
Asimismo, la circulación de los vientos en nuestro planeta desde los polos se refleja en la **fig.1.2**



**Fig. 1.2** Circulación de los vientos desde los polos

Los vientos se producen siguiendo la gradiente térmica, esto es, de las zonas de alta presión a las de baja presión.

La circulación de los vientos en la superficie terrestre de manera general se visualiza en la **fig.1.3**



**Fig. 1.3** Circulación general de los vientos

## 1.6 La Fuerza De Coriolis<sup>1</sup>

Sobre la tierra las personas observamos el movimiento de los fluidos con respecto a este sistema de rotación; Asimismo, las montañas y los océanos están estacionarios respecto de la tierra. La rotación de la tierra ( $\Omega$ ) se realiza de oeste a este. Observa la **fig. 1.4**



**Fig. 1.4.** Rotación de la tierra ( $\Omega$ )

La radiación solar es la energía que provoca que la atmosfera se encuentre en continuo movimiento, ya sea de manera vertical u horizontal.

La tierra, de la energía solar recibida radia una parte a la atmosfera y al espacio exterior en forma de rayos infrarrojos y otra parte la cede por conducción a través del contacto de una capa de aire con su superficie ([1]).

Con el calentamiento, la capa de aire disminuye su densidad y adquiere fuerza ascensional en forma de columnas de aire, burbujas o térmicas. Se produce por tanto un movimiento convectivo (convección), es decir, un movimiento vertical de las columnas de aire caliente a través de la atmosfera más fría que las rodea, movimiento que es fundamental en el desarrollo del tiempo meteorológico

**La convección** corresponde al transporte del calor por el aire por medio de los propios movimientos verticales del aire, sin embargo, si el transporte del calor

en la atmósfera se efectúa horizontalmente estaremos hablando de un proceso de advención. **La advención** corresponde, por tanto, al transporte horizontal de aire, temperatura, humedad, etc.

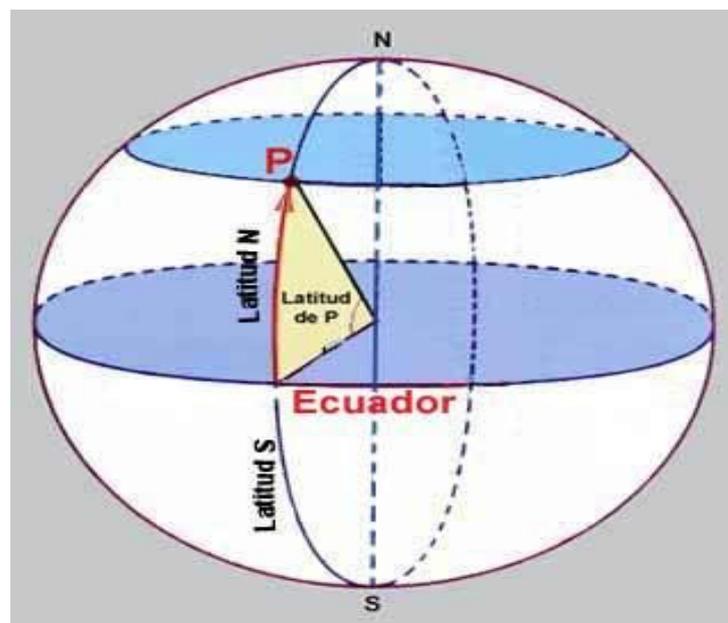
El ascenso y expansión del aire cuando se calienta, y su descenso y contracción cuando se enfría, es el origen del movimiento vertical de la atmósfera. Mientras que las diferencias de presión atmosférica, por el desigual calentamiento de las distintas zonas de la tierra es la causa del movimiento horizontal.

En efecto, la radiación solar aumenta la temperatura del aire terrestre en el ecuador y la falta de ella la disminuye en los polos ([1]).

Con respecto a las coordenadas cartesianas, considerando la variable  $x$  en dirección al este, la variable  $y$  dirigida hacia el norte, entonces sobre la tierra, la fuerza de Coriolis  $f$ , es proporcional a la rotación  $\Omega$  de la tierra y al seno de la latitud  $\varphi$  ([4]), es decir,

$$f: = 2 \Omega \text{sen}(\varphi)$$

Tal efecto de Coriolis se ilustra en la **fig.1.5**



**Fig. 1.5.** Elementos del Efecto de Coriolis

De la definición, notamos que la fuerza Coriolis se anula en el Ecuador ( $\varphi = 0^\circ$ ), pero es máximo en los polos ( $\varphi = 90^\circ$ ).

Asimismo,  $f$  puede ser extendido en una serie de Taylor, así

$$f_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

tomando  $\varphi_0$  como medida de la latitud de referencia,

Si  $\varphi = \varphi_0 + \frac{y}{a}$ , entonces  $\varphi - \varphi_0 = \frac{y}{a}$   $a$  es radio de la tierra

$$f(\varphi) = 2\Omega \text{sen}(\varphi_0) + \frac{(2\Omega \text{sen}(\varphi_0))^2}{2!} \left(\frac{y}{a}\right) + \dots$$

Considerando los dos primeros términos,

$$f(\varphi) = 2\Omega \text{sen}(\varphi_0) + 2\Omega \cos(\varphi_0)(\varphi - \varphi_0)$$

Donde

$$f_0 = 2\Omega \text{sen}(\varphi_0) \text{ es la fuerza de Coriolis}$$

$Q_0 = 2 \left(\frac{\Omega}{a}\right) \cos(\varphi_0)$ , es llamado **beta parámetro** con  $a =$  radio de la tierra.

Debido al aplastamiento de la tierra en los polos se distorsiona su geometría esférica, por ello el radio terrestre ecuatorial es 6 378 km, mientras que el radio polar es 6 357 km.

El efecto de coriolis es debido a la acción de las ondas planetarias a través del tiempo.

### 1.7. Las Ondas de Rossby

Las ondas planetarias lograron ser observadas a nivel mundial gracias a los datos proporcionados por la misión espacial Topex Poseidón ([5]).

Estas ondas son llamadas Ondas planetarias o de Rossby en honor al meteorólogo Sueco Carl Gustaf Rossby, quien fue el primero que tuvo como propósito el estudio de la teoría de dichas ondas en 1928.



**Carl Gustaf Rossby (1898-1957)**

El modelo matemático que rige las Ondas Planetarias o de Rossby ([4]) vienen a estar dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (f_0 + Q_y)v = -g \frac{\partial n}{\partial x} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (f_0 + Q_x)u = -g \frac{\partial n}{\partial y} \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Donde  $f_0$  es la fuerza de Coriolis;  $f_0 = 2\Omega \sin(\varphi_0)$

La aceleración de la gravedad;  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$

$u, v$  son las componentes de la velocidad del viento en la dirección de  $x$  e  $y$  respectivamente

$\eta$  es la superficie desplazada;  $\eta = h - H$ ,  $h$  es altura final y  $H$  es altura inicial.

Las variables independientes son  $x, y, t$

Las cuales son una combinación de términos pequeños (derivadas,  $\beta_0$ ) y grandes ( $f_0, g, H$ ).

En primer lugar, se formulan las ecuaciones generales del movimiento, masa y energía en el sistema de coordenadas cartesianas. Consideremos que  $u, v$ , son las componentes de la velocidad a lo largo de los dos ejes coordenados

Considerando la magnitud de tales términos, tenemos los siguientes resultados:

$$\frac{g}{f_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial y} + \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x}$$

Calculando sus derivadas,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x}$$

Reemplazando  $\frac{\partial u}{\partial t}$  en (1) se tiene:

$$- \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial y} - (f_0 + Q_0 y) v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$- \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial y} - f_0 v - Q_0 y v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$f_0 v = - \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial y} - Q_0 y v + g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$f_0 v = - \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial y} - Q_0 y \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$v = \left( \frac{g}{f_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( \frac{g}{f_0^2} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial y} - \left( \frac{Q_0 g}{f_0^2} \right) y \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots \dots \dots (4)$$

Análogamente, reemplazando  $\frac{\partial v}{\partial t}$  en (2) se tiene:

$$u = -\left(\frac{g}{f_0}\right) \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left(\frac{g}{f_0^2}\right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} + \left(\frac{Q_0 g}{f_0^2}\right) y \frac{\partial \eta}{\partial y} \dots \dots \dots (5)$$

De (5) derivamos u con respecto a x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(\frac{g}{f_0^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{g}{f_0}\right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{Q_0 g}{f_0^2}\right) y \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) \dots \dots \dots (6)$$

Análogamente de (4) derivamos v con respecto a y:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\left(\frac{g}{f_0^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{g}{f_0}\right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{Q_0 g}{f_0^2}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{Q_0 g}{f_0^2}\right) y \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) \dots \dots (7)$$

Ahora, sumando (6) y (7) obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\left(\frac{g}{f_0^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{Q_0 g}{f_0^2}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Este último resultado lo reemplazamos en (3):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left[ -\left(\frac{g}{f_0^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{Q_0 g}{f_0^2}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{Hg}{f_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{Q_0 Hg}{f_0^2}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (8)$$

Además considerando el Radio de deformación de Rossby

$$R = \frac{\sqrt{gH}}{f_0}$$

Y reemplazando en la ecuación (8), hemos logrado deducir la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - R^2 \frac{\partial(\nabla^2 \eta)}{\partial t} - Q_0 R^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

La cual es llamada **Ecuación de desplazamiento superficial** y es la que modela el flujo de las Ondas de Rossby.

## CAPÍTULO II: EL MÉTODO ESPECTRAL DE FOURIER

Las series de **Fourier**<sup>2</sup> constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Fourier fue el primero en proponer en su publicación **Teoría analítica del calor** (1827) que las ondas de forma periódica podrían representarse mediante la suma de ondas sinusoidales. Los métodos numéricos se clasifican en dos grandes categorías: Interpolación (método de colocación) y no interpolación (método espectral de Fourier). Las series de Fourier son más universales que las series de Taylor, dado que muchas funciones periódicas discontinuas no tienen representación en series de Taylor pero sí en Series de Fourier. Las series de Fourier tienen actualmente múltiples aplicaciones en la física (meteorología), mecánica (dinámica de fluidos), economía (volatilidad de los precios), matemática (ecuación de la onda, del calor), electrónica (señal satelital), entre otros.

### 2.1. Ortogonalidad del Sistema Trigonométrico

Consideremos a la familia de funciones periódicas con periodo  $2\pi$

$$\{1, \text{sen}(x), \cos(x), \text{sen}(2x), \cos(2x), \dots, \text{sen}(nx), \cos(nx)\}; n=1,2,3$$

Las cuales satisfacen la propiedad de ortogonalidad, es decir:

- Si  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , entonces  $\int_{-} \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0$

En efecto, si  $\varphi_1(x) = \text{sen}(nx)$ ,  $\varphi_2(x) = \cos(mx)$ , entonces

$$\int_{-} \text{sen}(nx)\cos(mx)dx = 0$$

- Si  $\varphi_1 = \varphi_2$ , entonces  $\int_{-} \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = \pi$

En efecto, si  $\varphi_1(x) = \text{sen}(nx) = \varphi_2(x)$ , entonces

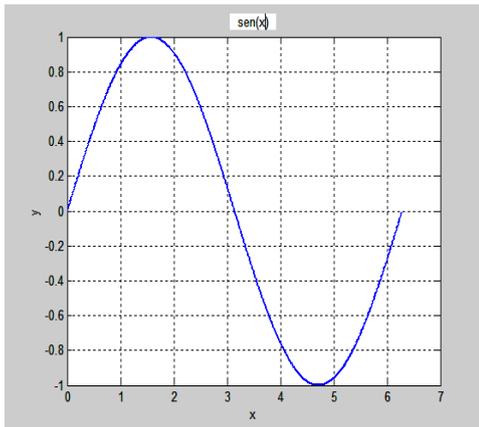
---

<sup>2</sup> Jean Baptiste Fourier. Físico y matemático francés (1768-1830)

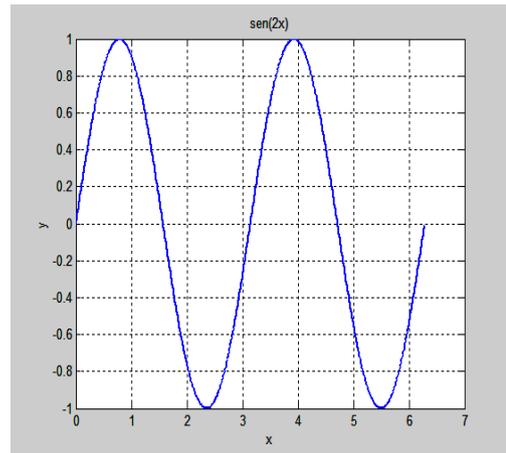
$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} \text{sen}^2(x) dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x)) dx = \pi$$

- Si  $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ , entonces  $\int_0^{2\pi} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 2\pi$

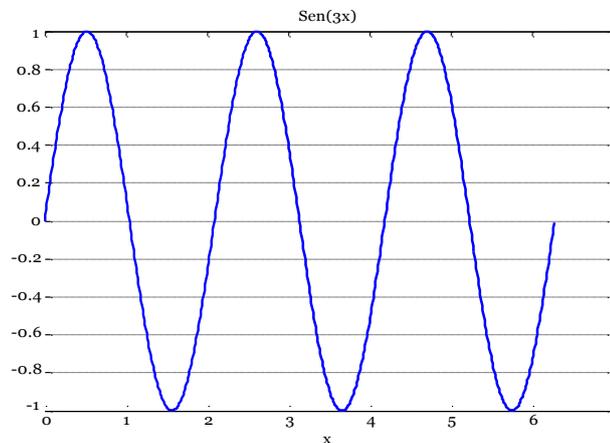
Las funciones sinusoidales definidas en  $[0, 2\pi]$  se observan en la fig.2.1



**Fig. 2.1 a) Grafica de  $\text{sen}(x)$**



**Fig. 2.1 b) Grafica de  $\text{sen}(2x)$**



**Fig. 2.1 c) Grafica de  $\text{Sen}(3x)$**

## 2.2. Series de Fourier

Una serie de Fourier tiene la forma

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \text{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \text{sen} 2x + \dots$$

Donde  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  son constantes reales llamadas coeficientes de Fourier.

Esta misma serie puede escribirse como,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn}x)$$

Se observa que cada término de la serie tiene periodo  $2\pi$ . Luego, si la serie converge puntualmente, su suma será una función de periodo  $2\pi$ .

Veremos que casi cualquier función periódica  $f(x)$  de periodo  $2\pi$  puede representarse por una serie trigonométrica, a la cual le llamamos serie de Fourier.

En efecto, consideremos  $f(x)$  una función periódica de periodo  $2\pi$ , tal que pueda representarse por la serie trigonométrica

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn}x)$$

Es decir, esta serie converge y tiene a  $f(x)$  como su suma entonces  $f(x)$  se escribe como

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn}x) \dots\dots\dots (1)$$

### 2.3. Evaluación de los Coeficientes de Fourier

Para determinar el coeficiente  $a_0$ , integramos ambos miembros de (1) desde  $-\pi$  a  $\pi$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn}x)] dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{senn}x dx)$$

Observamos en el segundo miembro que al hacer uso de la integral de funciones pares e impares, se tiene:

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 2 \left. \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right|_0^{\pi} = 0$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx = 0$
- $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$

De donde obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = a_n \left. \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x dx = -b_n \left. \frac{1}{n} \operatorname{cos} nx \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Por lo tanto,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

En forma análoga, integrando ambos miembros de (1) desde  $-\pi$  a  $\pi$  y multiplicando por  $\cos(x)$  y  $\operatorname{sen}(nx)$  respectivamente, obtenemos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

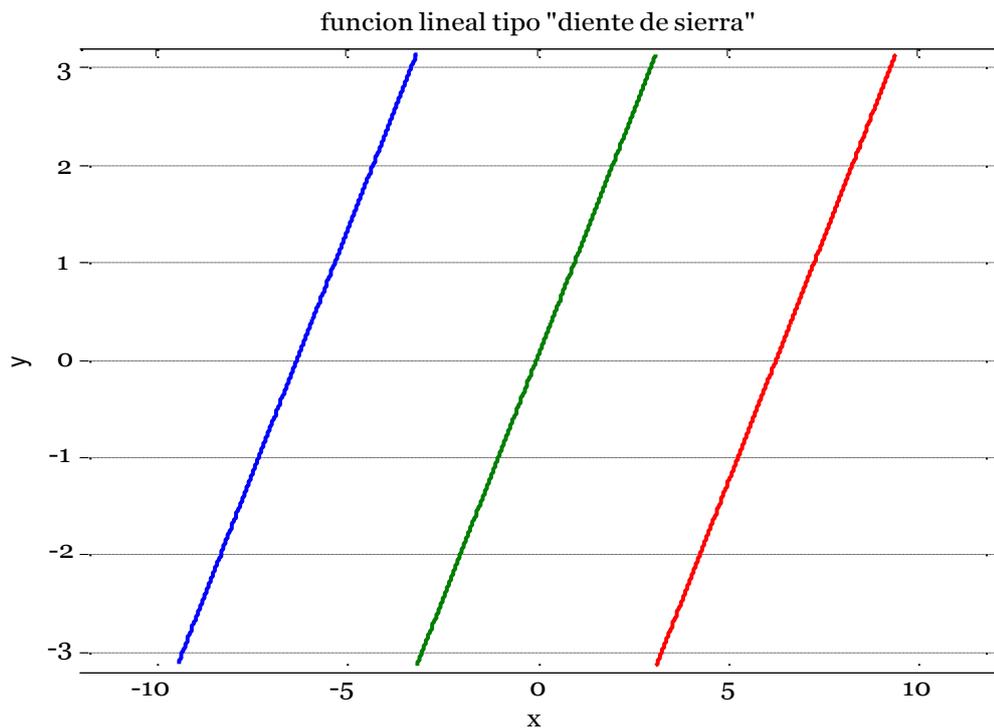
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx$$

**Ejemplo 1.** Encuentra la serie de Fourier para la función con periodo  $2\pi$

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi$$

### Solución

El grafico correspondiente de  $f(x)$  se aprecia en la **fig.2.4 a)**



**Fig.2.4 a) Función lineal**

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Calculo de los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

-

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx,$$

Resolviendo por el método de integración por partes,

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos(nx) dx \rightarrow v = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

$$\text{Así, } a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ x \cdot \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ 0 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{1}{n^2 \pi} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx,$$

Resolviendo por el método de integración por partes,

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(nx) dx \rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$$

$$\text{Luego, } b_n = \frac{1}{\pi} \left\{ x \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n} \cos(nx) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{1}{n} [\pi \cos(nx) - \pi \cos(-n\pi)] + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\}$$

$$b_n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

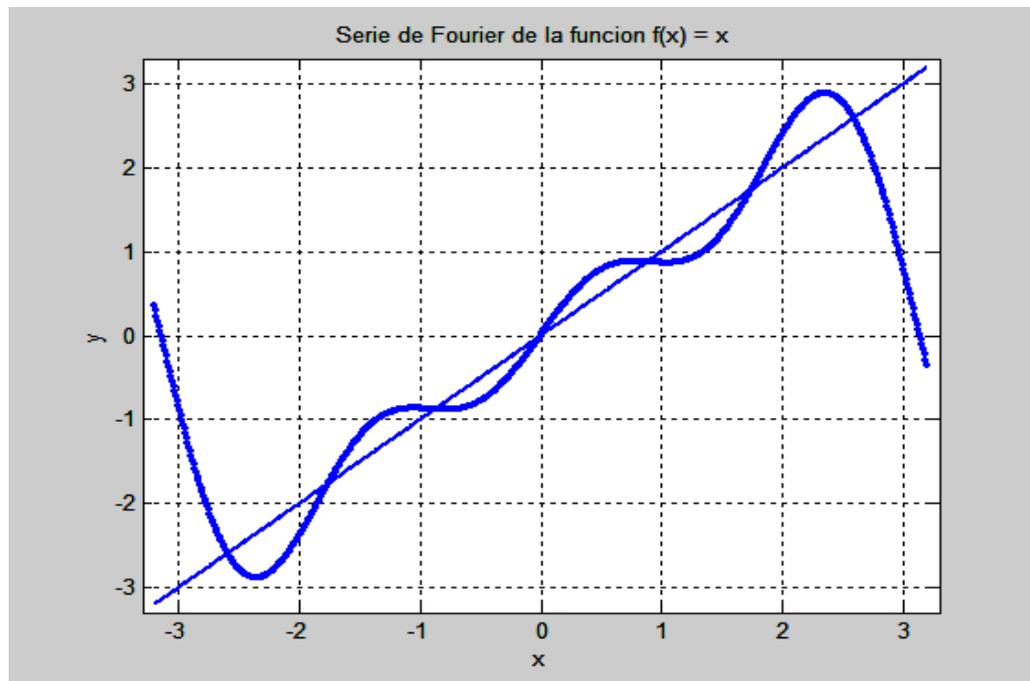
Por lo tanto, la serie de Fourier para  $f(x) = x$  queda expresada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)$$

Y las tres primeras sumas parciales ( $n=3$ ), de acuerdo al fenómeno de Gibbs, estará dado por

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x$$

Este hecho se contrasta en un gráfico realizado en matlab, observando que en el dominio de discontinuidad se produce el fenómeno de Gibbs. Vea la **fig. 2.4b)**



**Fig. 2.4 b)** Armónicos: Tres sumas parciales de la serie de Fourier de la función lineal a trozos o “diente de sierra”

## 2.4. Series de Fourier para funciones con cualquier periodo

Consideremos  $f(x)$  una función periódica de cualquier periodo  $2l$ , tal que pueda representarse por la serie trigonométrica

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \operatorname{senn}\omega_0 x)$$

Donde  $\omega_0$  es la frecuencia definida por  $\omega_0 = \frac{2\pi}{2l}$

Es decir, si esta serie converge y tiene a  $f(x)$  como su suma entonces  $f(x)$  se escribe como

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \operatorname{senn}\omega_0 x) \quad \dots\dots\dots (2)$$

Y los coeficientes de Fourier serán:

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

## 2.5 Fenómeno de Gibbs

Fenómeno que ocurre en los puntos de discontinuidad de la función. Este comportamiento puede observarse con el programa matlab, sin embargo Albert Michelson logro construir una máquina para encontrar los 80 primeros armónicos para la serie de Fourier.

**Ejemplo 2.** Encuentra la serie de Fourier para la función “Tren de pulsos rectangulares” con periodo fundamental  $2\pi$ .

### Solución

La serie de Fourier será calculada usando el software Matlab.

#### PROGRAMA REALIZADO CON MATLAB

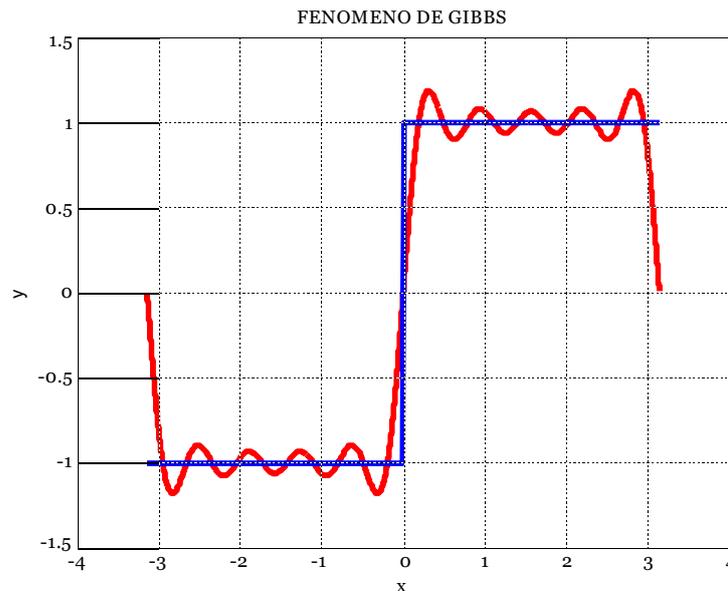
```

>>x=-pi:0.001:pi;
>> f=-1*(x<0)+1*(x>0);
>> s=zeros(size(x));
>> for k=1:n
s=s+((1-(-
1)^k)/k)*sin(k*x);end
for k=1:10 % Aproximación con 10
armónicoss=s+((1-(-1)^k)/k)*sin(k*x);
end

```

```
>> s=2/pi*s;
>> plot(x,s,'r',x,f,'b'),grid;
>> plot(x,s,'r',x,f,'b','linewidth',2),grid;
>> plot(x,s,'r',x,f,'b','linewidth',3),grid;
```

La serie de Fourier con 10 armónicos se visualiza en la **fig. 2.5**



**Fig. 2.5** Fenómeno de Gibbs con 10 armónicos

## 2.6 Forma compleja de la serie de Fourier

La serie de Fourier (1) puede escribirse en forma compleja, la cual en ocasiones simplifica los cálculos.

De esta manera  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ , donde  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx$

### Ejemplo 2.-

Desarrolla la serie de Fourier en forma compleja de  $f(x) = e^x$ ,  $-\pi < x < \pi$

### Solución

Calculando el coeficiente  $c_n$ ,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi(1-in)} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

Multiplicando y dividiendo por la conjugada  $(1+in)$  se tiene,

$$c_n = \frac{(1+in)}{\pi(1+n^2)} (-1)^n \operatorname{senh}(\pi)$$

De esta manera la serie compleja de Fourier es

$$f(x) = \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+in)}{1+n^2} e^{inx}, \quad -\pi < x < \pi$$

## 2.7. El Método Pseudoespectral de colocación.

Sea el PVC con condiciones de **Dirichlet**<sup>3</sup> de segundo orden lineal, sobre el dominio  $\Omega = [a, b]$ :

$$\text{(PVC)} \begin{cases} y'' + Q(x)y = P(x) \\ y(a) = y_0 \\ y(b) = y_n \end{cases}$$

Los métodos de Galerkin y Colocación, nos permiten encontrar una solución aproximada  $u(x)$  a la solución exacta  $y(x)$ .

Tal aproximación  $u(x)$  a la solución del problema de valor de contorno (PVC) se define de la siguiente manera:

$$u(x) = c_0 v_0(x) + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + \dots + c_n v_n(x)$$

O también

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i v_i(x)$$

Donde  $c_i \in R$ , los  $v_i$  son polinomios linealmente independientes llamados Funciones de ensayo o de prueba.

En la ecuación  $y'' + Q(x)y = P(x)$ , la aproximación  $u(x)$  origina el siguiente residuo:

$$R(x) = u'' + Q(x)u - P(x)$$

La idea es minimizar el residuo bajo algún criterio, algunos de los cuales son: Los métodos de Colocación y Galerkin.

▪ **El método de Colocación**

Este método requiere que la ecuación diferencial sea satisfecha exactamente en un conjunto de puntos, llamados puntos de “colocación interpolación”. Proviene de los términos “co” = junto con y “locus” = lugar. Este método trata de minimizar localmente el residuo, haciendo  $R(x) = 0$  en determinados puntos del dominio, aquí el error es mínimo entre la solución exacta y la aproximada. Para ello, el número de puntos considerados del dominio debe ser igual al número de coeficientes desconocidos  $c_i$ , donde  $c_i \in \mathbf{R}$ .

**Problema 1.** Resuelve el PVC

$$(1) \quad y'' + \frac{\pi^2}{4} y = \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4} x\right), \quad 0 < x < 1$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

**Solución**

Consideremos el polinomio de aproximación;

$$u(x) = c_1 x(x - 1)$$

El cual cumple con las condiciones de contorno.

La función residual resulta,

$$R(x) = u'' + \frac{\pi^2}{4} u - \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4} x\right)$$

Donde,

$$u' = 2c_1 x - c_1$$

$$u'' = 2c_1$$

Como tenemos una sola constante  $c_1$  es necesario dar un punto del dominio. Consideremos el punto  $x_0 = \frac{1}{2}$  y resolvemos  $R(x) = 0$  para hallar la constante  $c_1$

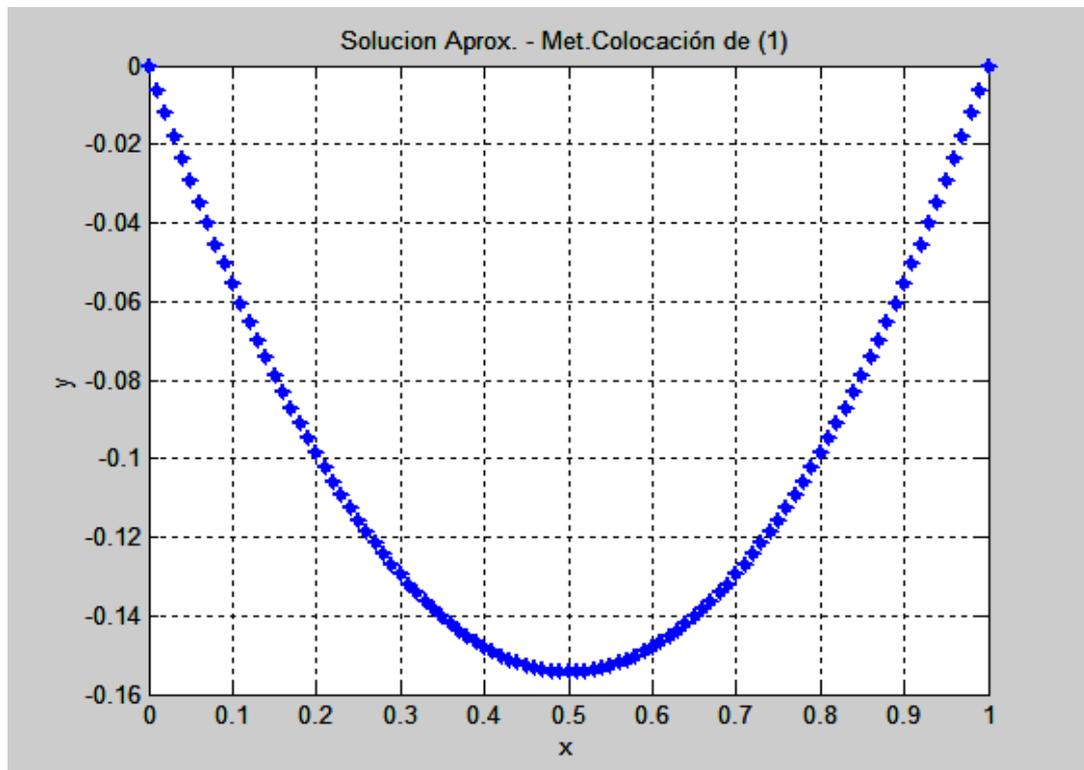
$$\text{Sea } R(x) = \frac{2c_1}{1} + \frac{c_1^2}{4} x(x-1) - \frac{\cos(x)}{16} \frac{1}{4}$$

Sustituimos  $x = \frac{1}{2}$  de donde se obtiene  $c_1 = 0.61684303$

Por lo tanto, la solución aproximada mediante el método de colocación o llamado también seudo espectral es:

$$u(x) = 0.61684303x(x-1)$$

La solución aproximada obtenida se visualiza en la **fig. 2.6**



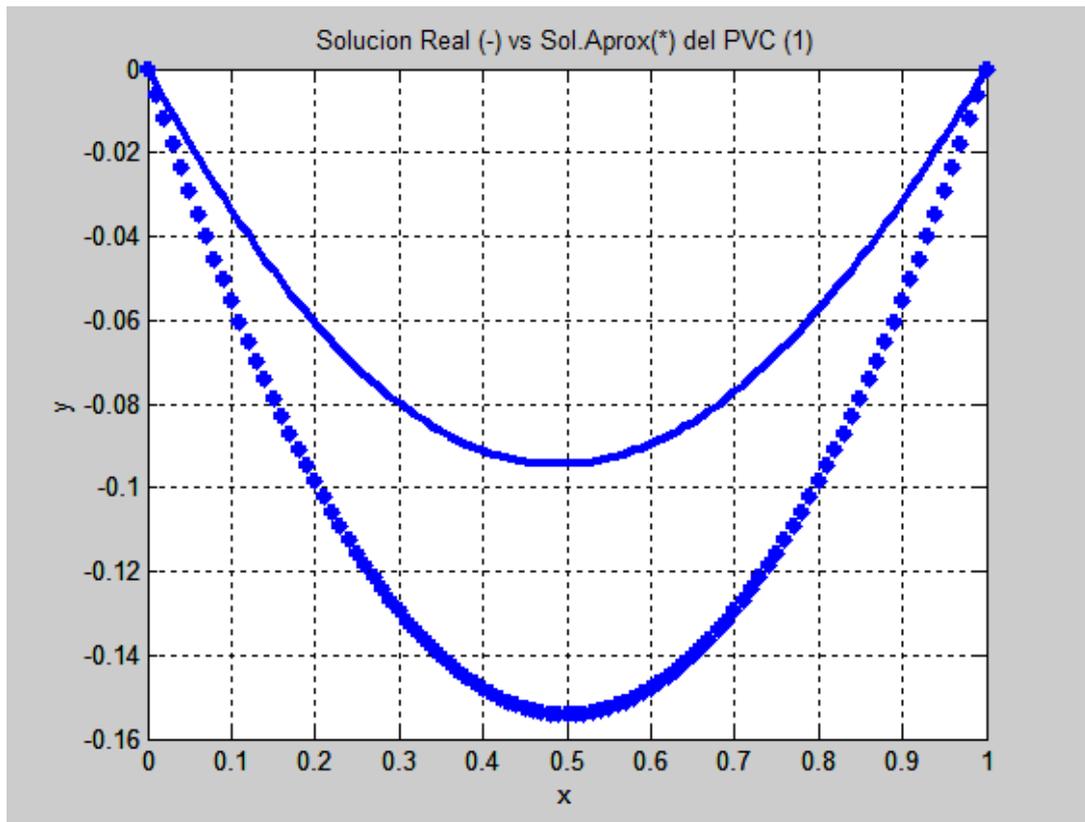
**Fig. 2.6** Gráfica de la solución aproximada del PVC (1) mediante el método de colocación.

Según el Método de los coeficientes indeterminados, El PVC (1) admite una solución exacta dada por

$$y = -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right), x \in [0; 1]$$

La solución exacta y su grafica del PVC (1) es presentada en el anexo A, **Fig.A.1**

La comparación entre las soluciones exacta y aproximada es visualizada en la **fig. 2.7**



**Fig. 2.7** Grafica de la solución exacta y aproximada del PVC (1)

**Problema 2.-** Resuelve el PVC

$$(2) \begin{cases} y'' + y = 3x^2, 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 3,5 \end{cases}$$

**Solución**

Según el Método de colocación, consideremos el siguiente polinomio de aproximación con un grado de libertad ( $c_1$ ) :

$$u(x) = \frac{7}{4}x + c_1x(x - 2)$$

Y sus derivadas sucesivas:  $u' = \frac{7}{4} + 2c_1x - 2c_1$

$$u'' = 2c_1$$

Además, el residuo  $R(x) = u'' + u - 3x^2$

Haciendo  $R(x) = 0$  y reemplazando  $u$  y  $u''$ , tenemos:

$$2c_1 + \frac{7}{4}x + c_1x^2 - 2c_1x - 3x^2 = 0$$

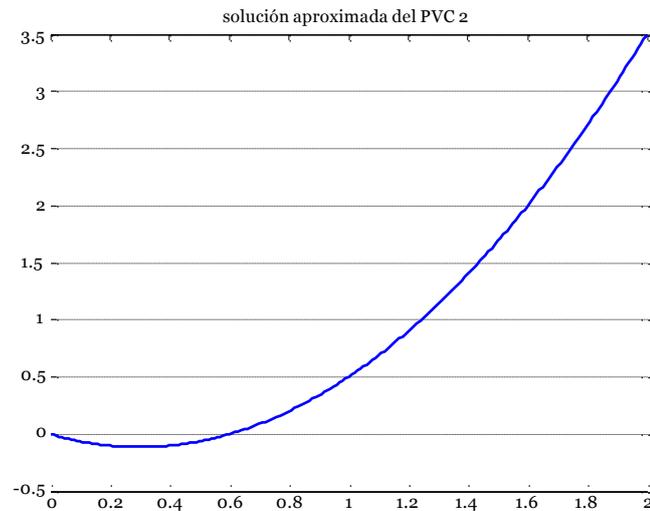
$$(2 + x^2 - 2x)c_1 = 3x^2 - \frac{7}{4}x$$

Dado que hay una constante  $c_1$ , basta considerar un punto del dominio  $\Omega = [0; 2]$

Escojo el punto equidistante  $x = 1$  y obtenemos  $c_1 = \frac{5}{4}$

$$\therefore u(x) = \frac{7}{4}x + \frac{5}{4}x(x - 2) \blacksquare$$

La grafica se visualiza en la **fig. 2.8 a)**



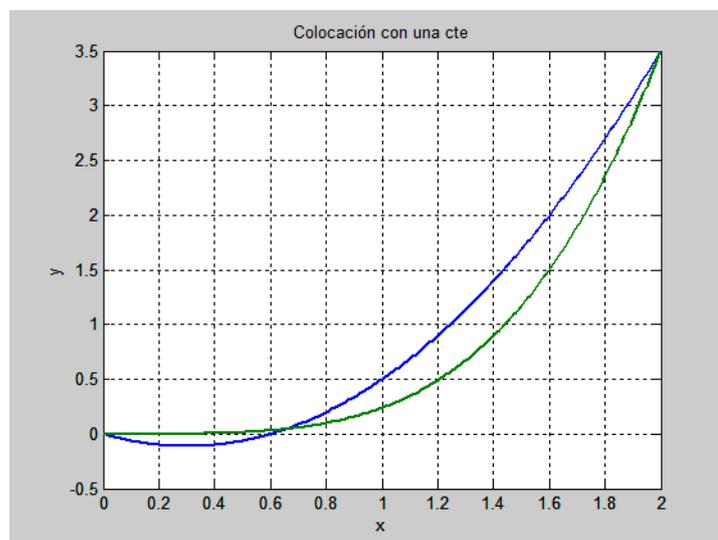
**Fig. 2.8 a)** Grafica de la solución aproximada mediante colocación con un grado de libertad.

La solución exacta del PVC (2) mediante el método de los coeficientes indeterminados está dada por

$$y = 6\cos(x) - 0.0037 \operatorname{sen}(x) + 3x^2 - 6.$$

La grafica de la solución exacta del PVC (2) se aprecia en el Anexo A, **fig. A.2**

La comparación entre las soluciones exacta y aproximada se visualiza en la **fig. 2.8 b)**



**Fig. 2.8 b)** Comparación entre las soluciones exacta y aproximada con un grado de libertad.

## 2.8. El método de Galerkin <sup>4</sup>

Es también residual y usa la misma función residual  $R(x)$ , excepto que ahora  $R(x)$  se multiplica por ciertas funciones de ponderación  $w_i(x)$ . Galerkin demostró que una elección especial de aquellos  $w_i(x)$  es reemplazarlos por las funciones de prueba  $v_i(x)$ .

Una vez seleccionados los  $w_i$ , los coeficientes desconocidos  $c_i$  se calculan al minimizar el residuo ponderado, es decir igualando a cero la integral sobre el intervalo  $[a; b]$  del residuo acumulado

$$\int_a^b w_i(x)R(x)dx = 0$$

**Problema 1.** Sea el PVC

$$(1) \quad y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right), \quad 0 < x < 1$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Consideremos el Polinomio

$$u(x) = c_1v_1(x) + c_2v_2(x) + \dots + c_nv_n(x)$$

Con  $u(x) = c_1x(x - 1)$

Considerando la función de prueba  $x(x - 1)$  formulamos el modelo según Galerkin:

$$\int_0^1 x(x - 1) \left[ 2c_1 + \frac{\pi^2}{4}c_1x(x - 1) - \frac{\pi^2}{16}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right] dx = 0$$

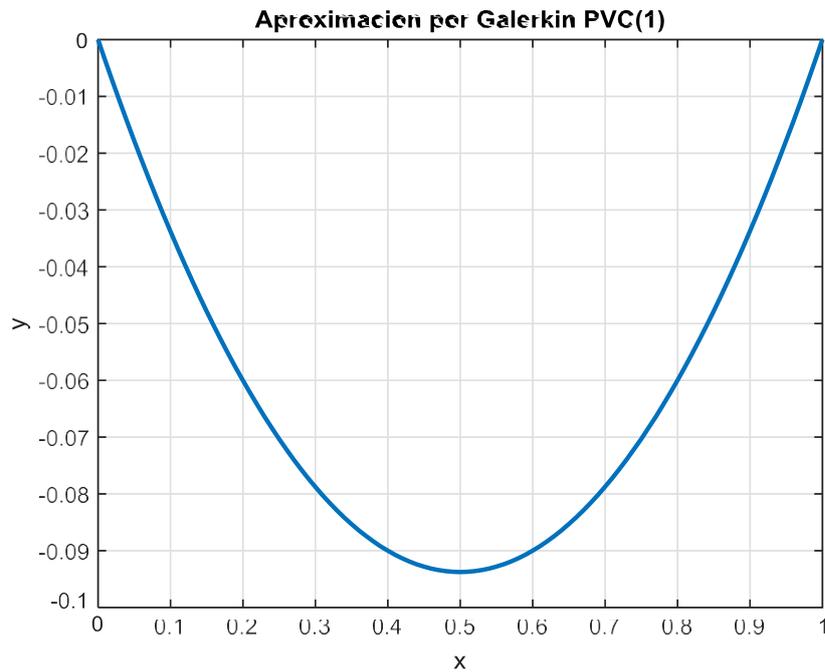
Evaluando e integrando por partes se obtiene  $c_1 = 0.375$

Por lo tanto, la solución aproximada mediante el método de Galerkin es:

$$u(x) = 0.375x(x - 1)$$

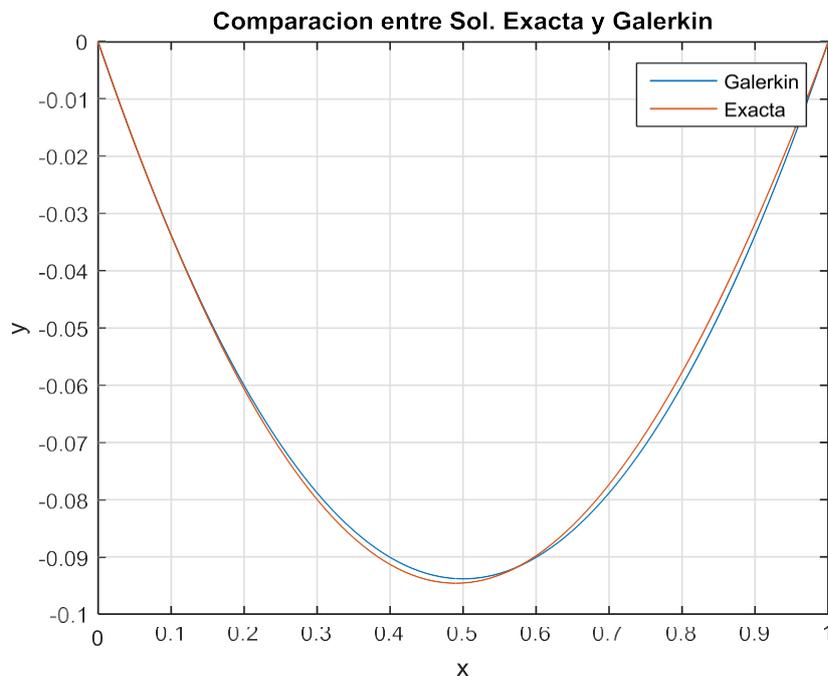
<sup>4</sup> Boris Grigorevich Galerkin. Matemático ruso (1871-1945)

La grafica de tal sol. Aproximada se observa en la fig. 2.9 a)



**Fig. 2.9 a)** Grafica de la solución aproximada mediante Galerkin del PVC (1).

La solución aproximada obtenida mediante el método de Galerkin es muy cercana a la solución exacta. Tal comparación se observa en la fig. 2.9 b)



**Fig. 2.9 b)** Grafica de la sol. Exacta y aproximada mediante Galerkin del PVC (1).

Nota: una variante del método de Galerkin es el método de FAEDO-GALERKIN, donde la elección de la función de ponderación, es tomada de un factor de la función de prueba.

Consideremos  $v_i(x) = x$  y formulemos el modelo siguiente:

$$\int_0^1 x \left[ 2c_1 + \frac{\pi^2}{4} c_1 x(x-1) - \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right] dx = 0$$

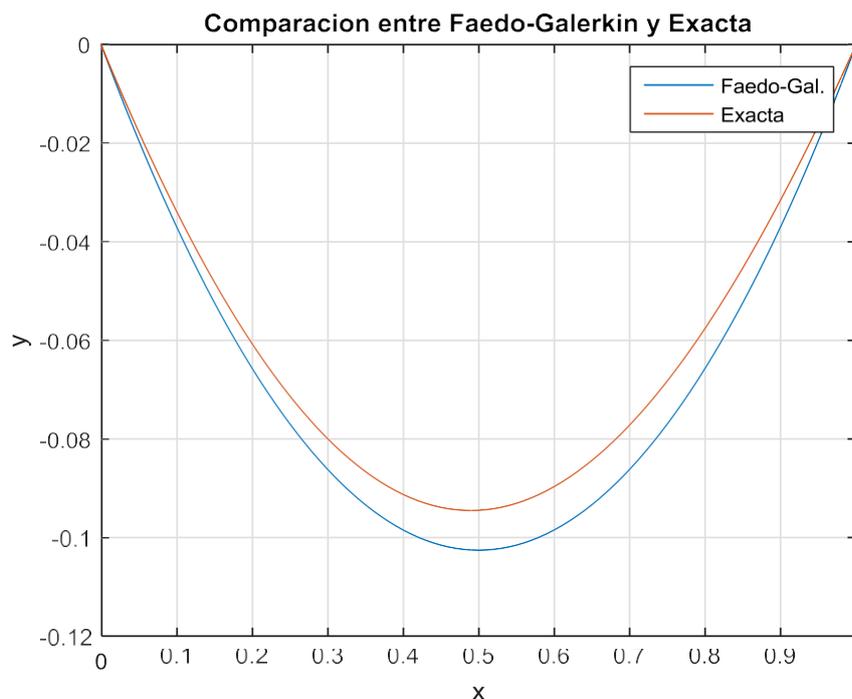
$$2c_1 \int_0^1 x dx + \frac{\pi^2}{4} c_1 \int_0^1 x(x-1) dx - \frac{\pi^2}{16} \int_0^1 x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx = 0$$

Resolviendo e integrando por partes, obtenemos  $c_1 = 0,41017099$

Por lo tanto, la solución aproximada mediante el método espectral de Faedo - Galerkin es:

$$u(x) = 0,41017099x(x-1)$$

La solución aproximada obtenida mediante el método de Faedo - Galerkin y la exacta se observa en la **fig. 2.10**



**Fig. 2.10** Gráfica de la solución exacta y aproximada del PVC (1) mediante Faedo - Galerkin.

**Problema 2.-** Resuelve el PVC

$$(2) \begin{cases} y'' + y = 3x^2, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 3,5 \end{cases}$$

**Solución**

$$\text{Sea } u(x) = \frac{7}{4}x + c_1 x(x-2)$$

$$\text{Entonces } \int_0^2 w_1(x) R(x) dx = 0$$

$$\text{Donde } w_1(x) = x(x-2) \text{ y } R(x) = u'' + u - 3x^2$$

$$\int_0^2 x(x-2) \left( 2c_1 + \frac{7}{4}x + c_1x^2 - 2c_1x - 3x^2 \right) dx = 0$$

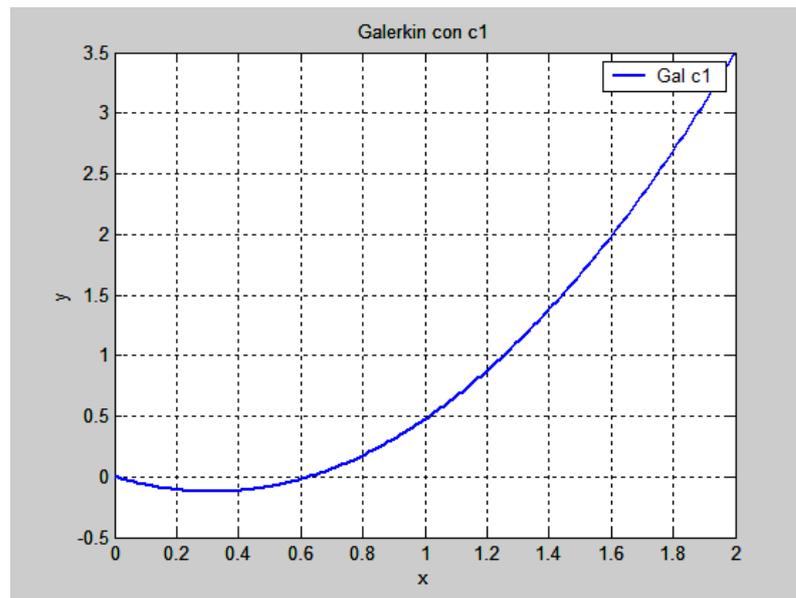
$$\int_0^2 \left( 2c_1x^2 + \frac{7}{4}x^3 + c_1x^4 - 2c_1x^3 - 3x^4 - 4c_1x - \frac{7}{2}x^2 - 2c_1x^3 + 4c_1x^2 + 6x^3 \right) dx = 0$$

$$-\frac{2c_1}{1}x^2 \Big|_0^2 + \left(\frac{12c_1-7}{6}\right)x^3 \Big|_0^2 + \left(\frac{31-16c_1}{16}\right)x^4 \Big|_0^2 + \left(\frac{c_1-3}{5}\right)x^5 \Big|_0^2 = 0$$

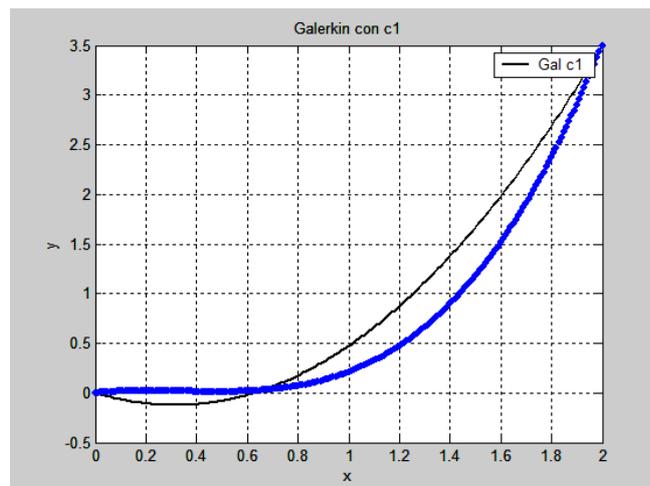
$$\text{De donde } c_1 = \frac{37}{24}$$

$$\text{Luego, } u(x) = \frac{7}{4}x + \frac{37}{24}x(x-2) \blacksquare$$

Observa la **fig. 2.11**



**Fig. 2.11** Solución aproximada mediante Galerkin del PVC (2)



**Fig. 2.12** Comparación de la exacta con la solución de Galerkin del PVC (2)

**Importante:**

Los métodos de Galerkin y colocación aproximan efectivamente la solución de un problema de valor en la frontera. Se concluye que el método de colocación es un caso particular del método de Galerkin dado que el método de colocación aproxima punto por punto, sin embargo Galerkin lo hace para todo el dominio de definición.

Paralelamente a la relevancia que tiene la utilidad de los polinomios

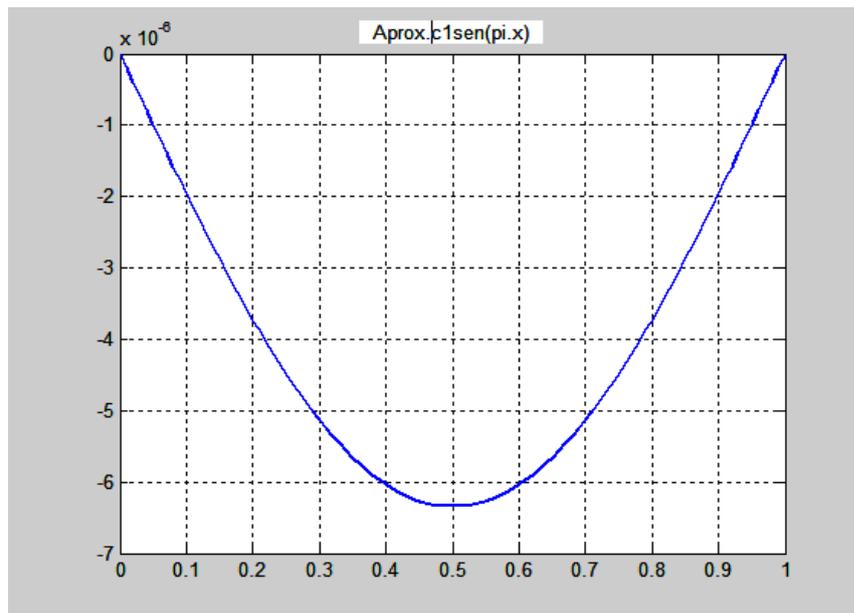
algebraicos en dichos métodos de aproximación, tenemos las funciones trigonométricas los cuales tienen relevancia en las series de Fourier.

Integrando por partes se obtiene  $c_1 = -0.000006344285$

Por lo tanto la solución aproximada es:

$$u(x) = -0,000006344285 * \text{sen}(\pi x)$$

La grafica se observa en la **fig. 2.13**



**Fig. 2.13** Solución aproximada mediante el polinomio trigonométrico del PVC (1)

## CAPÍTULO III: SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LAS ONDAS ROSSBY<sup>5</sup> MEDIANTE EL MÉTODO ESPECTRAL DE FOURIER

Los métodos numéricos se clasifican en dos grandes categorías: Los que utilizan interpolación y los que no utilizan interpolación. El método de interpolación, también llamado **Pseudoespectral**, asocia una rejilla de puntos con cada conjunto base; mientras que los métodos de no interpolación, también llamados **Espectrales**, calculan los coeficientes de la función conocida multiplicándolos con un conjunto de funciones bases mediante la integración. Las funciones bases de los métodos espectrales son determinados por ortogonalidad discreta con respecto a conjuntos preseleccionados de puntos de colocación  $x_i$ . Este proceso es una guía para la interpolación global con una correspondencia uno a uno.

La diferencia de los métodos espectrales y pseudoespectrales difiere principalmente en su estrategia de minimización de la función residual. La eficiencia de los métodos espectrales versus otros métodos en el contexto de su gran resolución puede ser cuantificado en términos del ahorro en el número de grados de libertad involucrados.

El método espectral de Fourier está expresado en términos de funciones trigonométricas para lograr una aproximación a la solución exacta. En efecto, usamos un conjunto ortogonal de funciones de prueba trigonométricas. De una manera similar, otras familias de polinomios ortogonales conducen al método espectral de Chebyshev, método espectral de Hermite, entre otros.

### 3.1. Número de Onda y frecuencia angular

Para un tiempo  $t > 0$ , el desplazamiento  $\eta(x, y, t)$  del elemento ubicado en la posición  $(x, y)$  está dado por

$$\eta(x, y, t) = A \cos(k_x x + k_y y - \omega t) \text{ con } A, k_x, k_y, \omega \in \mathbb{R}$$

Donde las constantes numéricas están expresadas en el sistema internacional de unidades.

A es Amplitud de la onda e indica la magnitud de su máximo desplazamiento.

$k_x, k_y$  son números angulares de la onda en la dirección de los ejes x e y respectivamente

$(k_x x + k_y y - \omega t)$  es su fase. La fase de la onda es el argumento, la función coseno varía entre +1 y -1.

$\omega = f(k_x, k_y)$  es la frecuencia angular  
 $(x, y)$  es la posición

En el sistema bidimensional tenemos que la frecuencia angular  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Y la frecuencia  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

### 3.2. Simulación numérica de las Ondas Rossby.

Una onda viajera tipo

$$\eta(x, y, t) = \cos(k_x x + k_y y - \omega t) \dots\dots\dots (1)$$

Con frecuencia  $\omega$ , la cual está en función del número de onda  $k_x$  y  $k_y$  es solución de la ecuación

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - R^2 \frac{\partial(\nabla^2 \eta)}{\partial t} - Q \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

La cual modela el flujo de las ondas de Rossby.

La dependencia de la frecuencia angular  $\omega$  en  $\frac{rad}{s}$  respecto de los números angulares  $k_x$  y  $k_y$  expresadas en  $\frac{rad}{m}$  es intrínseca.

La relación de dispersión entre  $w = w(k_x, k_y)$  esta dada por:

$$w(k_x, k_y) = - \frac{Q_0 R^2 k_x}{1 + R^2(k_x^2 + k_y^2)}$$

Para la obtención de esta relación, usamos los siguientes argumentos físicos. Típicamente, el valor en latitud media sobre la tierra del beta parámetro  $\beta_0 = 2 \times 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$ , la fuerza de Coriolis  $f_0 = 8 \times 10^{-5} s^{-1}$ , el radio de deformación de Rossby es  $R = \frac{\sqrt{gH}}{f_0}$

En efecto, calculando las siguientes derivadas parciales de la onda  $\eta$  tenemos:

- i)  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \text{ sen}(k_x x + k_y y - wt)$
- ii)  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -k_x \text{ sen}(k_x x + k_y y - wt)$
- iii)  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -k_x^2 \text{ cos}(k_x x + k_y y - wt)$
- iv)  $\frac{\partial \eta}{\partial y} = -k_y \text{ sen}(k_x x + k_y y - wt)$
- v)  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -k_y^2 \text{ cos}(k_x x + k_y y - wt)$
- vi)  $\Delta \eta = -(k_x^2 + k_y^2) \text{ cos}(k_x x + k_y y - wt)$

Por lo tanto, habiendo expresado  $w$  bajo esta relación dedispersión,  $\eta(x, y, t)$  satisface la ecuación (2).

### 3.3 Aplicaciones.

#### A. Primera aplicación: Flujo de los vientos en la zona ecuatorial.

El instituto del mar del Perú (**IMARPE**), monitorea continuamente el flujo y la velocidad de los vientos en la zona ecuatorial, específicamente en la longitud promedio del Ecuador desde los  $160^{\circ}\text{E}$  a  $80^{\circ}\text{W}$  y latitud desde los  $5^{\circ}\text{N}$  hasta  $5^{\circ}\text{S}$ . Tal monitoreo es importante porque la dinámica de dichas ondas están asociadas al fenómeno **El niño** (Llue E, ISBN 9789972550058).

La ubicación de la zona ecuatorial, se aprecia en la **fig. 3.1**



**Fig.3.1 Zona ecuatorial.** Latitud:  $5^{\circ}\text{N}$  a  $5^{\circ}\text{S}$ , Longitud:  $120^{\circ}\text{E}$  (Este del Ecuador) a  $80^{\circ}\text{W}$  (Oeste cerca a Perú).

A continuación, se muestran los datos de la longitud en el Ecuador (variable espacial) y la velocidad del viento (variable de desplazamiento). El signo negativo indica la velocidad del viento en la dirección Oeste y, el signo positivo es la dirección del viento hacia el Este (también llamadas ondas Kelvin). Vea tabla 3.2

**Tabla 3.2** velocidad de los vientos (m/s) en la zona ecuatorial para el 15 de Junio de 2015, a las 18 h.

120 E	121 E	122 E	123 E	124 E	125 E	126 E	127 E	128 E	129 E	130 E	131 E	132 E	133 E
1.14	1.06	-0.67	-0.59	-0.44	0.24	1.07	1.2	2.22	2.22	2.6	3.15	4.38	4.07
134 E	135 E	136 E	137 E	138 E	139 E	140 E	141 E	142 E	143 E	144 E	145 E	146 E	147 E
2.85	4.39	3.63	4.24	3.81	3.23	3.46	3.67	3.49	3.84	4.02	4.37	4.25	4.61
148 E	149 E	150 E	151 E	152 E	153 E	154 E	155 E	156 E	157 E	158 E	159 E	160 E	161 E
5.09	6.18	6.92	8.24	7.84	8.86	9.66	10.42	10.69	10.78	11.06	10.81	10.32	8.05
162 E	163 E	164 E	165 E	166 E	167 E	168 E	169 E	170 E	171 E	172 E	173 E	174 E	175 E
7.62	6.4	5.96	5.27	4.41	3.62	3.19	2.3	1.11	0.1	-0.74	-1.53	-2.17	-2.95
176 E	177 E	178 E	179 E	180	179 W	178 W	177 W	176 W	175 W	174 W	173 W	172 W	171 W
-3.59	-3.86	-4.23	-4.11	-3.64	-3.72	-4.59	-5.23	-5.83	-6.44	-5.57	-4	-4	-3.57
170W	169 W	168 W	167 W	166 W	165 W	164 W	163 W	162 W	161 W	160 W	159 W	158 W	157 W
-3.31	-2.74	-2.59	-2.71	-2.61	-3	-2.85	-2.76	-2.73	-2.29	-2.27	-2.04	-2.44	-2.14
156W	155 W	154 W	153 W	152 W	151 W	150 W	149 W	148 W	147 W	146 W	145 W	144 W	143 W
-2.96	-3.12	-4.07	-4.47	-4.72	-5.22	-5.16	-5.46	-5.27	-5.08	-4.91	-4.95	-4.84	-4.56
142W	141 W	140 W	139 W	138 W	137 W	136 W	135 W	134 W	133 W	132 W	131 W	130 W	129 W
-4.6	-4.68	-5.03	-5.33	-5.42	-5.4	-5.14	-4.89	-4.2	-3.84	-3.83	-5.24	-5.79	-5.77
128W	127 W	126 W	125 W	124 W	123 W	122 W	121 W	120 W	119 W	118 W	117 W	116 W	115 W
-6.12	-6.38	-6.78	-7.05	-6.9	-6.83	-6.83	-6.65	-6.67	-6.7	-6.47	-6.42	-6.18	-5.9
114W	113 W	112 W	111 W	110 W	109 W	108 W	107 W	106 W	105 W	104 W	103 W	102 W	101 W
-6.03	-5.7	-5.41	-5.44	-5.11	-5.06	-5.05	-5.02	-5.2	-4.89	-5.11	-4.87	-4.57	-4.51
100W	99 W	98 W	97 W	96 W	95W	94 W	93 W	92 W	91 W	90 W	89 W	88 W	87 W
-4.63	-4.59	-4.54	-4.62	-4.08	-3.9	-3.41	-2.8	-2.43	-2.34	-2.03	-1.7	-1.47	-1.23
86 W	85 W	84 W	83 W	82 W	81 W	80 W							
-0.75	-0.52	0.01	0.57	1.13	2.46	1.77							

**Fuente:** Instituto del mar del Perú (IMARPE)

Este fenómeno físico es modelado por la onda cosenoidal,

$$y(x, t) = A \cos(k_x x + wt) \dots \dots \dots \text{(I)}$$

Donde A es la amplitud (m)

$k_x$  es el número angular de onda (rad/m)

w es la frecuencia angular (rad/s)

$y(x, t)$  es el desplazamiento

Para un instante  $t = 0$ , la ecuación (I) queda expresada por:

$$y(x, 0) = A \cos(k_x x) \dots \dots \dots \text{(II)}$$

### Condiciones de contorno:

Consideremos como distancia inicial la longitud en el ecuador  $160^\circ\text{E}$  y su correspondiente velocidad inicial  $10.32 \text{ m/s}$  (signo positivo indica hacia el Este, signo positivo del eje x).

La distancia final será la longitud en el ecuador de  $80^\circ \text{W}$  (con velocidad  $1.77 \text{ m/s}$ ). Teniendo en cuenta la equivalencia internacional de  $1^\circ = 110 \text{ km}$ , la distancia final será  $(110 \text{ km})(120^\circ)$ , resultando  $13\,200\,000 \text{ m}$ .

En efecto, las condiciones de contorno son:

$$\begin{cases} y(0,0) = 10.32 \text{ m/s} \\ y(13\,200\,000, 0) = 1.77 \text{ m/s} \end{cases}$$

Para el tiempo inicial  $t=0$ , reemplazamos  $y(0,0) = 10.32$  en (II) y obtenemos;  $10.32 = A \cos(0)$ , de donde la amplitud  $A=10.32$

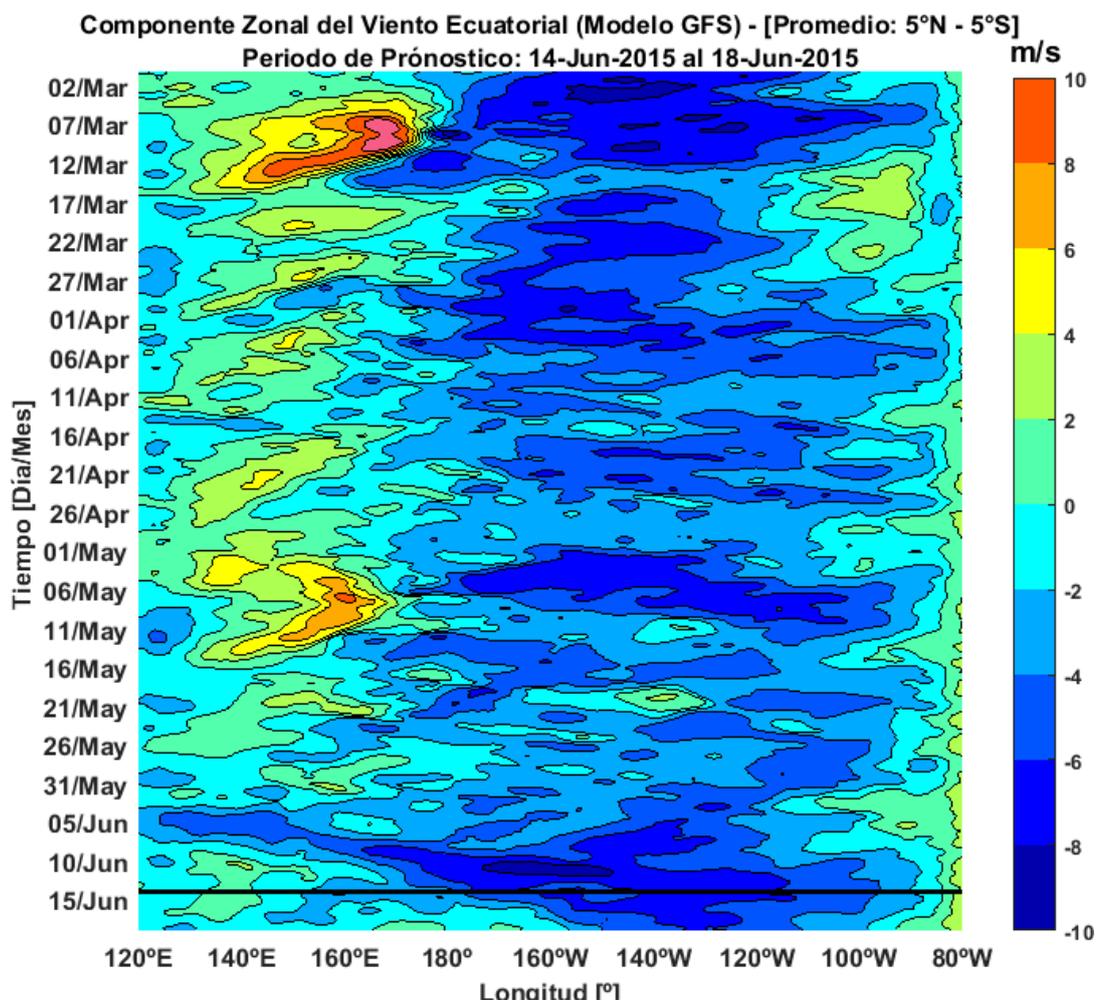
Luego,  $y(x, 0) = 10.32 \cos(k_x x)$ .

Si reemplazamos la variable espacial  $x=0$ , entonces  $y(0,0) = 10.32$ , que es lo que se verifica en la ecuación (II) para el instante  $t=0$ . Análogamente, los 121 datos de la tabla 3.2 modelan gráficamente la onda cosenoidal, tal como se aprecia en la **fig. 3.3**.



La grafica describe la dinámica de los vientos al frente y a lo largo de la costa peruana y ecuatorial para el 15 de Junio de 2015, llegando a velocidades del viento mayores a 10 m/s. Cualquier movimiento del aire en el espacio, los cambios de velocidad, dirección del viento, así como las corrientes ascendentes y descendentes, constituye lo que se denomina “Gradiente del viento”. Los cuales se manifiestan como pequeños remolinos o ráfagas hasta fenómenos más intensos como los huracanes.

El modelo atmosférico GFS, Global Forecasting System, de la NOAA implementado con el software matlab permite mostrar la dinámica atmosférica y predecir el clima. Vea **fig. 3.5**



**Fig.3.5** Dinámica atmosférica en la zona ecuatorialFuente: IMARPE

**B. Segunda Aplicación: ONDA TRIDIMENSIONAL EN MATLAB**

Considerando que

$$\eta(x, y, t) = \cos(k_x x + k_y y - \omega t) \text{ con } k_x, k_y, \omega \in \mathbb{R}$$

Es solución de la ecuación (2), obtenemos sus correspondientes gráficas para algunos valores del tiempo  $t > 0$ .

**Ejemplo.** Con los siguientes datos:

- Amplitud  $A = 1 \text{ m}$
- Numero angular en la dirección positiva del eje  $x$ ,  $k_x = 3 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$
- Numero angular en la dirección positiva del eje  $y$ ,  $k_y = 4 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$
- Calculando la frecuencia angular  $\omega$  mediante la relación de dispersión:

□

$$\omega = \frac{-Q_0 R^2 k_x}{1 + R^2(k_x^2 + k_y^2)}$$

$$\omega = \frac{-2 \times 10^{-11} \cdot \frac{1}{\text{ms}} \cdot 765\,625 \times 10^4 \text{m}^2 \cdot 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1 + (765\,625 \times 10^4 \text{m}^2) \left[ \left( \frac{3 \text{rad}}{\text{s}} \right)^2 + \left( \frac{4 \text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \right]}$$

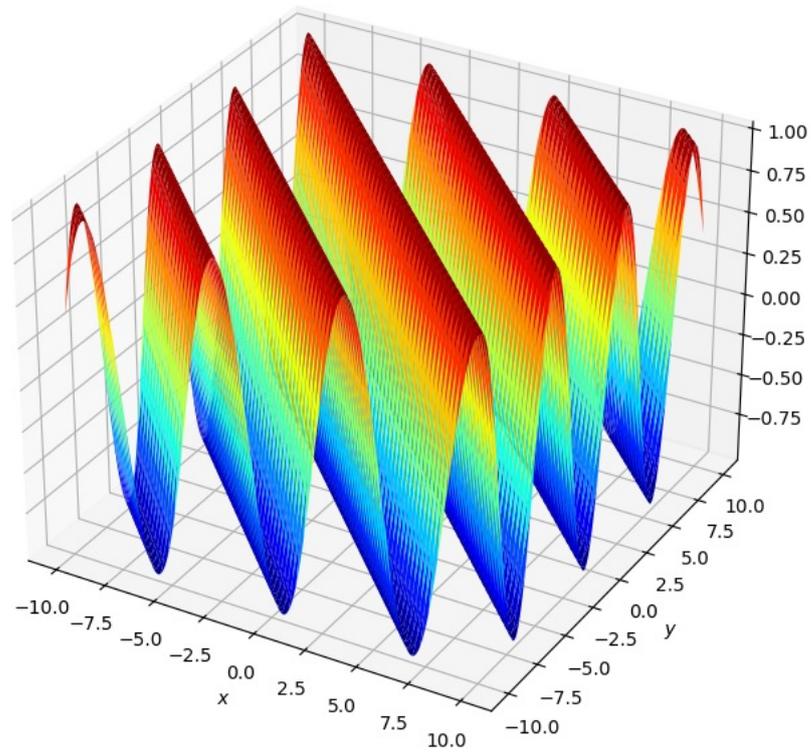
Resultando,

$$\omega = -2.4 \times 10^{-12} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Por lo tanto, la ecuación de la onda viajera para tales condiciones es:

$$\eta(x, y, t) = \cos(3x + 4y + 2.4 \times 10^{-12}t)$$

Grafica para el tiempo  $t = 1$  segundo. Vea la **fig. 3.6**



**Fig. 3.6** Onda de  $\eta(x, y, t)$  para  $t = 1$  s

## RESULTADOS

Mediante el uso de métodos numéricos modernos, tales como los métodos de Colocación y Galerkin hemos encontrado soluciones aproximadas para la solución de problemas de valor de contorno (PVC), muchos de las cuales no tienen soluciones exactas sino aproximadas. Dichos resultados favorables son confirmados con el graficador del sw Matlab y se observa que el método de Galerkin es el que otorga mejor precisión.

Se ha demostrado que los modelos matemáticos que representan la dinámica de los vientos son resueltos por aproximación mediante métodos espectrales, tales como la serie de Fourier y visualizados mediante el fenómeno de Gibbs.

El presente trabajo de investigación está centrado en la dinámica de la atmosfera, siendo el objetivo principal simular numéricamente las ondas Rossby mediante el método espectral de Fourier.

Debido a la importancia de las ondas Rossby en la existencia de la vida humana, han sido motivo de estudio y representación mediante modelos matemáticos para poder caracterizar y cuantificar sus efectos; sin embargo, la solución de estos modelos no son exactas sino aproximadas, así por ejemplo el pronóstico del clima de una región.

En este sentido, el método espectral de Fourier a diferencia de otros métodos tales como diferencias finitas, nos proporciona una gran aproximación para la simulación numérica de las ondas Rossby.

Al resolver numéricamente la ecuación de la onda y simular numéricamente las ondas de Rossby, debemos tener cuidado que el error que se cometa debe ser ínfimo, de tal manera que tal solución converja con mejor precisión a la solución exacta, por ello hay la necesidad de usar otros métodos más sofisticados tales como las series de Fourier propuestos en este trabajo.

Respecto a las aplicaciones, tuve dificultades en obtener la data de la velocidad de los vientos por parte del SENAMHI; Sin embargo, el instituto del mar del Perú (IMARPE) nos brindó todo el apoyo para la presente investigación.

Sugiero que el presente trabajo de investigación inicial, sea motivo de estudio utilizando otros métodos, tales como elementos finitos, volúmenes finitos o diferencias finitas.

## CONCLUSIONES

1. Mediante el uso de métodos numéricos, tales como los métodos de **COLOCACION Y GALERKIN**, hemos encontrado soluciones aproximadas para la solución de Problemas de valor de contorno (**PVC**). Dichos resultados favorables son confirmados con el software Matlab.
2. Se verifica que los polinomios algebraicos para los métodos espectrales y Pseudoespectrales aproximan efectivamente la solución de **PVC**.
3. Las funciones trigonométricos para los métodos espectrales aproximan efectivamente la solución de **PVC**.
4. El análisis de Fourier describe el comportamiento del flujo de los vientos en la zona Ecuatorial.
5. Las series de Fourier aproximaron efectivamente funciones periódicos en forma de ondas.
6. El efecto de Coriolis influye decisivamente en la trayectoria del flujo de las ondas planetarias.
7. Es posible encontrar soluciones aproximadas de la Ecuación de la onda mecánica y de las ondas planetarias haciendo uso de las series de Fourier, asimismo usar el software matlab para visualizar tales soluciones y observar su convergencia mediante el fenómeno de Gibbs.

## REFERENCIAS

- ADSUAR, Joaquin. *Meteorología*, Edit. Paraninfo, Madrid, 2010.
- BOYD, John. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. University of Michigan, Dover Publications, New York, 2000
- BURDEN R – FAIRES D. *Análisis numérico*. Cengage learning, 9na edición, Mexico, 2011
- CANUTO, HUSSAINI, QUARTERONI, ZANG. *Spectral methods* (Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics). Edit. Springer-Verlag, Berlin, 2007
- CANUTO, HUSSAINI, QUARTERONI, ZANG. *Spectral methods* (Fundament in single domains). Edit. Springer-Verlag, Alemania, 2006
- CUSHMAN – ROISEN, Benoit. *Introduction to geophysical fluid dynamics*. Edit. Prentice Hall, New Jersey, 2007.
- GOTTLIEB, S- GOTTLIEB, D- HESTHAVEN, J. *Spectral Methods for time dependent problems*. Cambridge monographson applied and computational mathematical. Cambridge University Press.
- KREYSZIG, Erwin. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Volumen II, Limusa Wiley, México, 2009.
- TREFETHEN, LLOYD. *Spectral methods in Matlab*  
[www.comlab.ox.ac.uk/ouel/work/nick.trefethen](http://www.comlab.ox.ac.uk/ouel/work/nick.trefethen)

ISBN: 978-9942-33-871-6



**compAs**  
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

   @grupocompas.ec  
compasacademico@icloud.com