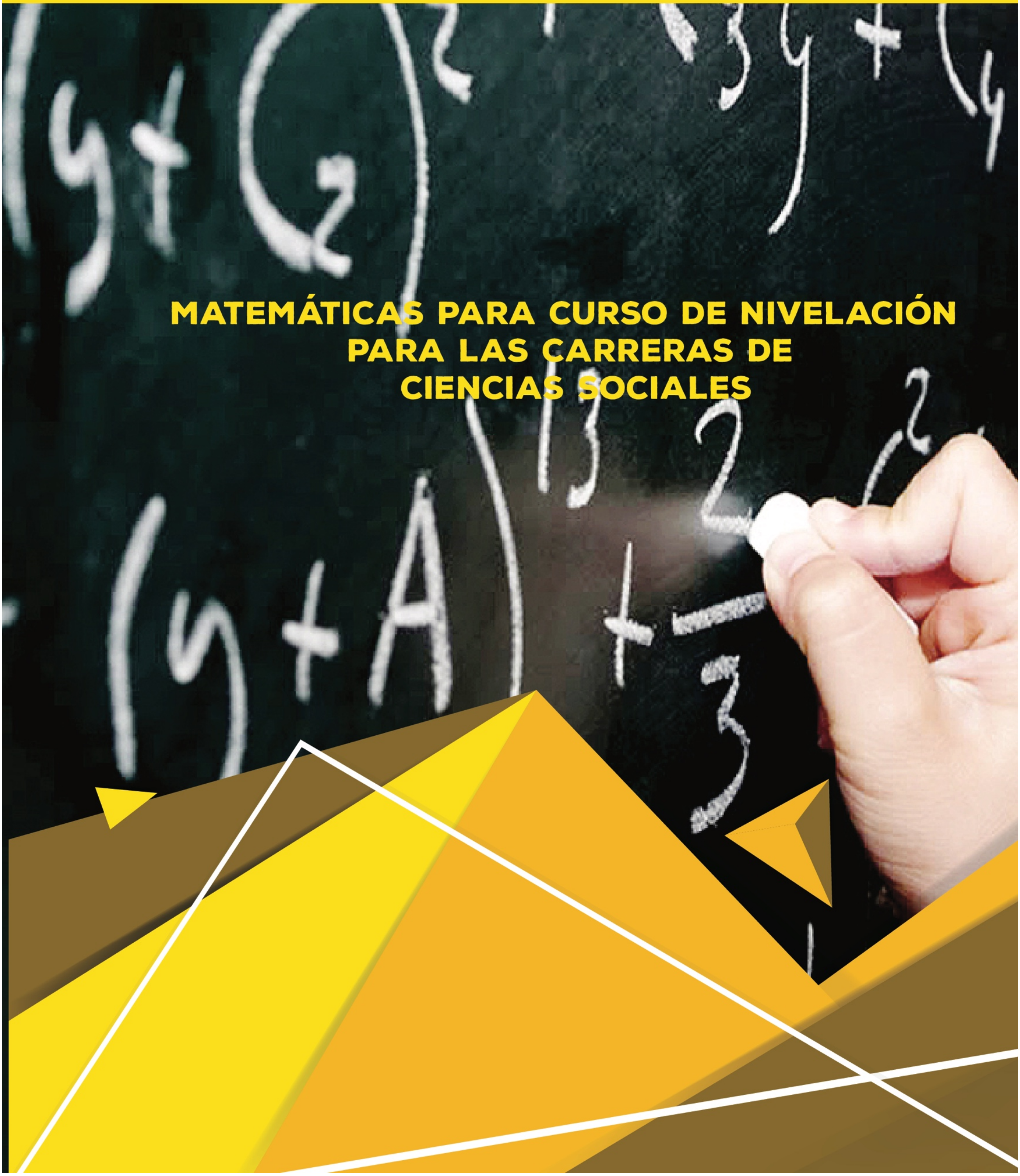
compAs

Grupo de Capacitación e investigación pedagógica



MATEMÁTICAS PARA CURSO DE NIVELACIÓN PARA LAS CARRERAS DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA CURSO DE NIVELACIÓN PARA LAS CARRERAS DE CIENCIAS SOCIALES

PRIMERA EDICIÓN

MATEMÁTICAS PARA CURSO DE NIVELACIÓN PARA LAS CARRERAS DE CIENCIAS SOCIALES

Autores

John Aníbal Herrera Rivera
Luz María Quinde Arreaga

Libro sometido a revisión de pares académicos.

compÁs
Grupo de Capacitación e investigación pedagógica

Edición
Diagramación
Diseño
Publicación
Maquetación.
Grupo Compás
Cámara Ecuatoriana del Libro - ISBN-E: 978-9942-760-34-0
Guayaquill - Ecuador

Dedicado a:

Mi esposa e hijos por el apoyo y la comprensión demostrados durante el tiempo que duró la realización de este texto.

A mis padres por los valores morales que me inculcaron.

A 'mamá Mildred' por su ayuda invaluable y por acogerme como a un hijo.

Prefacio

La Dirección de Admisión y Nivelación de la Universidad de Guayaquil es la encargada del proceso de admisión que permite al aspirante postular por un cupo en la oferta académica de esta institución, para lo cual ha desarrollado el curso de nivelación, cuyo objetivo es preparar a los estudiantes en contenidos académicos básicos que aseguren el éxito en el transcurso de la carrera.

Este curso tiene una duración de 14 semanas, tiempo en el cual los aspirantes de todas las Facultades reciben dos asignaturas comunes, una de las cuales es Matemáticas, la misma que ha sido avalada por el Vicerrectorado Académico.

Con miras a contribuir al desarrollo de las Matemáticas en los cursos de nivelación de las carreras sociales, este libro ha sido elaborado para que usted cuente con un texto de ayuda que refuerce sus conocimientos en esta ciencia, para lo cual contará con algunas definiciones y herramientas básicas, así como con ejemplos y ejercicios para su mejor comprensión y práctica.

Me complace darle la bienvenida al mundo de las matemáticas que espero sea de su agrado y le sirva para su ingreso a la universidad.

Antes de iniciar este estudio, permítame sugerirle analizar e interiorizar la frase de Benjamín Franklin: “Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo”. De acuerdo a la opción que usted escoja de dicha frase, dependerá el beneficio que logre alcanzar con este texto.

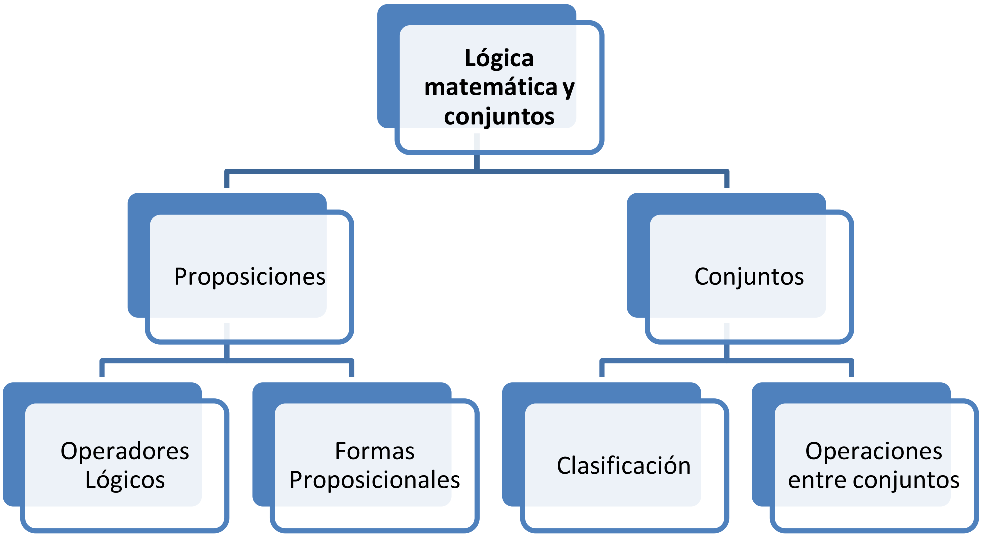
Contenido General

Lista de gráficos

CAPÍTULO UNO

'La lógica te llevará desde A hasta B. La imaginación te llevará a todas partes'

ALBERT EINSTEIN.



1. LÓGICA MATEMÁTICA Y CONJUNTOS

Destrezas con criterios de desempeño

Al finalizar esta unidad se podrá:

- Traducir oraciones al lenguaje simbólico, identificando operadores lógicos y proposiciones presentes.
- Definir con sus propias palabras los diferentes tipos de conjuntos.

1.1 Introducción

La lógica la empleamos a lo largo de nuestra vida cuando hacemos deducciones de una situación dada, ya sea en lo laboral como en lo familiar y sentimental. Si la deducción de las premisas nos lleva a una conclusión correcta, decimos que la inferencia es válida, caso contrario no es válido. De ahí que, la importancia de la lógica que estudia los métodos y las leyes que determinan la validez de la inferencia.

En esta unidad conocerá sobre proposiciones y sus operadores lógicos así como formas proposicionales y conjuntos.

1.2 Proposición

Una proposición es una expresión que solo puede ser verdadera o solo puede ser falsa, es decir que los enunciados que no son falsos ni verdaderos o que son ambos al mismo tiempo o carecen de sentido o son imprecisos, no son objeto de estudio en la lógica.

Ejemplos de enunciados que son proposiciones:	Ejemplos de enunciados que ***no*** son proposiciones:
• Bogotá es la capital de Colombia • Un cuadrado tiene todos sus lados de igual magnitud. • El perro es un ave • 4 + 4 = 8	• Apúrate • ¡Ni un paso atrás! • No olvides pagar las deudas • 2X+3 = 5

Los enunciados anteriormente expuestos son proposiciones. Los mismos que se pueden calificar como verdaderos o falsos, sin dificultad alguna. Las proposiciones pueden ser simples y compuestas.

1.2.1. Notación

En la notación de una proposición por lo general se utilizan las letras del alfabeto español en minúsculas p, q, r,… para simbolizar las proposiciones.

Ejemplos:

- **p**: El guineo es una fruta
- **q**: El agua es indispensable para la vida
- **r**: Los duraznos son tubérculos

1.2.2. Valor de Verdad

El Valor de Verdad de una proposición es la cualidad de veracidad que describe adecuadamente la proposición. Este puede ser verdadero (1) o falso (0).

Para representar en una Tabla de Verdad, se parte de la valoración de cada una de las proposiciones.

1.2.3. Tabla de Verdad

Una Tabla de Verdad es una representación de los posibles valores de verdad que podría tomar una proposición.

Las Tablas de Verdad sirven para mostrar los valores, las relaciones y los resultados posibles al realizar las operaciones lógicas.

Ejemplo: Construcción de tablas de verdad

p
0
1

p	q
0	0
0	1
1	0
1	1

p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

La cantidad de combinaciones (filas de la Tabla de Verdad) depende de la cantidad de proposiciones presentes en la expresión lógica. Si se tienen dos proposiciones, la cantidad de combinaciones en la Tabla de Verdad es cuatro. Si se tienen tres proposiciones la cantidad de combinaciones es ocho. Y así sucesivamente.

# de proposiciones	# de combinaciones
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
. . .	. . .
n	2^n

1.2.4 PARA EJERCITAR

- Identificar cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones y en caso de no serlo justificar su respuesta.

  a) A todos les gusta el fútbol
  b) Está haciendo frío
  c) La luna es un satélite de la tierra
  d) Mi papá tiene teléfono móvil
  e) ¡Qué color!
  f) Hace calor.
  g) Es Domingo.
  h) No es cierto que John habla francés e inglés.
  i) Llueve.
  j) Hace calor y tengo ganas de ir a la playa.
  k) Tengo hambre, frío y no consigo un bus.
  l) Los alumnos de este curso son inteligentes o estudian mucho.

- Simbolizar las siguientes proposiciones
  a) No vi la película, pero leí la novela
  b) Ni vi la película ni leí la novela
  c) Vi la película aunque no leí la novela
  d) No me gusta trasnochar ni madrugar

- Marcar la respuesta correcta. Una proposición es una unidad semántica que puede ser:
  a) Falsa y verdadera
  b) Solo verdadera o solo falsa
  c) Solo falsa
  d) Ninguna de las anteriores

1.3 Operadores lógicos

En el lenguaje cotidiano se usa frecuentemente proposiciones más complejas. Se torna en una necesidad poder establecer nexos para las proposiciones, los cuales se conocen como conectores u operadores lógicos. Gramaticalmente, estos operadores lógicos, en su mayoría, son denominados partes invariables de la oración.

Ejemplo:

- ***No*** estudié para la prueba
- Estuve muy ocupado ***y*** no dormí bien
- Si me porto bien, ***entonces*** me compran una bicicleta.

1.3.1 Negación

Si p es una proposición, la negación de p, representada simbólicamente por $\sim p$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad se muestra a continuación:

p	$\sim p$
0	1
1	0

Este operador lógico **cambia el valor de verdad de una proposición**: si $\boldsymbol{p}$ es una proposición verdadera, $\sim \boldsymbol{p}$ es falsa; si $\boldsymbol{p}$ es una proposición falsa, $\sim \boldsymbol{p}$ es verdadera.

La negación se presenta con los términos gramaticales: 'no', 'ni', 'no es verdad que', 'no es cierto que', 'es falso que', 'es imposible que', 'no se da que'.

Ejemplo:

Sea la proposición:	La negación de p y q es:
p: Diana fue al cine	$\sim p$: Diana ***no*** fue al cine
q: José no juega bien fútbol	$\sim q$: José juega bien fútbol

1.3.2 Conjunción

Sean p y q proposiciones, la conjunción entre p y q, representada simbólicamente por p∧q, es una proposición, cuyo valor de verdad se muestra a continuación:

p	q	p ∧ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

En español la conjunción se presenta con los términos gramaticales: 'y', 'pero', 'mas', 'también', 'sin embargo', 'además', 'tal como', 'no obstante', 'aunque', 'a la vez', y signos de puntuación como: la coma (,), el punto (.) y el punto y coma (;).

Ejemplo:

Sean las proposiciones:

p: David estudió Filosofía.
q: David realizó las tareas.

La conjunción es: p ∧ q: Julio estudió matemáticas ***y*** realizó las tareas.

1.3.3 Disyunción inclusiva

En la disyunción inclusiva usando p y q proposiciones, la disyunción entre p y q, representada simbólicamente por p∨q, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad se muestra en la siguiente tabla:

p	q	p ∨ q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

En español, la disyunción se presenta con el término gramatical ‘o’.

Ejemplos:

- Sean las proposiciones: p = El cielo es azul (verdadera), q = 12 es un número par (verdadera) por ser ambas verdaderas, la disyunción inclusiva entre ellas es verdadera.

  La disyunción de estas preposiciones sería:

  p v q: El cielo es azul o 12 es un número par

- Sean las proposiciones: p: Alexis trabaja en una empresa y q: Alexis realiza quehaceres domésticos.

  La disyunción de estas proposiciones es:

  p ∨ q: Alexis trabaja en una empresa o realiza quehaceres domésticos.

1.3.4 Disyunción exclusiva

Es la unión de dos o más proposiciones mediante el conectivo lógico ‘o’

Se lee p o q, pero no ambas. Es verdadera la proposición cuando la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa o cuando la primera proposición es falsa y la segunda verdadera.

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejemplo

Dado las proposiciones p: Estoy estudiando; q: Estoy trabajando

$p \underline{\vee} q$: Estoy estudiando ó solo estoy trabajando

1.3.5 Condicional

Una condicional es la combinación de dos proposiciones 'si… entonces'. Se lee: si p entonces q.

Una proposición condicional es falsa cuando la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa. Es verdadera en cualquiera de las otras formas.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ejemplo

Dado las proposiciones p: Si me saco la lotería; q: Te regalaré un carro

$p \rightarrow q$: Si me saco la lotería entonces te regalaré el carro.

1.3.6 Bicondicional

Es la unión de dos proposiciones "si y solo si". Se lee: p si y solo si q.

Una proposición bicondicional es verdadera cuando sus dos componentes son verdaderos ó sus dos componentes son falsos.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ejemplo:

Dado las proposiciones p: Simón Bolívar vive; q: Montalvo está muerto

$p \leftrightarrow q$: Simón Bolívar vive si y solo si Montalvo está muerto

1.3.7 PARA EJERCITAR

- Negar las siguientes proposiciones simples:
  p: Todos los números primos son pares.
  q: No todos los triángulos son isósceles.

- Si la proposición p es verdadera y la proposición q es falsa, entonces las siguientes afirmaciones es (son) correcta (s):
  a) $p \Rightarrow q$ es una proposición verdadera
  b) $p \Leftrightarrow q$ es una proposición falsa
  c) $\sim p \vee q$ es una proposición verdadera

- Sean las proposiciones: p: El número 4 es par; q: Siempre el residuo de los números pares es dos. La conjunción de $p \wedge q$ es.

- Construya la Tabla de Verdad de:
  - $\sim p \wedge q$
  - $\sim p \wedge \sim q$
  - Si p=1, q=0, r=1 y s=0, cuál es el Valor de Verdad de: $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim r \wedge \sim s)$

- Construya la Tabla de Verdad de:
  a) $\sim p \vee q$
  $b)$ $\sim p \vee \sim q$
  - Si p=1, q=0, r=1 y s=0, cuál es el Valor de Verdad de: $(\sim p \vee q) \vee (\sim r \vee \sim s)$

- Sean p y q dos proposiciones distintas, si (p v q) es falsa entonces:
  a) p es verdadera y q es falsa
  b) p es verdadera y q es verdadera
  c) p es falsa y q es falsa
  d) p es falsa y q es verdadera
  e) Ninguna de las anteriores

- Sea la proposición p = "La navidad se celebra en diciembre" (verdadera), q = "13 es un número par" (falsa). La disyunción exclusiva es.

- Completa la tabla de la condicional, para la recíproca, contrario y contrarecíproca

Proposiciones		Directa	Recíproca	Contrario	Contrarecíproca
p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

- Si p=1, q=0, r=1 y s=0, cuál es el Valor de Verdad de: $(\sim p \vee q) \to (\sim r \to \sim s)$
- Si p=1, q=0, r=1 y s=0, cuál es el Valor de Verdad de: $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim r \to \sim s)$
- Si p=0, q=1, r=0 y s=1, cuál es el Valor de Verdad de: $(r \vee q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$

1.4 Formas proposicionales

Se denominan formas proposicionales a las estructuras construidas por variables proposicionales y los operadores lógicos que las relacionan. Estas formas proposicionales se representan con las letras mayúsculas del alfabeto español A, B, C,…

Ejemplo:

- Dada la siguiente forma proposicional: A: $[(p\wedge q)\rightarrow(r\vee\sim p)]\wedge r$

  Debido a la presencia de las 3 variables proposicionales p, q y r, existirán 2^3 proposiciones posibles en la Tabla de Verdad de A.

p	q	r	$p\wedge q$	$\sim p$	$r\vee\sim p$	$[(p\wedge q)\rightarrow(r\vee\sim p)]$	**A**
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1

Cuando las variables proposicionales p, q y r toman los Valores de Verdad **1, 0** y **1**, respectivamente, se puede apreciar que la proposición resultante es **verdadera**.

1.4.1 Tautología, contradicción y contingencia

- Si se tienen solamente proposiciones verdaderas para todos los Valores de Verdad de las variables proposicionales, se dice que es una *TAUTOLOGIA*.

- Si se tienen solamente proposiciones falsas para todos los Valores de Verdad de las variables proposicionales, se dice que es una *CONTRADICCIÓN*.

- Se entiende por verdad contingente, o verdad de hecho, aquella proposición que puede ser verdadera o falsa, (combinación entre tautología y contradicción) según los valores de las proposiciones que la integran. $p\wedge(q\vee r)$.

Partiendo de estas definiciones, la forma proposicional ***A*** *del ejemplo anterior* constituye una contingencia, mientras que la forma proposicional **B**: $p \vee \sim p$ es una tautología; y, la forma proposicional **C**: $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

Observe:

p	~p	**B** $p \vee \sim p$	**C** $p \wedge \sim p$
0	1	1	0
1	0	1	0

En este punto, podemos resumir lo siguiente:

$a \equiv 1$, significa que la proposición a es verdadera.

$p \equiv 1$, significa que la variable proposicional p puede ser remplazada solamente por proposiciones verdaderas.

$A \equiv 1$, significa que la forma proposicional A es tautología.

1.4.2 Implicación lógica

Una implicación lógica entre A y B, dos formas proposicionales, se dice que A implica lógicamente a B, denotado por $A \Rightarrow B$, sí y solo sí $A \rightarrow B$ es una tautología.

Ejemplos:

La forma proposicional tautológica: $p \Rightarrow (q \rightarrow p)$, se puede traducir al lenguaje común como "si se tiene *p*, de cualquier manera *q* se seguirá teniendo *p*".

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

La forma proposicional tautológica: $[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \vee \sim q)]$, se puede traducir al lenguaje común como 'si cada vez que se tiene *p* no se tiene a q y cada vez que no se tiene *p* se tiene *r*, entonces cada vez que se tiene *p* no se tiene *q*'. El resultado es una tautología; por lo tanto es una implicación.

1.4.3 Equivalencia Lógica

La equivalencia lógica entre A y B son dos formas proposicionales, se dice que A es equivalente lógicamente a B, denotado por $A \Leftrightarrow B$, sí y solo sí $A \leftrightarrow B$ es una tautología.

Cuando se requiere sustituir una estructura por otra que sea equivalente, alternativamente el símbolo $\Leftrightarrow$ se lo reemplaza por $\equiv$.

Ejemplo

La forma proposicional: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$, se puede traducir al lenguaje común como "cada vez que se tiene p, se tiene q", y es lógicamente equivalente a "cuando no se tiene q, entonces no se tiene p"

p	q	~p	~q	p→q	~q→~p	(p→q)↔(~q→~p)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

1.4.4 Leyes del Álgebra Proposicional

Las operaciones lógicas definidas entre las formas proposicionales y algunas de sus más importantes propiedades se incluyen en las denominadas leyes del álgebra de proposiciones o leyes lógicas. A continuación, se presentan las de uso más frecuente:

CONJUNCIÓN		**DISYUNCIÓN**
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	Conmutativa	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
$[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$	Asociativa	$[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
$(p \wedge p) \equiv p$	Idempotencia	$(p \vee p) \equiv p$
$(p \wedge 1) \equiv p$	Identidad	$(p \vee 0) \equiv p$
$(p \wedge 0) \equiv 0$	Absorción	$(p \vee 1) \equiv 1$

$\sim 0 \equiv 1$ o $\sim 1 \equiv 0$	Negación
$\sim(\sim p) \equiv p$	Doble Negación o Involutiva
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivas
$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$	De Morgan
$(p \vee \sim p) \equiv 1$	Tercero Excluido
$(p \wedge \sim p) \equiv 0$	Contradicción
$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$	Contrapositiva o Contrarecíproca
$(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ $(\sim p \rightarrow q) \equiv (p \vee q)$ $\sim(p \rightarrow \sim q) \equiv (p \wedge q)$	Implicación

$[(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)]\equiv[(p\vee q)\rightarrow r]$	
$[(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)]\equiv[p\rightarrow(q\wedge r)]$	
$[(p\wedge q)\rightarrow r)]\equiv[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$	Exportación
$(p\rightarrow q)\equiv[(p\wedge\sim q)\rightarrow 0)]$	Reducción al Absurdo
$(p\leftrightarrow q)\equiv[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)]$ $(p\leftrightarrow q)\equiv(q\leftrightarrow p)$	Equivalencia

Ejemplo:

Comprobar la equivalencia lógica: $[(p\wedge q)\rightarrow r)]\equiv[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$ se pueden emplear Tablas de Verdad o propiedades de los operadores lógicos.

Desarrollo: Aplicando **Tablas de Verdad**, se construyen las respectivas combinaciones para las variables proposicionales involucradas en la forma proposicional.

Para el efecto se denominará:

$$A: [(p\wedge q)\rightarrow r)]$$

$$B:[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$$

Tal como se muestra en la siguiente tabla:

p	q	r	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow r$	$q\rightarrow r$	$p\rightarrow(q\rightarrow r)$	$A\leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Puesto que $[(p\wedge q)\rightarrow r)]\equiv[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$ es una tautología, se concluye que existe una equivalencia lógica entre estas dos formas proposicionales, con lo cual se obtiene la demostración requerida.

Empleando **propiedades de los operadores lógicos** se debe transformar la estructura de una de las formas proposicionales (o ambas) hasta establecer la equivalencia lógica requerida. En este ejemplo se trabajará sobre la forma proposicional A, hasta obtener la estructura de la segunda.

$[(p\wedge q)\rightarrow r)]\equiv[\sim(p\wedge q)\vee r)]$ Por la ley de la implicación

$\equiv[(\sim p\vee\sim q)\vee r)]$ Por la Ley de Morgan de la Conjunción.

$\equiv[\sim p \vee (\sim q \vee r)]$	Por la ley Asociativa de la Disyunción.
$\equiv[\sim p \vee q \rightarrow r)]$	Por la ley de Implicación
$[(p \wedge q) \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	Por la ley de la Implicación

Con esto se concluye que las dos formas proposicionales son equivalentes entre sí.

Las propiedades de los operadores lógicos también son útiles cuando se requiere expresar ideas o enunciados de una forma inequívoca y precisa.

Ejemplo

- Considere las siguientes proposiciones simples:
  p: El clima es propicio.
  q: La tierra es fértil.
  r: La flor crecerá.

  Se quiere negar la proposición compuesta: "Si el clima es propicio y la tierra es fértil, la flor crecerá"

  Desarrollo: La traducción del enunciado original es: $(p \wedge q) \rightarrow r$

  La negación de la proposición anterior es: $\sim[(p \wedge q) \rightarrow r]$

$\sim[\sim(p \wedge q) \vee r]$	Por la ley de la Implicación.
$\sim[\sim(p \wedge q)] \wedge \sim r$	Por la ley de Morgan de la Disyunción.
$(p \wedge q) \wedge \sim r$	Por la ley de la doble negación
$q \wedge \sim r \wedge p$	Por la ley Conmutativa de la Conjunción.

Por lo tanto, la negación de la proposición podrá expresarse con cualquiera de las siguientes frases equivalentes:

- El clima es propicio y la tierra es fértil, pero la flor no crecerá.
- La tierra es fértil, la flor no crecerá y el clima es propicio.

Aunque al lector le agrade una de ellas más que la otra, desde el punto de vista lógico, las dos representan la negación del enunciado original.

1.4.5 PARA EJERCITAR.

- Formalizar el siguiente enunciado 'Si no hay ruido y no estás sordo, entonces debes oírme', determine si es verdad o falso:
  a) $(q \wedge p) \rightarrow r$
  b) $(q \wedge \neg p) \rightarrow r$
  c) $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$
  d) $(q \wedge p) \rightarrow \neg r$

- Marcar la respuesta correcta, con el siguiente enunciado "Aumentará la inflación y disminuirá el paro, solo si se cambia de moneda o hay guerra"
  a) $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$
  b) $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
  c) $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee s)$
  d) $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (r \vee s)$

- Si la proposición: $[(\neg p \vee q) \rightarrow (q \leftrightarrow r)] \vee (q \wedge s)$ es falsa, siendo p una proposición verdadera.
  Determine los valores de verdad (V) o falsedad (F) de $\neg$ q, r y $\neg$ s en ese orden.

  a) V VV
  b) V F V
  c) V F F
  d) F F V

- Completar la frase según corresponda:
  a) Si $p \rightarrow q$ es falso, el valor de p es ……………… y el de q es ………………
  b) Si $p \vee q$ es verdadero, el valor de p es falso y el de q es ………………
  c) Si $p \leftrightarrow \neg q$ es falso, el valor de verdad de p es ……………… y el de q es falso.

- Sea p: "Marta es prima de Pedro" de Pedro", q: "Julián es primo de Marta", r : "María es la novia de Pedro y s: "Julián está enamorado de Lucía". Suponiendo que: p es Verdadero, q es Falso, r Falso y s es Verdadero, averiguar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

  a) Martha es prima de Pedro y Julián está enamorado de Lucía.
  b) Si María es la novia de Pedro y Martha es prima de Pedro, Julián es primo de Martha.
  c) Si Julián es primo de Martha, María es la novia de Pedro y Martha es prima de Pedro.

- Identificar las proposiciones simples y escribir en símbolos la siguiente proposición compuesta: "Si un dragón se enoja entonces te quedas paralizado del miedo. Y si te quedas paralizado de miedo, el dragón te come; pero si apelas a su bondad no te come. Por lo tanto, si un dragón se enoja debes apelar a su bondad".

- Identificar las proposiciones simples, asignarles un nombre y escribir en símbolos la siguiente proposición compuesta: "Si no pago la luz, entonces me cortarán el servicio eléctrico. Pero si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Aunque si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si y sólo si soy desorganizado".

1.5 Definición de conjunto.

Podemos expresar que un conjunto es una colección, reunión o agrupación de cosas de estudio que poseen una característica o propiedad común bien definida; conocidas como elementos.

Una de las agrupaciones que escuchamos a diario son conjuntos:

- Las leyes que rigen en el Ecuador
- Los libros de matemáticas para Educación Básica.
- Los números pares.
- Las siete maravillas del mundo moderno
- Los celulares de última generación.
- Los vecinos de mi sector

1.5.1 Clasificación de Conjuntos

Conjunto Vacío: Consideramos un conjunto vacío cuando dicho conjunto no tiene elementos y lo representamos con el símbolo ф de la siguiente manera A = ф.

Ejemplo:

A = { }

B = { } En ambos ejemplos los conjuntos no contienen elementos.

Conjunto unitario: Este conjunto es unitario cuando se encuentra conformado por un solo elemento Universal.

Ejemplo:

A = {0} Conformado por un solo elemento

B = {2} Conformado por un solo elemento

Conjunto finito: Un conjunto es finito cuando todos sus elementos que le conforman pueden ser contados.

Ejemplo:

A = { x / x los meses del año}
Es un conjunto *Finito* porque los meses del año son 12
B = { vocales de la palabra conjunto}
Es un conjunto *Finito* porque las vocales de la palabra conjunto son 3

Conjunto infinito: Un conjunto es infinito cuando los elementos que lo conforman no se pueden contar del todo.

Ejemplo:

- Los números pares A = {x/x es número impar}

Es un conjunto *Infinito* porque los números enteros impares no tienen fin para este caso.

B = {x/x es un número primo}

Es un conjunto *Infinito* porque los números primos no tienen fin para este ejemplo.

Conjunto universo o referencial: Se denomina como conjunto Universo o Referencial al conjunto que contiene a todos los elementos a los que se hace referencia, por lo general se lo denota con la letra U.

Ejemplos

- U = {x/x es una letra del alfabeto español}; los elementos del conjunto A son todas las letras del alfabeto.
- Re = {x/x son derechos de los ciudadanos}; los elementos del conjunto B son todos los derechos de los ciudadanos.

1.5.2 Notación de conjuntos.

Los conjuntos por lo general se los representa con letras mayúsculas del alfabeto español (A, B, C,..) y entre llaves { }.

Los elementos que forman parte del conjunto que se denominan elementos, se denotan por medio de letras minúsculas (a, b, c,…) y para indicar que un elemento pertenece a un conjunto utilizamos el símbolo "∈" que significa pertenencia y el símbolo de *no* pertenecer es ∉.

Ejemplos

- A={Contrato por tarea, contrato por temporada, contrato ocasional, parcial permanente}; en donde "A" es el conjunto de los tipos de contrato laboral en Ecuador y los elementos son "Contrato por tarea", "Contrato por temporada", etc.

  Entonces, Contrato por tarea ∈ A, indicamos que el elemento "Contrato por tarea" pertenece al conjunto "A"

- B = {x/x son los estudiantes de nivelación}; en donde "B" es el conjunto de estudiantes de nivelación.

  Entonces, los estudiantes ∈B, indicamos que el elemento estudiante pertenece al conjunto "B"

1.5.3 PARA EJERCITAR

Clasifica cada uno de los siguientes conjuntos según el número de elementos:

- A= {x / x es un día de la semana}
- B = {En el juicio hubo un compareciente}

- C = {0,1,2,3,4,...} (conjunto de los números enteros no negativos}
- E = {x / x El contrato de arrendamiento por un año}
- F = {x I x El acusado no hizo ninguna confesión}
- G = {x I x Números impares < 15}

Escriba los siguientes conjuntos:

- "P" cuyos elementos son los números impares de un solo dígito.
- "Q" cuyos elementos son las consonantes de la palabra enamorado.
- "R" cuyos elementos son números mayores desde 5 y menores hasta 10.

1.6 Operaciones entre Conjuntos

1.6.1 Unión entre Conjuntos.

La unión de dos o más conjuntos es una operación básica entre conjuntos que resulta en otro conjunto. Se denota por $A \cup B$ y se define como:
$A \cup B = \{x \,/ (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Ejemplos

- Dado los conjuntos A = {árbol, palmera, arbusto} y B = {planta, flor, fruto}tenemos A U B = {árbol, palmera, arbusto, planta, flor, fruto}

- Dado los conjuntos P = {Leyes Constitucionales, Leyes Prohibitivas, Leyes Permisivas} y Q={Leyes Tributarias, Leyes Laborales, Leyes de Tránsito}, tenemos PUQ={Clasificación y Tipos de Leyes}

1.6.2 Intersección entre Conjuntos.

La intersección entre ambos conjuntos es definir un nuevo conjunto formado únicamente por los elementos que estén presentes en el conjunto A y en el conjunto B. Se denota por $A \cap B$ y se define como:

$$A \cap B = \{x \,/ (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Ejemplos

- Dado los conjuntos A = {amarillo, azul, rojo, morado} y B = {gris, morado, azul, verde}, entonces A ∩ B = {morado, azul}

- Dado los conjuntos A = {10, 12, 23, 14} y B = {23, 14, 5}, entonces A ∩ B = {23, 14}

1.6.3 Complemento de un Conjunto.

El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos que no pertenecen al conjunto original. Es por eso que debemos conocer cuál es el conjunto universal y lo denotamos por A y se define como:

$$A^c = \{x \,/ (x \in Re) \wedge \neg (x \in A)\}$$

Ejemplos

- El complementario de todas las contravenciones es el conjunto de todas las leyes (leyes del Ecuador).

- Dado los conjuntos de los números naturales, el complementario del conjunto de los números primos Re = {1, 5, 6, 7, 8, 10} y A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, entonces A^c = { 2, 3, 4, 9, 10…..} son todos los elementos que no están en Re.

- Dado los conjuntos B = {1; 3; 5; 7} U = {1; 3; 5; 7; 9; 11}, entonces B^c = {9, 11} son todos los elementos que no están en B.

1.6.4 Diferencia entre Conjuntos

La diferencia entre dos conjuntos es una operación que resulta en otro nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al primer conjunto, pero no pertenecen al segundo conjunto. Se denota por A−B y se define como:

$$A - B = \{x \,/ (x \in A) \wedge \neg (x \in B)\}$$

Ejemplos

- Dado los conjuntos A = {a, b, c, d, e} y B = {a, e, i, o}, entonces A - B = {b, c, d} son todos los elementos que se encuentran en A y que no están en B.

- Dado los conjuntos A = { X/X es número impar <11} y B = { 1, 5, 8, 9, 10}, entonces A - B = {3, 7} son todos los elementos que se encuentran en A y que no están en B.

1.6.5 Diferencia Simétrica.

La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A ó al conjunto B, pero no ambos. Se denota por AΔB y se define como:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, o también: $A \Delta B = \{x \,/ [(x \in A) \wedge \neg (x \in B)] \vee [(x \in B) \wedge \neg (x \in A)]\}$

Ejemplos

- Sean los conjuntos A = {a, b, c, *d*, *e*} y B = {*d*, *e*, f, g}, entonces A ΔB = {a, b, c, f, g}

- Sean los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = { 1, 2, 3 }, entonces A Δ B = {4, 5}

1.6.6 Problemas de Aplicación.

En una comunidad de 30 familias debatían acerca de qué bebida debían preparar para las fiestas de su comunidad. Finalmente se optó por dos bebidas: cóctel de frutas sin alcohol y zumo de naranjas. Sabemos que 20 familias prepararon cóctel de frutas sin alcohol, 10 personas prepararon zumo de naranjas y 8 familias no prepararon nada. Se pide saber ¿cuántas familias prepararon ambas bebidas?

Desarrollo:

1. Determinar los datos que se cuentan en el ejercicio y se tendría que en la comunidad son 30 familias de las cuales 20 familias preparan cóctel, 10 familias el zumo y 8 no preparan nada. Tener en cuenta que si se suma las familias que prepararon coctel, zumo y no prepararon les da 38 familias (20+10+8=38) que es mucho mayor al total de familias de la comunidad (30); lo cual indica que existen familias que elaboraron ambas bebidas y que debemos encontrar.

2. Determinar los conjuntos y son: el universo U que son todas las familias, luego están las familias que elaboraron el coctel (Conjunto C), las familias que elaboraron el zumo (Conjunto Z) y los que no elaboraron nada.

3. Ahora a través de una ecuación calcular el valor "x" solamente sumando todos los conjuntos: $(20 – x) + (10 - x) + 8 = 30$; igualamos a 30 porque es el universo de familias que existen en la comunidad.

4. Al resolver la ecuación $38 – 2x = 30$; tenemos que $x = 4$; es decir el número de familias que elaboraron ambas bebidas es 4.

1.6.7 PARA EJERCITAR

- Dado el conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5} y los subconjuntos A = {1, 2, 4}, B = {2, 4, 5} y C = {1, 2, 5}. Hallar: AUB, AUC, BUC, BUB.

- A la operación cuyo resultado es un conjunto formado por todos los elementos de dos o más conjuntos se llama:

  a) Unión
  b) Intersección
  c) Diferencia
  d) Complemento
  e) Diferencia simétrica

- Dado el conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5} y los subconjuntos A = {1, 2, 4}, B = {2 , 4, 5} y C={1, 2, 5}. Hallar: A∩B, A∩A, B∩C

- Dado el conjunto Universo U = {a, e, i, o, u}, el conjunto A = {a, e, i, o} y el conjunto B = {u}. Hallar la intersección entre A y B
  a) A ∩ B = {i, u}
  b) A ∩ B = { }
  c) A ∩ B = {a, o}
  d) A∩B={a, e, i, o, u}

- Dado el conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5} y los subconjuntos A = {1 ,2, 4}, B = {2 ,4 , 5} y C={1,2,5}.Hallar: U^c, B ∩A^c, A^c, B^c, A ∪A^c, A ∩ A^c

- Dado el conjunto Universo U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, el conjunto A = {1,2,3,4} y el conjunto B = {5,6,7}. Hallar el complemento de A
  a) A^c= {8,9}
  b)A^c= {5,6,7,8,9}
  c)A^c= {4,5}
  d)A^c= {1,2,3,4,5,6,7}

- Dado el conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5} y los subconjuntos A = {1, 2, 4}, B = {2, 4, 5} y C={1, 2, 5}. Hallar: C−A, B−C, B–A.

- Dado el conjunto Universo U = {a, e, i, o, u}, el conjunto A = {a, e, i, o} y el conjunto B = {a, i, u} . Hallar la diferencia entre A y B
  e) A - B = {i, u}
  f) A - B = { }
  g) A - B = {e, o}
  h) A - B={a, e, i, o, u}

- Dado el conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5} y los subconjuntos A = {1, 2, 4}, B = {2, 4, 5} y C={1, 2, 5}. Hallar: AΔB, C ΔB.

- Dado el conjunto Universo U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, el conjunto A = {1,2,3,4} y el conjunto B = {5,6,7}. Hallar la diferencia simétrica de A y B
  a) AΔB = {8,9}
  b)AΔB = {1,2,3,4,5,6,7}
  c)AΔB = {4,5}
  d)AΔB = {}

- Se encuesta a todas las personas que viajan en un tren, acerca de sus deportes favoritos. Estas son las respuestas:
  - A 115 les gusta el Baloncesto
  - A 35 les gusta el Baloncesto y también el Atletismo
  - A 90 sólo el Atletismo
  - Son 105 el total de personas a quienes no les gusta el Baloncesto

La pregunta es: ¿cuántos pasajeros fueron encuestados en el tren?

- Estamos en una asamblea de futuros copropietarios de un edificio a la que asisten 100 personas. Sabemos que 35 son hombres que viven solos, 24 son mujeres que viven solas y 20 son hombre y mujeres que viven en parejas. El resto de los asistentes, son inversores que no planifican vivir en el edificio, sino que comprarán como inversión. ¿Cuántos inversores hay presentes en la asamblea?

- Se preguntó a 11 profesores del instituto acerca de sus preferencias por dos marcas de café instantáneo A y B y se obtuvieron los siguientes resultados: 7 prefirieron solo una de dichas marcas; el número de personas que prefirieron ambas marcas fue igual al número de personas que no prefirió ninguno de las dos; 3 personas manifestaron que no prefieren la A pero sí la B. Se desea saber:
    - ¿Cuántas personas prefirieron la marca A?
    - ¿Cuántas personas prefirieron sólo la B?
    - ¿Cuántas personas manifestaron que les eran indistintas ambas marcas?

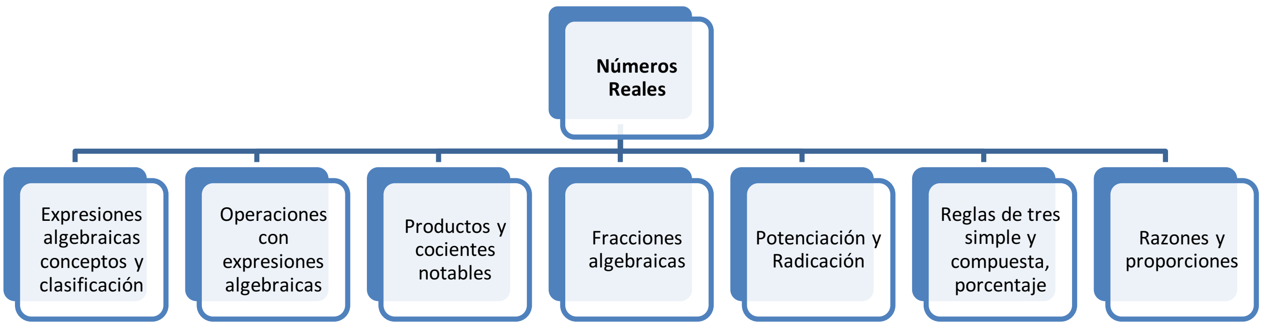
- Se hizo una encuesta entre mil personas de Guayaquil para determinar el medio de comunicación empleado para conocer las noticias del día. 400 respondieron que se enteran de forma regular de los sucesos del día a través de la televisión, 300 lo hacen a través de la radio. De las cantidades anteriormente mencionadas, 275 corresponde al número de personas que utilizan ambos medios para estar al día en los acontecimientos del mundo.
    - ¿Cuántas de las personas encuestadas se enteran de las noticias sólo a través de la televisión?
    - ¿Cuántas de las personas entrevistadas lo hacen únicamente a través de la radio?
    - ¿Cuántas de las personas investigadas no hacen uso de ninguno de los dos medios?

- Una encuesta realizada a un grupo de empleados reveló que 277 tenían casa propia; 233 poseían automóvil; 405 televisor; 165 automóvil y televisor; 120 automóvil y casa; 190 casa y televisor y 105 tenían casa, automóvil y televisor.
    - ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
    - ¿Cuántas personas tienen solamente casa propia?
    - ¿Cuántas personas tienen solamente casa y televisor?

CAPÍTULO DOS

"Dondequiera que haya un número está la belleza."

FELIX KLEIN



2. NÚMERO REALES

Destrezas con criterios de desempeño

Al finalizar esta unidad se podrá:

- Comprender y realizar correctamente las operaciones con números reales.
- Aplicar las operaciones básicas, la radicación y la potenciación en la resolución de problemas con números enteros, para desarrollar el pensamiento lógico y crítico.
- Calcular la potencia de números enteros con exponentes naturales.
- Deducir propiedades algebraicas de la potenciación de números reales con exponentes enteros en la simplificación de expresiones numéricas y algebraicas.
- Transformar raíces n-ésimas de un número real en potencias con exponentes racionales para simplificar expresiones numéricas y algebraicas.
- Calcular regla de tres en base a la relación de las magnitudes planteadas.

Introducción

La palabra número proviene etimológicamente del latín "numerus"; que expresa cantidad y se representan por medio de signos numéricos (2, 4, 10,..). Los números los encontramos en todas las profesiones, incluyendo Derecho. Por ejemplo: dos juicios, ocho notarias o cinco procesos penales o cuarenta artículos de una ley.

En esta unidad analizaremos los números reales, las expresiones algebraicas con sus respectivas operaciones; así como la factorización de polinomios, potenciación, radicación, regla de tres, razones y proporciones.

Antes de iniciar esta unidad, es necesario conocer la clasificación de los números:

- **Números naturales:** son números positivos y sin parte decimal. Ejemplo 0,1,2,3.
- **Números enteros:** Son números naturales e incluye los números negativos. Ejemplo -2,-1,0, 1, 2,...
- **Números racionales:** Son aquellos que se pueden expresar como cociente de dos números enteros. En otras palabras es un número entero, decimal o quebrado que puede expresarse como la expresión del cociente exacto de dos números enteros.
- **Números irracionales:** Son aquellos números que poseen infinitas cifras decimales **3.6; 60.2;….**
- **Números reales**: Son todos los números anteriormente descritos. Abarcan la recta real y cualquier punto de esta es un número real.
- **Números imaginarios**: Son los que se producen al extraer la raíz cuadrada de un número negativo.
- **Números complejos:** Son los que están formados por todos los números reales y todos los imaginarios.

2.1 Expresiones algebraicas conceptos y clasificación

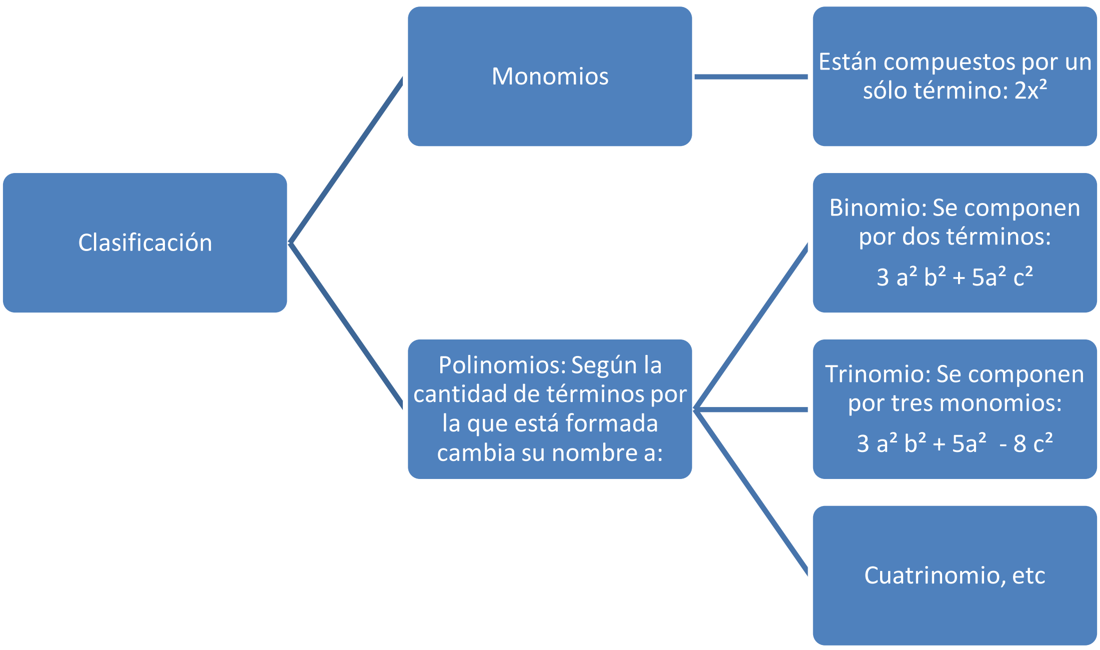
2.1.1 Concepto

Expresión algebraica es la combinación de un conjunto de números y letras que se relacionan con las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación). Las letras de esta relación se conocen como variables.

Las expresiones algebraicas están conformadas por coeficiente, exponente y base. Un ejemplo sería el tiempo de servicio en un consultorio jurídico: $3t^2$; en donde '3' es el coeficiente, 't' es la variable y a su vez es la base (en este caso tiempo de servicio) y '2' es el exponente.

2.1.2 Clasificación

En general, se dividen en: monomios y polinomios.



Recuerde que la unión de monomios con alguna operación matemática se denomina polinomio.

2.2 Operaciones con expresiones algebraicas

2.2.1 Adición de polinomios

En la adición de polinomios, se suman entre sí los monomios semejantes; es decir se suman los coeficientes de los términos del mismo grado. Si los monomios no son semejantes, la suma se deja representada.

Ejemplo: Sumar los siguientes polinomios: ($2t^3$+ $5t$ + 3 + $2t^2$) + ($4t$ - $3t^2$ + t^3 – 5)
La suma la podemos hacer de forma horizontal o vertical:

Forma Horizontal	Forma Vertical
($2t^3$+ $5t$ + 3 + $2t^2$) + ($4t$ - $3t^2$ + t^3 – 5) = $2t^3$ + t^3 + $2t^2$ - $3t^2$ + $4t$ + $5t$ + 3 – 5 = $3t^3 - t^2$ + $9t$ - 2	$2t^3$ + $2t^2$ + $5t$ + 3 t^3 - $3t^2$ + $4t$ – 5 $3t^3 - t^2$ + $9t$ - 2

Al sumar tenga en consideración:

1. Ordenar los polinomios, si no lo están.
1. Agrupar los monomios del mismo grado.
2. Sumar los monomios semejantes.

2.2.2 Sustracción de polinomios

Se restan los coeficientes de los términos semejantes y se deja indicada la sustracción de los términos no semejantes. Al hacer las sustracciones de polinomios, se utiliza el polinomio opuesto.

Recuerde que el signo de resta enfrente de los paréntesis es como el coeficiente de -1. Cuando restamos, podemos distribuir (-1) a cada uno de los términos en el segundo polinomio y luego sumar los dos polinomios. En otras palabras, el polinomio que va a ser restado cambia de signo al romper el paréntesis y luego se procede sumando los polinomios.

Ejemplo: Restar los siguientes polinomios: ($2t^3$+ $5t$ + 3 + $2t^2$) - ($4t$ - $3t^2$ + t^3 – 5)
La suma la podemos hacer de forma horizontal o vertical:

Forma Horizontal	Forma Vertical
($2t^3$+ $5t$ + 3 + $2t^2$) - ($4t$ - $3t^2$ + t^3 – 5) = $2t^3 - t^3$ + $2t^2$ + $3t^2$ - $4t$ + $5t$ + 3 + 5 = t^3 + $5t^2$ + t + 8	$2t^3$ + $2t^2$ + $5t$ + 3 - t^3 + $3t^2$ - $4t$ + 5 t^3 + $5t^2$ + t + 8

2.2.3 PARA EJERCITAR

Dado los siguientes polinomios:
A(x) = $3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 7$,
B(x) = $8x^3 - 6x^2 - 3$,
C(x) = $4x^5 + 9x^4 + 5$,
D(x) = $6x^2 - x^7 - 6x^5 + 4x$

Sumar: A(X)+B(X); B(X)+D(X); C(X)+D(X); A(X)+B(X)+D(X)+C(X)

Restar: A(X)-B(X); B(X)-D(X); C(X)-D(X); A(X)-B(X)-D(X)-C(X)

2.3 Productos y cocientes notables

2.3.1 Producto de polinomios

Se realiza multiplicando los coeficientes de las expresiones algebraicas y aplicando la propiedad de las potencias de igual base. El producto puede ser: entre un número por un polinomio, un monomio por un polinomio y entre polinomios.

1. Multiplicación de un número por un polinomio: Es otro polinomio que tiene el mismo grado del polinomio y el coeficiente es el producto de los coeficientes del polinomio por el número.

Ejemplo: $3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

2. Multiplicación de un monomio por un polinomio: Se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio. Se multiplican los coeficientes de los monomios, las bases se mantienen y se suman los exponentes de las bases que son iguales; los de diferente base, se unen las bases y estas mantienen su exponente.

Ejemplo: $5x^2 * (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 10x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 10x^2$

$5x^2 * (2x^3 - 3x^2 + 4y - 2y^2) = 10x^5 - 15x^4 + 20xy - 10\,x^2y^2$

3. Multiplicación de polinomios: Este tipo de operaciones se realiza de la siguiente manera:

a. Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio.

b. Se suman los monomios del mismo grado.

Ejemplo: Multiplicar los siguiente polinomios $P(x) = 2x^2 - 3;\ Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) * Q(x) = (2x^2 - 3) * (2x^3 - 3x^2 + 4x)$
$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x$
$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

2.3.2 Cociente notable

Cociente notable es el resultado de divisiones exactas entre polinomios. Para realizar la división de los polinomios se siguen los siguientes pasos:

a. A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio no es completo (no existe una secuencia de reducción de los exponentes) dejamos espacios en los lugares que correspondan.

b. A la derecha situamos el divisor. Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.
c. Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo.
d. Volvemos a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.
e. Realizamos estos procesos hasta que el residuo sea cero o sea de grado menor que el divisor y ya no se pueda continuar dividiendo.

Ejemplo: Dividir los polinomios $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$; $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad +2x^3 \qquad -x-8 & x^2-2x+1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^5+2x^4-x^3} & x^3+2x^2+5x+8 \\
\quad 2x^4 + x^3 & \\
\quad \underline{-2x^4+4x^3-2x^2} & \\
\qquad 5x^3-2x^2-x & \\
\qquad \underline{-5x^3+10x^2-5x} & \\
\qquad\quad 8x^2-6x-8 & \\
\qquad\quad \underline{-8x^2+16x-8} & \\
\qquad\qquad 10x-16 &
\end{array}
$$

Observe que al llegar a $10x - 16$, no se puede continuar dividiendo porque su grado es menor que el del divisor. Por lo tanto x3 + 2x2 + 5x + 8 es el cociente.

2.3.3 PARA EJERCITAR

Dado los siguientes polinomios:
$A(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 7$, $B(x) = 8x^3 - 6x^2 - 3$, $C(x) = 4x^5 + 9x^4 + 5$, $D(x) = 6x^2 + x$

Multiplicar: $A(X)*B(X)$; $B(X)*D(X)$; $C(X)*D(X)$; $A(X)*C(X)$

Hallar el cociente de: $A(X):D(X)$

2.4 Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por: $\frac{p(x)}{q(x)}$, en donde el polinomio q(x) es diferente de cero. Tenga en consideración que el polinomio p(x) es el numerador y q(x) es el denominador.

Dada dos fracciones algebraicas $\frac{p(x)}{q(x)}$ y $\frac{r(x)}{s(x)}$, se dice que dos son equivalentes si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{r(x)}{s(x)}$

Para simplificar una fracción algebraica se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos, como se realizó en la sección de cocientes notables.

2.5 Potenciación y Radicación

2.5.1 Potenciación

Es la operación matemática que tiene por objeto multiplicar por sí mismo un número llamado base tantas veces como indica otro número llamado exponente. Es una forma abreviada de escribir el producto formado por varios factores iguales. $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

La potencia es conformada por:

- **Base de la potencia:** Es el número que multiplicamos por sí mismo, en el ejemplo anterior es 6.

- **Exponente de una potencia:** Indica el número de veces que multiplicamos la base, en el ejemplo es 4.

A continuación se enuncian las propiedades de las potencias de números naturales:

i. Un número elevado a 0 es igual a 1. Ejemplo: $6^0 = 1$; $x^0 = 1$

ii. Un número elevado a 1 es igual a sí mismo. Ejemplo $6^1 = 6$; $x^1 = x$

iii. Producto de potencias con la misma base: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes. $x^m . \ x^n = x^{m+n}$.
Ejemplo: $2^5 \cdot 2^2 = 2^{5+2} = 2^7$

iv. División de potencias con la misma base: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes. $x^m : x^n = x^{m-n}$.
Ejemplo: $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$

v. Potencia de una potencia: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes. $(x^m)^n = x^{m*n}$.
Ejemplo: $(x^2)^3 = x^{2*3} = x^6$

vi. Producto de potencias con el mismo exponente: Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases. $x^m * y^m = (xy)^m$
Ejemplo: $2^5 * 4^5 = (2*4)^5 = 8^5$

vii. Cociente de potencias con el mismo exponente: Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases. $x^m : y^m = (x:y)^m$
Ejemplo: $4^5 : 2^5 = (4:2)^5 = 2^5$

2.5.2 Radicación

La radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación y cumple que para un número natural n, si $b^n = a$, b es la raíz enésima de a. El radical esta formado por: índice (que es el valor del radical 'n'), coeficiente 'k' y el radicando 'a': $k\sqrt[n]{a}$

Según el valor del índice, las raíces se llaman cuadradas (2), cúbicas (3), cuartas (4), quintas (5),…., raíces enésimas (n).

Un radical se puede expresar en forma de potencia: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
Ejemplo: : $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$

Una vez expresado el radical en potencia se pueden resolver los ejercicios como si fueran una simple potencia.

2.5.3 PARA EJERCITAR

Calcular los valores de las siguientes potencias: $16^{\frac{3}{2}}$, $8^{\frac{2}{3}}$

Hallar las sumas: $2\sqrt{12}$ - $3\sqrt{75}$; $\sqrt{24}$ - $5\sqrt{6}$ + $\sqrt{486}$; $\sqrt[3]{54}$ - $\sqrt[3]{16}$ + $\sqrt[3]{250}$

2.6 Reglas de tres simple y compuesta, porcentaje

2.6.1 Regla de tres simple

La regla de 3 simple es una operación que ayuda a resolver problemas de proporcionalidad, tanto directa como inversa. Para hacer una regla de 3 simple se necesitan 3 datos: dos valores conocidos A y B y un tercer valor C. A partir de estos, se averigua el cuarto valor D.

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D} \end{array}$$

Ejemplo:

- En la Facultad de Derecho de una Universidad hay 467 alumnos y el día de hoy faltaron 63. ¿Qué porcentaje de alumnos estuvo ausente?

  Primero se plantea el problema y se indica que 467 alumnos es el 100% cuanto % serán 63 alumnos

  $$\begin{array}{c} 467 \rightarrow 100 \\ 63 \rightarrow X \end{array}$$

  Segundo se colocan los datos en una ecuación para hallar X; X = (63 x 100)/467
  X = 13.49%; en donde el porcentaje de alumnos ausentes es del 13,49%

- Un trabajador gana por jornada de 8 horas $124,50, si su jornada aumenta en 2,5 horas ¿Cuál será su nuevo salario?

  Primero se plantea el problema y se indica que $ 124,5 por 8 horas, ¿cuánto ganará si ahora trabaja 10,5 horas?

  $$\begin{array}{c} \$\ 124{,}5 \rightarrow 8h \\ \$\ x \rightarrow 10{,}5h \end{array}$$

  Se ponen los datos en una ecuación para hallar X; X = (124,5 x 10,5)/8
  X = 163,40 y obtenemos que el valor a ganar es de $ 163,40

2.6.2 Regla de tres compuesta

La regla de tres compuesta se emplea cuando se relacionan tres o más magnitudes, de modo que a partir de las relaciones establecidas entre las magnitudes conocidas se obtienen la desconocida.

Una regla de tres compuesta se compone de varias reglas de tres simples aplicadas sucesivamente.

Existen tres casos de regla de tres compuesta:
1) Regla de tres compuesta directa
2) Regla de tres compuesta inversa
3) Regla de tres compuesta mixta

2.6.2.1 Regla de tres compuesta directa

Es una sucesión de reglas de tres simples directas. De esta forma se tendrá relación de magnitudes de la siguiente manera:

A más => más (directa)
A menos => menos (directa)

Ejemplo:

- Cinco llaves abiertas durante 8 horas diarias han consumido una cantidad de agua por valor de $20. Averiguar el precio de 15 llaves abiertas 12 horas durante los mismos días.

  Primero se plantea el problema al indicar que:
  Más llaves, mayor costo → Directa
  Más horas, mayor costo → Directa

  5 llaves → 8 horas → 20$
  15 llaves →12 horas → X $

  Se colocan los datos en una ecuación para hallar X:
  $\frac{5}{15} * \frac{8}{12} = \frac{20}{x}$; planteándolo como ecuación $\frac{40}{180} = \frac{20}{x}$ 40*x = 180*20; quedando

  40*x = 3600; x = 90, lo cual indica que el costo de dejar 15 llaves por 12 horas abierta es de $ 90.

2.6.2.2 Regla de tres compuesta inversa

La relación de las magnitudes en una regla de tres compuesta inversa será la siguiente:

A más => menos (inversa)
A menos => más (inversa)

Ejemplo:

- Dos obreros trabajan 9 horas diarias y construyen un muro en 4 días. ¿Cuánto tardarán 5 obreros trabajando 6 horas diarias?

  Primero se plantea el problema al indicar que:

  Más obreros, menos días → Inversa
  Más horas, menos días → Inversa

  2 obreros →9 horas → 4 días
  5 obreros →6 horas → X días

  Colocar los datos en una ecuación para hallar X:

  $\frac{2}{5} * \frac{9}{6} = \frac{x}{4}$; planteándolo como ecuación $\frac{18}{30} = \frac{x}{4}$ 30*x = 18*4; quedando

  30*x = 72; x = 2,4, lo cual indica que 5 obreros trabajando 6 horas diarias demorarán 2,4 días en terminar el muro.

2.6.2.3 Regla de tres compuesta mixta

La regla de tres compuesta mixta estará formada por una mezcla de reglas de tres simples inversas y directas. La relación de las magnitudes será la que detallamos a continuación:

A más => menos (inversa)
A más=> menos (inversa)
A más=>más (directa)

Ejemplo:

- Para pavimentar 2 km de carretera, 50 trabajadores han empleado 20 días trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días tardarán 100 trabajadores trabajando 10 horas al día en construir 6 km más de carretera?

  Para resolver siga los siguientes pasos:

  1. Plantear el problema al indicar que:

  Más trabajadores, menos días → Inversa
  Más horas, menos días → Inversa
  Más Kilómetros, más días→ Directa

Casos	Km	Trabajadores	Días	Horas
A	2	50	20	8
B	6	100	X	10

  2. Ubicar los datos en una ecuación para hallar X:

  $\frac{2}{6} * \frac{100}{50} * \frac{10}{80} = \frac{20}{x}$; plantear como ecuación $\frac{2000}{2400} = \frac{20}{x}$ 2000*x = 20*2400;
  quedando 2000*x = 48000; x = 24, lo cual indica que se necesitan 24 días para que 100 trabajadores trabajando 10 horas al día en construir 6 km más de carretera

2.6.3 Porcentaje

Un porcentaje es un tipo de regla de tres directa en el que una de las cantidades es 100. Es el cociente entre cada frecuencia y el total, multiplicado por 100

$$\frac{\text{Frecuencia}}{\text{total}} \times 100$$

Ejemplo: Una moto cuyo precio era \$1.500, cuesta en la actualidad \$ 250 más. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

$$\$1500 \longrightarrow \$\,250$$
$$\$\,100 \longrightarrow \$\,x$$

$$\frac{1500}{100} = \frac{250}{x}\text{ ; entonces } x = \frac{250.100}{1500} = 16{,}67\%$$

Ejemplos:

- De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?
  Se divide la frecuencia para el total y se multiplica por 100: $\frac{600}{800}$ *100 = 75%. El resultado indica que el 75 % de los alumnos del colegio han ido al viaje.

- Calcular el 12% de 96?
  Se multiplica el porcentaje con el valor y se divide para 100: $\frac{12*96}{100}$ = 11,52.

- Una bicicleta tiene una rebaja del 25%. El precio normal es \$250. Calcular el nuevo precio.

  Primero se calcula cuánto es el valor de la rebaja, se multiplica el porcentaje con el valor y se divide para 100: $\frac{25*250}{100}$ = 62,5. Se tiene que el descuento es de \$ 62,5, ahora calcular el nuevo precio, si habla de rebaja se debe restar al valor total el valor del porcentaje de descuento: 250 - 62,5 = \$ 187,5, es el valor actual de la bicicleta.

2.6.4 PARA EJERCITAR

- Se compran 5 kg de papas, si 2 kg cuestan \$ 0.80, ¿cuánto se pagará por estos?

- Un automóvil recorre 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 2 horas?

- Con cuarenta horas semanales de trabajo, un trabajador ganó \$12000, ¿cuánto ganará si la semana siguiente puede trabajar cincuenta horas?

- Cuatro tractores pueden remover 400 m3 de tierra en 6 horas. ¿Cuánto demorarán seis tractores en remover 800 m3 de tierra?

- Por enviar 5 kg a un pueblo que está a 60 km de distancia, una empresa me ha cobrado $ 9. ¿Cuánto me costará enviar un paquete de 8 kg a 200 km de distancia?

- Doce obreros que en 9 días trabajan 7 horas cada día, han ganado un total de $1200. ¿Cuánto ganarán 25 obreros en 15 días, trabajando 6 horas cada día?

- Al adquirir un vehículo cuyo precio es de $18800, se hace un descuento del 7.5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

- Una computadora cuesta $ 600, ofrecen no cobrar el IVA que es del 12% por pagarlo al contado. ¿Cuánto me han descontado? ¿Cuánto he pagado?.

- Se vende un objeto perdiendo el 20% sobre el precio de compra. Hallar el precio de venta del citado artículo cuyo valor de compra fue de $ 150.

- Una moto cuyo precio era de $ 5.000, cuesta en la actualidad $ 250. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

2.7 Razones y proporciones

2.7.1 Razón

Se denomina razón al resultado obtenido al comparar una cantidad con otra, cuyo resultado es un número real que no posee una unidad. Generalmente relacionados mediante un cociente.

La razón X a Y se representa por: $\frac{X}{Y}$; x, y $\in R^{+}$, esto indica que la razón es un número real positivo.

Ejemplos

- En un curso de la facultad de una universidad hay 33 hombres y 35 mujeres. Entonces "la razón" entre hombres y mujeres del curso es $\frac{33}{35}$ se lee "33 es a 35"

- En una caja hay 8 bolas rojas y 7 verdes.
  La razón entre las bolas verdes y las bolas rojas es $\frac{7}{8}$, se lee "7 es a 8"

- Un rectángulo mide 60 cms. de ancho y 20 cms. de alto. Hallar la razón entre su anchura y su altura.

  Se calcula la razón de anchura del rectángulo/altura y eso es igual a 60/20 = 3. La razón es 3 e indica que la anchura es 3 veces la altura.

2.7.2 Serie de razones iguales

Se llama serie de razones iguales a la igualdad de dos o más razones.
Esto es en símbolos: Sean $a/\ b$, $c/\ d$, $e/\ f$, $g/\ h$,…. , $m\ n$ razones; entonces $a/\ b = c/\ d = e/\ f = g/\ h = \cdots = m/\ n$, es una Serie de Razones Iguales .

Ejemplos

El equipo de fútbol de un colegio, ha ganado 5 de los 9 partidos que ha jugado, sin embargo si los datos fueran que el equipo ha ganado 10 partidos de los 18 jugados, de igual manera otra conclusión es que si el equipo ha ganado 15 partidos de los 27 jugados; las series de este problema serían: 5/9 = 10/18 = 15/27 al simplificar la 2 y 3 razón se obtendría el mismo resultado de la 1 por tal razón son series iguales.

2.7.3 Proporción

La proporcionalidad es una relación o razón constante entre magnitudes medibles."Si uno aumenta o disminuye el otro también aumenta o disminuye proporcionalmente"

Si las razones son a:b y c:d ($\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$)que forman una proporción, entonces se escribe esta proporción como a:b que se lee "a es a b como c es a d". A los números a y d se les llama extremos y a los números b y c se les llama medios.

Ejemplos

- Forman proporción las siguientes razones $\frac{2}{8}$ y $\frac{4}{16}$

  Primero, se debe multiplicar cruzados: 2*16 y 8*4

  Segundo se comparan ambos resultados 32 = 32 y si son iguales se puede indicar que las razones forman proporciones.

- Forman proporción las siguientes razones $\frac{2}{6}$ y $\frac{5}{15}$

  Primero, se debe multiplicar cruzados: 2*15y 5*6

  Segundo se comparan ambos resultados 30 = 30 y si son iguales se puede indicar que las razones forman proporciones.

- En un examen la razón entre aprobados y suspensos es de 4 a 3. Si suspendieron 81 alumnos, ¿cuántos aprobaron?

  Para resolver este ejercicio se debe primero plantear la razón 4:3 con la razón de la pregunta x:81

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{81} \quad 3x = (4)*(81) \quad x= \frac{4*81}{3} \quad x = 108$$

- Durante 25 minutos de ver televisión, hay 7 minutos de anuncios comerciales. Si se ven 70 minutos de televisión, ¿cuántos minutos de anuncios verás?

$$\frac{25}{7} = \frac{70}{x} \qquad 25*x = (70)*(7) \qquad x = \frac{70*7}{25} \qquad x = 19{,}6.$$

Por lo tanto, en 70 minutos de ver televisión, hay 19,6 minutos de anuncios comerciales.

2.7.4 Propiedades de las proporciones

Las propiedades de las proporciones son las siguientes:

1: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \cdot d = b \cdot c$, con b y d distintos de cero.

2: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, con b y d distintos de cero.

3: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, con b y d distintos de cero.

4: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, con b, c y d distintos de cero.

5: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, con a, b y d distintos de cero.

Ejemplos

Hallar los valores desconocidos de la siguiente serie de razones iguales.

$$\frac{4}{b} = \frac{5}{d} = \frac{1}{3} \quad \leftrightarrow \quad \frac{4}{b} = \frac{1}{3} \rightarrow 4*3 = b*1 \rightarrow b = 12$$

$$\frac{5}{d} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow 5 * 3 = 1 * d \rightarrow d = 15$$

$$\frac{4}{b} = \frac{5}{d} = \frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

2.7.5 Proporción Continua.

Se puede decir que dos o más cantidades están en proporción continua, si la primera cantidad está relacionada a la segunda, la segunda está relacionada a la tercera cantidad, la tercera cantidad está relacionada a la cuarta y así sucesivamente.

Ejemplo

- Se tienen cuatro cantidades, p, q, r, y s, entonces se muestra la relación entre estas cantidades basada en los conceptos de proporción continua como se muestra a continuación:

En proporción continua, todos los ratios entre cantidades diferentes son los mismos; pero siempre recuerda que la relación existe entre dos cantidades, por ejemplo:

P : Q	Q : R	R : S
10 : 5	16 : 8	4 : 2

Tenga en cuenta que el ratio entre las diferentes cantidades, es decir, P:Q, Q:R y R:S es el mismo, es decir, 2:1 cuando se simplifica.

La proporción continua es muy importante para determinar los ingresos de los individuos que son dueños de un mismo negocio o incluso para calcular las ganancias que diferentes dueños de una compañía o negocio deberán llevar.

2.7.6 Proporcionalidad directa

Recordar que la proporcionalidad es una relación entre magnitudes medibles. Cuando una razón es igual a otra se dice que existe proporcionalidad.

Ahora, dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una, aumenta la otra en la misma proporción.

Ejemplos

- El precio de tres bolígrafos es de $ 4.5 ¿Cuánto cuestan 7 bolígrafos?

Bolígrafos Precio

$3 \longrightarrow 4.5$

$7 \longrightarrow x$

$$\frac{3}{7} = \frac{4.5}{x} \qquad x = \frac{7 \cdot 4.5}{3} = 10.5$$

- Dos videos juegos cuestan $ 80. ¿Cuánto costarán 5 video juegos?

Planteamos el ejercicio de la siguiente manera:

# de video juegos	Costo
2	80
5	x

$\frac{80}{2} = \frac{x}{5}$; planteándolo como ecuación 80*5 = 2*x; quedando 2x = 400 = 200, lo cual indica que al comprar cinco videos se debe pagar $ 200

2.7.7 Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una, disminuye la otra en la misma proporción.

Ejemplos

- Tres pintores tardan 10 días en pintar una casa. ¿Cuánto tardarán seis pintores en hacer el mismo trabajo?

Podemos ver que al aumentar el número de pintores disminuye el tiempo que se tarda en pintar la casa, como el número de pintores se multiplica por 2, el número de días que emplean en pintar se divide por 2. Así tardarán 5 días.

- En una granja avícola hay 300 gallinas que comen un camión de grano en 20 días. Si se compran 100 gallinas más ¿En cuánto tiempo comerán la misma cantidad de grano?

  Plantear el ejercicio

Gallinas	Días
300 →	20
400 →	x

  $$\frac{300}{400} = \frac{x}{20} \qquad x = \frac{20 \cdot 300}{400} = 15$$

  Observar que la misma cantidad de grano alcanzará para 15 días

2.7.8 Proporcionalidad compuesta

Se denomina proporcionalidad compuesta a aquellas situaciones en las que intervienen más de dos magnitudes ligadas por la relación de proporcionalidad. Entre estas magnitudes puede intervenir la proporcionalidad directa o inversa:

Ejemplos

- Tres obreros trabajando 8 horas diarias realizan un trabajo en 15 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 5 obreros trabajando 9 horas? Resolver el problema aplicando el método de las proporciones.

  Observar que en el ejercicio hay obreros, horas de trabajo por día y días, lo cual nos da la idea de que debemos usar proporcionalidad compuesta. Planteamos el ejercicio:

# Obreros	Horas diarias	Días
3	8	15
5	9	x

  Si en la tabla se compara la columna de obreros con la de días; 3 obreros tardan 15 días entonces 5 obreros tardarán menos; por lo tanto esta será una proporción inversa. Ahora si se observa las horas diarias con los días, en donde con 8 horas diarias de trabajo tardan 15 días, si trabajan 9 horas diarias tardarán menos días, esto también será una proporción inversa.

  $\frac{5}{3} * \frac{9}{8} = \frac{15}{x}$; planteándolo como ecuación $\frac{45}{24} = \frac{15}{x} \rightarrow$ 45*x = 24*15; quedando

  45*x = 360; x = 8, lo cual indica que se demorarán 8 días en terminar el trabajo si son 5 obreros y trabajan 9 horas al día.

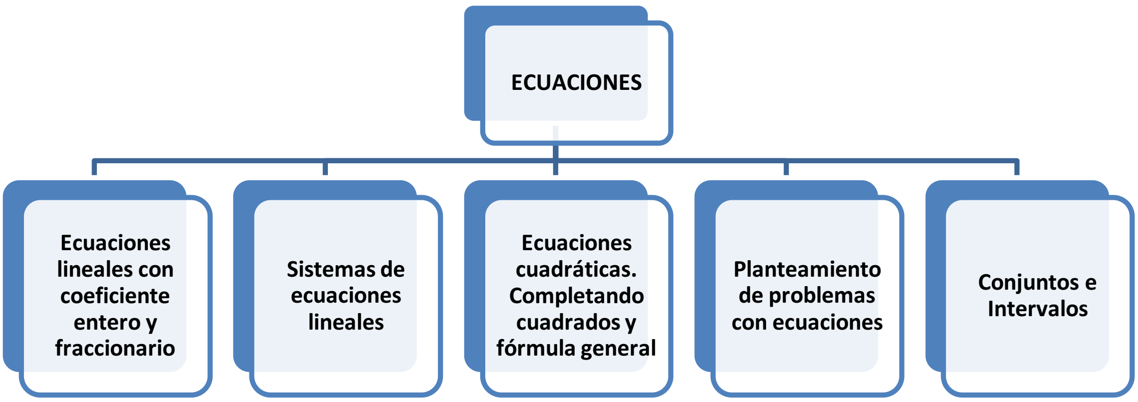
2.7.9 PARA EJERCITAR

- En el mercado Caraguay, el costo de 5 kgs de pescado es de $ 8. Si se cuenta con $ 24. ¿Cuántos Kilogramos podemos comprar?
- Dos videos juegos cuestan $ 80. ¿Cuánto costará 1 videojuego?
- Cuatro voluntarios demoran 5 horas en evacuar a las personas de un sector afectado por las inundaciones. ¿Cuánto tardarán 10 voluntarios en realizar la misma tarea?
- Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?
- Ayer 2 camiones transportaron una mercancía desde el puerto hasta el almacén. Hoy 3 camiones, iguales a los de ayer, tendrán que hacer 6 viajes para transportar la misma cantidad de mercancía del almacén al centro comercial. ¿Cuántos viajes tuvieron que hacer ayer los camiones?
- Un carpintero tarda 18 días en realizar 3 armarios trabajando 5 horas al día. ¿Cuántos días necesitará para construir 5 armarios empleando 3 horas al día?
- En una fábrica, 6 máquinas iguales producen en 2 horas 600 piezas. ¿Cuántas piezas producirán 9 de estas máquinas en 3 horas? Resolver el problema aplicando el método de reducción a la unidad.
- En una ciudad existen dos niños por cada tres niñas, encuentra la razón entre niños y niñas
- Pedro puede leer 420 palabras por minuto, mientras que Jorge puede leer 350 palabras por minuto. ¿Cuál es la razón entre las palabras que leen Jorge y Pedro?
- Una bolsa grande de magdalenas cuesta $ 5,2 y una bolsa pequeña cuesta $ 1,3. Hallar la razón entre el precio de la bolsa grande y el de la pequeña.
- En un colegio la razón entre los niños y niñas es 4:5. Se sabe que la población total de estudiantes (alumnas más alumnos) del establecimiento es de 900. De ellos: ¿cuántos son niñas?, ¿cuál es la diferencia entre el número de niñas y niños?
- En una tienda se venden dulces nacionales e importados, a razón de 3:2 Si sabemos que al día se vende 255 dulces nacionales, ¿Cuántos dulces importados se venden al día?
- Para armar una mesa, se necesitan 14 tornillos. ¿Cuántos tornillos se necesitan para armar 9 mesas?

CAPÍTULO TRES

"La formulación de un problema, es más importante que su solución."

ALBERT EINSTEIN



3. ECUACIONES

Destrezas con criterios de desempeño

Al finalizar esta unidad se podrá:

- Resolver sistemas de ecuaciones lineales y desigualdades.

3.1 Introducción

En este capítulo se va a describir los diferentes aspectos donde examinaremos estas operaciones matemáticas de forma sencilla.

Para ello se define el término ecuación como una igualdad en la que hay una o varias incógnitas y que se verifica si es verdadera para determinados valores. Por lo general las variables se representan por las últimas letras del alfabeto x, y, z x u v.

Ejemplo:

- $5x - 5 = 3$
- $5x + 2y - 1 = 0$
- $5x^2 - 3x + 2 = 0$

3.2 Ecuaciones lineales con coeficiente entero y fraccionario

3.2.1 Ecuaciones lineales con coeficiente entero

Se denomina ecuación lineal o ecuación de primer grado cuando el número de incógnitas es uno y el mayor grado de la incógnita es 1.

Ejemplo:

- $5x - 5 = 3$

Resolución de una Ecuación: Significa encontrar el valor de la incógnita para que la igualdad sea verdadera. Para resolver una ecuación debe tener presente las siguientes propiedades de la igualdad:

a) Sumar o restar la misma cantidad a ambos miembros de la igualdad, esta se mantiene.

b) Multiplicar o dividir por una misma cantidad distinta de cero en ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.
c) Elevar a una potencia distinta de cero ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.

d) Extraer la misma raíz, en ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.

Ejemplo: 3X + 2 = 7

3X + 2	=	7
Primer miembro		Segundo miembro

Para resolverlo debe:

- Dejar X en términos de los valores, es decir de un lado la incógnita y del otro los valores

  $$3X = 7 - 2$$

  (Recuerde que un valor que está sumando o restando al pasar de un lado a otro de la igualdad cambia de signo)

- Luego $3X = 5 \rightarrow X = \frac{5}{3}$

  (Recuerde que un valor que está multiplicando o dividiendo a la incógnita al pasar al otro lado de la igualdad pasa a dividir o multiplicar, respectivamente)

3.2.2 Ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios

La diferencia con las ecuaciones lineales con coeficiente entero radica en que los valores se presentan como decimales o fracciones.

Ejemplo: $\frac{x-3}{5} + \frac{x-2}{2} = \frac{x-1}{5}$

Para resolver este tipo de ecuaciones, se recomienda:

a) Si son decimales transforma a fracción.
b) Si son fracciones se pueden transformar en ecuaciones equivalentes con coeficientes enteros.

Ejemplo: $\frac{x-3}{5} + \frac{x-2}{3} = \frac{x-1}{5}$

Para resolverlo debe:

- Poner de un lado de la igualdad las variables y del otro lado los valores

  $$\frac{x-3}{5} + \frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{5} = 0$$

- Transformar la fracción en entero. Para ello debe determinar el máximo común múltiplo de las fracciones: MCM (5;3;6) = 30

- Multiplicar por 30 cada fracción:

$$30*(\frac{x-3}{5}) + 30*(\frac{x-2}{3}) - 30*(\frac{x-1}{5}) = 0$$

- Simplificar:

$$6*(x - 3) + 10*(x - 2) - 6*(x - 1) = 0$$

- Romper paréntesis:

$$6x – 18 +10x – 20 – 6x + 6 = 0$$

- Dejar X en términos de los valores, es decir de un lado la incógnita y del otro los valores:

$$6x + 10x – 6x = 18 + 20 - 6$$

- Sumar y restar:

$$10x = 32$$

- Resolver x:

$$x = \frac{32}{10}$$

3.2.3 PARA EJERCITAR

- Resolver las siguientes ecuaciones:
  1. 9x + 3 = 5x – 1
  2. 7 – 8x = 2x – 3
  3. 2x – 6 = 16 - 9x
  4. 5x + 9x = x + 12
  5. 10 + 5x – 2x – 8 = 4x – 3x + 5 – x + 15
  6. 8 + 3x – 5x + 3 = - 2x + 4 + 13 – x – 8
  7. 5x + (2x – 8 + x) = 3x + (7 – 5x + 8x) + x
  8. -3x – (2x – 6 + 2) = -x + (2x – 8 + 5x) – 2x
  9. 2(3x + 5) − 7 + 4x = 5(x + 2) + 4
  10. 7(x − 5) − 2(4 − x) = 4x − 13
  11. −3x + 20 = 15 − 6x − 8
  12. l) 8 − 5x = − 3(2x + 4)
  13. 2(3x − 4) + 5 = 2(2 + 4 x) − 7
  14. 2 − (x + 1) + 3x − 2 = 4x − 3(x + 1)
  15. $\frac{x}{2} + \frac{3x}{3} = \frac{x-6}{2}$
  16. $\frac{x+3}{2} - \frac{2-3x}{7} = \frac{4x}{3}$
  17. $\frac{4x+3}{6} - \frac{4x-1}{9} = \frac{1}{2}$

3.3 Sistemas de ecuaciones lineales

3.3.1 Definición

Se denomina sistema de ecuaciones lineales al conjunto finito de ecuaciones lineales que deben verificarse simultáneamente.

Ejemplo:

- Sea S un sistema de tamaño 2 × 3 en R tal que

$$S = \begin{bmatrix} x1 + x2 + x3 = 6 \\ x1 - x2 + 3x3 = 2 \end{bmatrix}$$

- Los sistemas:

$$S1 = \begin{bmatrix} x + y = 10 \\ x - y = 1 \end{bmatrix} \text{ y } S1 = \begin{bmatrix} 3x + 4y = 33 \\ 2x + y = 17 \end{bmatrix} \text{ son equivalentes}$$

3.3.2 Métodos de Solución

Existen varios métodos de solución para un sistema de ecuaciones lineales entre las más usadas están:

- Sustitución
- Igualación
- Reducción
- Método gráfico

Existen otros métodos como son: el Determinante y el Método de Gauss que se los resuelve a través de matrices.

3.3.2.1 Métodos de solución por sustitución

Este método consiste en despejar alguna de las incógnitas en una ecuación (de preferencia la incógnita que tenga menor coeficiente) y sustituir su valor en otra ecuación.

Ejemplo:

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S= \begin{bmatrix} x + 4y = 11 \\ 5x + 2y = 19 \end{bmatrix}$$

Primero despejar una variable, en este caso la "x" de la primera ecuación ya que tiene coeficiente 1: x = 11 - 4y

Sustituir "x" en la otra ecuación y luego simplificar:

$$5*(11 - 4y) + 2y = 19$$
$$55 - 20y + 2y = 19$$
$$18y = 19 - 55$$
$$18y = -36 \rightarrow 18y = 36 \rightarrow y = 36/18 \rightarrow y = 2$$

Sustituir 'y' en la otra ecuación y simplificar: x+ 4*2=11 → x + 8 = 11 → x = 11 – 8 → x=3

3.3.2.2 Métodos de solución por igualación

Este método es muy parecido al de sustitución, consiste en despejar las dos ecuaciones la misma incógnita e igualarlas, para obtener el valor de la segunda incógnita y después sustituirlo en cualquiera de las ecuaciones despejadas previamente.

Ejemplo:

$$S= \begin{bmatrix} x + 4y = 11 \\ 5x + 2y = 19 \end{bmatrix}$$

Despejamos 'x' en ambas ecuaciones:

$$X = 11 - 4y$$

$$X= \frac{19-2y}{5}$$

Igualamos las ecuaciones y simplificamos:

$$\frac{19-2y}{5} = 11 - 4y \rightarrow 19 - 2y = 55 - 20y \rightarrow 18y = 36 \rightarrow y = 36/18 \rightarrow y = 2$$

Sustituimos:

$$X= \frac{19-2*2}{5} = 3$$

Nuestros resultados son x = 3, y = 2

3.3.2.3 Métodos de solución por reducción

Este método es para sistemas lineales y de dos incógnitas (dos ecuaciones), consiste en utilizar productos y divisiones para hacer que en las dos ecuaciones una incógnita tenga el mismo coeficiente pero diferente signo, y luego sumar las dos ecuaciones para que así esa incógnita se elimine y nos quede una sola ecuación con una incógnita.

Ejemplo:

$$S= \begin{bmatrix} x + 4y = 11 \\ 5x + 2y = 19 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la primera ecuación por -5 y obtenemos:

$$S= \begin{bmatrix} -5x - 20y = -55 \\ 5x + 2y = 19 \end{bmatrix}$$

Ahora sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -5x - 20y = -55 \\ 5x + 2y = 19 \\ \hline -18y = \ -36 \end{array}$$

En donde y = 36/18 = 2

Sustituimos: 5x + 2 (2) = 19

X= $\frac{19-4}{5}$ = 3

Los resultados son x = 3, y = 2

3.3.2.4 Métodos de solución por método gráfico

Este método solo se utiliza con dos incógnitas. Los pasos son:

- Despejar 'y' en las dos ecuaciones (similar al método por igualación).
- Construir la gráfica para cada ecuación, obteniendo la tabla de valores de cada una.
- Representar las dos rectas en una gráfica.

Si las rectas se cortan, el punto de corte son los valores de 'x' y 'y'.

Si son la misma recta, hay infinitas soluciones que son las coordenadas de los puntos de esa recta y si las rectas son paralelas, no hay soluciones reales.

3.3.3 Matrices

Una matriz real *A* es un arreglo rectangular de números reales, en donde cada elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$que pertenece a la matriz **a** tiene dos subíndices. El subíndice $\boldsymbol{i}$ representa la fila (disposición horizontal y el subíndice $\boldsymbol{j}$ representa la columna (disposición vertical), en las cuales se encuentra el elemento.

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12\cdots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ am1 & \cdots & amn \end{pmatrix}$$

Si la matriz A tiene m filas y n columnas, se dice que es de dimensión u orden m x n y se denota como: A_{mxn}. Se usará∀i ∀j para denotar 1 ≤ i ≤ m, 1 ≤ j ≤ n.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A es una matriz con 3 filas y 3 columnas, por lo tanto es una matriz A_{3x3} y los elementos son: a11=2; a12=0; a13=1; a21=3; a22=0;…; a32=1; a33=1

3.3.4 Determinantes

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se define como determinante de A (denotado como |A|, det(A) ó ΔA) a la suma de los n productos (signados) formados por n-factores que se obtienen al multiplicar n-elementos de la matriz de tal forma que cada producto contenga un solo elemento de cada fila y columna de A.

El tamaño del determinante lo da el número de filas y columnas; así, hay determinantes de 2 x 2; 3 x 3; 4 x 4, etc. Las filas son horizontales y las columnas verticales.

El determinante se calcula:

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \ldots + a_{1n}c_{1n} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_{1i}$$

Ejemplo:

Calcular el determinante de la matriz siguiente:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2(2) - 3(-1) = 4 + 3 = 7$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Det(A) = a11a22a33 + a12a23a31 + a21a32a13 - a13a22a31 - a12a21a33 - a11a23a32

3.3.5 Problemas de aplicación

En la vida diaria el concepto de matrices como concepto no es usado o mencionado, pero se usa como contenedores para almacenar datos relacionados que son de mucha utilidad en problemas prácticos de la vida diaria como por ejemplo: Utilización de medicamentos, sistema de aguas, cuestiones financieras, tablas nutricionales, etc.

Consideremos el siguiente ejemplo; en la tabla se nuestra la información sobre la cantidad de energía (calorías) y proteínas que aportan a nuestro organismo una porción de leche en polvo y una porción de alimento fortificante.

	Energía	Proteínas
Alimento fortificante	120	4
Leche en polvo	450	20
Se requiere ingerir:	1800	70

¿Cuántas porciones de leche en polvo y alimento fortificante se requiere para ingerir 1800 calorías y 70 gramos de proteínas?
Sea 'x' la cantidad de porciones de alimento fortificante y sea 'y' la cantidad de porciones de leche. De acuerdo a esto, podemos formar la siguiente ecuación:

$$S= \begin{bmatrix} 120x + 450y = 1800 \\ 4x + 20y = 70 \end{bmatrix}$$

Si resuelve el ejemplo en base a lo antes aprendido debe llegar a la conclusión que x = 7,5 mientras y = 2

Otro ejemplo: Un supermercado trabaja con dos marcas de conservas, A y B, y de ellas vende latas de sardinas en aceite (M), bonito (N) y berberechos (Q). El número de latas vendidas diariamente viene dado por la matriz:

	M	N	Q
A	48	62	30
B	30	84	26

Sabiendo que el supermercado cierra los sábados por la tarde y que la venta de la mañana es la mitad de la venta diaria, ¿cuántas latas se venden en una semana?

3.3.6 PARA EJERCITAR

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por los métodos antes analizados:

$$S= \begin{bmatrix} -10x - 5y = 0 \\ 21x - 7y = 28 \end{bmatrix}$$

$$t= \begin{bmatrix} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{bmatrix}$$

$$u= \begin{bmatrix} 3x + 5y + z = 22 \\ 6x - 2y + z = 7 \\ 5x + y - z = 12 \end{bmatrix}$$

3.4 Ecuaciones cuadráticas. Completando cuadrados y fórmula general

3.4.1 Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática de una variable es una ecuación en su forma ax^2+ bx + c; donde a, b, c son números reales.

Ejemplos:

$9x^2 + 6x + 10$ donde a = 9, b = 6, c = 10
$3x^2 - 9x$ donde a = 3, b = -9, c = 0

$-6x^2 + 10$ donde $a = -6$, $b = 0$, $c = 10$

3.4.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas. Métodos de solución.

Existen formas de hallar las raíces (el o los valores de la variable) de las ecuaciones cuadráticas:

- Factorización Simple
- Fórmula Cuadrática

Factorización simple: consiste en convertir la ecuación cuadrática en un producto de binomios. Luego, se busca el valor de x de cada binomio.

Ejemplo:

- Realizar la factorización simple de la ecuación **$x^2 + 2x - 8 = 0$; donde a=1, b=2 y c = - 8**

  Hay que buscar dos números que multipliquen y den el valor de c y que a su vez sumen y el valor sea igual a ‘b’, en este caso 2 números cuyo producto sea 8 y que estos sumen 2.

$$(x \quad)\ (x \quad) = 0$$
$$(x + \quad)\ (x - \quad) = 0$$
$$(x + 4)\ (x - 2) = 0$$
$$x + 4 = 0 \qquad x - 2 = 0$$
$$x + 4 = 0 \qquad x - 2 = 0$$
$$x = 0 - 4 \qquad x = 0 + 2$$

  Estas son las dos soluciones $x = -4$ y $x = 2$

Fórmula cuadrática: Este método es muy simple: hay que sustituir los valores de a, b y c de la ecuación cuadrática a la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

Realizar la factorización a través de la formula cuadrática de la ecuación

$x^2 + 2x - 8 = 0$ donde a = 1, b = 2, c = -8

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{2} \rightarrow x = \frac{-2+6}{2} \text{ o } x = \frac{-2-6}{2} \rightarrow x = 2 \text{ o } x = -4$$

3.4.3 Discriminante

La expresión dentro de la raíz cuadrada recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática. Suele representarse con la letra D o con el símbolo **Δ**(delta)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si el discriminante es menor que cero, como no existen las raíces de números negativos, la ecuación no tendrá soluciones. Y si es mayor que cero, la ecuación tendrá dos soluciones.

- $\Delta > 0$ dos soluciones.
- $\Delta = 0$ solución única.
- $\Delta < 0$ no tiene soluciones en R

Ejemplos:

Si **Δ < 0**: No posee soluciones reales. Las soluciones no son reales son complejas

$$5x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow (-3)^2 - 4(5)(2)$$

$$9 - 40$$

$$\Delta = -31$$

Si **Δ = 0**: Posee dos soluciones reales iguales

$$x^2 + 2X + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(1)(1) \rightarrow \Delta = 4\text{-}4 \rightarrow \Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2(1)} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 0}{2} \rightarrow X = -1$$

Si **Δ > 0**: posee dos soluciones reales distintas

$$7x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow (-2)^2 - 4(7)(-6) \rightarrow \Delta = 172 > 0, \text{ positivo.}$$

Calcular el discriminante de la ecuación

$$5x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

$\Delta = (-7^2) - 4\ (5)\ (-3) = 49 + 60 = 109 \rightarrow \Delta = 109,\ \Delta > 0$; entonces la función contiene dos soluciones.

3.4.4 Ecuaciones cuadráticas con raíces imaginarias

Sabemos que la solución de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c, con $a \neq 0$, es:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x1 = \frac{2 + 6i}{4} \qquad x2 = \frac{2 - 6i}{4}$$

Además, sabemos que si el discriminante "b2 - 4ac ≥ 0" la solución está formada por números reales. Pero cuando "b2 - 4ac < 0", no hay solución en números reales, sino dos soluciones que incluyen números imaginarios y que satisfacen la ecuación dada.

Ejemplo:

Resolver la ecuación cuadrática $2x^2 - 2x + 5 = 0$.

Los coeficientes son: a = 2; b = - 2 y c = 5. Sustituimos los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(5)}}{2(2)} \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40)}}{4} \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{4}$$

Recordando que $i = \sqrt{-1}$, tenemos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-36} * \sqrt{-1}}{4} \rightarrow x = \frac{2 \pm 6i}{4} \rightarrow x_1 = \frac{2 + 6i}{4} \text{ o } x_2 = \frac{2 - 6i}{4}$$

3.4.5 Suma y producto de las raíces. Problemas de aplicación

Si x_1 y x_2 son las raíces de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, estas cumplen las siguientes propiedades:

$$\mathbf{x_1 + x_2 = -b/a}$$
$$\mathbf{x_1 * x_2 = c/a}$$

Observa que la ecuación de segundo grado se puede escribir en función de la suma s y el producto p de las raíces: $x^2 - sx + p = 0$

Ejemplo:

Comprobación de: x1 + x2= - -$\frac{b}{a}$ x1 . x2 = $\frac{c}{a}$

$-3x^2$ +15x-18=0

Resolver la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2-4(-3)(-18)}}{2(-3)}$$

$$\frac{-15 \pm \sqrt{225-216}}{-6} = \frac{-15 \pm 3}{-6}$$

X=2

X=3

$x_1 + x_2$ = (2)+(3)=5 $\frac{-b}{a} = \frac{-15}{3} =$ 5	$x_1 * x_2$= (2).(3)=6 $\frac{c}{a} = \frac{-18}{-3} =$ 6

Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean -3 y -8

Calcular $x_1 + x_2$ = (-3)+(-8) = -11 y $x_1 * x_2$ = (-3)*(-8) = 24

Sabemos que una función cuadráticas se la puede representar por x^2- sx + p = 0, tenemos que s = -11 y p = 24, entonces la función cuadráticas es: x^2- sx + p = 0 → x^2- (-11)x + (24) = 0, quedando

$$x^2 + 11x + 24 = 0$$

3.4.6 PARA EJERCITAR

- Determinar la ecuación de cuadrática cuya suma de soluciones vale 5 y cuyo producto vale 6.
- Determinar una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones x_1 = - 2, x_2 = 3.
- Realizar la factorización simple y con la fórmula cuadrática de las siguientes ecuaciones y calcular el discriminante determinando si existen soluciones.

  $x^2 - 5x + 6 = 0$
  $2x^2 - 7x + 3 = 0$
  $-x^2 + 7x - 10 = 0$

3.5 Planteamiento de problemas con ecuaciones

Planteado un problema y, para resolverlo mediante ecuaciones, debemos tener en cuenta los siguientes puntos:

- Leer y comprender el enunciado.
- Designar la o las variables o incógnitas.
- Plantear la o las ecuaciones.
- Resolver la o las ecuaciones.
- Interpretación de los resultados.

Ejemplo:

1. Se va a ayudar a los damnificados por el invierno de un recinto de Babahoyo. Según el dirigente del sector hay: doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si el recinto la componen 96 personas?

Planteamos el problema y designamos las variables:

- Sea x los hombres, 2x las mujeres (se indica que es doble de los hombres)
- Los niños es 3* (x + 2x); al resolver este planteamiento nos queda 9x.
- Sumar: x + 2x + 9x = 96, recuerde que en el recinto hay 96 personas
- Luego 12x = 96 y entonces x = 8.
- En base a esto tenemos 8 hombres, 16 mujeres (2*x=2*8=16) y 72 niños (9*x = 9*8 = 72)

2. Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 219

Planteamos el problema:

- Sea x el primer número. El siguiente número es x + 1,
- El siguiente número después del anterior es (x + 1) + 1 = x + 2.
- Por tanto, la suma de tres números sería: x + (x + 1) + (x + 2) = 219
- Al resolver: x + x + 1 + x + 2 = 219

$$3x + 3 = 219 \rightarrow 3x = 219 - 3$$

$$3x = 216 \rightarrow x = 216/3 = 72$$

- Por tanto, los números son 72, 73 y 74.

3. Un granjero da de comer a su ganado una mezcla de 2 tipos de alimento. Una unidad estándar del alimento tipo A proporciona a un novillo 10 % del requerimiento diario de proteínas y 15 % de carbohidratos. Una unidad estándar del alimento B contiene 12 % del requerimiento diario de proteínas y 8 % del de carbohidratos. Si el granjero requiere alimentar a su ganado con el 100% de los requerimientos mínimos diarios de proteínas y

carbohidratos, ¿Cuántas unidades de cada tipo de alimento debe de dar a un novillo al día?

- Planteamos el modelo matemático a través de un tabla:

	A	B	Requerimiento diario
Proteína	10	12	50
Carbohidrato	15	8	50

- Plantear el sistema de ecuaciones:

$$S=\begin{bmatrix} 10x + 12y = 50 \\ 15x + 8y = 50 \end{bmatrix}$$

- Resolver el sistema de ecuaciones (por ejemplo por sustitución)

$$X=\frac{-12y+50}{10}$$

$$15*\frac{-12y+50}{10} + 8y = 50$$

$$\frac{-180y+750}{10} + \frac{80y}{10} = 50$$

$$-180y + 750 + 80y = 50*10$$

$$-100y = 500 - 750 \rightarrow -100y = -250 \rightarrow Y = 2.5$$

- Reemplazar 'y': $10x + 12(2.5) = 50$

$$10x + 30 = 50$$

$$10x = 50 - 30$$

$$10x = 20$$

$$\rightarrow x = 2$$

3.5.1 PARA EJERCITAR

- Marcos realizó un préstamo aun chulquero y debe pagar en 5 meses. Los primeros 4 meses pagó \$ 78, \$ 72, \$ 87 y \$ 90, respectivamente. ¿Cuánto debe pagar en el último mes para completar el préstamo de \$ 400?

- Un vendedor de galletas gasta 24.00 dólares en ingredientes y cobra \$ 2.00 por cada galleta. Si al final del día su ganancia neta es de 88 dólares, ¿cuántas galletas vendió?

- Algunas empresas del país pagan el sueldo básico unificado de \$ 375 más comisiones de venta. Al fin de mes recibió \$ 475 ¿cuánto le dieron de comisión?

- Después del terremoto del 2016, en el cantón Jama de la provincia de Manabí, la Vicepresidencia de la República, el Ministerio de Desarrollo Urbano y Vivienda

(Miduvi) y el Ministerio Coordinador de Seguridad (MICS) decidieron construir 175 viviendas para el reasentamiento de los afectados. La inversión total fue de $ 4,5 millones. ¿Cuál es el costo de cada vivienda?

3.6 Conjuntos e Intervalos

En el capítulo 1 se define al conjunto como una colección, reunión o agrupación de cosas de estudio que poseen una característica o propiedad común bien definida; conocidas como elementos. Un conjunto de elementos que tienen las mismas características y que está incluido dentro de otro conjunto más amplio, se conoce como subconjunto.

Ejemplos:

- Dados los conjuntos **A={1, 2, 3}** y **B={1, 2, 3, 4, 5}**, se puede decir que **A** es subconjuntode **B** ($A \subset B$), debido a que el conjunto B contiene el conjunto A.

- Dados los conjuntos **A={0, 1, 2, 3}** y **B={1, 2, 3, 4, 5}**, se puede decir que **A** no es subconjunto de **B**, $\mathbf{A \not\subset B}$.

Se denomina intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre otros dos puntos: a y b que se denominan extremos del intervalo. Dicho de otra manera es el espacio que se da de un punto a otro en el cual se toman en cuenta todos los puntos intermedios. Son subconjuntos de los números reales, por lo tanto es posible realizar con ellos las propiedades operativas de los conjuntos, como son la unión y la intersección.

El intervalo puede ser abierto o cerrado o semiabierto, finito o infinito. Como los intervalos son subconjuntos de los números reales.

- **Intervalo abierto:** Sean dos números reales ‘a’ y ‘b’ tal que a<b, entonces se dice que es intervalo abierto (a,b) si $x \in R$: $a < x < b$; es decir se considerarán todos los números que estén antes de ‘a’ y antes de ‘b’ (no se incluyen ni ‘a’ ni ‘b’). Se simboliza con paréntesis ‘( )’.

- **Intervalo cerrado:** Sean dos números reales ‘a’ y ‘b’ tal que a<b, entonces se dice que es intervalo cerrado [a,b] si $x \in R$: $a \le x \le b$; es decir se considerarán todos los números incluidos ‘a’ y ‘b’. Se simboliza con corchetes ‘[ ]’.

- **Intervalo semiabierto:** Sean dos números reales ‘a’ y ‘b’ tal que a<b, entonces se dice que es intervalo cerrado [a,b) si $x \in R$: $a \le x < b$; es decir se considerarán todos los números incluidos ‘a’ y pero no ‘b’. También puede ser (a,b] si $x \in R$: $a < x \le b$; es decir se considerarán todos los números incluidos ‘b’ y pero no ‘a’.

- **Intervalo finito:** Es cuando se puede enumerar o contar los elementos del intervalo. Ejemplo A= Números enteros entre 5 y 9; podemos observar que son 5 los elementos de este intervalo.

- **Intervalo infinito:** Es cuando no se puede enumerar o contar los elementos del intervalo. Ejemplo A= Números reales entre 5 y 9; podemos observar que no podemos saber cuántos números son, ya que tenemos 5, 5.01, 5.011, etc. Otro

ejemplo es que sean todos los números menores a 5, o que sean mayores a 5; entonces tenemos infinitos números en cualquiera de los dos casos.
Cuando hablamos de un número menor a 'b', se lo identifica $(-\infty, b) = \{x \epsilon R: x < b\}$
Cuando hablamos de un número mayor a 'b', se lo identifica $(b, \infty) = \{x \epsilon R: x > b\}$

3.6.1 PARA EJERCITAR

- Determinar el tipo de intervalo de las siguientes notaciones:

Notación	Intervalo
$\{x \,/\, a < x < b\}$	
$\{x \,/\, a < x \le b\}$	
$\{x \,/\, a \le x < b\}$	
$\{x \,/\, a \le x \le b\}$	
$\{x \,/\, x > a\}$	
$\{x \,/\, x \ge a\}$	
$\{x \,/\, x < b\}$	
$\{x \,/\, x \le b\}$	

CAPÍTULO CUATRO

"Los matemáticos no estudian objetos, sino las relaciones entre objetos"

HENRI POINCARÉ

4. FUNCIONES

Introducción

El concepto de función define las relaciones numéricas entre dos conjuntos. Por lo tanto, haciendo uso de recursos algebraicos se deberá empezar por utiliza el sistema de coordenadas cartesianas, también conocido como Sistema Rectangular de coordenadas logrando diferenciar lo que es rango, dominio y recorrido de pertenencia en una función; así como conocer los diversos tipos de funciones que permitirán "encadenar" operaciones con diversos tipos de variables.

4.1 Sistemas de coordenadas cartesianas, representación gráfica.

Los sistemas de coordenadas cartesianas en el plano cartesiano son utilizados comúnmente para definir la ubicación exacta de un punto que permite determinar una trayectoria en un gráfico.

Los sistemas de coordenadas pueden ser desarrolladas y graficadas en una dimensión, dos dimensiones, tres dimensiones y múltiples dimensiones.

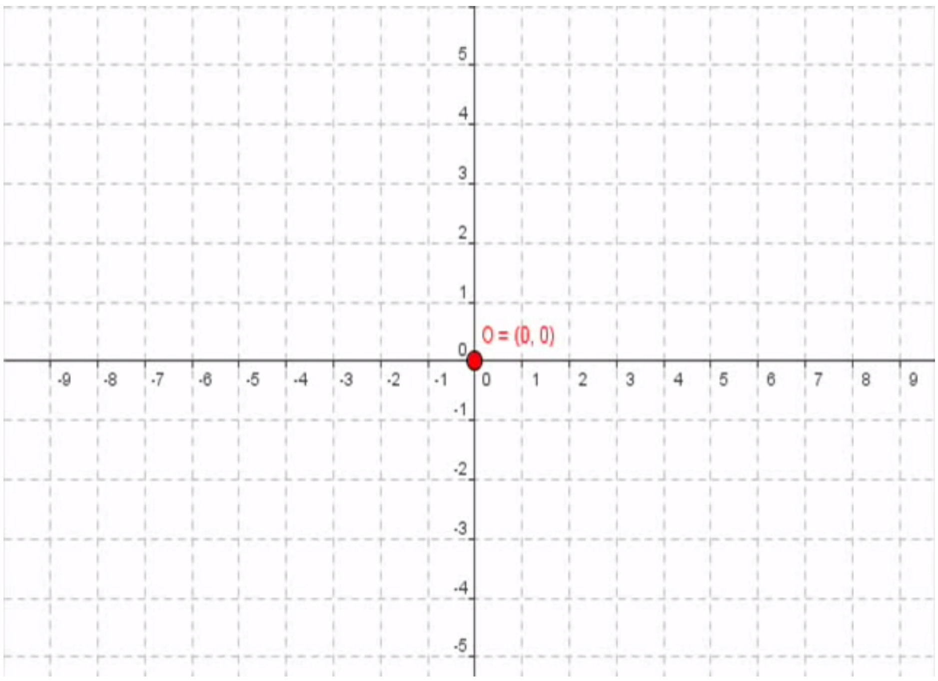


Gráfico 4.1 Plano cartesiano

4.1.1 Sistema de coordenadas en una dimensión

El sistema cartesiano en una dimensión se trata de una línea recta que tiene un punto 0 como origen, una unidad de longitud 'n' y una orientación, lo que equivale a definir la recta de los números reales. El punto 0 permite dividir la línea en dos mitades, una negativa y otra positiva. La gráfica de un determinado valor en este sistema de coordenadas será un punto ubicado en la línea.

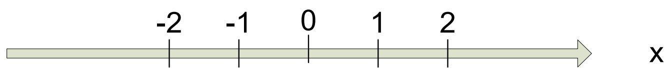


Gráfico 4.2 Sistema de coordenadas en una dimensión

4.1.2 Sistema de coordenadas en dos dimensiones

El sistema de coordenadas cartesianas en el plano está constituido por dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto '0' al que se le llama 'origen'. Una de las rectas está en posición horizontal y se le da el nombre de eje X o eje de las abscisas; y la otra recta está en posición vertical y se denomina eje Y o eje de las ordenadas; ambas constituyen los dos ejes de coordenadas rectangulares, los cuales dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.

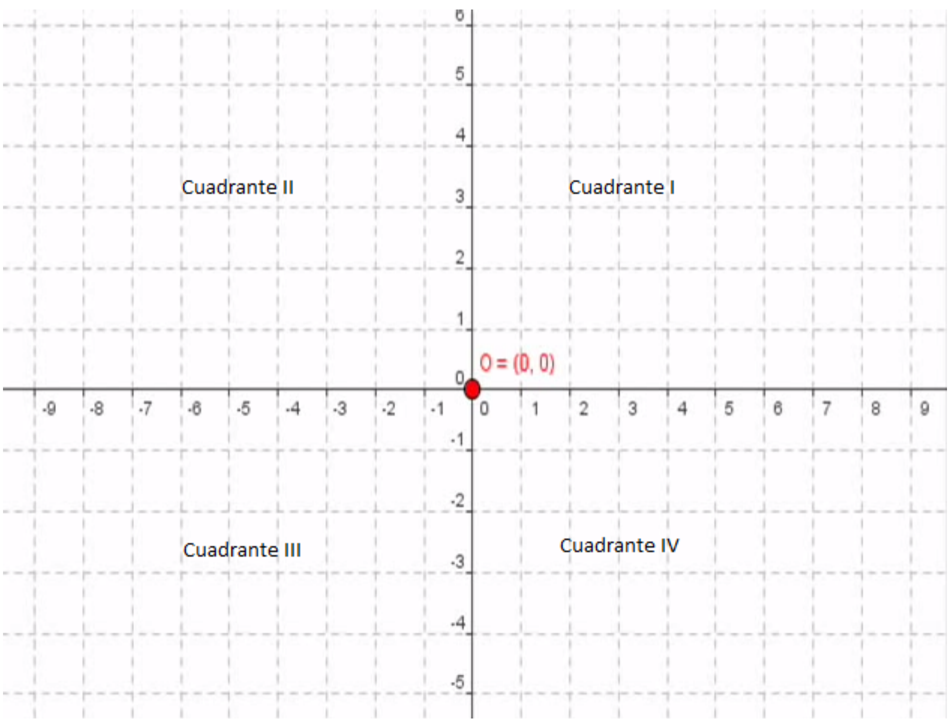


Gráfico 4.3 Sistema de coordenadas en dos dimensiones

4.1.3 Sistema de coordenadas en tres dimensiones

Este sistema se encuentra compuesto por tres ejes perpendiculares entre sí, con una unidad de longitud común para los tres y una orientación en el espacio definida para cada uno de ellos. En la intersección de los tres ejes se encuentra el origen, se crean ahora ocho espacios definidos por los signos de cada uno de los tres medios ejes que los integran. Este sistema lo vemos representado de la siguiente manera.

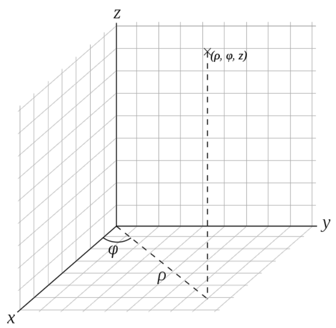


Gráfico 4.4 Sistema de coordenadas en tres dimensiones

4.1.4 Representación gráfica

La gráfica de una función permite conocer la trayectoria de la misma, esta se encuentra conformada por el par ordenado de puntos (**x, y**), donde x que es el eje horizontal pertenece al dominio de f.

Como el conjunto de puntos perteneciente a la función es ilimitado, se disponen en una tabla de valores algunos pares correspondientes a puntos de la función. Estos valores en el plano cartesiano determinan los puntos de la gráfica.

x	F(x)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

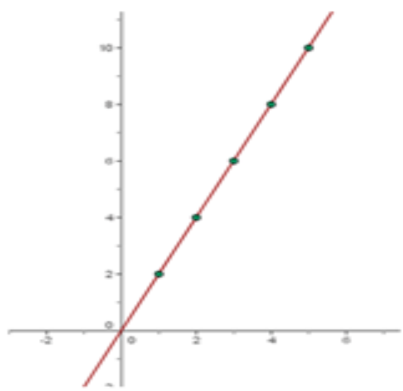


Gráfico 4.5 Ejemplo de Representación gráfica

Mediante una gráfica conocida es posible obtener nuevas gráficas que tengan alguna relación con ella. Estas relaciones matemáticamente se las representa mediante sumas o productos de constantes con las variables del dominio y rango de la función original.

4.1.5 Desplazamientos del gráfico

En el plano cartesiano las trayectorias de las coordenadas pueden darse horizontal o verticalmente, es decir, podemos mover la gráfica de una función hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo.

Dada la regla de correspondencia de f(x), siendo la constante C> 0, se pueden generar las nuevas funciones:

- Para graficar y = f (x + c), desplazar la gráfica y = f(x), c unidades hacia la izquierda.
- Para graficar y = f (x -c), desplazar la gráfica y = f(x), c unidades hacia la derecha.
- Para graficar y = f (x)+ c, desplazar la gráfica c unidades hacia arriba.
- Para graficar y = f (x)-c), desplazar la gráfica c unidades hacia abajo.

4.1.6 Reflexión de graficas

Pueden ser con respecto a alguno de los ejes coordenados. Dada la regla de correspondencia de f, se pueden generar las nuevas funciones:

- y = f (− x): reflexión de la gráfica de f con respecto al eje Y.
- y = − f (x): reflexión de la gráfica de f con respecto al eje X.

A continuación, se analizan algunas funciones reales y sus gráficos:

- **Función Constante y Gráfico:** Una función constante es una función f(x) → Y, donde X e Y son subconjuntos de R y existe un valor ***c*** como un elemento de Y, tal que f(x) = c; el grafico será línea recta paralela al eje x.

  Ejemplo:
  Siendo c > 0 ***f(x)***= 3, en este caso una línea paralela al eje x que pasa por el tercer punto formará la gráfica.

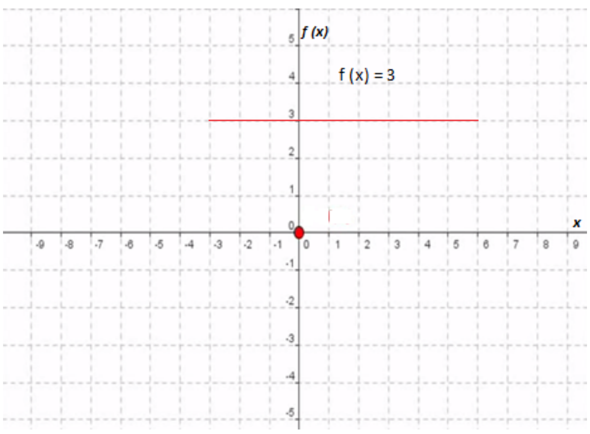


Gráfico 4.6 Función Constante y Gráfico

Siendo así tenemos la línea por encima del eje x caso contrario se formará por debajo del eje x. en el caso de que sea c=0 la línea se superpone al eje x.

- **Función Identidad y Gráfico:** La función identidad es una función f(x) → Y que pasa por el origen de coordenadas, es decir por el punto (0, 0) divide al primer y tercer cuadrante en partes iguales; formando un ángulo de 45° con cualquiera de los ejes.

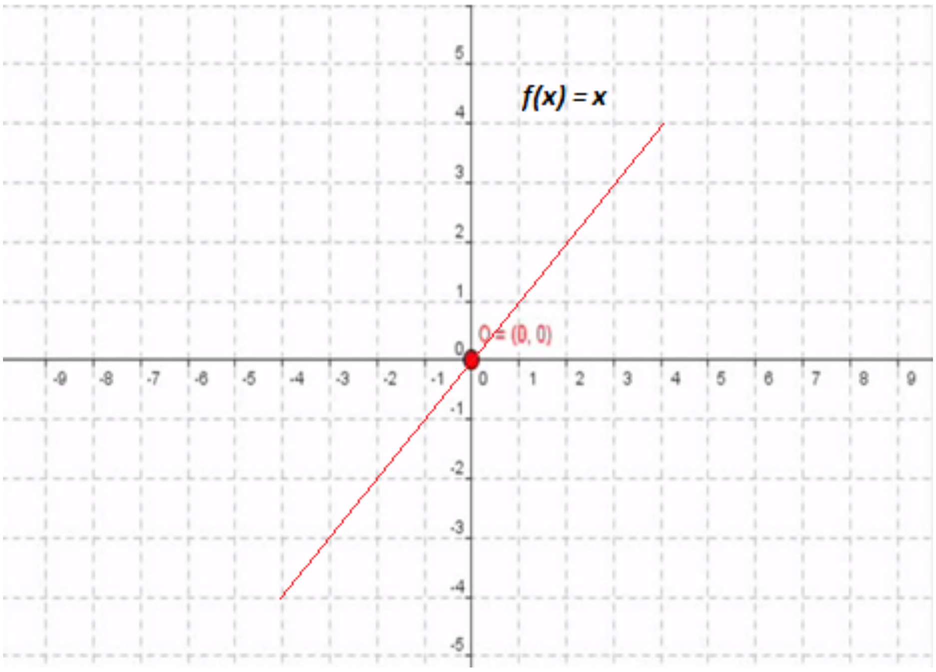


Gráfico 4.7 Función Identidad y Gráfico

Función Módulo y Gráfico: La función módulo o también conocida como función valor absoluta es una función que siempre representa una distancia o intervalos que se puede calcular considerando los siguientes pasos:

- Se iguala a cero la función, sin el valor absoluto y se calcula sus raíces (los valores de x).
- Se forman intervalos con las raíces (los valores de x) y se evalúa el signo de cada intervalo.
- Definimos la función a intervalos, teniendo en cuenta que los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función.
- Representamos la función resultante.

Ejemplo:

Dada la siguiente función, f(x) $=|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

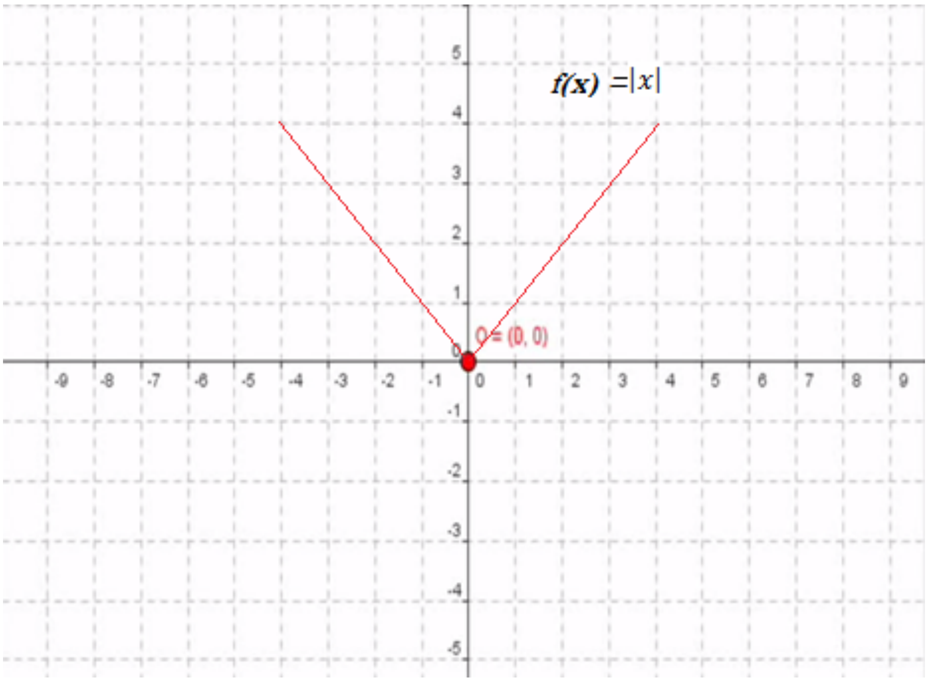


Gráfico 4.8 Función Módulo y Gráfico

- **Función recíproca y grafico:** La función recíproca o inversa de f es otra función f^{-1}que debe cumplir los siguientes parametros:
    - Se escribe la ecuación de la función en x e y
    - Se despeja la variable x en función de la variable y
    - Se intercambian las variables.

Ejemplo:

Calcular la función reciproca de:
f(x) = 3/x, donde x <> 0

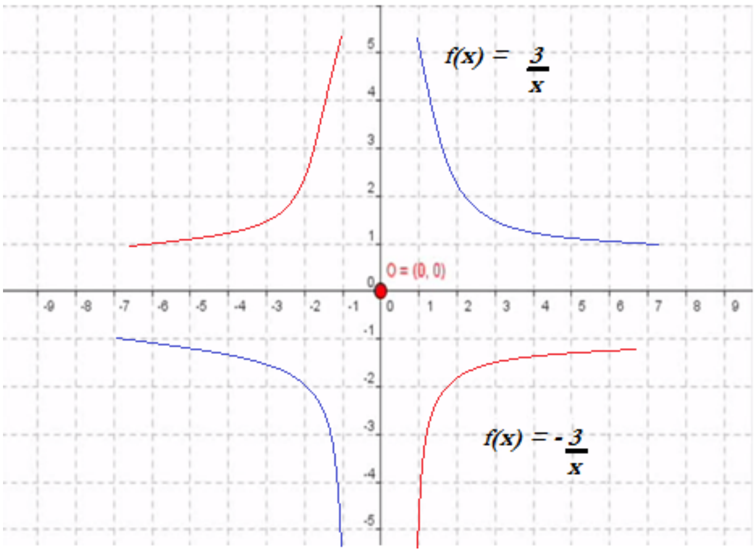


Gráfico 4.9 Función recíproca

4.1.7 PARA EJERCITAR

Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones:

- $f(x) = (x-2)^2$
- $f(x) = -(x+1)^2$
- $f(x) = x^3 + 2$
- $f(x) = (x+7)^2$
- $f(x) = (x-2)^2$
- $f(x) = -x^3$
- $y = 5 + (x+3)^2$
- $y = \sqrt[3]{x-2}$
- $y = 1 - \sqrt[3]{x}$
- $y = 2 - \sqrt[3]{x}$
- $y = \sqrt[3]{x+2} + 2$
- $y = 2 - \sqrt{x+1}$
- $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

4.2. DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

El ***dominio*** son todos los valores a los que aplica una función, dicho de otra manera, el dominio de una función o relación es el conjunto de todos los valores independientes posibles que una relación puede tener. El dominio se lo simboliza ***Dom*** f(x).

El ***rango*** de una función o relación es el conjunto de todos los valores dependientes posibles que la relación puede producir (todas las salidas posibles). El rango se simboliza ***Rang*** f(x).

Para que una función quede correctamente definida es necesario determinar:

- El conjunto inicial o dominio de la función.
- El conjunto final o imagen de la función.
- La regla por la cual se asigna a cada elemento del conjunto origen un elemento del conjunto imagen.

Tener presente que:

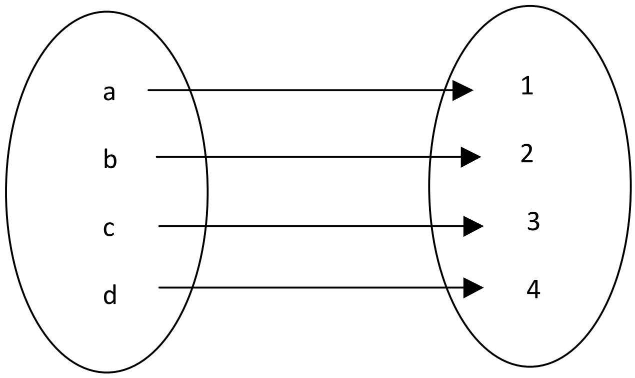
- Es función cuando a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

- No es función cuando a cada valor de x le corresponde dos valores de y.

Ejemplo:

Una función **f(x)** de variable real es una relación que asocia cada número real **x** a un único número real **f(x)**.La variable 'x' se llama variable independiente y la variable 'y' es la variable dependiente.

xy =f(x)



Dominio **Rango**

Gráfico 4.10 Ejemplo de una Función

4.3. FUNCIONES CLASES

4.3.1 Función Inyectiva

Una función f: x → y es inyectiva, sí y solo sí, cada elemento del rango es imagen exclusiva de un único elemento del dominio. Es decir, no pueden haber más de un elemento de *X* que tenga la misma imagen en *y*.

Domf: x → y es inyectiva ⇔ $\{\forall x_1 , x_2 \in$x $[\neg(x_1 = x_2) \Rightarrow \neg($ f $(x_1) =$ f $(x_2))]\}$

Tenga en cuenta que es necesario que N(X) ≤ N(Y) (el número de elementos de X sea menor o igual al número de elementos de Y) para poder construir funciones inyectivas.

Ejemplos:

- f :X→Y, "y es el cubo de x" entonces f = {(2, 8), (4, 64), (5, 125)}

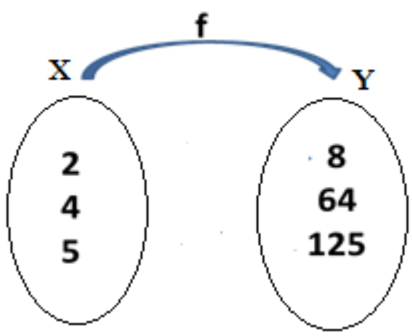


Gráfico 4.11 Ejemplo de una Función Cúbica

- La función $f(x) = 2x + 1$ es **inyectiva**. $f(x) = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

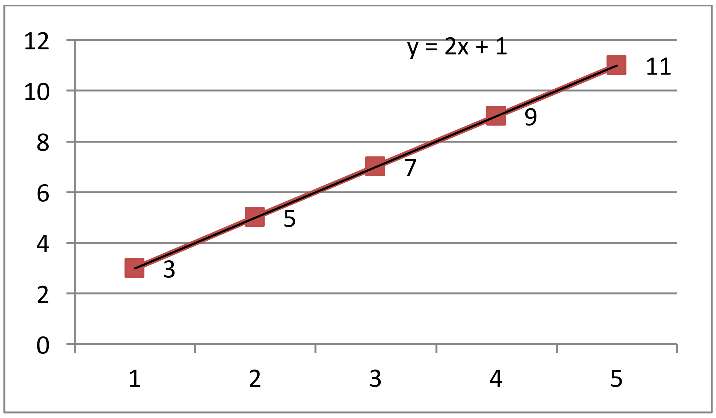


Gráfico 4.12 Ejemplo de una Función Inyectiva

4.3.2 Función Sobreyectiva

Sea la función f: x → y es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento del rango existe al menos una imagen de un elemento del dominio. Es decir, todo elemento del conjunto y tiene al menos un elemento del conjunto x al que le corresponde.

$$f{:}x \rightarrow y \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow \{\forall\ y \in y\ \exists\ x \in x[y = f(x)]\}$$

Tenga en cuenta que es necesario que $N(X) \geq N(Y)$ para poder construir funciones sobreyectivas.

Ejemplos:

La función $f(x) = x^3$ es sobreyectiva, porque para cada valor k que esté en el rango, es una imagen, de otro valor que se encuentra en el dominio.

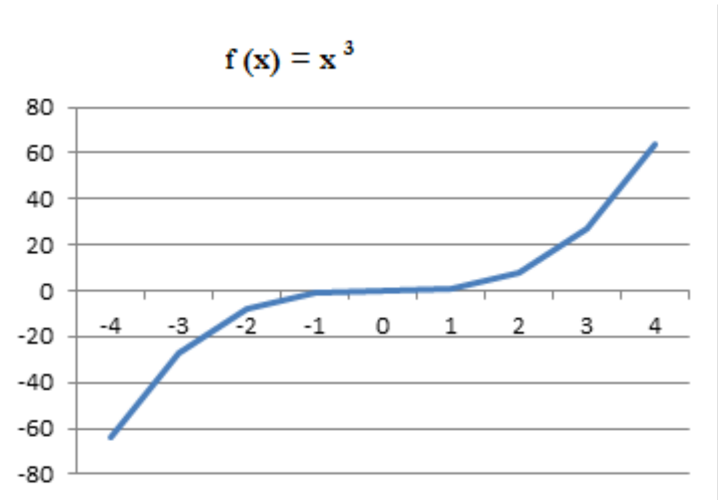


Gráfico 4.13 Ejemplo de una Función Sobreyectiva

Un ejemplo de una función que no es sobreyectiva es: y = $\sqrt{X}$

x; porque los valores negativos de y, no son imágenes de algún elemento del dominio; esto es, no hay valores de x que hagan que la función devuelva valores negativos.

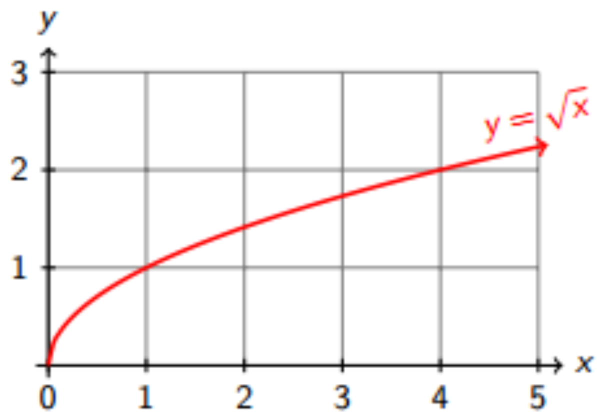


Gráfico 4.14 Ejemplo de una Función no Sobreyectiva

4.3.3 Función Biyectiva

Una función f :x→y es biyectiva si y sólo si f es inyectiva y f es sobreyectiva. Es decir, si todo elemento del rango tiene un único elemento del dominio al que le corresponde (condición de función sobreyectiva) y todos los elementos del conjunto dominio tiene una única imagen en el conjunto rango (condición de función inyectiva).

Ejemplos:

La función f(x) = x^3 es biyectiva por que es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Un ejemplo de una función que no es biyectiva es: y = e^x esta función no es biyectiva porque no es sobreyectiva. Pero sí es inyectiva

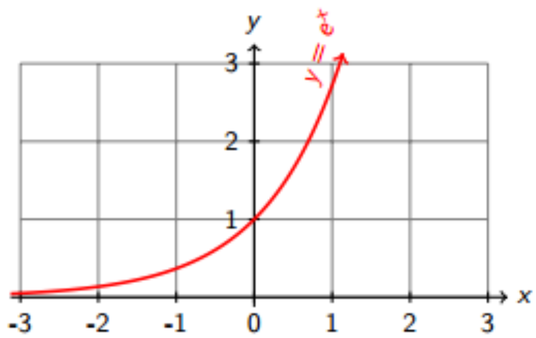


Gráfico 4.15 Ejemplo de una Función Biyectiva

4.3.4 Función Creciente o Decreciente

Una función f es creciente en un intervalo I, si y sólo si para cualquier elección de x_1y x_2, siempre que x_1<x_2, tenemos f (x_1) ≤ f (x_2).
Esto es: $\forall x_1$, $x_2 \in$ [(x_1<x_2) → (f (x_1) ≤ f (x_2))]

Una función f es decreciente en un intervalo I, si y sólo si para cualquier elección de x_1 y $x_2$en, siempre que x_1<x_2, tenemos f (x_1) ≥ f (x_2). Esto es: $\forall x_1$, $x_2 \in$ [(x_1<x_2) → (f (x_1) ≥ f (x_2))]

Ejemplos:
La función f(x) = $\sqrt{X}$; es creciente

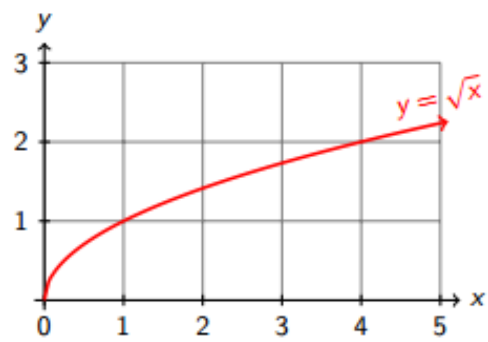


Gráfico 4.16 Ejemplo de una Función Creciente

La función f(x) = 2X^2-3; es decreciente en el primer intervalo y creciente en el segundo

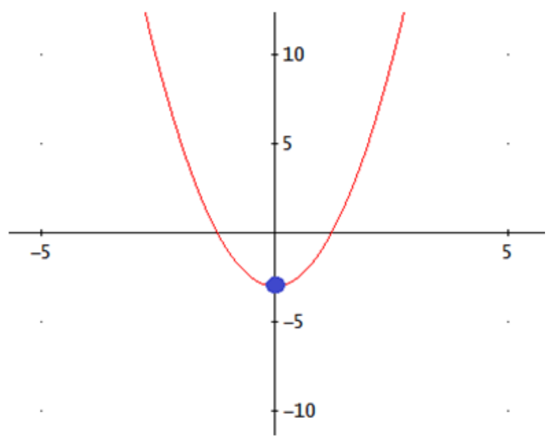


Gráfico 4.17 Ejemplo de una Función Decreciente

4.3.5 Función Constante

Una función es constante cuando la función toma el mismo valor para cualquier valor de la variable, f(x) = a, donde a es la constante.

Ejemplos:

- Dada la función f(x) = 8, para cualquier valor de x siempre va a ser 8
- Dada la función f(x) = 3, para cualquier valor de x siempre va a ser 3

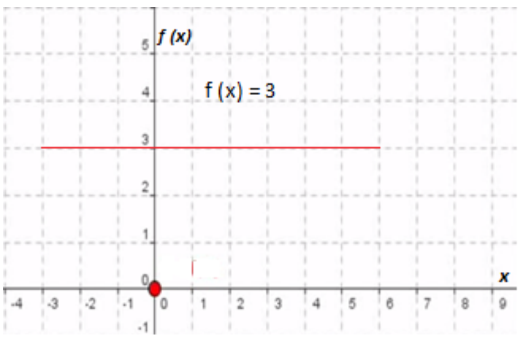


Gráfico 4.18 Ejemplo de una Función Constante

4.3.6 Función Par o Impar

La función es par cuando cualquier función satisface la relación f(x) = f(-x) y si x es del dominio de f entonces -x también.

En cambio la función impar es cualquier función que satisface la relación: f(-x) = - f(x) para todo *x* en el dominio de *f*.

Ejemplos:

Dado f(x) = x^2; si x= 2 f(x) = 4 y si x = -2 f(x) = 4; podemos observar que f(x) = f(-x), por lo tanto, es una función par.

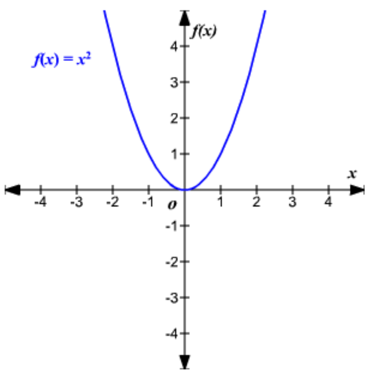


Gráfico 4.19 Ejemplo de una Función Par

Dado f(x) = x^3; si x= 2, - f(x) = -8 y si x = -2 f(x) = -8; podemos observar que f(-x) = - f(x), por lo tanto, es una función impar.

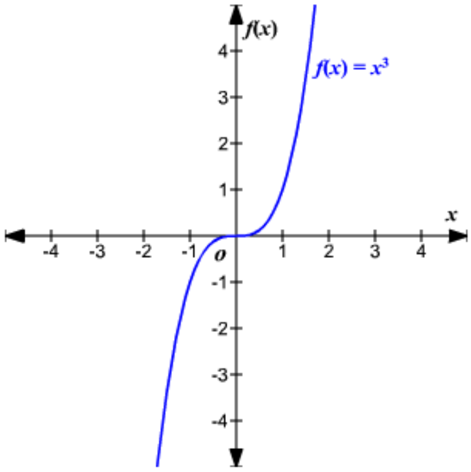


Gráfico 4.20 Ejemplo de una Función Impar

4.3.7 Función Periódica

La función periódica es aquella que se repite a intervalos regulares. A la longitud del intervalo se lo llama periodo y se determina con la letra P, donde f es la frecuencia de la componente fundamental de la onda periódica y un número entero.

$$T_p = \frac{1}{F}, F$$

Ejemplos:

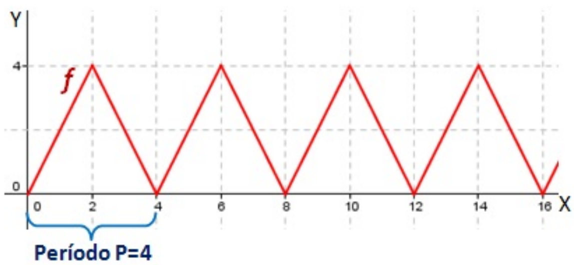


Gráfico 4.21 Ejemplo de una Función Periódica

La grafica se repite en intervalos de 4 unidades por lo que el periodo es P=4.

- Sea la función sen (x + 2n) = sen x

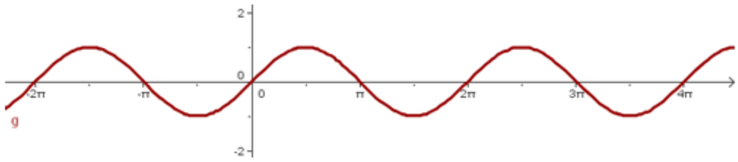


Gráfico 4.22 Función Seno como función Periódica

4.3.8 Función Acotada

Se dice que es una función acotada, donde M y N son valores reales que se denominan cota superior y cota inferior, respectivamente. En otras palabras, se dice que f es acotada, cuando el rango de una función está contenido en un cierto intervalo limitado.

Ejemplos:

Dado |f(x)|≤ 2, decimos que f es acotada porque debe estar entre -2 y 2.

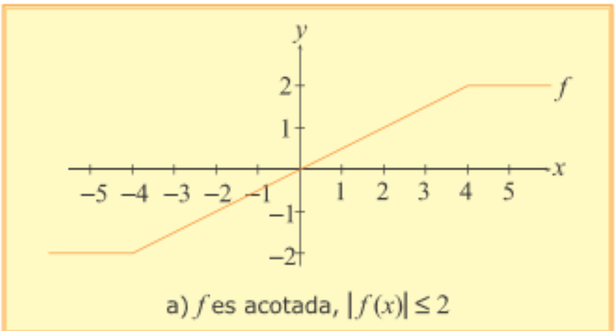


Gráfico 4.23 Ejemplo de una Función Acotada

4.3.9 PARA EJERCITAR.

- Dada la función f(x) = 4x-1 determinar si es inyectiva y graficar.
- Dada la función f(x) = x^2 determinar si es inyectiva y graficar.
- Dada la función f(x) =x+1 determinar si es sobreyectiva y graficar.
- Dada la función f(x) =x^2- 1 determinar si es sobreyectiva y graficar.
- Dada la función f(x) =2x - 5determinar si es Biyectiva y graficar.
- Dada la función f(x) =5 – 3xdeterminar si es Biyectiva y graficar.
- Hallar los intervalos en los que la función y = $x^3 - 6x^2 + 9x$ es creciente o decreciente. Grafique la función.
- Hallar los intervalos en los que la función y = $2x^2 - x^4$ es creciente o decreciente. Grafique la función.
- Determinar la función f(x) = -2 y representar en la recta.
- Determinar la función f(x) = 2 y representar en la recta.
- Dada la función f(x) = $x^2 + 1$; demostrar si la función es par.
- Dada la función f(x) =$\frac{1}{x}$; demostrar si la función es impar.
- Sea la función f(x) = E (1/2)x; determinar la función periódica.

- Sea la función f(x) = sen 2x; determinar la función periódica.
- Dada la función trigonométrica f(x)= sen x, determinar la función acotada.
- Dada la función trigonométricas f(x)= cos x, determinar la función acotada.
- Ambas tienen como cota superior K=1, y como cota inferior k=-1.

4.4 Función cuadrática.

4.4.1 Definición de función cuadrática

Sean a, b y c números reales con a ≠ 0, la función f de R en R, cuya regla de correspondencia es f (x) = ax^2 + bx + c, recibe el nombre de función cuadrática; en donde ax^2 es el término cuadrático, bx el lineal y c es el término independiente. La función cuadrática es una función polinómica.

La gráfica de la función cuadrática siempre será una curva llamada parábola. Dicha parábola tendrá algunas características o elementos bien definidos dependiendo de los valores de la ecuación que la generan. Estas características son:

- Orientación o concavidad: Hablamos de parábola cóncava si sus ramas o brazos se orientan hacia arriba y hablamos de parábola convexa si sus ramas o brazos se orientan hacia abajo.

- Puntos de corte con el eje de abscisas.

- Punto de corte con el eje de ordenadas.

- Eje de simetría: El eje de simetría de una parábola es una recta vertical que divide simétricamente a la curva.

- Vértice: es el punto de corte o de intersección del eje de simetría con la parábola.

Ejemplos:

$$f(x) = -3x^2 + 2x + 3$$
$$f(x) = 2x^2 - 3x - 5$$

4.4.2 Dominio y Rango de una Función Cuadrática

Dominio: Como es una función polinómica de segundo grado el dominio será todo el conjunto de los números reales (valores negativos como positivos en el eje x).

Dom f(x) = R

Rango: Para hallar el Rango, debemos determinar a partir de qué punto la función empieza a tomar valores en el eje y. Esto ocurre en el vértice de la función.

Ejemplo:

Determinar Dominio y Rango de f(x) = x^2 - 2x – 3

Dando valores a x los valores de f(x) serían:

x	f(x)
-3	12
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5
5	12

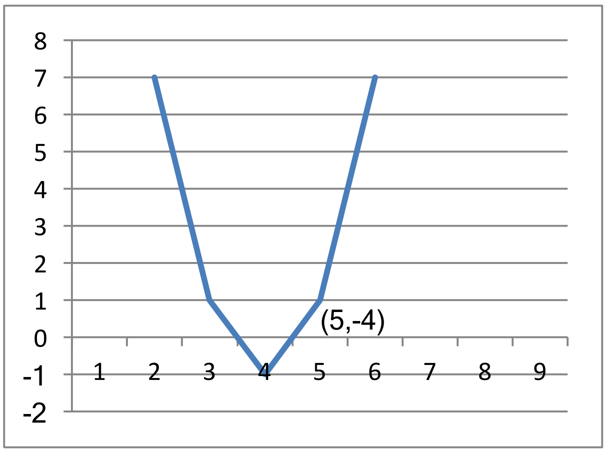


Gráfico 4.24 Ejemplo de una Función Cuadrática

Como pueden observar, la gráfica es una parábola; en donde el Dominio de la función será todo el conjunto de los números reales (siempre tomará valores tanto negativos como positivos en el eje x). Dom f(x) = R. Mientras que el Rango de la función, observando la gráfica empieza a tomar valores en el eje y sólo a partir de un punto determinado (-4). ¨Por lo tanto, en este caso, el rango ya no serán todos los reales. Para hallar el Rango, debemos determinar a partir de qué punto la función empieza a tomar valores en el eje y. Esto ocurre en el vértice de la función.

4.4.3 Forma Canónica y Factorizada

Hasta ahora hemos visto la forma polinómica de una función cuadrática que es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

pero también podemos representar una función cuadrática de forma canónica y de forma factorizada.

Forma canónica: La forma canónica de una función cuadrática es f(x) = a$(x + \frac{b}{2a})^2$ - $\frac{\Delta}{4a}$; en donde $\Delta = b^2$ – 4ac, se denomina discriminante y el punto de coordenadas $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ es el vértice de la parábola, que es el punto donde la gráfica alcanza su valor máximo o mínimo en el eje de las y. En otras palabras toda función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio.

Ejemplo:

Obtenga la forma canónica de f(x) = x^2- 5x – 6

Primero identificar las constantes a=1, b=-5, c=-6; luego calcular el discriminante

Δ = b^2 – 4ac $\rightarrow \Delta$ = $(-5)^2$ – 4(1)(-6) $\rightarrow \Delta$ = 25 + 24 = 49; por lo tanto la forma canónica de f(x) es:

f(x) = a$(x+\frac{b}{2a})^2$ - $\frac{\Delta}{4a}$ →f(x) = $(x+\frac{5}{2})^2$ - $\frac{49}{4}$

Forma factorizada: Dada la regla de correspondencia de f, si $\Delta \geq 0$, siempre es posible factorizarla y llevarla a la forma f (x) = a(x − x_1)(x x_2−), donde x_1y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática f (x) = 0.

Ejemplo:

Obtenga la forma factorizada de f(x) = x^2- 5x – 6
Primero identificar las constantes a=1, b=-5, c=-6; ahora la expresión equivalente factorizada es: f(x) = (x − 6) (x + 1); en donde las raíces de la ecuación cuadrática f(x) = 0 son: (x = 6) o (x = −1).

4.4.4 Gráfica de una Función Cuadrática

Para gráfica la función f (x) = ax^2 + bx + c en el plano cartesiano, se debe tener en cuenta que:

- Su gráfica es una parábola.
- Tiene simetría con respecto a la recta x = $-\frac{b}{2a}$
- El signo de a indica la concavidad de la curva. Si a > 0, la parábola es cóncava hacia arriba; y, si a < 0, la parábola es cóncava hacia abajo.

Ejemplo:

f(x) = x^2 - 2x – 3

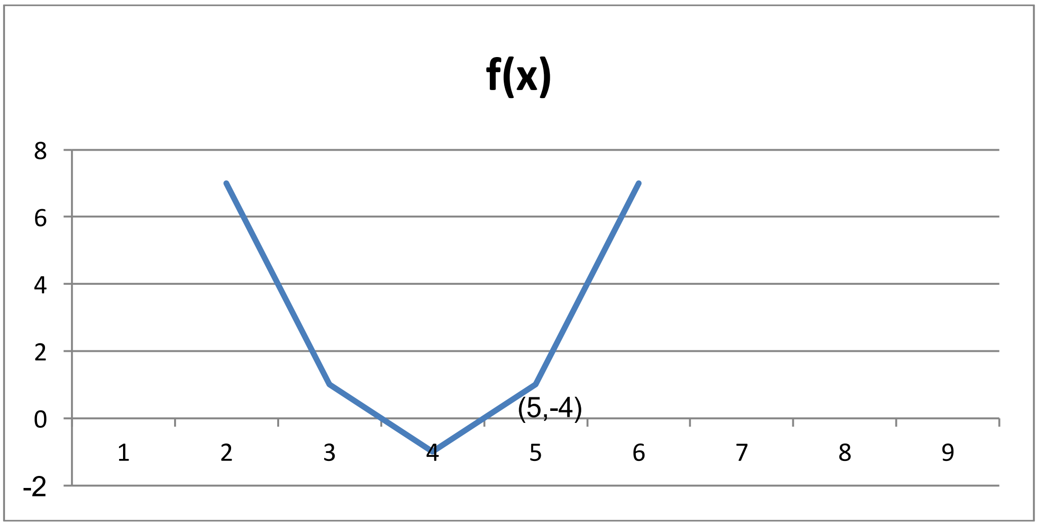


Gráfico 4.25 Gráfica de Función Cuadrática f(x)

4.4.5 PARA EJERCITAR.

Determinar Dominio y Rango de:

- f(x) = – x^2 + 5x - 4
- g(X) = 3 x^2 + 12 x – 12

Obtenga la forma canónica de:

- f(x) = – x^2 + 5x - 4
- g(X) = 3 x^2 + 12 x – 12

Obtenga la forma factorizada de:

- f(x) = – x^2 + 5x - 4
- g(X) = 3 x^2 + 12 x – 12

4.5 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN LINEAL

4.5.1 Definición de función lineal

Sean a y b números reales, la función f de correspondencia es f (x) = ax + b, recibe el nombre de función lineal. Dicho de otra manera una función lineal es una función polinómica de primer grado (variable elevada a la primera potencia).

La gráfica de esta función representa una recta cuya pendiente está dada por "a" y su intercepto con el eje Y es el punto (0, b). Para gráfica una recta, es suficiente obtener dos puntos de ella y trazar el segmento ilimitado que los contenga. Se sugiere que estos dos puntos sean las intersecciones con los ejes coordenados, es decir, encontrar el valor de y cuando x = 0; y, encontrar el valor de x cuando y = 0.

Ejemplos:

Al representar gráficamente las funciones usted observara que todas grafican una recta.

- Dada la función g (x) = x + 7; graficar.

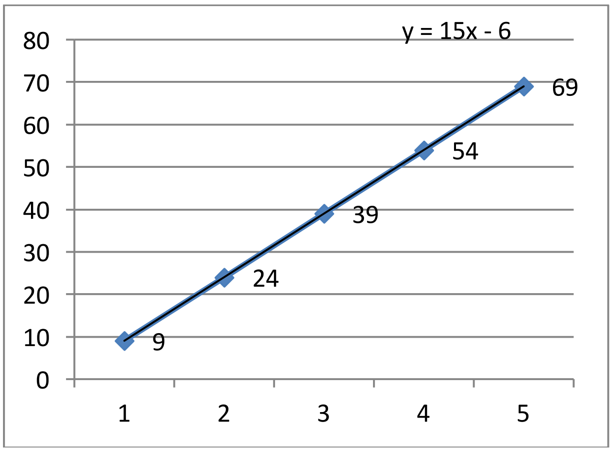


Gráfico 4.26 Gráfica de Función lineal g(x)

- h (x) = 7x – 2

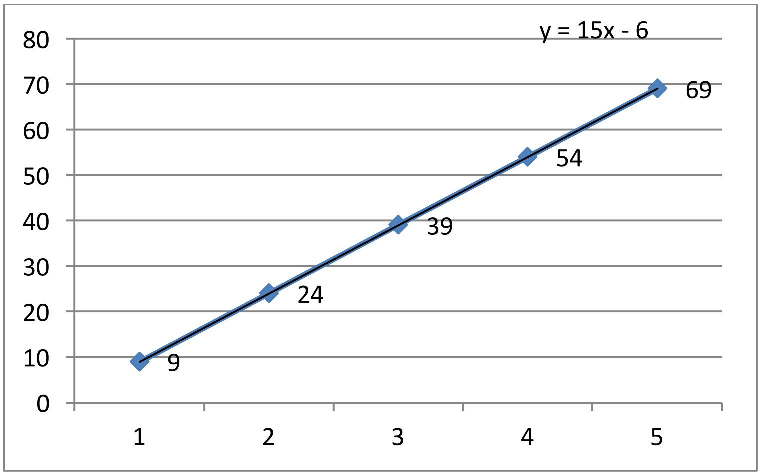


Gráfico 4.27 Gráfica de Función lineal h(x)

- i (x) = 13x + 2x – 6 = 15x -16

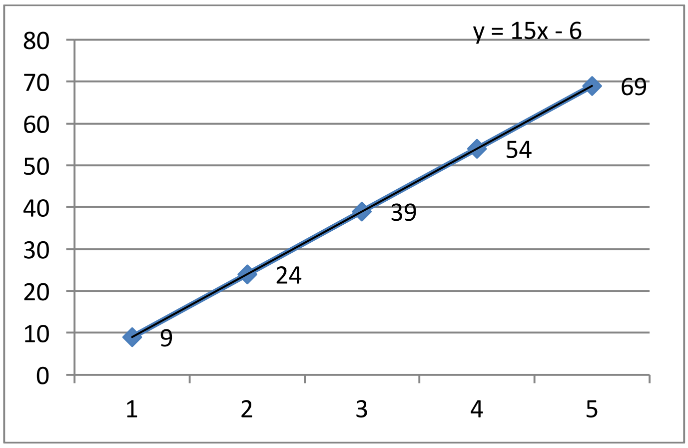


Gráfico 4.28 Gráfica de Función lineal i(x)

4.5.2 Dominio y Rango de una Función Lineal

Dominio de una función lineal: Es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Los valores que se dan a 'X' forman el conjunto de partida. Gráficamente lo observa en el eje horizontal. Por lo general se lo puede simbolizar Dom f(x).

Rango de una función lineal: Es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función "Y" o "f(x)", su valor depende del valor que le dé a "X". Gráficamente lo observamos en el eje vertical. La manera más efectiva para determinar el Rango consiste en graficar la función y ver los valores que toma "Y" de abajo hacia arriba. Por lo general se lo puede simbolizar Rang f(x).

Ejemplos

Para determinar el dominio y el rango de una función lineal. Analizar si la función tiene valores que generen restricciones.

- Sea la función $f(x) = 2x + 7$ observe que podemos evaluar la función para cualquier valor de x, esto quiere decir que x puede ser cualquier número real, por lo tanto: Dominio= Reales. Por lo general se lo puede simbolizar Dom $f(x) = [-\infty, +\infty]$. Esto indica que el dominio de la función va desde menos infinito a más infinito.

  Para determinar el rango de la función, despejar 'x':

  $Y = 2x + 7$

  $Y - 7 = 2x$

  $X = \frac{y-7}{2}$; observe que la función está definida para cualquier valor de y, por lo tanto no hay restricciones y puede ser cualquier número real: Rango = Reales. Por lo general se lo puede simbolizar Rang $f(x) = [-\infty, +\infty]$. Esto indica que el rango de la función va desde menos infinito a más infinito.

- Sea la función $f(x) = \frac{4}{3x-18}$ observe que podemos evaluar la función para cualquier valor de x, a excepción de cuando $x = 6$, porque de darse este caso la función f(x) = $\frac{4}{18-18}$ va a estar dividido para cero y no se podría realizar; esto quiere decir que x puede ser cualquier número real a excepción del 6, por lo tanto: Dominio= Reales - {6} o Dom f(x) = R; x$\neq$ 6.

Para determinar el rango de la función, despejar 'x':
f(x) = $\frac{4}{3x-18}$

x = $\frac{4}{3}$ y - 16; observe que la función está definida para cualquier valor de y, por lo tanto no hay restricciones y puede ser cualquier número real: Rango = Reales.
Rang f(x) = [-∞ , +∞].

4.5.3 Aplicaciones de la Función Lineal

- En la casa, los costos mensuales por energía eléctrica es de \$12, por agua es \$5, el gasto de alimentación depende de los 4 miembros de la familia. Si se requiere representar matemáticamente la función de costo total del hogar al mes, se dirá que x es el costo de alimentación al mes, por lo tanto el costo total es: C(x) = 4x + \$12 + \$5 →C(x) = 4x + \$17. La cual es una función lineal con pendiente 4 e intercepto en 17. Este intercepto es muy importante para el padre de familia, porque le indica que aunque no coman, tiene que cubrir este costo (\$17).

- Los costos fijos de un fabricante son iguales a \$10 000 mensuales y el costo de fabricar una camisa es de \$5. Al representar matemáticamente la función de costo total de la fábrica al mes, siendo x el número de camisas que se fabrican al mes, el costo total es: C(x) = 5x + 10 000 La cual es una función lineal con pendiente 5 e intercepto en 10 000. Este intercepto es de mucha importancia para el fabricante, porque le indica que aunque no produzca artículo alguno, tiene que cubrir este costo (10 000), y cuanto más grande es tal valor, más esfuerzo de producción se requiere y más ventas debe realizar.

4.5.4 PARA EJERCITAR

- Representar gráficamente las funciones:
  f (x) = -3X

  f(X) = $\frac{2}{3}$x + 2

  f(X) = $\frac{3}{4}$x - 1

- Calcular los dominios y rango de las siguientes funciones lineales:

  $$y = \frac{2}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{x}{x+4}$$
$$p(x)=\sqrt{x+3}$$

BIBLIOGRAFÍA

Dimensiones, S. (2016). *Matemática 9.* Ecuador: Norma S.A.

Matemáticas, E. I. (2006). *Fundamentos de Matemática Para Bachillerato.* Guayaquil, Ecuador: ICME ESPOL.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática 8° Grado.* Quito, Ecuador: SMEcuaediciones.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática 9° Grado.* Quito: SMEcuaediciones.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática Bachillerato General Unificado 1° Curso.* Quito, Ecuador: Don Bosco.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática Bachillerato General Unificado 2° Curso.* Quito, Ecuador: Don Bosco.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática Bachillerato General Unificado 3° Curso.* Quito, Ecuador: Don Bosco.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemáticas 10° Grado.* Quito, Ecuador: SMEcuaediciones.

VITUTOR. (2012). Recuperado el 20 de Junio de 2017, de http://www.vitutor.com/

ISBN: 978-9942-760-34-0

John Aníbal Herrera Rivera es profesor de la Carrera de Sociología y Ciencias Políticas de la Facultad de Jurisprudencia y Ciencias Sociales y Políticas de la Universidad de Guayaquil. Es profesional en Estadística Informática, especializado en Administración y Dirección de Empresas. Se ha desempeñado como consultor de proyectos e investigaciones estadísticas; así como también ha sido instructor de cursos estadísticos.

Luz María Quinde Arreaga es profesional en sistemas. Se ha desempeñado como docente de de educación secundaria y ha trabajo en proyectos estadísticos.