

Análisis matemático en la era digital:

Derivación de funciones en una variable, con
aplicaciones en TI y prácticas en Google Colab

Maritza Alexandra Pinta
Edison Loján Cueva

Análisis matemático en la era digital:

**Derivación de funciones en una variable, con
aplicaciones en TI y prácticas en Google Colab**

Maritza Alexandra Pinta
Edison Loján Cueva

ISBN: 978-9942-53-092-9 - DOI: <http://doi.org/10.48190/9789942530929>



© Maritza Alexandra Pinta
Edison Loján Cueva

© Editorial Grupo Compás, 2025
Guayaquí, Ecuador
www.grupocompas.com
<http://repositorio.grupocompas.com>

Primera edición, 8/11/2025

ISBN: 978-9942-53-032-5

DOI: <http://doi.org/10.48190/9789942530325>

Distribución online



Acceso abierto

Cita

Pinta, M., Loján, E. (2025) Análisis matemático en la era digital: Derivación de funciones en una variable, con aplicaciones en TI y prácticas en Google Colab. Editorial Grupo Compás

Este libro es parte de la colección de la Univesidad Técnica Estatal de Machala y ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad de la publicación. El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones en las leyes, la producción o almacenamiento total o parcial de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de la misma por cualquiera de sus medios, tanto si es electrónico, como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización de los titulares del copyright.

DEDICATORIA

A Dios, energía amor presente en todo lo creado, fuente de sabiduría,
por inspirarme cada día con la luz del conocimiento.

A mi familia, por su amor incondicional, paciencia y apoyo constante,
que han sido la base de cada logro alcanzado.

A mis estudiantes, cuya curiosidad y entusiasmo me motivan a enseñar con pasión y
seguir aprendiendo.

Y a todos aquellos que aman las matemáticas y creen que no solo se resuelven,
sino que también se viven, se sienten y se descubren.

PREFACIO

La derivación de funciones en una variable constituye uno de los pilares fundamentales del análisis matemático y una herramienta indispensable en la formación de profesionales en áreas tecnológicas. Su comprensión no solo permite el análisis del comportamiento de funciones y fenómenos, sino que también proporciona una base sólida para el desarrollo de modelos, algoritmos y soluciones en el ámbito de las Tecnologías de la Información.

Este libro se ha diseñado con características pedagógicas que facilitan el aprendizaje autónomo y guiado; empleando un lenguaje claro y accesible sin perder el rigor matemático necesario. Ha sido concebido para acompañar al estudiante de segundo semestre de la carrera de Tecnologías de la Información en su proceso de aprendizaje del cálculo diferencial, ofreciendo no solo fundamentos teóricos rigurosos, sino también prácticas interactivas y contextualizadas que facilitan la asimilación y aplicabilidad de los contenidos.

En cuanto a la estructura del presente libro, el contenido se organiza en cuatro capítulos, diseñados para progresar desde los conceptos más básicos hasta aplicaciones complejas.

El primer capítulo introduce el cálculo diferencial desde una perspectiva general, resaltando su relevancia en las Tecnologías de la Información, fundamentos históricos de la derivada, así como sus interpretaciones geométricas y físicas y su papel como herramienta para modelar el cambio.

El segundo capítulo presenta las técnicas de derivación de funciones algebraicas. El tercer capítulo, las técnicas de derivación de funciones trascendentes e implícitas. En ambos capítulos, se detalla la aplicación de las reglas de derivación mediante ejemplos representativos, así como su representación gráfica.

Actualmente, la programación, el análisis de datos y la automatización forman parte del día a día profesional, por lo que es imprescindible que los futuros ingenieros en tecnologías de la información cuenten con herramientas que integren la teoría matemática con su aplicación computacional. La investigación de Ruiz et al. (2016) reveló que solo el 30% de los estudiantes de niveles superiores en ISC podían escribir dos fórmulas de derivadas, y apenas el 15% resolvió correctamente un ejercicio básico de derivación. Además, investigaciones más recientes como la de Weigand et al. (2024), destacan que la enseñanza del cálculo debe renovarse con enfoques activos,

visuales y basados en tecnologías digitales para lograr una comprensión conceptual más profunda.

En este contexto, Google Colab emerge como un entorno accesible, moderno y potente para la exploración y resolución de problemas matemáticos mediante programación en Python. Por ello, se ha incluido un cuarto capítulo, que se enfoca en resolución de problemas utilizando Google Colab, permitiendo al estudiante experimentar con código, visualizar resultados y desarrollar pensamiento computacional.

Por otro lado, Zúñiga (2007) enfatiza que el aprendizaje del cálculo debe enfocarse en su utilidad para resolver problemas técnicos y tecnológicos reales, no solo como una colección de técnicas algorítmicas que conducen a la mecanización del aprendizaje. Otros estudios muestran que una parte significativa de los estudiantes de ingeniería presentan deficiencias en el dominio del cálculo diferencial, debido a la enseñanza descontextualizada y a la escasa relación con su campo profesional (Trejo Trejo et al., 2013). Por ello, en cada capítulo se ha introducido la sección *Piensa y analiza*, en la cual se plantea la aplicación de la derivada en la resolución de problemas contextualizados en el ámbito de las Tecnologías de la Información. Esto permite a los estudiantes establecer vínculos entre los conceptos matemáticos y sus aplicaciones reales en su profesión, además de desarrollar la habilidad blanda del análisis crítico.

También, cada capítulo tiene una última sección de *Autoevaluación*, que le permitirá al estudiante determinar su nivel de comprensión de las temáticas abordadas, motivando su aprendizaje.

En resumen, cada capítulo incluye conceptos matemáticos, ejemplos resueltos, ejercicios prácticos, visualizaciones gráficas, y actividades que fomentan el análisis crítico y la transferencia del conocimiento. Dado que, el objetivo general de esta obra es proporcionar a los estudiantes una comprensión integral de la derivación de funciones en una variable, combinando el rigor matemático con experiencias prácticas a través del uso de Google Colab, de manera que puedan aplicar estos conocimientos a situaciones reales dentro de su campo profesional.

Este texto no solo pretende enseñar a derivar funciones, sino también a pensar matemáticamente, a modelar con precisión y a resolver problemas de manera efectiva con apoyo tecnológico. Es una invitación a explorar la belleza del cálculo diferencial desde una mirada moderna, práctica y alineada con los desafíos actuales de la disciplina.

Índice

DEDICATORIA	2
PREFACIO	3
Capítulo 1 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL	8
Introducción	8
¿Qué es el cálculo diferencial y por qué es importante?.....	9
Aplicaciones en las Tecnologías de la Información	10
Breve historia de la derivada	12
Nomenclatura	17
Definición de derivada, interpretación física y geométrica	17

Piensa y analiza	21
Autoevalúate.....	22
Referencias.....	25
Capítulo 2 DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS.....	27
Introducción	28
Derivada de la función constante	29
Derivada de una potencia de x	31
Derivada de una constante por una función.....	34
Derivada de la potencia de una función	37
Derivada de una suma o diferencia de funciones.....	40
Derivada de un producto de funciones	44
Derivada de un cociente de funciones	48
Regla de la cadena	51
Ejercicios propuestos	53
Piensa y analiza	55
Autoevalúate.....	57
Referencias.....	58
Capítulo 3.....	59
DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRASCENDENTES	60
Introducción	60
Derivación de funciones exponenciales	61
Derivación de funciones logarítmicas	65
Derivación de funciones trigonométricas	71
Derivación de funciones implícitas	76
Ejercicios propuestos	82
Piensa y analiza	83
Autoevalúate.....	84
Capítulo 4.....	87
PRÁCTICAS EN GOOGLE COLAB.....	87
Introducción a Google Colab	87

Instalación de Google Colab	88
Estructura de un <i>notebook</i>	90
Ventajas de Google Colab en la enseñanza del cálculo	93
Librería <i>SymPy</i>	93
Librería <i>Matplotlib</i>	94
Biblioteca <i>NumPy</i>	95
Derivación de funciones algebraicas en Google Colab	98
Derivación de funciones trascendentes en Google Colab.....	105
Derivación de funciones implícitas en Google Colab.....	111
Ejercicios propuestos	115
Piensa y analiza	115
Autoevalúate.....	116
Referencias.....	118

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Introducción

El cálculo diferencial constituye el eje central del análisis matemático y su comprensión es indispensable para quienes se forman en campos técnicos como las Tecnologías de la Información.

Este capítulo nos introduce en el estudio de la derivada, destacando su utilidad como herramienta para modelar fenómenos dinámicos en diversas disciplinas, desde la física y la economía hasta la inteligencia artificial, el procesamiento de señales y la optimización de redes informáticas. La derivada permite analizar tasas de cambio, identificar comportamientos críticos en sistemas y ajustar algoritmos mediante técnicas como el descenso del gradiente, ampliamente empleadas en *machine learning*.

Del mismo modo, se presenta una revisión histórica del concepto de derivada, mostrando cómo evolucionó desde los métodos intuitivos de Fermat hasta la formulación rigurosa de Cauchy y Weierstrass. Esta perspectiva no solo enriquece el conocimiento del estudiante, sino que lo prepara para valorar críticamente los conceptos actuales y su aplicación en contextos computacionales.

El capítulo también introduce las distintas notaciones de derivada y expone su interpretación geométrica como pendiente de una recta tangente y su dimensión física como velocidad o razón de cambio. Estas ideas se ilustran con gráficos y ejemplos prácticos que ayudan al estudiante a conectar teoría y visualización.

Finalmente, se incluye una sección de análisis contextualizado donde se plantea un escenario real del ámbito de las tecnologías de la información, que invita al estudiante a aplicar el razonamiento diferencial para resolver un problema técnico concreto, fomentando así el pensamiento crítico y la transferencia del conocimiento.

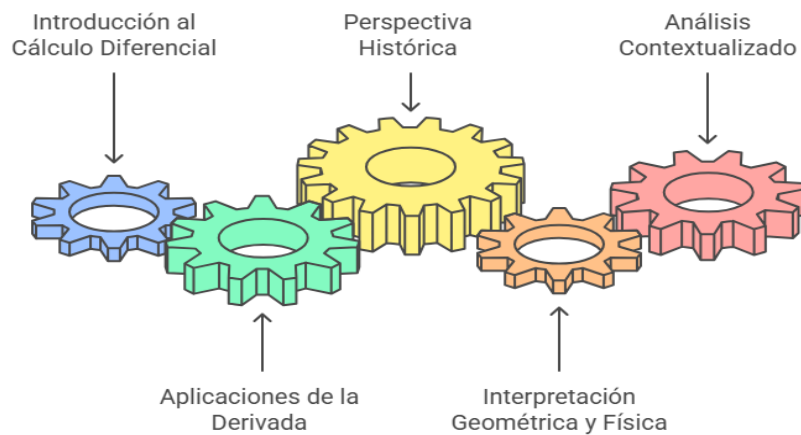


Figura 1. Introducción al cálculo diferencial

Fuente: Elaboración propia.

¿Qué es el cálculo diferencial y por qué es importante?

El cálculo diferencial es una rama esencial de las matemáticas que estudia el cambio de una cantidad respecto a otra. Su herramienta fundamental, la derivada, permite modelar fenómenos variables en diversas ciencias y aplicaciones tecnológicas. La comprensión profunda del cálculo no solo proporciona habilidades para resolver problemas matemáticos sino también potencia la capacidad de análisis crítico, modelado y optimización de procesos en contextos reales, especialmente en el campo de las Tecnologías de la Información.

El cálculo diferencial se originó en el siglo XVII con los trabajos de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, quienes establecieron los fundamentos del análisis matemático moderno. Su aplicación abarca desde la física clásica hasta la economía, pasando por la ingeniería y las ciencias computacionales (Stewart, 2012).

La importancia del cálculo diferencial radica en su capacidad para modelar fenómenos dinámicos. Por ejemplo, en física, describe la velocidad instantánea de un objeto; en economía, representa la tasa de cambio del costo o ingreso. En el contexto de la ingeniería, y particularmente en las carreras de Tecnologías de la Información, el cálculo diferencial es esencial para el análisis de algoritmos, la optimización de recursos, la modelación de datos y la inteligencia artificial.

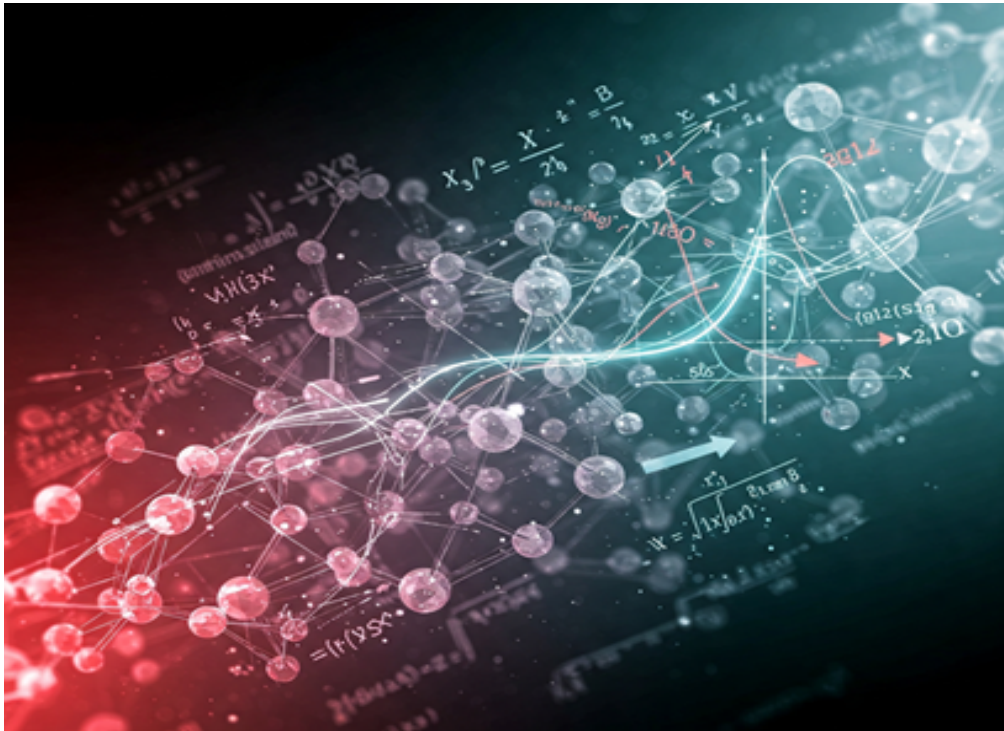


Figura 2. El cálculo diferencial en algoritmos de inteligencia artificial.

Fuente: Elaboración propia.

Aplicaciones en las Tecnologías de la Información

En la actualidad, las aplicaciones del cálculo diferencial en el ámbito de las Tecnologías de la Información son numerosas y fundamentales. Algunas de las más relevantes son:

Optimización de algoritmos. Mediante el uso de derivadas, es posible determinar el punto óptimo de desempeño de un algoritmo, lo cual resulta necesario para:

- **Minimizar el tiempo de ejecución:** en algoritmos de ordenamiento, como *Quicksort*, el análisis de derivadas ayuda a determinar la complejidad temporal óptima (Cormen et al., 2022).
- **Reducir el consumo de recursos:** en sistemas distribuidos, las derivadas se usan para optimizar el balanceo de carga entre servidores, evitando cuellos de botella y resolviendo problemas de asignación de recursos (Vizuite et al., 2022).

Inteligencia artificial y aprendizaje automático. El entrenamiento de modelos de *machine learning* depende en gran medida del cálculo diferencial. Por ejemplo:

- **Descenso del gradiente:** este método, basado en derivadas parciales, ajusta los parámetros de redes neuronales para minimizar funciones de error (Goodfellow et al., 2016).
- **Regularización:** técnicas como L1/L2 usan derivadas para penalizar coeficientes y evitar sobreajuste (*overfitting*) (Hastie et al., 2009).

Procesamiento de imágenes y señales. El análisis de variaciones espaciales y temporales se apoya en conceptos del cálculo diferencial:

- **Detección de bordes:** operadores como *Sobel* aplican derivadas discretas para resaltar transiciones en imágenes (Dubey et al., 2022).
- **Reconocimiento de patrones:** en señales de audio, las derivadas ayudan a identificar frecuencias clave para sistemas de reconocimiento de voz (Nguyen et al., 2021).

Simulación y modelado de sistemas. Las ecuaciones diferenciales son la base para simular fenómenos dinámicos como:

- **Videojuegos y gráficos:** los movimientos de personajes, colisiones y efectos físicos se modelan con ecuaciones diferenciales ordinarias (Eberly, 2007).
- **Método de elementos finitos (MEF):** ampliamente usado en ingeniería para resolver ecuaciones diferenciales complejas en sistemas físicos y de ingeniería, como en simulaciones de estrés estructural o flujo de fluidos (Palenzuela et al., 2021).

Análisis de rendimiento en redes. El modelado matemático de redes depende del cálculo para:

- **Redes vehiculares:** las tasas de transferencia, latencia y carga de servidores pueden modelarse con funciones matemáticas cuyo comportamiento se estudia a través del cálculo. Por ejemplo, la determinación de parámetros dinámicos y variables en el tiempo desempeña un papel fundamental en la evaluación de la capacidad de los sistemas de computación de borde vehicular para satisfacer los requisitos de las aplicaciones vehiculares (Miao et al., 2023).
- **Protocolos de enrutamiento:** actualmente, estos protocolos han incorporado técnicas matemáticas como el análisis de derivadas temporales y tasas de cambio, para optimizar el rendimiento de la red y mitigar la congestión. Un ejemplo destacado es TCP BBR (*Bottleneck Bandwidth and Round-trip Propagation Time*), que utiliza un enfoque basado en modelos para ajustar

dinámicamente la tasa de transmisión en función de las variaciones en el ancho de banda y la latencia (Tari et al., 2024).



Figura 3. Aplicaciones del Cálculo diferencial en Tecnologías de la Información.

Fuente: Elaboración propia.

Breve historia de la derivada

A lo largo del tiempo, los matemáticos se enfrentaron al desafío de resolver problemas vinculados con el movimiento de los cuerpos, la determinación de tangentes a curvas y el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de distintas figuras geométricas. Para ello, recurrieron principalmente a la geometría euclidiana y a ciertos elementos básicos de aritmética y álgebra, propios de cada época. Como fruto de los esfuerzos por encontrar respuestas a estos desafíos, se produjeron avances significativos en el conocimiento matemático, entre los cuales destaca el desarrollo del cálculo diferencial (Silva Atacho, 2014).

La derivación es uno de los pilares fundamentales del cálculo diferencial; por lo que, comprender su evolución nos permite valorar su importancia en la ciencia y la tecnología, y nos prepara para usarla críticamente en la informática y otras áreas de aplicación.

El desarrollo histórico de la derivada ha atravesado cuatro etapas fundamentales en su desarrollo. En primer lugar, se utilizó de manera empírica: ejemplos de lo que hoy reconocemos como derivadas surgieron para resolver problemas concretos en contextos particulares. Posteriormente, se identificó el concepto general subyacente a estos usos, lo cual fue clave en la invención del cálculo. En una tercera etapa, se exploraron y desarrollaron sus propiedades, extendiendo su aplicación tanto en las matemáticas como en la física. Finalmente, se alcanzó una formulación rigurosa, dando lugar a una definición precisa dentro de un marco teórico bien estructurado (Campuzano Ponce, 2015).

A continuación, se presenta un breve recorrido por cada una de estas etapas, resaltando sus aspectos más importantes:

Primera etapa (siglo XVII – antes de 1660). Uso empírico de la derivada.

Esta etapa marcó un momento clave en la evolución del pensamiento matemático, estableciendo las bases para la formulación del cálculo infinitesimal. Los siguientes avances reflejan cómo, sin contar aún con una definición formal de derivada, los matemáticos del siglo XVII ya empleaban métodos prácticos para resolver problemas complejos.

1630 – Pierre de Fermat: método para hallar máximos y mínimos, basado en manipulación algebraica e intuición geométrica, como en el caso del problema de dividir un segmento para maximizar el producto de sus partes. Introduce el concepto de *seudo identidades* sin utilizar límites ni infinitesimales.

1650 – Johannes Hudde: generaliza el método de Fermat para polinomios. Da forma verbal a lo que hoy sería la condición de derivada igual a cero.

Década de 1660: se establece la conexión algebraica entre extremos y tangentes, aunque aún no existe el concepto de derivada como tal. Una tangente se concebía como el resultado del acercamiento progresivo de una secante a un solo punto. Fermat, Descartes, John Wallis y otros matemáticos fueron capaces de calcular la tangente a una curva, utilizando la pendiente de la secante. Se utilizaba la razón de cambio entre $f(x + h)$ y $f(x)$, dividiendo por h , aunque no se justificaba rigurosamente qué ocurría cuando h tendía a cero.

Segunda etapa (1660-1700). Descubrimiento e integración de conceptos.

Esta etapa marcó la consolidación del cálculo como una herramienta poderosa, pero la derivada aún no se definía de forma precisa. Aquí, sobresalen los siguientes aportes importantes que, aunque carecían de rigor formal, resultaban muy eficaces para resolver problemas geométricos y físicos.

1669 – Isaac Newton: desarrolla el método de fluxiones (razones de cambio). Introduce la notación con punto sobre la variable ($\dot{x}$) y el concepto de área como función.

1675 – Gottfried Leibniz: concibe derivada como razón de infinitesimales, introduciendo el cociente diferencial dy/dx y el signo de integral $\int$.

Finales del siglo XVII. Newton y Leibniz demuestran el Teorema Fundamental del Cálculo, relacionando derivación e integración como operaciones inversas.

Tercera etapa (1700-1800). Desarrollo técnico y aplicaciones.

Esta etapa representa una fase de desarrollo y aplicación intensiva del concepto de derivada, aunque aún sin el rigor formal posterior. Fue clave para establecer las bases de análisis matemático más profundo y sentó las condiciones para futuras definiciones más precisas del cálculo diferencial.

1715 – Brook Taylor: formula la serie de Taylor, relacionando funciones con sus derivadas de orden superior.

1739 – Leonhard Euler: aplica derivadas a la física. Resuelve ecuaciones diferenciales como

$$m\ddot{x} + kx = 0 \text{ (movimiento armónico).}$$

Década de 1750-1780. Expansión del uso de ecuaciones diferenciales parciales en mecánica (vibración de cuerdas, ondas), por D'Alembert, Bernoulli y Euler.

Cuarta etapa (1800-1870). Formulación rigurosa.

Esta cuarta etapa consolidó el concepto de derivada como una noción rigurosa y bien fundamentada, crucial para el avance del análisis y la matemática moderna, alejándose definitivamente de la intuición física o geométrica para convertirse en una construcción puramente lógica.

1797 – Joseph-Louis Lagrange: define la derivada como el coeficiente del término lineal en la serie de Taylor. Introduce el término *función derivada* y la notación $f'(x)$.

1823 – Augustin-Louis Cauchy: define la derivada como un límite y formaliza la integral definida. Utiliza desigualdades algebraicas.

1850-1870 – Karl Weierstrass: introduce la definición formal moderna de límite (*épsilon-delta*). Distingue entre convergencia puntual y uniforme, y publica una función continua no derivable en ningún punto, demostrando que continuidad no implica derivabilidad.

A continuación, en la Figura 4, se presenta una síntesis de la historia de la derivada:

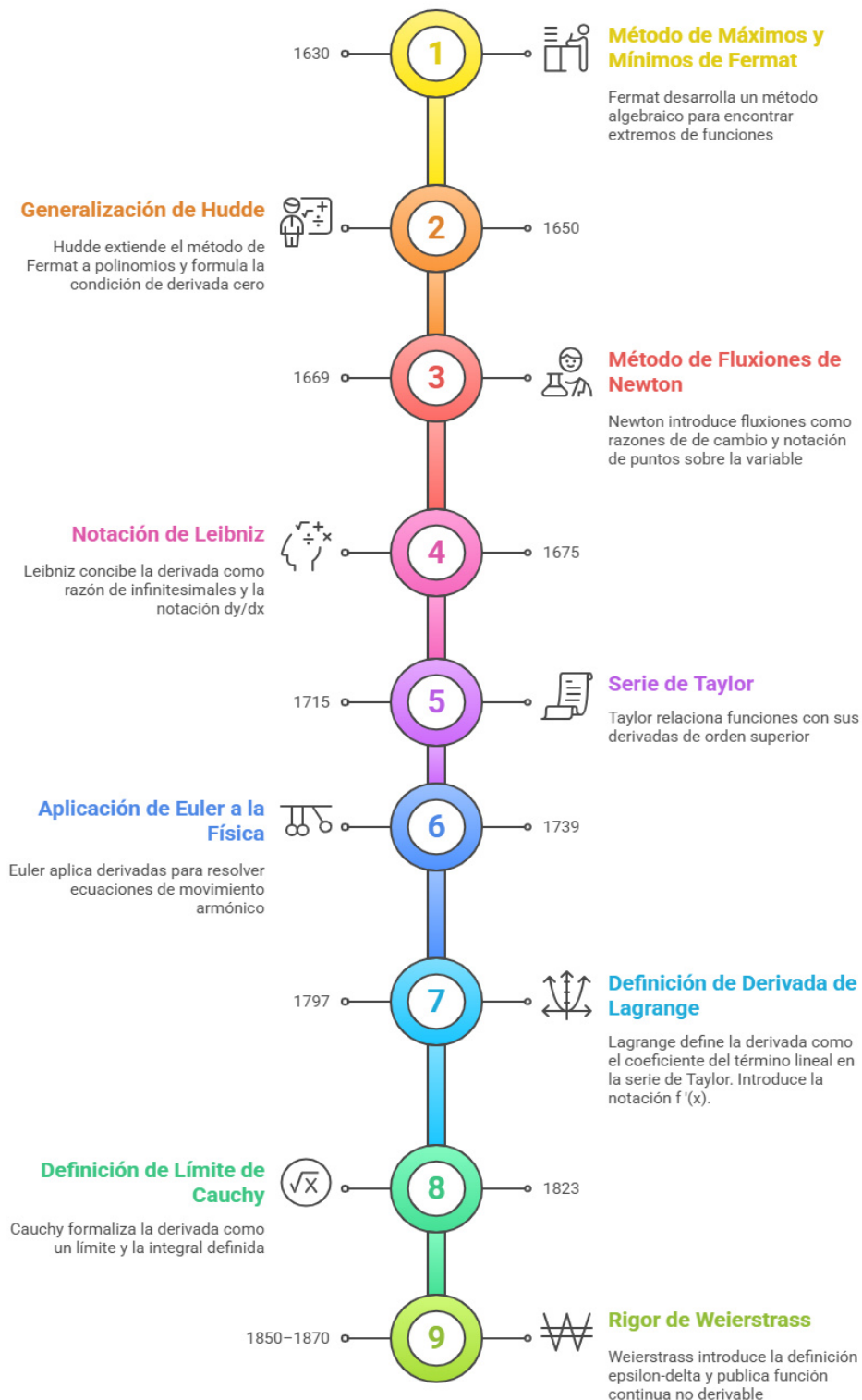


Figura 4. Desarrollo histórico de la derivada.

Fuente: Elaboración propia.

Nomenclatura

A través de la historia del cálculo han surgido diversas formas de representar la derivada de una función. Estas nomenclaturas, además de su valor simbólico, reflejan diferentes perspectivas históricas, filosóficas y prácticas sobre la derivación. A continuación, se presentan las más utilizadas en el contexto del análisis matemático y sus aplicaciones en las Tecnologías de la Información:

- **Notación diferencial de Leibniz:** $\frac{dy}{dx}$

Introducida por Gottfried Wilhelm Leibniz, esta notación originalmente fue concebida como una razón entre "*diferencias infinitamente pequeñas*", en la actualidad se interpreta formalmente como el límite de una razón entre incrementos diferenciales. Es especialmente útil cuando se necesita hacer un seguimiento claro de las variables involucradas, por ejemplo, en la regla de la cadena, diferenciación implícita o derivadas parciales.

- **Notación de Lagrange:** $f'(x)$

Propuesta por Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII, esta notación utiliza una comilla (prima) para indicar derivación. Es muy utilizada por su simplicidad y claridad cuando se trabaja con funciones explícitas.

- **Variación directa de la notación de Lagrange:** y'

Es una versión simplificada de la anterior, especialmente útil en ecuaciones diferenciales o derivadas sucesivas como y'' , y''' , etc.

- **Notación de operador:** $D f(x)$, $D^n f(x)$

Se trata de una forma más estructurada de representar derivadas, utilizando el operador D como sinónimo de derivación. Por ejemplo:

$$D f(x) = f'(x), \quad D^2 f(x) = f''(x)$$

Definición de derivada, interpretación física y geométrica

La definición de la derivada se deduce de su interpretación física y geométrica. Así vemos que *geométricamente* se interpreta como la pendiente de la recta tangente a

la curva que representa la gráfica de una función en un punto dado (Stewart, 2012). Esto se demuestra de forma sencilla, como lo hicieron Fermat y Newton, usando rectas secantes cuyas pendientes se pueden calcular fácilmente.

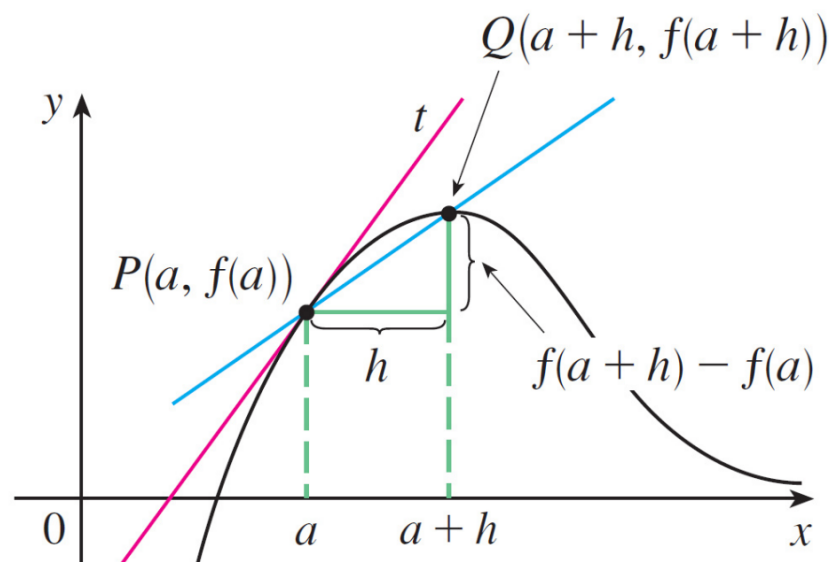


Figura 5. Representación geométrica de la pendiente de la secante como aproximación a la tangente.

Fuente: Tomado de Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas (7.^a ed., p. 144). J. Stewart, 2012.

En la Figura 5, tenemos la gráfica de una función $y = f(x)$, en la cual vamos a determinar la pendiente de su tangente en el punto $P(a, f(a))$.

Para ello, tomamos otro punto de la curva, $Q(a+h, f(a+h))$, y trazamos una secante que une a P y Q , cuya pendiente estará dada por:

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1.1)$$

Si movemos el punto Q cada vez más cerca de P, la secante se va aproximando a lo que será la tangente. De tal forma que cuando h tiende a 0, aplicando límites, la pendiente dada en (1.1) se convierte en:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1.2)$$

Generalizando para cualquier valor $a = x$, tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1.3)$$

Por otro lado, *físicamente* la derivada se interpreta como una *razón de cambio* en distintas disciplinas como la física, biología, informática, economía, entre otras; siendo el ejemplo más común el de asociar la derivada con la velocidad de un móvil.

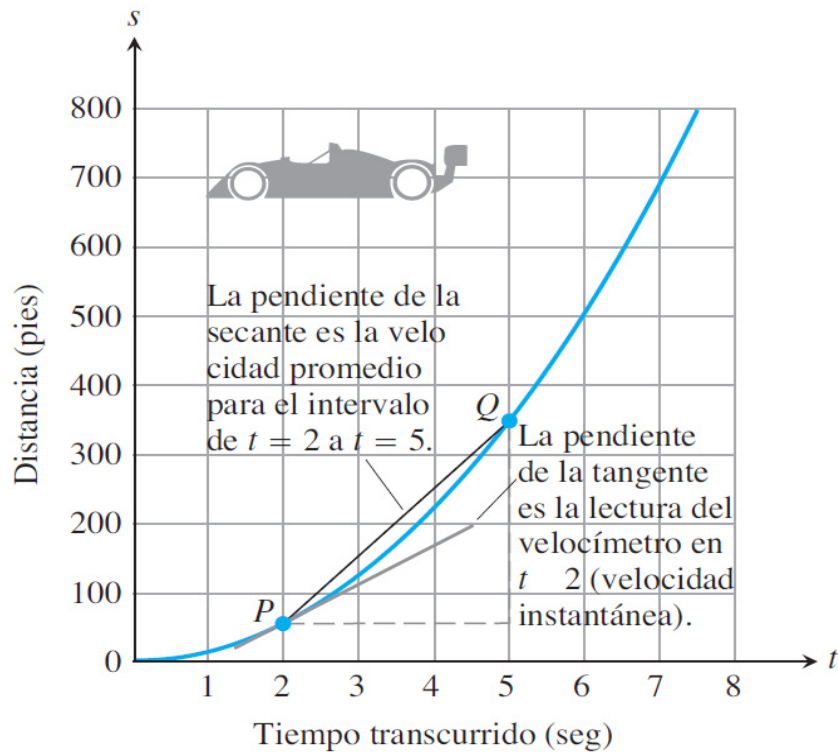


Figura 6. Representación de la interpretación física de la derivada.

Fuente: Tomado de Cálculo de una variable (11.^a ed., p. 173). G. B. Thomas Jr., M. D. Weir, & J. Hass, 2006.

Para explicar gráficamente la derivada como la velocidad de un automóvil, hacemos uso de la Figura 6, que muestra la distancia recorrida s (en pies) en función del tiempo transcurrido t (en segundos). El punto P representa la posición del automóvil en el tiempo $t = 2$, y el punto Q su posición en $t = 5$.

La línea que une los puntos P y Q es una recta secante, cuya pendiente se calcula como

$$m = \frac{s(5) - s(2)}{5 - 2}$$

Esta pendiente representa, físicamente, la velocidad promedio del automóvil entre los tiempos 2 y 5 segundos.

La línea tangente en el punto P representa el comportamiento de la curva en un solo instante; por lo tanto, su pendiente indica la velocidad instantánea en $t = 2$, es decir, la lectura que mostraría el velocímetro justo en ese momento.

Esta pendiente se obtiene como el límite de la pendiente de las secantes cuando el punto Q se acerca a P , obteniendo

$$m_{\text{tan gente}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h}$$

Dicha pendiente viene a ser la *velocidad* del automóvil, por lo que, la misma se define como la derivada de la función de posición con respecto al tiempo:

$$\text{Velocidad} = \frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h} \quad (1.4)$$

Es necesario señalar que en el caso de un automóvil, lo que muestra el velocímetro siempre es la *rapidez*, que es el valor absoluto de la velocidad, sin considerar su dirección (Thomas, 2006).

Por lo general, se piensa que el cambio ocurre siempre en función del tiempo; sin embargo, también pueden intervenir otras variables. Por ejemplo, un médico podría analizar cómo reacciona el cuerpo al modificar la dosis de un fármaco. De manera similar, un economista podría investigar cómo varía el costo de producir banano dependiendo de la cantidad de hectáreas cultivadas.

Piensa y analiza



Escenario: *Optimización del rendimiento de un sistema web*

Imagina que formas parte del equipo de desarrollo de una empresa de comercio electrónico. Recientemente, se ha detectado que el tiempo de respuesta del sitio web varía de acuerdo con la cantidad de usuarios activos conectados al servidor. El equipo de *DevOps* ha recopilado datos que relacionan el número de usuarios activos (x) con el tiempo de respuesta promedio ($f(x)$), medido en milisegundos.

Al graficar la función $f(x)$, observas que, conforme aumenta la cantidad de usuarios, el tiempo de respuesta crece de manera no lineal. Para optimizar la experiencia del usuario, se busca determinar el punto exacto en el cual el incremento de usuarios generara un aumento crítico en el tiempo de espera; es decir, identificar el momento en que la tasa de cambio del tiempo de respuesta se vuelve excesivamente elevada.

Preguntas para reflexionar y analizar:

1. ¿Cómo te puede ayudar el concepto de derivada a identificar ese punto crítico donde el sistema comienza a deteriorarse significativamente?
2. Si cuentas con la función $f(x)$ que modela el comportamiento del sistema, ¿cómo interpretarías el valor de $f'(x)$ en términos del rendimiento del servidor?
3. ¿Qué implicaciones tendría encontrar que $f'(x) > 0$ de forma acelerada a partir de cierto número de usuarios? ¿Qué decisiones técnicas podrías tomar en función de esta información?
4. ¿Qué otras variables podrían estar influyendo en el comportamiento del sistema, además del número de usuarios? ¿Podrías modelarlas usando funciones matemáticas?

Autoevalúate



Escoge el literal de la respuesta correcta a las siguientes interrogantes:

1. El cálculo diferencial es una rama de las matemáticas que estudia:
 - a) Las imágenes geométricas y sus propiedades.

- b) El cambio de una cantidad con respecto a otra.
 - c) Las operaciones aritméticas básicas.
 - d) La resolución de ecuaciones algebraicas.
2. ¿Cuál de las siguientes opciones representa una aplicación del cálculo diferencial en las Tecnologías de la Información?
- a) Diseño de interfaces de usuario.
 - b) Optimización de algoritmos.
 - c) Desarrollo de bases de datos.
 - d) Gestión de proyectos de software.
3. ¿Quiénes establecieron los fundamentos del análisis matemático moderno, incluyendo el cálculo diferencial?
- a) Pitágoras y Euclides.
 - b) Arquímedes y Newton.
 - c) Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz.
 - d) Alan Turing y Claude Shannon.
4. La derivada de una función, geométricamente, se interpreta como:
- a) El área bajo la curva de la función.
 - b) La pendiente de la recta secante a la curva.
 - c) La pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado.
 - d) La longitud de la curva de la función.
5. ¿Cuál de las siguientes notaciones se utiliza para representar la derivada de una función?
- a) $f(x)$
 - b) $\int f(x) dx$
 - c) dy/dx
 - d) $\lim f(x)$

6. El método de descenso del gradiente, utilizado en el aprendizaje automático, se basa en:
 - a) Integrales.
 - b) Derivadas parciales.
 - c) Matrices.
 - d) Estadística descriptiva.
7. ¿Cuál de las siguientes opciones describe mejor la interpretación física de la derivada?
 - a) El área de una Figura geométrica.
 - b) La velocidad de un objeto en movimiento.
 - c) La aceleración de un objeto en reposo.
 - d) El volumen de un sólido.
8. ¿Qué representa la recta secante en el contexto de la derivación?
 - a) La velocidad instantánea.
 - b) La aceleración promedio.
 - c) La velocidad promedio.
 - d) La distancia recorrida.
9. ¿Cuál de los siguientes matemáticos definió la derivada como un límite?
 - a) Isaac Newton.
 - b) Gottfried Wilhelm Leibniz.
 - c) Joseph-Louis Lagrange.
 - d) Augustin-Louis Cauchy.
10. ¿Por qué es importante el cálculo diferencial en las Tecnologías de la Información?
 - a) Porque permite resolver problemas de geometría.

- b) Porque es esencial para el análisis de algoritmos y la optimización de recursos.
- c) Porque se utiliza en la contabilidad y las finanzas.
- d) Porque facilita el diseño de interfaces gráficas.

Respuestas: 1.b, 2. b, 3. c, 4. c, 5. c, 6. b, 7. b, 8. c, 9. d, 10. b

Referencias

- Campuzano Ponce, J. C. (2015). *Breve historia del concepto de derivada*. <https://www.researchgate.net/publication/270684035>
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). *Introduction to algorithms* (4th ed.). The MIT Press.
- Dubey, P., Dubey, P., Sharma, M., & Changlani, S. (2022). Comparative performance analysis of various digital image edge detection techniques with hybrid edge detection technique which is developed by combining second order derivative techniques log and Canny. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13(Special Issue for selected papers of ICDACT-2021). <https://doi.org/10.22075/ijnaa.2022.6334>
- Eberly, D. H. (2007). *3D game engine design: A practical approach to real-time computer graphics* (2nd ed.). CRC Press.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep learning*. MIT Press. <http://www.deeplearningbook.org/>
- Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). *The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction* (2nd ed). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-84858-7>
- Miao, W., Min, G., Zhang, X., Zhao, Z., & Hu, J. (2023). Performance modelling and quantitative analysis of vehicular edge computing with bursty task arrivals. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 22(2), 1129-1142. <https://doi.org/10.1109/TMC.2021.3087013>
- Nguyen, B. T., Wakabayashi, Y., Iwai, K., & Nishiura, T. (2021). Analysis of derivative of instantaneous frequency and its application to voice activity detection. *Applied Acoustics*, 181, 108116. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2021.108116>
- Palenzuela, C., Miñano, B., Arbona, A., Bona-Casas, C., Bona, C., & Massó, J. (2021). Simflowny 3: An upgraded platform for scientific modelling and simulation. *Computer Physics Communications*, 259, 107675. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107675>
- Silva Atacho, L. (2014). La derivada: Un punto de vista histórico. *Gestión y Gerencia*, 8(3), 25-44.
- Stewart, J. (2012). *Calculus: Early transcendentals* (7th ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.

- Tari, Z., Li, K., & Wu, H. (Eds.). (2024). *Algorithms and architectures for parallel processing: 23rd International Conference, ICA3PP 2023, Tianjin, China, October 20–22, 2023, proceedings, Part III*. Springer Nature.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2006). *Cálculo de una variable* (11th ed.). Pearson.
- Vizuite, R., Frasca, P., & Panteley, E. (2022). Gradient descent for resource allocation with packet loss. *IFAC-PapersOnLine*, 55(13), 109-114. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.07.244>

Capítulo 2

DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Introducción

Como se señaló en el capítulo anterior, la derivación es una herramienta fundamental del cálculo diferencial, ya que permite comprender y modelar la razón de cambio de una variable con respecto a otra. Su utilidad radica en que, en la vida cotidiana y en la tecnología, muchas variables no permanecen constantes. Por ejemplo, en un programa informático que procesa datos en tiempo real, la derivada puede contribuir a estimar cómo se incrementa el uso del procesador cuando aumenta el volumen de datos. En este contexto, la derivada no solo posee valor teórico, sino que se convierte en un recurso fundamental para la predicción, el control y la optimización de sistemas.

El presente capítulo tiene como objetivo estudiar la derivación de funciones algebraicas, es decir, aquellas funciones construidas a partir de operaciones como suma, resta, multiplicación, división y potencias de variables (Stewart, 2012).

Para cada una de las reglas de derivación se abordarán 4 apartados (véase Figura 7):

- La explicación de la regla de derivación, que permite calcular derivadas de manera sistemática.
- La ilustración de su uso a través de ejemplos detallados.
- Su representación gráfica.
- Su aplicación en la informática.

En las reglas de derivación se adoptará la nomenclatura utilizada por Thomas (2006).

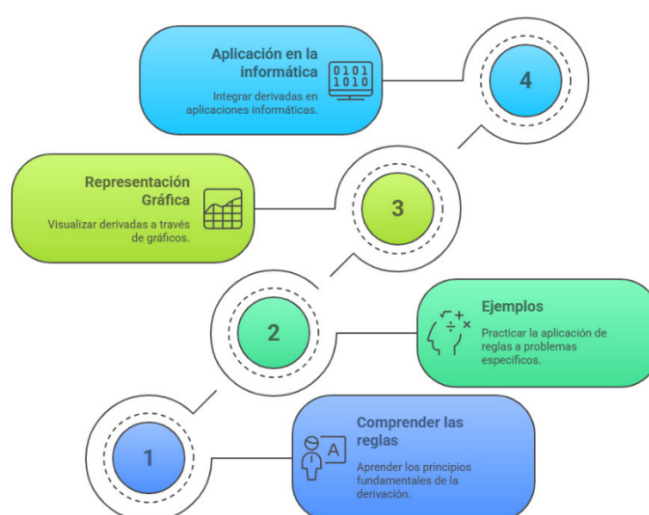


Figura 7. Dominando la derivación de funciones algebraicas.

Fuente: Elaboración propia.

Derivada de la función constante

En cálculo diferencial, una constante es un valor que no cambia, sin importar el valor de la variable independiente. Por ejemplo, las funciones:

$$f(x) = -2, f(x) = 7, f(x) = \pi,$$

al graficarse en el plano cartesiano, se representan mediante líneas horizontales. Esto significa que su pendiente, o razón de cambio, es siempre igual a cero.

La regla para derivar una constante c con respecto a x se expresa como:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(c) = 0} \quad (2.1)$$

Ejemplos:

- 1) $\frac{d}{dx}(6) = 0$
- 2) $\frac{d}{dx}(\pi) = 0$, siendo π una constante
- 3) $\frac{d}{dx}(\ln 2) = 0$, siendo $\ln 2$ una constante

Representación gráfica:

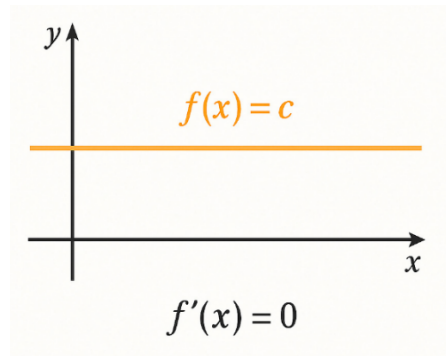


Figura 8. Gráfica de la derivada de la función constante.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 8 se representa el comportamiento de una función constante y su derivada. La línea horizontal de color naranja ilustra una función cuyo valor es constante para todo x en su dominio; el valor de la función $f(x)$ permanece inalterable en c .

En términos geométricos, esto significa que la pendiente de la curva es cero en todos sus puntos, lo cual se visualiza con una línea sin inclinación (paralela al eje x). De acuerdo al concepto geométrico de derivada, este hecho indica que la derivada de una función constante es igual a cero en todo su dominio.

Además, como la derivada representa la razón de cambio instantánea de la función. Como no hay cambio alguno en los valores de $f(x)$, la derivada refleja esa invarianza con un valor nulo: $f'(x) = 0$. Es decir, no existe variación en el eje vertical a medida que se avanza en la dirección horizontal.

Aplicación en la informática:

En informática, algunos algoritmos se pueden modelar como una constante porque realizan una tarea fija, independientemente del tamaño de los datos de entrada. Por ejemplo, el costo de operación de una validación que siempre recorre una única casilla de memoria. Saber que su derivada es cero indica que este proceso no se ve afectado por cambios en la entrada y, por tanto, no contribuye al crecimiento de la complejidad computacional (Cormen et al., 2022).

Derivada de una potencia de x

Una de las reglas más fundamentales en el cálculo diferencial es la regla de la potencia, que se aplica cuando la función consiste en una variable elevada a una potencia. Esta regla es esencial para derivar polinomios y muchas expresiones que aparecen en problemas prácticos de ingeniería y tecnología.

Si una función está dada por $f(x) = x^n$, donde n es un número real, entonces su derivada se expresa como:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}} \quad (2.2)$$

Ejemplos:

1) $\frac{d}{dx}(x^7)$; siendo $n = 7$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^7) &= 7x^{7-1} \\ &= 7x^6\end{aligned}$$

2) $\frac{d}{dx}(x^{-3})$; siendo $n = -3$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^{-3}) &= -3x^{-3-1} \\ &= -3x^{-4} \\ &= -\frac{3}{x^4}\end{aligned}$$

$$3) \frac{d}{dx}(\sqrt{x}); \text{ siendo } n = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2})$$

$$= \frac{1}{2} x^{1/2-1}$$

$$= \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Representación gráfica:

Para analizar la representación gráfica de una función potencia, sea la función

$$f(x) = x^3$$

y su derivada

$$f'(x) = 3x^2$$

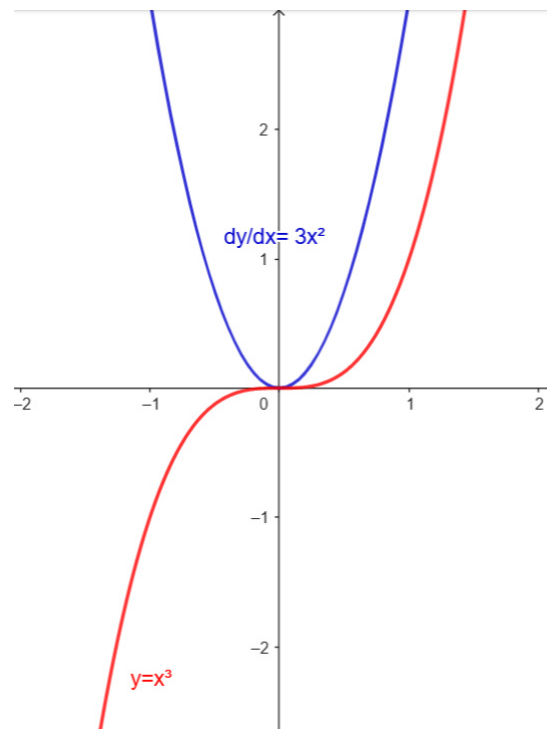


Figura 9. Gráfica de la función potencia $y = x^3$ y su derivada.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 9, la curva roja representa la función $y = x^3$, que tiene un punto de inflexión en el origen (0, 0) y es siempre creciente.

La curva azul representa la derivada de la función, la cual nos indica la tasa de cambio instantánea de la función original en cada punto de x . Su altura en cualquier punto x corresponde a la pendiente de la línea tangente a la curva roja en ese mismo valor de x .

Además, se puede observar lo siguiente:

- En $x = 0$, la curva roja tiene una tangente horizontal (eje x), y la curva azul tiene un valor de cero, en concordancia con el hecho de que, en los puntos de tangencia horizontal, la derivada vale cero.
- Dado que la curva roja es creciente en todo su dominio, su derivada es siempre positiva, por lo que la curva azul siempre está por encima del eje x (valores positivos).

Aplicación en la informática:

En algoritmos de análisis de datos, es común encontrar expresiones del tipo x^n ; por ejemplo, al calcular la varianza, la distancia euclidiana o en operaciones de normalización. La derivada de estas expresiones permite estimar cómo se propagan los errores o cómo se modifica una métrica al variar los datos de entrada, lo cual es fundamental para tareas como la calibración de modelos o el ajuste de hiperparámetros (Goodfellow et al., 2016).

Derivada de una constante por una función

Una de las propiedades que refleja la linealidad de la derivada es su comportamiento frente a la multiplicación por constantes. Esto significa que, cuando una función está multiplicada por una constante, este número no cambia durante la derivación: simplemente se conserva y se multiplica por la derivada de la función. Es decir, si una función está multiplicada por una constante, dicha constante puede mantenerse fuera del proceso de derivación.

En este caso, dada la constante c y la función $u = f(x)$, la regla para derivar cu se expresa como:

$$\boxed{\frac{d}{dx} cu = c \frac{d}{dx}(u)} \quad (2.3)$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} x^7 \right); \text{ siendo } c = \frac{4}{3}, u = x^7 \\ & \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} x^7 \right) = \frac{4}{3} \frac{d}{dx} (x^7) \\ & = \frac{4}{3} (7)(x^{7-1}) \\ & = \frac{28}{3} x^6 \end{aligned}$$

$$2) \frac{d}{dx} \left(\frac{5}{x^6} \right); \text{ siendo } c = 5, u = \frac{1}{x^6}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{5}{x^6} \right) &= 5 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^6} \right) \\ &= 5 \frac{d}{dx} (x^{-6}) \\ &= 5(-6)x^{-6-1} \\ &= -30x^{-7} \\ &= -\frac{30}{x^7} \end{aligned}$$

$$3) \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right); \text{ siendo } c = \frac{1}{2}, u = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} x^{1/2-1} \\ &= \frac{1}{4} x^{-1/2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Representación gráfica:

Para la representación gráfica de la derivada de una constante por una función, tomaremos la función del último ejemplo,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

y su derivada

$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}.$$

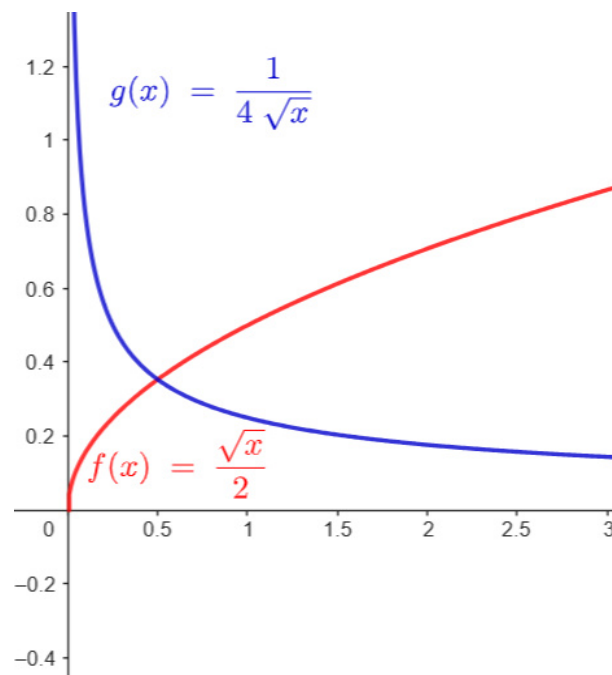


Figura 10. Gráfica del producto de una constante por una función y su derivada.

Fuente: Elaboración propia

Del análisis de la Figura 10 se determina lo siguiente:

- La curva roja, que representa a la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2},$$

es creciente y cóncava hacia abajo, típica de raíces cuadradas.

- La curva azul, que representa la derivada

$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}},$$

decrece rápidamente a medida que x aumenta, lo cual indica que la pendiente de $f(x)$ es cada vez menor. Esto concuerda con la trayectoria de la curva roja, cuya pendiente se aplana y se acerca a cero a medida que aumenta x .

Aplicación en la informática:

En *machine learning*, para saber si un modelo está prediciendo correctamente, se usa una función de costo o pérdida, que mide su error. A veces, un modelo aprende demasiado bien los datos de entrenamiento, pero falla con nuevos datos, produciéndose un sobreajuste (*overfitting*).

Para evitar este sobreajuste se le añade a la función de costo un término extra llamado *término de regularización*, que tiene la forma cu ; donde c es una constante positiva que controla cuánta penalización aplicar. Al entrenar el modelo es necesario minimizar la función de costo y , para ello, se deriva aplicando la regla de derivación de constante por una función (Cormen et al., 2022).

Derivada de la potencia de una función

A diferencia de la derivada de una potencia de x , en que la base de la potencia es únicamente x , ahora la base de la potencia es una función de x . Por ello, se deriva como si se tratara de una potencia común, pero luego se multiplica por la derivada de la base, porque ésta también depende de x .

Sea la función $u = f(x)$, donde n es un número real, entonces su derivada se expresa como:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{d}{dx}(u)} \quad (2.4)$$

Ejemplos:

1) $\frac{d}{dx}(1-2x)^3$; siendo $u = 1-2x$, $n = 3$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1-2x)^3 &= 3(1-2x)^{3-1} \frac{d}{dx}(1-2x) \\ &= 3(1-2x)^2 \left[\frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(2x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3(1-2x)^2 \left[0 - 2 \frac{d}{dx}(x) \right] \\
 &= 3(1-2x)^2 (-2) \\
 &= -6(1-2x)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(5x+4)^3} \right]; \text{ siendo } u = 5x+4, \quad n = -3 \\
 & \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(5x+4)^3} \right] = \frac{d}{dx} (5x+4)^{-3} \\
 &= (-3)(5x+4)^{-3-1} \frac{d}{dx} (5x+4) \\
 &= (-3)(5x+4)^{-4} \left[\frac{d}{dx} (5x) + \frac{d}{dx} (4) \right] \\
 &= (-3)(5x+4)^{-4} \left[5 \frac{d}{dx} (x) + 0 \right] \\
 &= (-3)(5x+4)^{-4} 5(1) \\
 &= \frac{-15}{(5x+4)^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2+4}); \text{ siendo } u = x^2+4, \quad n = \frac{1}{2} \\
 & \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2+4}) = \frac{d}{dx} (x^2+4)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2} (x^2+4)^{1/2-1} \frac{d}{dx} (x^2+4) \\
 &= \frac{1}{2} (x^2+4)^{-1/2} \left[\frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (4) \right] \\
 &= \frac{1}{2} (x^2+4)^{-1/2} (2x+0) \\
 &= \frac{2x}{2} (x^2+4)^{-1/2} \\
 &= x(x^2+4)^{-1/2} \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}
 \end{aligned}$$

Representación gráfica:

En esta ocasión se va a analizar la gráfica de la función utilizada en el primer ejemplo, $f(x) = (1-2x)^3$ y su derivada $f'(x) = -6(1-2x)^2$.

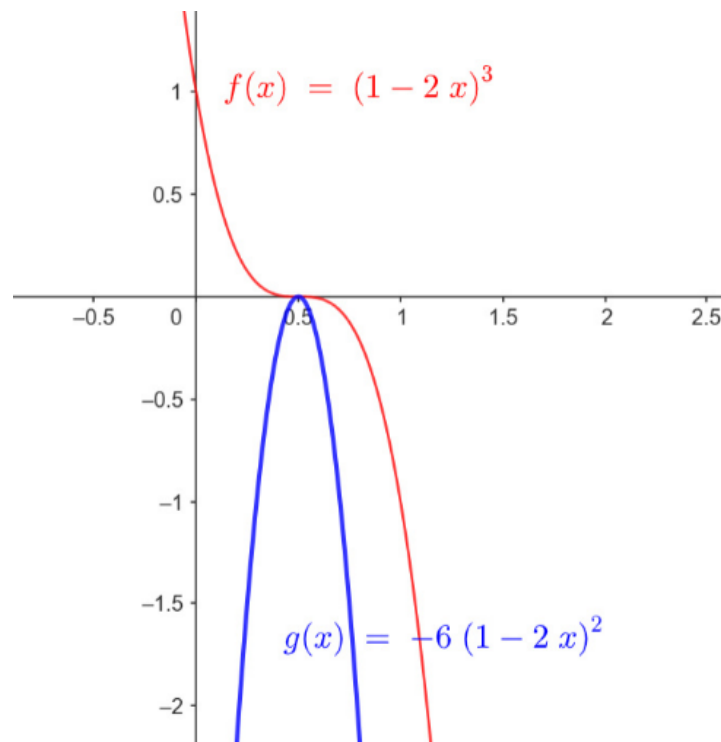


Figura 11. Gráfica del producto de la potencia de una función y su derivada.

Fuente: Elaboración propia

Al observar la Figura 11, podemos determinar lo siguiente:

- La curva roja, que representa a la función

$$f(x) = (1-2x)^3,$$

es decreciente en todo su dominio y tiene un punto de inflexión en $x = 0.5$. Evidentemente, a la izquierda de ese valor la función es cóncava hacia arriba, mientras que a la derecha de es cóncava hacia abajo.

- La curva azul, que representa la derivada

$$f'(x) = g(x) = -6(1-2x)^2,$$

tiene siempre valor negativo. Acorde con el hecho de que la curva roja siempre tiene pendiente negativa por ser decreciente.

Aplicación en la informática:

En la sección 2.4 se mencionó el uso de la función de error, en *machine learning*; la cual permite medir la diferencia entre el valor real y la predicción de un modelo. En este sentido, una de las funciones más utilizadas es la del error cuadrático (Goodfellow et al., 2016), que tiene la forma:

$$E(\hat{y}) = (y - \hat{y})^2$$

Siendo y el valor real deseado y $\hat{y}$ el valor predicho por el modelo, se busca minimizar este error. Para ello, se deriva con respecto a $\hat{y}$ utilizando la regla de la derivada de la potencia de una función.

Derivada de una suma o diferencia de funciones

Una propiedad fundamental de la derivación es que se comporta de manera lineal, lo que significa que la derivada de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de sus derivadas respectivas. Esta regla permite derivar expresiones complejas dividiéndolas en partes más simples, lo cual facilita su análisis y cálculo.

Por tanto, sean las funciones $u = f(x)$, $v = g(x)$, la derivada de su suma o resta se expresa como:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v)} \quad (2.5)$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d}{dx}(x^2 + x^3); \text{ siendo } u = x^2, v = x^3 \\ & \frac{d}{dx}(x^2 + x^3) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^3) \\ & = 2x^{2-1} + 3x^{3-1} \\ & = 2x + 3x^2 \end{aligned}$$

$$2) \frac{d}{dx}(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}); \text{ siendo } u = \sqrt{x}, v = \sqrt[3]{x}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) &= \frac{d}{dx}(x^{1/2}) - \frac{d}{dx}(x^{1/3}) \\ &= \frac{1}{2}x^{1/2-1} - \frac{1}{3}x^{1/3-1} \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\end{aligned}$$

$$3) \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - 2x^5\right); \text{ siendo } u = \frac{1}{x^2}, v = 2x^5$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - 2x^5\right) &= \frac{d}{dx}(x^{-2}) - 2\frac{d}{dx}(x^5) \\ &= -2x^{-2-1} - 2(5)x^{5-1} \\ &= -2x^{-3} - 10x^4 \\ &= -2\left(\frac{1}{x^3} + 5x^4\right) \\ &= -2\left(\frac{1+5x^7}{x^3}\right)\end{aligned}$$

Representación gráfica:

Para visualizar gráficamente el comportamiento de la derivada de una suma de funciones, vamos a utilizar las funciones del primer ejemplo, que son:

$$f(x) = x^2, g(x) = x^3$$

y sus derivadas

$$f'(x) = 2x, g'(x) = 3x^2$$

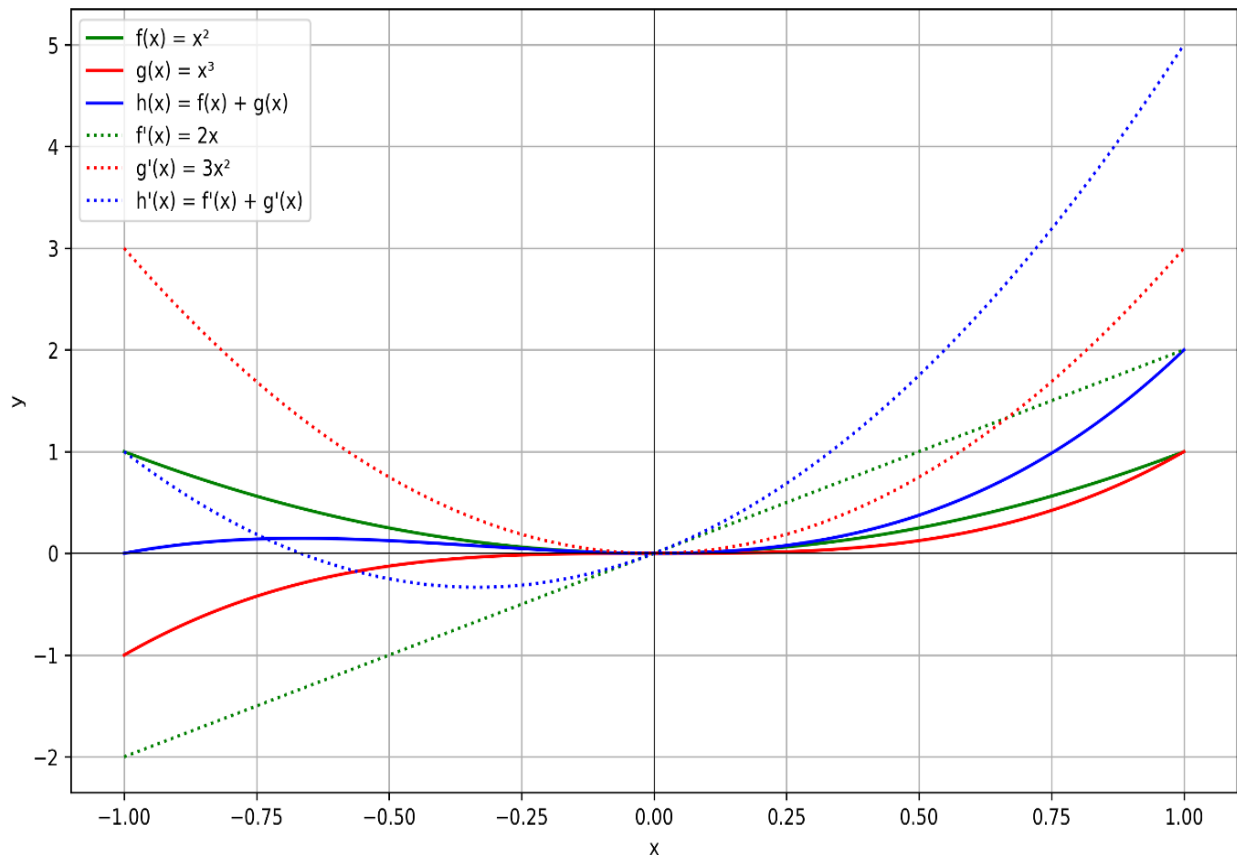


Figura 12. Gráfica de una suma de funciones y su derivada.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 12, las funciones originales están representadas por las líneas continuas y sus correspondientes derivadas, por las líneas discontinuas.

Del análisis de la función cuadrática y su derivada se desprende que:

- La función $f(x) = x^2$, presentada por la curva verde continua, es una parábola que se abre hacia arriba con su vértice en el origen.
- Su derivada $f'(x) = 2x$, está representada por una recta discontinua de color verde, que pasa por el origen y representa la pendiente de la función cuadrática en cada punto.
- Para $x < 0$, $f(x)$ decrece por lo que su pendiente es negativa. En consecuencia, su derivada $f'(x)$ también es negativa.
- En $x = 0$, $f(x)$ tiene pendiente cero (correspondiente a su vértice). Por lo tanto, su derivada $f'(0)$ también toma el valor cero.

- Para $x > 0$, $f(x)$ es creciente y su pendiente es positiva. Por ende, su derivada $f'(x)$ asume valores positivos.

Ahora, se analiza la función cubica y su derivada:

- La función $g(x) = x^3$, representada por la curva roja continua, es una función cúbica que pasa por el origen y es estrictamente creciente en todo $\mathbf{R}$.
- Su derivada $g'(x) = 3x^2$, está representada por la curva roja discontinua, que se abre hacia arriba con su vértice en el origen y representa la pendiente de la función cúbica.
- En $x = 0$, la función cúbica presenta pendiente cero y en ese punto $g'(0) = 0$.
- Como la función cúbica es creciente para $x < 0$ y $x > 0$, su pendiente es positiva en todo el dominio. En consecuencia, su derivada toma valores positivos para todo $x \neq 0$.

Finalmente, analizaremos la suma de las 2 funciones:

- La suma de las 2 funciones es $h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x^3$ y está representada por la línea azul continua.
- Para $x < 0$, la función cubica $g(x)$ (curva roja continua) toma valores negativos y la función cuadrática $f(x)$ (curva verde continua) toma valores positivos. De ahí que, su suma $h(x)$ (curva azul continua) se ubica entre ambas funciones.
- Para $x > 0$, $f(x)$ y $g(x)$ son positivas. En consecuencia, su suma $h(x)$ presenta un crecimiento acelerado.
- La derivada $h'(x)$ representada por la curva azul discontinua, describe la pendiente de $h(x)$ (curva azul continua). Su forma resulta de la suma vertical de $f'(x)$ (recta verde discontinua) y $g'(x)$ (curva roja discontinua). Por ejemplo:

-En $x = -1$:

$$f'(-1) = 2(-1) = -2,$$

$$g'(-1) = 3(-1)^2 = 3,$$

entonces

$$h'(-1) = -2 + 3 = 1.$$

Por ello, la curva azul discontinua toma el valor de 1 en $x = -1$.

-En $x = 0$:

$$f'(0) = 2(0) = 0,$$

$$g'(0) = 3(0)^2 = 0,$$

entonces

$$h'(0) = 0 + 0 = 0.$$

En consecuencia, la curva azul discontinua pasa por el origen.

Aplicación en la informática:

En el campo de la informática, cuando se calcula el tiempo total de ejecución de un proceso que combina varios módulos independientes, cada uno con su propio comportamiento, es frecuente representar el tiempo total como la suma de funciones individuales. Derivar esa suma permite conocer cómo varía el tiempo total ante cambios en los datos de entrada, lo cual es clave en tareas de perfilado y optimización de software (Cormen et al., 2022).

Derivada de un producto de funciones

Cuando tenemos un producto de dos funciones que dependen de la misma variable, su derivada *no* es igual al producto de sus derivadas. En este caso, se multiplica la primera función por la derivada de la segunda, luego se suma la segunda función multiplicada por la derivada de la primera. Por tanto, sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la derivada de su producto se expresa como:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u)} \quad (2.6)$$

Ejemplos:

1) $\frac{d}{dx}[\sqrt{x}(3x+1)]$; siendo $u = \sqrt{x}$, $v = 3x+1$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sqrt{x}(3x+1)] &= \sqrt{x} \frac{d}{dx}(3x+1) + (3x+1) \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \\&= \sqrt{x} \left[\frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(1) \right] + (3x+1) \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \\&= \sqrt{x} \left[3 \frac{d}{dx}(x) + 0 \right] + (3x+1) \left(\frac{1}{2} x^{1/2-1} \right) \\&= \sqrt{x} [3(1)] + (3x+1) \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \right) \\&= 3\sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} \\&= \frac{2\sqrt{x}(3\sqrt{x}) + (3x+1)}{2\sqrt{x}} \\&= \frac{6x+3x+1}{2\sqrt{x}} \\&= \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

2) $\frac{d}{dx}[(2x+3)(x^2-1)]$; siendo $u = 2x+3$, $v = x^2-1$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(2x+3)(x^2-1)] &= (2x+3) \frac{d}{dx}(x^2-1) + (x^2-1) \frac{d}{dx}(2x+3) \\&= (2x+3) \left[\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(1) \right] + (x^2-1) \left(\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3) \right) \\&= (2x+3)(2x-0) + (x^2-1)(2+0) \\&= 4x^2 + 6x + 2x^2 - 2 \\&= 6x^2 + 6x - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{d}{dx} \left[\sqrt[3]{x}(x^2 - 4)^3 \right]; \text{ siendo } u = \sqrt[3]{x}, \quad v = (x^2 - 4)^3 \\
 & \frac{d}{dx} \left[\sqrt[3]{x}(x^2 - 4)^3 \right] = \sqrt[3]{x} \frac{d}{dx} (x^2 - 4)^3 + (x^2 - 4)^3 \frac{d}{dx} (\sqrt[3]{x}) \\
 & = \sqrt[3]{x} (3)(x^2 - 4)^{3-1} \frac{d}{dx} (x^2 - 4) + (x^2 - 4)^3 \frac{d}{dx} (x^{1/3}) \\
 & = 3\sqrt[3]{x}(x^2 - 4)^2 \left[\frac{d}{dx} (x^2) - \frac{d}{dx} (4) \right] + (x^2 - 4)^3 \frac{1}{3} x^{1/3-1} \\
 & = 3\sqrt[3]{x}(x^2 - 4)^2 (2x - 0) + (x^2 - 4)^3 \frac{1}{3} x^{-2/3} \\
 & = 6x\sqrt[3]{x}(x^2 - 4)^2 + \frac{1}{3x^{2/3}} (x^2 - 4)^3 \\
 & = \frac{3x^{2/3} 6xx^{1/3} (x^2 - 4)^2 + (x^2 - 4)^3}{3x^{2/3}} \\
 & = \frac{18x^2 (x^2 - 4)^2 + (x^2 - 4)^3}{3\sqrt[3]{x^2}} \\
 & = \frac{(x^2 - 4)^2 (18x^2 + x^2 - 4)}{3\sqrt[3]{x^2}} \\
 & = \frac{(x^2 - 4)^2 (19x^2 - 4)}{3\sqrt[3]{x^2}}
 \end{aligned}$$

Representación gráfica:

En relación al segundo ejemplo, en la Figura 13 se representa gráficamente el producto de funciones $y = (2x+3)(x^2-1)$, mediante la curva azul continua. Y su derivada $y' = 6x^2 + 6x - 2$ se representa por la curva roja discontinua.

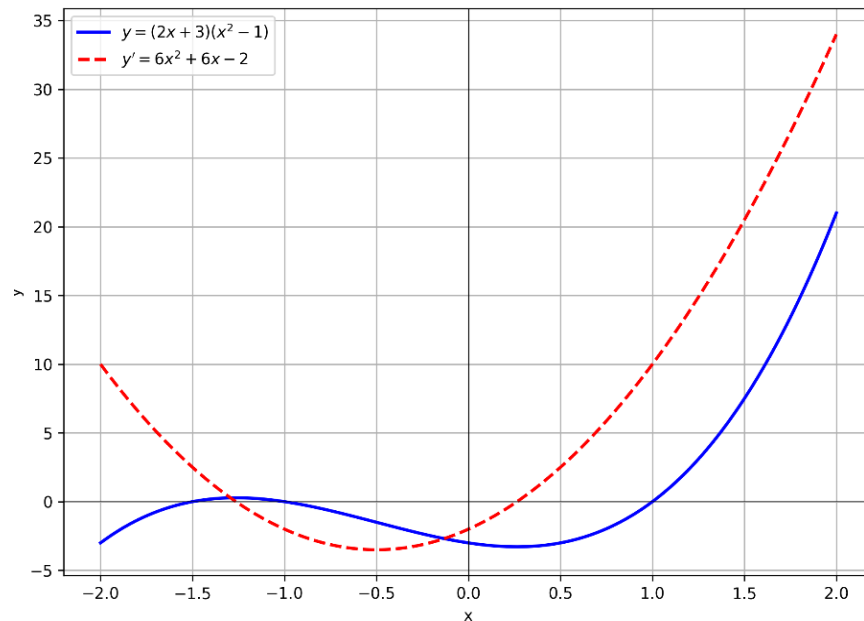


Figura 13. Gráfica de un producto de funciones y su derivada.

Fuente: Elaboración propia

- Los puntos extremos de y (curva azul) donde la tangente es horizontal y la pendiente es cero, coincide con los puntos donde y' (curva roja) corta el eje horizontal, es decir, donde también toma el valor cero.
- Cuando y es creciente, su derivada es positiva; en consecuencia, y' (curva roja) se encuentra sobre el eje x .
- Cuando y es decreciente, su derivada es negativa; por ello, y' (curva roja) se ubica por debajo del eje x .
- Aunque la intersección de ambas curvas no representa por sí mismo algo matemáticamente relevante, su visualización conjunta resulta útil para comprender cómo la derivada refleja el comportamiento general de la función original.

Aplicación en la informática:

En entornos de almacenamiento y transmisión de datos, como bases de datos distribuidas, servicios de respaldo en la nube o servidores de contenido multimedia, se suelen aplicar algoritmos de compresión para reducir el volumen de datos transferido o almacenado (Salomon & Motta, 2010).

Por ejemplo, supóngase que $u = f(x)$ representa el volumen de datos sin comprimir en megabytes, donde x es el número de archivos; y que $v = g(x)$ representa la eficiencia de compresión promedio (en segundos por megabyte), que decrece a medida que se incrementa el número de archivos, debido a la sobrecarga de administración del algoritmo. Entonces, el tiempo total de procesamiento requerido para comprimir los datos puede expresarse como el producto uv . Para analizar cómo

varía dicho tiempo cuando aumenta el número de archivos, se aplica la regla de la derivada del producto de dos funciones.

Derivada de un cociente de funciones

Cuando tenemos un cociente de dos funciones que dependen de la misma variable, su derivada no es igual al cociente de sus derivadas. En este caso, sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la derivada de su cociente se expresa como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{d}{dx}(u) - u \frac{d}{dx}(v)}{v^2} \quad (2.7)$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \text{ siendo } u = 1+x, \quad v = 1-x \\ & \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{(1-x) \frac{d}{dx}(1+x) - (1+x) \frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2} \\ & = \frac{(1-x) \left[\frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(x) \right] - (1+x) \left[\frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(x) \right]}{(1-x)^2} \\ & = \frac{(1-x)(0+1) - (1+x)(0-1)}{(1-x)^2} \\ & = \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} \\ & = \frac{2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)$; siendo $u = 1-x^2$, $v = x^2$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) &= \frac{x^2 \frac{d}{dx}(1-x^2) - (1-x^2) \frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^3} \\ &= \frac{x^2 \left[\frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(x^2) \right] - (1-x^2)(2x)}{x^6} \\ &= \frac{x^2(0-2x) - 2x(1-x^2)}{x^6} \\ &= \frac{-2x^3 - 2x + 2x^3}{x^6} \\ &= \frac{-2x}{x^6} \\ &= -\frac{2}{x^5}\end{aligned}$$

3) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^4}{\sqrt{x}}\right)$; siendo $u = 1-x^4$, $v = \sqrt{x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^4}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x} \frac{d}{dx}(1-x^4) - (1-x^4) \frac{d}{dx}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{x} \left[\frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(x^4) \right] - (1-x^4) \left(\frac{1}{2} x^{1/2-1} \right)}{(x^{1/2})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(0-4x^3) - (1-x^4) \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \right)}{x} \\
 &= \frac{-4x^3\sqrt{x} - (1-x^4) \left(\frac{1}{2x^{1/2}} \right)}{x} \\
 &= \frac{-4x^3x^{1/2} - \left(\frac{1-x^4}{2x^{1/2}} \right)}{x} \\
 &= -\frac{4x^{7/2}}{x} - \frac{1-x^4}{2x^{3/2}} \\
 &= -4x^{5/2} - \frac{1-x^4}{2x^{3/2}} \\
 &= -4x^{5/2} - \frac{1-x^4}{2x^{3/2}} \\
 &= \frac{-8x^4 - 1 + x^4}{2x^{3/2}} \\
 &= -\frac{1+7x^4}{2x^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Representación gráfica:

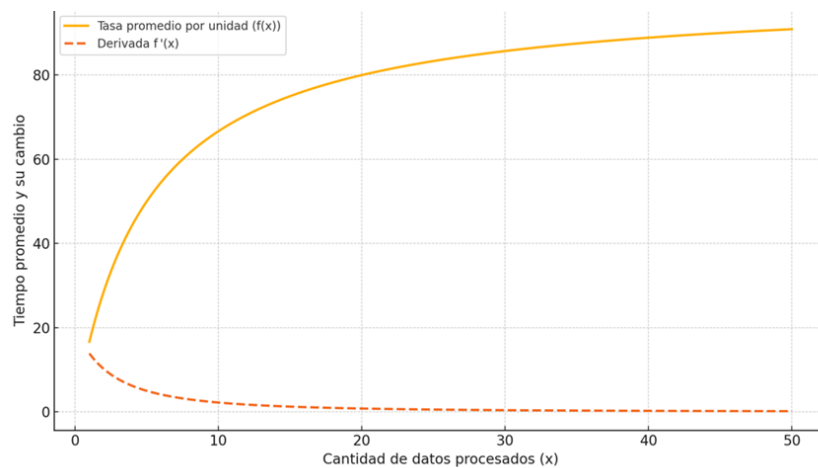


Figura 14. Gráfica de un cociente de funciones.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 14 se representa la función:

$$f(x) = \frac{100x}{x+5}$$

que modela el tiempo promedio por unidad de datos en un sistema de procesamiento. La curva continua muestra la evolución de ese tiempo promedio conforme aumenta la carga de trabajo. La curva discontinua representa la derivada $f'(x)$, que indica cómo varía esa tasa de procesamiento ante cambios en x . Esta visualización demuestra cómo la regla del cociente se aplica para estudiar y optimizar sistemas informáticos dependientes de volumen de datos y recursos computacionales.

Aplicación en la informática:

Además del ejemplo abordado para la representación gráfica, como otro ejemplo de aplicación en el campo de la informática tenemos: Al analizar la eficiencia de algoritmos adaptativos, cuyo tiempo de ejecución T , puede expresarse como un cociente entre la función u , que representa los datos procesados y v , que representa los recursos disponibles, ósea: $T = \frac{u}{v}$. Su derivada T' nos indicará cómo cambia ese tiempo medio conforme varía la carga de trabajo.

Esta información es valiosa para optimizar el rendimiento de servidores, compresores o redes de almacenamiento.

Regla de la cadena

La regla de la cadena, utilizada en secciones anteriores de manera implícita, permite derivar funciones compuestas; es decir, funciones que se obtienen al aplicar una función dentro de otra. Esta regla establece que la derivada de una función compuesta se obtiene multiplicando la derivada de una función externa, evaluada en la función interna, por la derivada de la función interna.

Formalmente, según Stewart (2012), sea g derivable en x y f derivable en $g(x)$, entonces la derivada de la función compuesta $y = f(g(x))$ con respecto a x , se expresa como:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Si hacemos $y = f(u)$ y $u = f(x)$, la regla de la cadena se expresa como:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \quad (2.8)$$

Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x-5}{5x-1} \right]^2; \text{ siendo } u = \frac{x-5}{5x-1}, y = u^2$$

Se resuelve combinando la regla de la potencia, la regla del cociente y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left[\frac{x-5}{5x-1} \right]^2 &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= 2 \left[\frac{x-5}{5x-1} \right]^{2-1} \frac{d}{dx} \left[\frac{x-5}{5x-1} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{x-5}{5x-1} \right] \left[\frac{(5x-1) \frac{d}{dx}(x-5) - (x-5) \frac{d}{dx}(5x-1)}{(5x-1)^2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{x-5}{5x-1} \right] \left[\frac{(5x-1)(1) - (x-5)(5)}{(5x-1)^2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{x-5}{5x-1} \right] \left[\frac{5x-1-5x+25}{(5x-1)^2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{x-5}{5x-1} \right] \left[\frac{24}{(5x-1)^2} \right] \\
 &= \frac{48(x-5)}{(5x-1)^3}
 \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

A. Derivar las siguientes funciones:

1) $y = (3x^2 + 7)^4$

2) $y = \sqrt{4 - 5x^2}$

3) $y = \frac{(3x^4 - 4x^3 + 6x)^2}{12}$

4) $y = \frac{1}{(x^2 - 1)^3}$

5) $y = \frac{3}{\sqrt{x^3}}$

6) $y = (1 - 3x)(x^2 + 1)$

$$7) y = \frac{2x^3 - 6x}{x^2 - 1}$$

$$8) y = (x-1)^2 \sqrt{x^2 + 3}$$

$$9) y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$10) y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$11) y = \left[\frac{x^2 + 1}{x-3} \right]^3$$

$$12) y = (5x^3 + 3x^2)^4$$

$$13) y = \sqrt{(3x^2 + 5x - 1)^5}$$

$$14) y = \sqrt{x+1} \sqrt[3]{x-1}$$

$$15) y = \frac{(x^2 + 2)^3}{(x^3 + 1)^2}$$

B. Resolver los siguientes ejercicios de aplicación de las reglas de derivación de funciones algebraicas:

1) El tiempo de ejecución de un proceso está dado por: $T(x) = (x^2 + 4x + 3)^2$.
¿Cuál es la tasa de cambio de este tiempo respecto al número de procesos x ?

2) La eficiencia de una compresión de datos está modelada como:

$$E(x) = \frac{3x^2 + 1}{(x+1)^2}$$

Determinar $E'(x)$ y analiza el comportamiento.

- 3) En un sistema de almacenamiento, el tiempo de acceso está modelado por la función:

$$A(x) = \sqrt{(4x^2 + 2x + 1)^3},$$

Calcule su derivada.

- 4) La penalización en un modelo de regularización es:

$$R(w) = \lambda(w^2 + 1)^3$$

Hallar $R'(w)$

- 5) El tiempo promedio por paquete en una red se modela por:

$$T(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Determinar su derivada.

Piensa y analiza



Escenario:

En el desarrollo de aplicaciones web modernas, uno de los factores más importantes a optimizar es el tiempo de respuesta del servidor en función de la cantidad de usuarios simultáneos. Se sabe que, debido a las limitaciones de hardware y saturación de recursos, el tiempo de respuesta no crece linealmente, sino que sigue una función polinómica creciente.

Supongamos que una empresa de tecnologías está midiendo el tiempo de respuesta T (en milisegundos) de un servidor como una función del número de usuarios simultáneos conectados x (Figura 15).

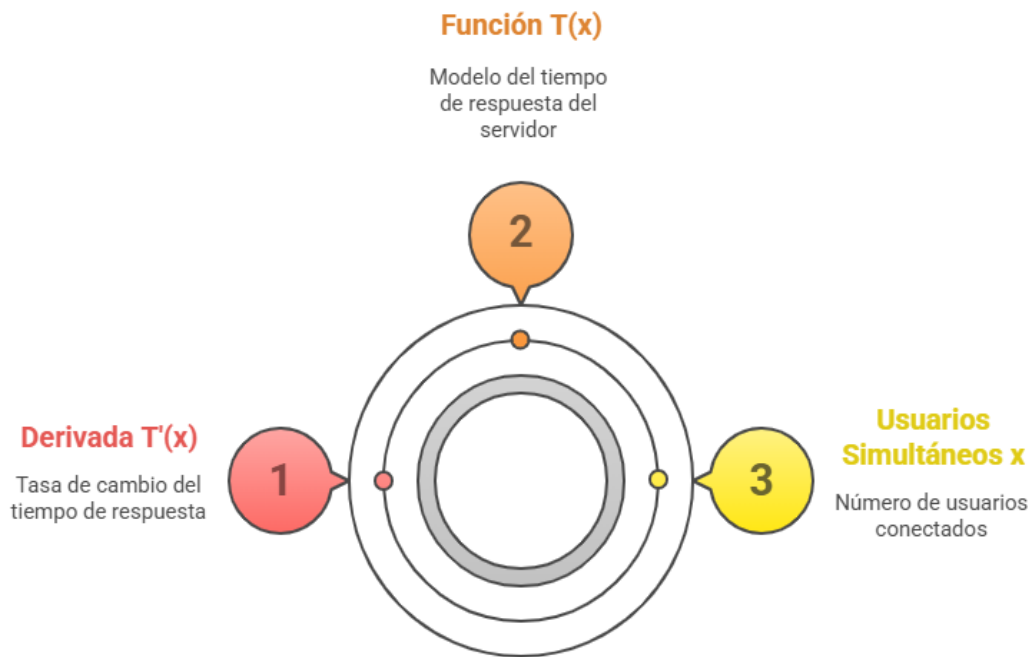


Figura 15. Análisis del tiempo de respuesta del servidor.

Fuente: Elaboración propia

A partir de sus registros, modela el comportamiento como:

$$T(x) = 0.05x^3 - 0.6x^2 + 5x + 200$$

Planteamiento del problema:

El gerente de operaciones necesita saber cómo está cambiando el tiempo de respuesta con respecto al número de usuarios conectados en tiempo real, para poder activar mecanismos de balanceo de carga.

1. Calcula la derivada $T'(x)$ de la función.
2. Calcular $T'(x)$ para $x = 10$ y $x = 30$.

Preguntas para reflexionar y analizar:

1. ¿Qué representa la derivada $T'(x)$ en este contexto?
2. ¿Qué significan los valores obtenidos de $T'(x)$ para $x = 10$ y $x = 30$?

3. ¿Qué significa, en términos prácticos, que la derivada sea positiva?

Autoevalúate



Escoge el literal de la respuesta correcta a las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuál es la derivada de una constante c ?
 - a) c
 - b) 0
 - c) 1
 - d) No existe
2. Si $f(x) = x^5$, entonces su derivada es
 - a) $6x^5$
 - b) $5x^4$
 - c) $5x^5$
 - d) $4x^5$
3. ¿Cuál es la regla que se aplica para derivar una función del tipo $f(x) = (7x^2 + 9)^4$?
 - a) Regla del producto
 - b) Regla del cociente
 - c) Regla de la potencia de una función
 - d) Regla de una constante por una función
4. Si $f(x) = 5x^3$, entonces su derivada es
 - a) $15x^3$
 - b) $25x^2$
 - c) $3x^2$
 - d) $15x^2$
5. La derivada del producto de dos funciones $u(x) \cdot v(x)$ se expresa como:
 - a) $u' \cdot v'$
 - b) $uv' + vu'$
 - c) $uv' - vu'$
 - d) $u \cdot v$
6. ¿Cuál es la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$?
 - a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

- b) $\frac{1}{2x}$
- c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- d) $2\sqrt{x}$

7. Si $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$, ¿qué regla debes aplicar para derivarla?

- a) Regla del producto
- b) Regla de la cadena
- c) Regla del cociente
- d) Regla de la potencia

8. En informática, ¿para qué puede servir la derivación de funciones algebraicas?

- a) Para graficar algoritmos
- b) Para analizar tasas de cambio en rendimiento o procesamiento
- c) Para convertir datos a binario
- d) Para traducir código a ensamblador

9. Si $f(x) = x^3 + 4x^2 - x$, ¿cuál es su derivada?

- a) $3x^2 + 4x + 1$
- b) $x^3 + x^2$
- c) $2x^3 + 8x - 1$
- d) $3x^2 + 8x - 1$

10. ¿Qué representa la derivada de una función en una gráfica?

- a) El área bajo la curva
- b) La raíz de la función
- c) La pendiente de la recta tangente
- d) El valor máximo de la función

Respuestas: 1. b, 2. b, 3. c, 4. d, 5. b, 6. a, 7. a, 8. b, 9. d, 10. c

Referencias

- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). *Introduction to algorithms* (4th ed.). The MIT Press.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep learning*. MIT Press.
<http://www.deeplearningbook.org/>
- Salomon, D., & Motta, G. (2010). *Handbook of data compression* (5th ed.). Springer.
- Stewart, J. (2012). *Calculus: Early transcendentals* (7th ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2006). *Cálculo de una variable* (11th ed.). Pearson.

Capítulo 3

DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Introducción

En el presente capítulo se aborda el estudio de las funciones trascendentes y las reglas que permiten derivarlas. A diferencia de las funciones algebraicas, las funciones trascendentes no pueden ser expresadas mediante operaciones algebraicas finitas, sino que incluyen funciones como las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Estas funciones tienen un papel fundamental en la modelación de fenómenos científicos y tecnológicos, particularmente en el campo de la informática, donde son utilizadas para describir el crecimiento exponencial de datos, procesos de decaimiento, o análisis de señales en redes neuronales y procesamiento digital. Su derivación permite analizar tasas de cambio en contextos no lineales, esenciales para optimizar algoritmos y sistemas informáticos (Stewart, 2012)

Para la derivación de cada tipo de funciones trascendentes, se abordarán apartados semejantes al del capítulo anterior y en las reglas de derivación se adoptará la nomenclatura utilizada por Thomas (2006).

Finalmente, se abordará también la derivación de las funciones implícitas, de suma importancia para resolver problemas complejos en el campo de la informática.

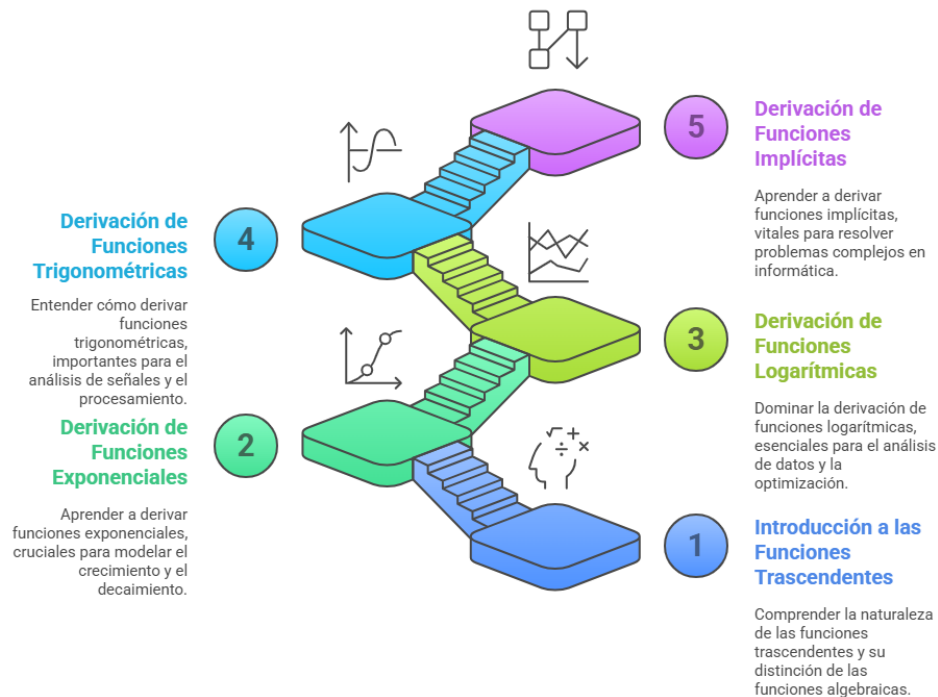


Figura 16. Dominando la derivación de funciones trascendentes.

Fuente: Elaboración propia.

Derivación de funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son de la forma a^u y e^u , donde $a > 0$. Estas funciones son trascendentes y su derivación posee propiedades únicas.

En el caso de a^u , siendo $u = f(x)$, su derivada se expresa como:

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad (3.1)$$

En particular, considerando que $\ln e = 1$, la regla de la derivada de la función exponencial natural se simplifica a:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{dv}{dx} \quad (3.2)$$

Lo cual implica que su tasa de crecimiento es proporcional a su valor actual.

Ejemplos:

1) $\frac{d}{dx}(5^{3x})$; siendo $a = 5$, $u = 3x$, aplicando (3.1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5^{3x}) &= 5^{3x} \ln 5 \frac{d}{dx}(3x) \\ &= 5^{3x} \ln 5 \left(3 \frac{d}{dx} x\right) \\ &= 5^{3x} \ln 5 (3)(1) \\ &= 3(5^{3x}) \ln 5\end{aligned}$$

2) $\frac{d}{dx}(e^{x^3})$; siendo , $u = x^3$, aplicando (3.2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{x^3}) &= e^{x^3} \frac{d}{dx}(x^3) \\ &= e^{x^3} (3x^2)\end{aligned}$$

3) $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}})$; siendo , $u = \sqrt{x}$, aplicando (3.2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) &= e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \\ &= e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

4) $\frac{d}{dx}(3^{x^2+1})$; siendo $a = 3$, $u = x^2 + 1$, aplicando (3.1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(3^{x^2+1}) &= 3^{x^2+1} \ln 3 \frac{d}{dx}(x^2 + 1) \\ &= 3^{x^2+1} \ln 3 (2x) \\ &= 2x 3^{x^2+1} \ln 3\end{aligned}$$

5) $\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})^2$

En este ejemplo, es necesario desarrollar primero el cuadrado del binomio:

$$\begin{aligned}(e^x - e^{-x})^2 &= e^{2x} - e^x e^{-x} + e^{-2x} \\ &= e^{2x} - e^0 + e^{-2x} \\ &= e^{2x} - 1 + e^{-2x}\end{aligned}$$

Luego, se procede a derivar:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})^2 &= \frac{d}{dx}(e^{2x} - 1 + e^{-2x}) \\ &= \frac{d}{dx}(e^{2x}) - \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(e^{-2x}) \\ &= e^{2x} \frac{d}{dx}(2x) - 0 + e^{-2x} \frac{d}{dx}(-2x) \\ &= e^{2x}(2) + e^{-2x}(-2) \\ &= 2(e^{2x} - e^{-2x})\end{aligned}$$

Representación gráfica:

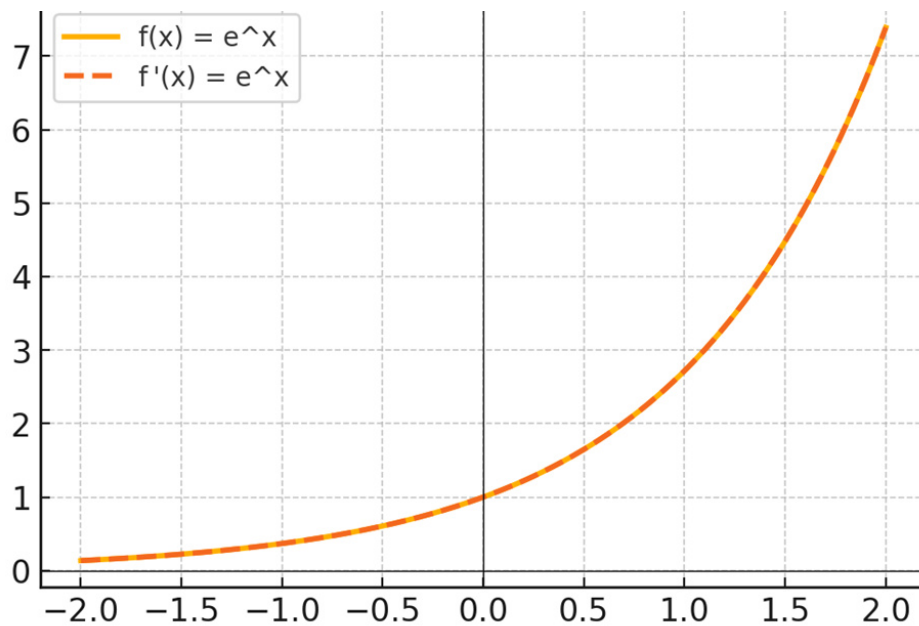


Figura 17. Gráfica de la derivada de la función exponencial y su derivada.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 17, la curva naranja continua representa la función $f(x) = e^x$ y la curva roja discontinua a su derivada $f'(x) = e^x$.

Como se observa gráficamente ambas curvas se superponen por completo, confirmando que:

$$f(x) = f'(x) = e^x,$$

siendo esto una de las propiedades más distintivas y útiles de la función exponencial natural.

Aplicación en la informática

Las funciones exponenciales son esenciales en el modelado del crecimiento exponencial de la información en sistemas de datos, como el análisis de complejidad en algoritmos.

En informática, a menudo nos encontramos con datos que crecen o decaen exponencialmente, por ejemplo, el crecimiento de usuarios de una plataforma, la propagación de un virus informático, la disminución de la capacidad de almacenamiento con el tiempo. La función exponencial e^x y su derivada son herramientas fundamentales para modelar y analizar estas tendencias. La propiedad de autorreplicación implica que la tasa de crecimiento, o decrecimiento, es siempre proporcional al tamaño o cantidad actual de los datos.

Esta propiedad de autorreplicación también es esencial en algoritmos de aprendizaje automático, donde aparece en funciones de activación como RELU modificada, softmax, y la función sigmoide. Esta última facilita el cálculo del gradiente durante el entrenamiento mediante retro propagación, ya que el gradiente local puede expresarse en términos de la salida de la neurona (Bishop, 2006).

También, es fundamental en cálculos de crecimiento de datos, algoritmos de encriptación, por ejemplo, en criptografía de curva elíptica y simulaciones exponenciales (Goodfellow et al., 2016).

Derivación de funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas son las inversas de las funciones exponenciales. Así, por ejemplo, el logaritmo natural, denotado como $\ln(x)$, es el logaritmo en base e .

La regla general para derivar una función logarítmica de la forma $\log_a u$, donde $u = f(x)$ y a es una constante positiva diferente de 1, se expresa como:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx}} \quad (3.3)$$

En el caso del logaritmo natural, dado que su base es e y $\ln e = 1$, la regla se simplifica a:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}} \quad (3.4)$$

En este apartado es importante considerar las reglas de los algoritmos con base a (tabla 1), que nos ayudan a simplificar los procesos de derivación, como lo veremos en ejemplos, más adelante.

Tabla 1. Reglas de los algoritmos con base a .

Regla	Sea $x > 0, y > 0$
Logaritmo del producto	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
Logaritmo del cociente	$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
Logaritmo de una potencia	$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
Logaritmo de 1	$\log_a(1) = 0$
Logaritmo de la base	$\log_a(a) = 1$
$\log_a(x)$ en función de $\ln(x)$	$\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$

Fuente: Elaboración propia.

Ejemplos:

1) $\frac{d}{dx}(\log_2 x^2)$; siendo $a = 2$, $u = x^2$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\log_2 x^2) &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x^2} (2x) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2}{x} \\ &= \frac{2}{x \ln 2}\end{aligned}$$

2) $\frac{d}{dx}(\ln x^3)$; siendo $u = x^3$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln x^3) &= \frac{1}{x^3} \frac{d}{dx}(x^3) \\ &= \frac{1}{x^3} (3x^2) \\ &= \frac{3}{x}\end{aligned}$$

3) $\frac{d}{dx}(\log_{10} x^5)$; siendo $a = 10$, $u = x^5$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\log_{10} x^5) &= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x^5} \frac{d}{dx}(x^5) \\ &= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x^5} (5x^4) \\ &= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{5}{x} \\ &= \frac{5}{x \ln 10}\end{aligned}$$

4) $\frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right]$; siendo $u = \frac{1+x}{1-x}$

En este ejemplo, es conveniente aplicar primero la regla del logaritmo del cociente para simplificar el proceso de derivación:

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

Luego, se procede a derivar:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln(1-x) - \ln(1+x)] &= \frac{d}{dx}[\ln(1-x)] - \frac{d}{dx}[\ln(1+x)] \\&= \frac{1}{(1-x)} \frac{d}{dx}(1-x) - \frac{1}{(1+x)} \frac{d}{dx}(1+x) \\&= \frac{1}{(1-x)}(0-1) - \frac{1}{(1+x)}(0+1) \\&= \frac{-1}{(1-x)} - \frac{1}{(1+x)} \\&= \frac{-1(1+x) - (1-x)}{(1+x)(1-x)} \\&= \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} \\&= \frac{2}{x^2-1}\end{aligned}$$

$$5) \frac{d}{dx} \left[\ln \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right]; \text{ siendo } u = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

Igual que en el ejemplo anterior, se aplican las reglas del logaritmo de una potencia y del cociente:

$$\begin{aligned}\ln \sqrt{\frac{1-x}{x}} &= \ln \left(\frac{1-x}{x} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln x]\end{aligned}$$

A continuación, se deriva:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\ln \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right] &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\ln(1-x) - \ln x] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} \ln(1-x) - \frac{d}{dx} \ln x \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x} \frac{d}{dx} (1-x) - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x} \left(\frac{d}{dx} (1) - \frac{d}{dx} (x) \right) - \frac{1}{x} (1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x} (0-1) - \frac{1}{x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-x-1+x}{x(1-x)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{x(1-x)} \right] \\ &= -\frac{1}{2x(1-x)}\end{aligned}$$

Representación gráfica:

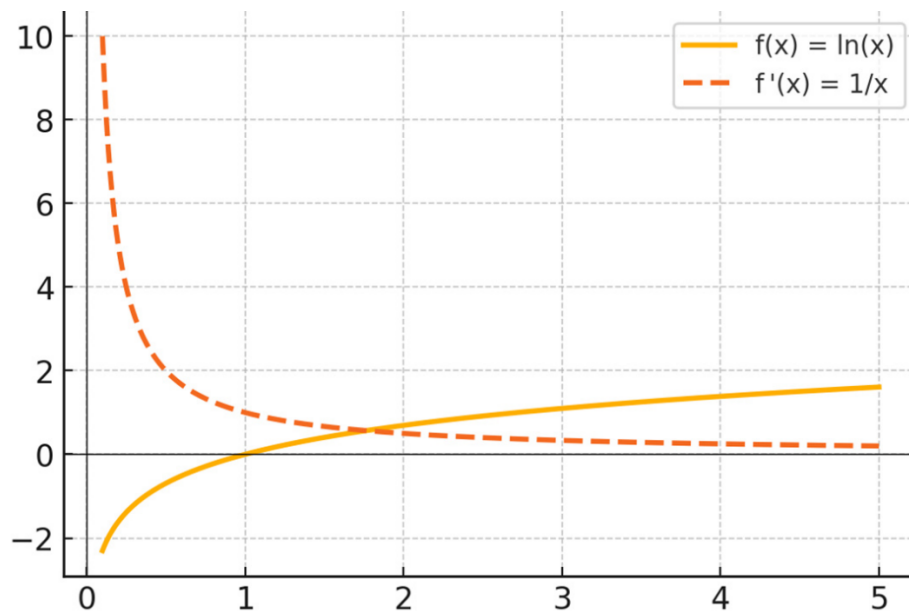


Figura 18. Gráfica de la función $\ln(x)$ y su derivada.

Fuente: Elaboración propia.

Del análisis de la Figura 18, donde se ha representado la función logarítmica natural $f(x) = \ln(x)$ mediante una línea naranja continua y su derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$ por una línea roja discontinua, se observa lo siguiente:

- Tanto $f(x)$ como $f'(x)$ solo existen para todo $x > 0$.
- La función $f(x)$ presenta un crecimiento moderado.
- La derivada $f'(x)$ toma únicamente valores positivos y tiene un comportamiento decreciente, lo que indica que la tasa de crecimiento de la función se reduce conforme aumenta x .
- En $x = 1$, se cumple que:
$$f(1) = \ln 1 = 0,$$
$$f'(1) = 1/1 = 1$$
- La función logaritmo natural $\ln(x)$ crece indefinidamente, pero de forma lenta, mientras que su derivada $\frac{1}{x}$ decrece rápidamente.

Aplicación en la informática:

En el campo de la informática, los logaritmos, especialmente los de base natural y base 2, juegan un papel clave al momento de entender cómo crece la complejidad de los algoritmos. Por ejemplo, técnicas como la búsqueda binaria o la compresión de datos se apoyan directamente en el comportamiento logarítmico para ser más eficientes. Además, en áreas como la inteligencia artificial, los logaritmos también están presentes en cálculos importantes como la entropía cruzada o en métodos de regularización, que ayudan a que los modelos aprendan mejor sin sobreajustarse. (Cormen et al., 2022).

Derivación de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas como el seno o el coseno, se abordan cuando se estudian los triángulos o cuando se resuelven problemas de movimiento circular. En cálculo diferencial, estas funciones ayudan a describir con gran precisión fenómenos que se repiten con el tiempo, como las ondas de sonido, las señales eléctricas o incluso los ciclos en los datos de sensores.

Las funciones trigonométricas tienen algo muy especial, sus derivadas también son funciones trigonométricas, y siguen un patrón cíclico muy ordenado, como se puede ver a continuación, siendo $u = f(x)$:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{senu}) = \cos u \frac{du}{dx}} \quad (3.5)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos u) = -\text{senu} \frac{du}{dx}} \quad (3.6)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}} \quad (3.7)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}} \quad (3.8)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \cdot \tan u \frac{du}{dx}} \quad (3.9)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cdot \cot u \frac{du}{dx}} \quad (3.10)$$

Ejemplos:

1) $\frac{d}{dx}(\sen x^6)$; siendo $u = x^6$, aplicando (3.5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sen x^6) &= \cos x^6 \frac{d}{dx}(x^6) \\ &= \cos x^6 (6x^5) \\ &= 6x^5 \cos x^6 \end{aligned}$$

2) $\frac{d}{dx}(\cos \sqrt{x})$; siendo $u = \sqrt{x}$, aplicando (3.6)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos \sqrt{x}) &= -\sen \sqrt{x} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \\ &= -\sen \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-\sen \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

3) $\frac{d}{dx} \left[\tan\left(\frac{x}{3}\right) \right]$; siendo $u = \frac{x}{3}$, aplicando (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\tan\left(\frac{x}{3}\right) \right] &= \sec^2\left(\frac{x}{3}\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{3}\right) \\ &= \sec^2\left(\frac{x}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \sec^2\left(\frac{x}{3}\right) \end{aligned}$$

4) $\frac{d}{dx} (\text{sen}^6 x)$; aplicando (2.4), (2.8), (3.5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\text{sen}^6 x) &= \frac{d}{dx} (\text{sen} x)^6 \\ &= 6(\text{sen} x)^5 \frac{d}{dx} (\text{sen} x) \\ &= 6 \text{sen}^5 x \cos x \end{aligned}$$

5) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\cot x^2}{x^2} \right)$; aplicando (2.7), (2.8), (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\cot x^2}{x^2} \right) &= \frac{x^2 \frac{d}{dx} (\cot x^2) - \cot x^2 \frac{d}{dx} (x^2)}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 \left(-\csc x^2 \frac{d}{dx} (x^2) \right) - \cot x^2 (2x)}{x^4} \\ &= \frac{x^2 (-\csc x^2 (2x)) - \cot x^2 (2x)}{x^4} \\ &= \frac{2x (-x^2 \csc x^2) - 2x \cot x^2}{x^4} \\ &= \frac{-2x (x^2 \csc x^2 + \cot x^2)}{x^4} \\ &= \frac{-2 (x^2 \csc x^2 + \cot x^2)}{x^3} \end{aligned}$$

Representación gráfica:

A manera de ejemplo, se analizan 2 funciones trigonométricas con sus respectivas derivadas:

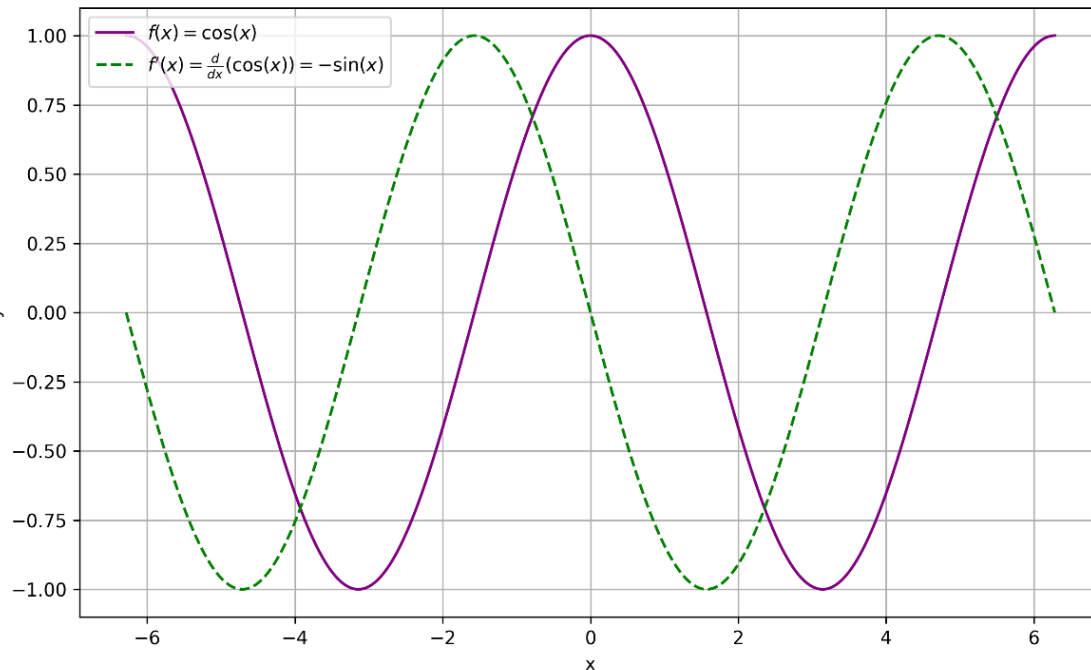


Figura 19. Gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$ y su derivada. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 19 se representa mediante una línea morada continua a la función $f(x) = \cos(x)$,

y mediante una línea verde discontinua a su derivada $f'(x) = -\sin(x)$. Del análisis de la misma se desprende lo siguiente:

- Cuando $f(x)$ alcanza un valor máximo o mínimo local, su derivada $f'(x)$ es cero y la tangente en esos puntos tiene pendiente horizontal.
- Cuando $f(x)$ toma valor cero, su derivada $f'(x)$ se encuentra en un valor máximo o mínimo local.
- La derivada $f'(x)$ está desfasada un cuarto de ciclo ($\pi/2$) respecto a la función $f(x)$.

Aplicación en la informática:

En programación gráfica y simulaciones físicas, esta relación entre una función y su derivada es esencial para calcular velocidades angulares y oscilaciones. Por ejemplo:

- En motores gráficos, cuando un objeto rota se utiliza $f(x) = \cos(x)$ para determinar su posición, y su derivada $f'(x) = -\sin(x)$ permite calcular la velocidad con la que varía dicha posición.
- En redes neuronales recurrentes que modelan datos cíclicos (como sensores de ritmo cardíaco o temperatura), estas funciones ayudan a representar patrones oscilatorios (Eberly, 2006).

Representación gráfica:

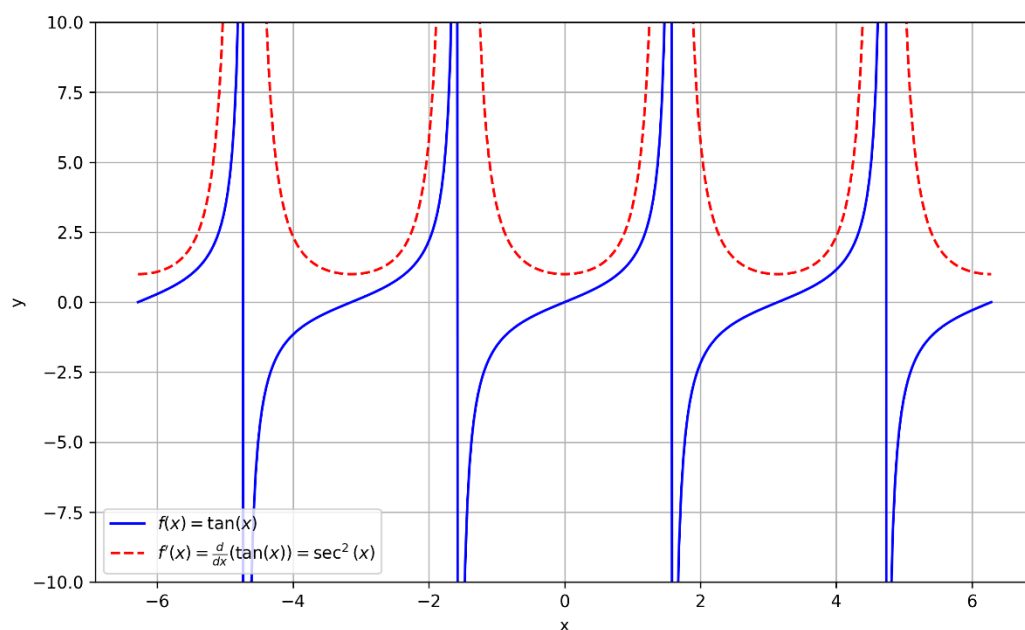


Figura 20. Gráfica de la función $\tan(x)$ y su derivada.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 20 se representa la función $f(x) = \tan(x)$ mediante una línea azul continua y a su derivada $f'(x) = \sec^2(x)$ mediante una línea roja discontinua. Se observa lo siguiente:

- La función $\tan(x)$ es creciente en todo su dominio, con una pendiente que se hace cada vez más pronunciada cerca de los extremos de cada intervalo. Por ello, la derivada toma siempre valores positivos.
- Al aproximarse a las asíntotas, como en $x = \pm \pi/2$, la derivada presenta un crecimiento acelerado, reflejando la inclinación cada vez más vertical de la curva de $\tan(x)$.
- No hay un desfase como en el ejemplo anterior; en este caso, la derivada amplifica el crecimiento de $\tan(x)$ de manera cuadrática.

Aplicación en la informática:

El comportamiento de la tangente y su derivada es crucial en motores de simulación que modelan pendientes, ángulos o rotaciones cercanas a 90° , donde el cambio es muy sensible.

En ajuste de curvas y optimización, la forma en que la derivada se dispara es importante para entender cuándo un algoritmo basado en gradientes puede volverse inestable (Hearn et al., 2014).

Derivación de funciones implícitas

Hasta ahora, hemos trabajado con funciones donde la variable dependiente y está despejada explícitamente en términos de x , por ejemplo:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

Sin embargo, en muchos casos reales, especialmente en geometría computacional, modelado físico o estructuras algebraicas complejas, y no está despejada, sino que aparece junto a x formando parte de la misma ecuación, constituyéndose en una *función implícita* (Stewart, 2012).

Para derivar una función implícita, se debe derivar ambos lados de la ecuación respecto a x , pero considerando a y como una función de x . Finalmente, se despeja la derivada. Esta técnica es muy útil cuando:

- Es imposible o muy complicado despejar y .
- Se modelan curvas complejas como elipses, hipérbolas o trayectorias no funcionales.

Ejemplos:

1) $x^2 + y^2 = 25$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2) $x^2 + xy - y^2 = 16$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) - \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(16)$$

$$2x + (x \frac{dy}{dx} + y) - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 2y) = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 2y}$$

$$3) \ln x + \ln y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) + \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x}$$

$$4) \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2y$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}(\sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(2y)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - 2 \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}} - 2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1-4\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(1-4\sqrt{y})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(4\sqrt{y}-1)}$$

5) $\text{sen} x + \cos y = x - y$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen} x) + \frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y)$$

$$\cos x - \text{sen} y \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} - \text{sen} y \frac{dy}{dx} = 1 - \cos x$$

$$(1 - \text{sen} y) \frac{dy}{dx} = 1 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 - \text{sen} y}$$

6) $\ln \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}} = 5$

En este caso, es conveniente aplicar primero las reglas de los algoritmos que constan en la tabla 1:

$$\begin{aligned}\ln \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}} &= \ln \left[\frac{x+y}{x-y} \right]^{1/3} \\ &= \frac{1}{3} \ln \left[\frac{x+y}{x-y} \right] \\ &= \frac{1}{3} [\ln(x+y) - \ln(x-y)]\end{aligned}$$

Luego, se procede a derivar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} [\ln(x+y) - \ln(x-y)] &= 5 \\ \frac{1}{3} \frac{d}{dx} [\ln(x+y) - \ln(x-y)] &= \frac{d}{dx} (5) \\ \frac{1}{3} \left[\frac{d}{dx} \ln(x+y) - \frac{d}{dx} \ln(x-y) \right] &= 0 \\ \frac{1}{x+y} \frac{d}{dx} (x+y) - \frac{1}{x-y} \frac{d}{dx} (x-y) &= 0 \\ \frac{1}{x+y} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) - \frac{1}{x-y} \left(1 - \frac{dy}{dx} \right) &= 0 \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x-y} \frac{dy}{dx} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) &= \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}} \\ &= \frac{x+y-x+y}{(x-y)(x+y)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2y}{2x}\end{aligned}$$

Representación gráfica:

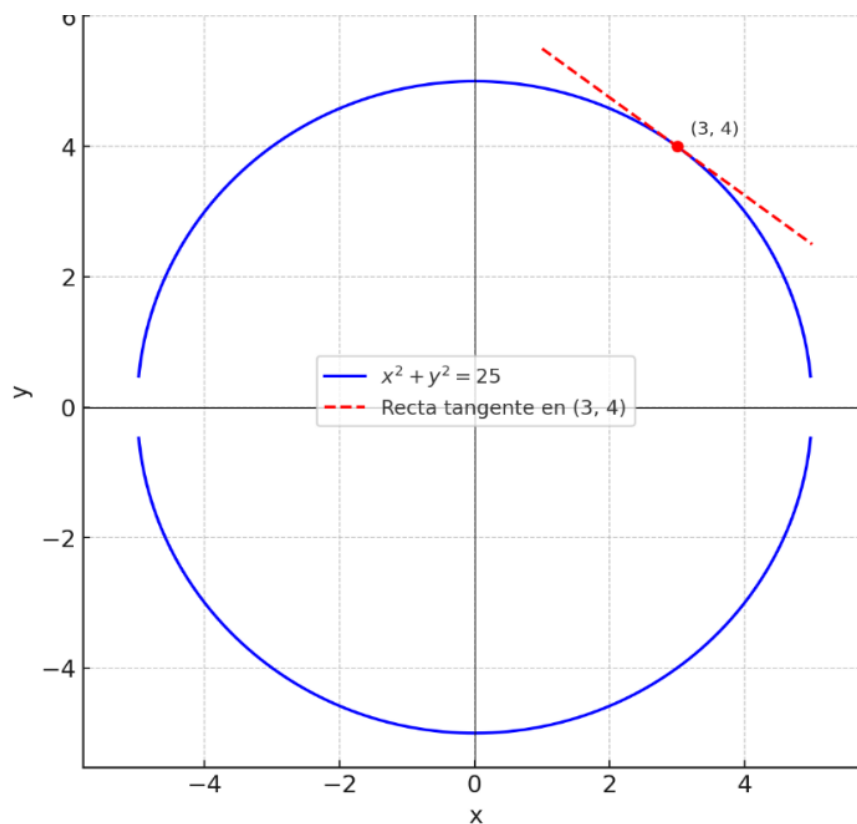


Figura 21. Derivación implícita: curva y recta tangente.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 21, podemos observar lo siguiente:

- La función implícita $x^2 + y^2 = 25$, que corresponde a una circunferencia de radio cinco con centro en el origen, está representada mediante una línea de color azul continua.
- En la circunferencia se ha trazado una tangente en el punto (3,4), representada por la línea recta de color rojo discontinua.
- La recta tangente desciende 3 unidades verticales por cada 4 unidades horizontales en sentido positivo, lo cual implica que tiene una pendiente $m = -3/4$.
- En el ejemplo 1, de esta sección, se obtuvo la derivada de $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

y al evaluarla en el punto (3,4) obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4},$$

valor que corresponde al de la pendiente de la tangente.

Ejercicios propuestos

A. Derivar las siguientes funciones trascendentes:

1) $y = \ln(5x^2)$

2) $y = \log_3(2x+1)$

3) $y = e^{\cos x}$

4) $y = \tan(4x^3)$

5) $y = \text{sen}(e^x)$

6) $y = e^x \ln(x)$

7) $y = \cos(\ln x)$

8) $y = x^2 e^x$

$$9) y = \frac{e^x}{x^2}$$

$$10) y = \ln \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

$$11) y = \left[\frac{1}{e^x} - e^x \right]^2$$

$$12) y = \ln \sqrt{\frac{4 - x^2}{4 + x^2}}$$

$$13) y = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$$

$$14) y = 2^{\ln x^2}$$

$$15) y = \frac{\cos x^3 - 1}{\operatorname{sen} x^3}$$

B. Derivar las siguientes funciones implícitas:

$$1) \operatorname{Tan} x + \operatorname{Coty} = x + y$$

$$2) e^{x+y} = 3x$$

$$3) \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = x^3$$

$$4) 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 6x$$

$$5) e^x - e^y = 7x$$

Piensa y analiza



Escenario: En un sistema de monitoreo de temperatura en un centro de datos, la función de crecimiento de la temperatura se modela como $T(t) = 60 + 10 \cdot \ln(t+1)$, donde T está en grados Celsius y t es el tiempo en minutos desde que se encendió el sistema.

Planteamiento del problema:

Se desea analizar la tasa de cambio de la temperatura en el minuto 4.

a) ¿Cuál es la derivada de $T(t)$?

b) Evalúa $T'(4)$

Las respuestas de esta primera parte se visualizan en la Figura 22.

Preguntas para reflexionar y analizar:

- ¿Qué representa la derivada $T'(t)$ en este contexto?
- Explica el significado de $T'(4)$.
- ¿Cómo se utilizaría esta información para implementar un sistema de ventilación automática?

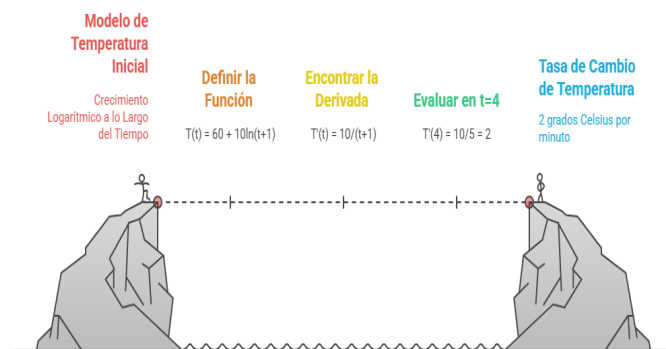


Figura 22. Análisis de la tasa de cambio de la temperatura.

Fuente: Elaboración propia.

Autoevalúate



Escoge el literal de la respuesta correcta a las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuál es la derivada de $f(x) = e^x$?

- xe^x
- e^x
- $\ln(x)$
- x^e

2. ¿La derivada de $\ln(x)$ es:

- x
- $\ln(x)$
- $1/x$

d) $x \ln(x)$

3. La derivada de $f(x) = \cos(x)$ es:

- a) $\sin(x)$
- b) $-\sin(x)$
- c) $\cos(x)$
- d) $-\cos(x)$

4. ¿Cuál es la derivada de $f(x) = \ln(3x)$?

- a) $3/x$
- b) $1/3x$
- c) $1/x$
- d) $\ln(3)/x$

5. La derivada de $\tan(x)$ es:

- a) $\sec^2(x)$
- b) $-\sec^2(x)$
- c) $\tan(x)$
- d) $1 + \tan^2(x)$

6. Si $f(x) = e^{2x}$, entonces $f'(x) =$

- a) $2e^x$
- b) e^x
- c) $2e^{2x}$
- d) $\ln(2)e^{2x}$

7. $f(x) = \ln(e^x)$, su derivada es:

- a) x
- b) 1
- c) $\ln(x)$
- d) e^x

8. $f(x) = e^{\cos(x)}$, su derivada es:

- a) $-\sin(x)e^{\cos(x)}$
- b) $\cos(x)e^{\cos(x)}$
- c) $\sin(x)e^{\cos(x)}$
- d) e^x

9. $f(x) = \ln(1 + e^x)$, su derivada es:

- a) e^x
- b) $1 / (1 + e^x)$
- c) $e^x / (1 + e^x)$
- d) $\ln(1 + x)$

10. $f(x) = \sin^2 x$, su derivada es:

- a) $2\cos(x)$
- b) $2\sin(x)$
- c) $2\sin(x)\cos(x)$
- d) $\sin(x) + \cos(x)$

Respuestas: 1.b 2.c 3.b 4.c 5.a 6.c 7. b 8.a 9.c 10.c

Referencias

- Bishop, C. M. (2006). *Pattern recognition and machine learning*. Springer.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). *Introduction to algorithms* (4th ed.). The MIT Press.
- Eberly, D. H. (2006). *3D Game Engine Design: A Practical Approach to Real-Time Computer Graphics* (2nd ed.). Morgan Kaufmann.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep learning*. MIT Press. <http://www.deeplearningbook.org/>
- Hearn, D., Baker, M. P., & Carithers, W. R. (Eds.). (2014). *Computer graphics with OpenGL* (4th ed., New International ed). Pearson.
- Stewart, J. (2012). *Calculus: Early transcendentals* (7th ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2006). *Cálculo de una variable* (11th ed.). Pearson.

Capítulo 4

PRÁCTICAS EN GOOGLE COLAB

Introducción a Google Colab

Google Colab (Collaboratory) es una plataforma gratuita basada en la nube que permite escribir y ejecutar código *Python* en un entorno de notebooks interactivos desde el navegador, sin requerir instalación local ni configuración de entornos de desarrollo complejos.

Esta herramienta es ideal para el aprendizaje de matemáticas computacionales porque combina texto, fórmulas, gráficos y código ejecutable en un mismo documento.

Colab es compatible con librerías poderosas como *SymPy* (para álgebra simbólica), *Matplotlib* (para gráficos), y *NumPy* (para cálculos numéricos), lo cual lo convierte en un laboratorio perfecto para explorar conceptos de cálculo diferencial de forma dinámica y visual (Pinargote-Zambrano et al., 2024).

Además, Google Colab permite el trabajo colaborativo, dado que sus cuadernos se pueden almacenar en Google Drive y varios usuarios pueden trabajar en ellos al mismo tiempo.

Por ello, el presente capítulo tiene los siguientes objetivos:

- Aplicar reglas de derivación para funciones algebraicas y trascendentes utilizando Python.
- Utilizar Google Colab como entorno para la resolución simbólica de derivadas.
- Utilizar Google Colab para representar gráficamente una función y su derivada y analizar su relación.
- Fomentar la interpretación crítica del comportamiento de funciones a través de herramientas computacionales.

Finalmente, se desarrollarán ejercicios prácticos de aplicación de las reglas de derivación vistas en los capítulos 2 y 3, con una breve explicación de las codificaciones más importantes utilizadas para una mejor comprensión de las mismas.

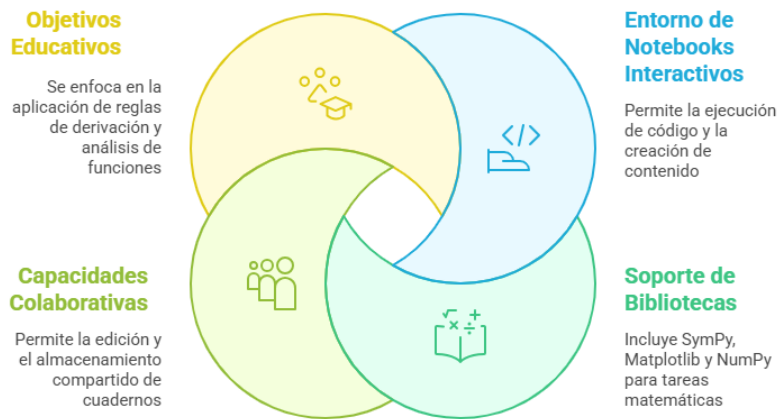


Figura 23. Derivando con Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Instalación de Google Colab

Para la instalación de Google Colab se deben seguir estos sencillos pasos:

1. Acceder a google drive de su cuenta de Gmail.
2. Hacer clic en: Nuevo ➡ Más ➡ Conectar más aplicaciones.

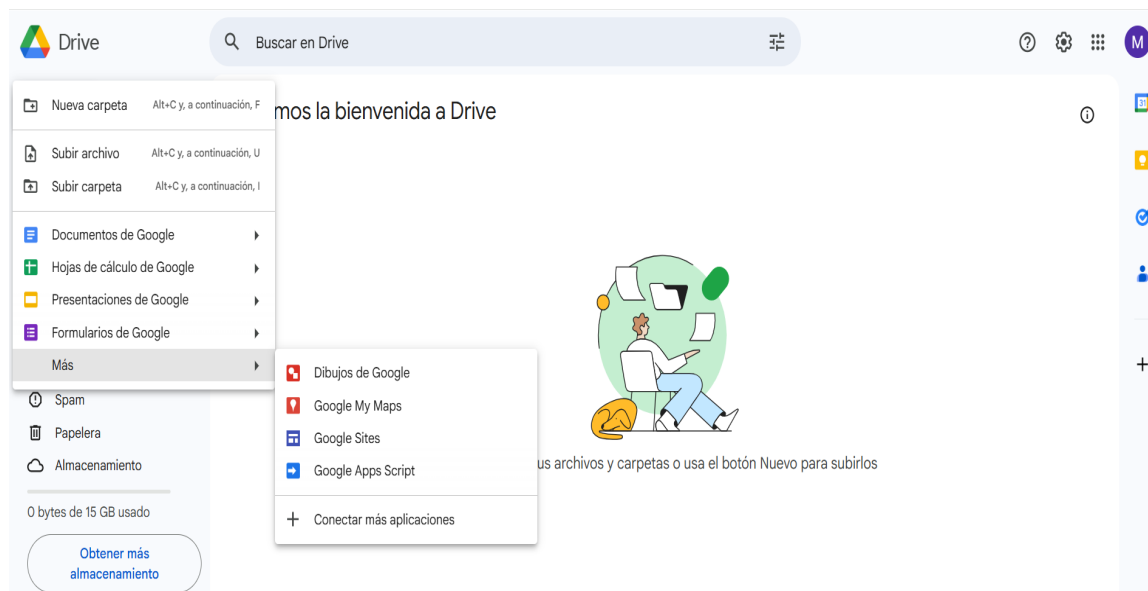


Figura 24. Pasos 1 y 2 de instalación de Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

3. Buscar Google Colab y escoger Colaboratory.

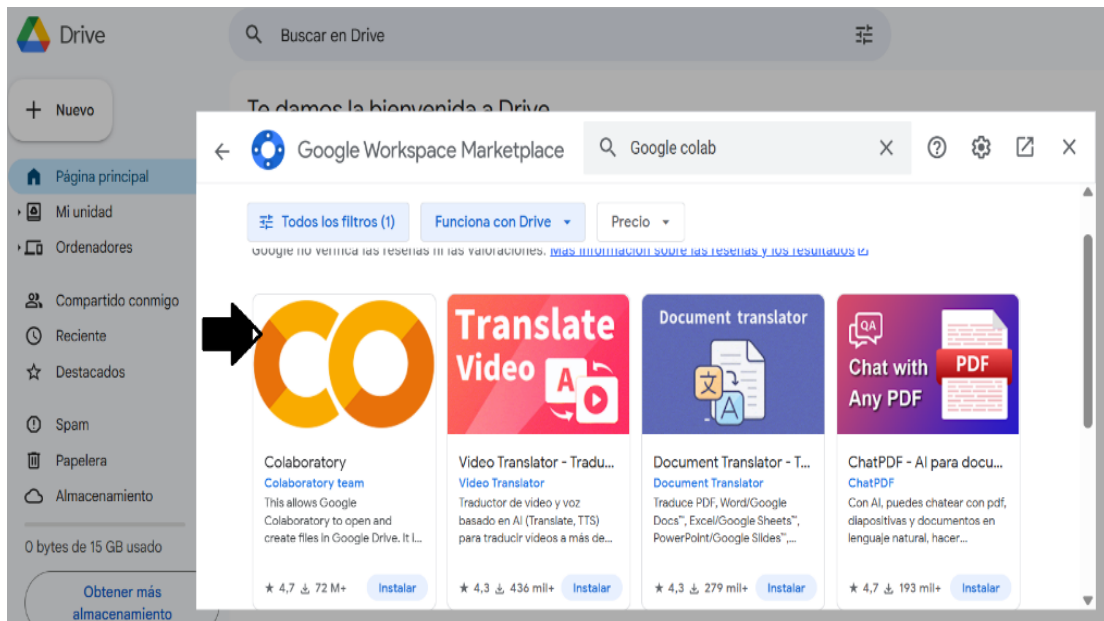


Figura 25. Paso 3 de instalación de Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

4. Finalmente se instala Google Colab, dando los permisos correspondientes.

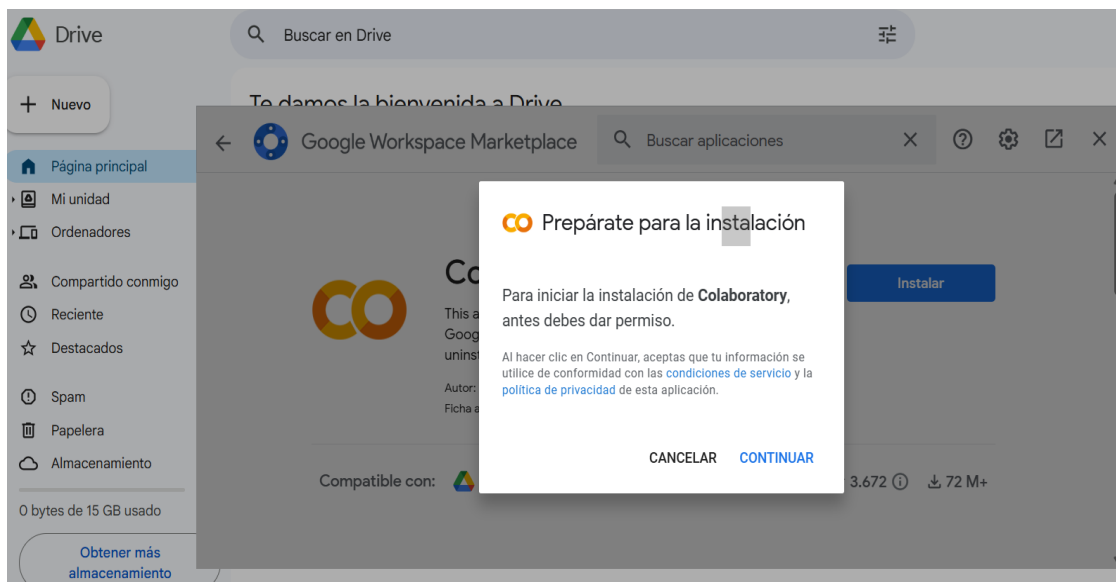


Figura 26. Paso 4 de instalación de Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

5. Se verifica que está instalado correctamente cuando Google Colaboratory consta entre las opciones de Google drive.

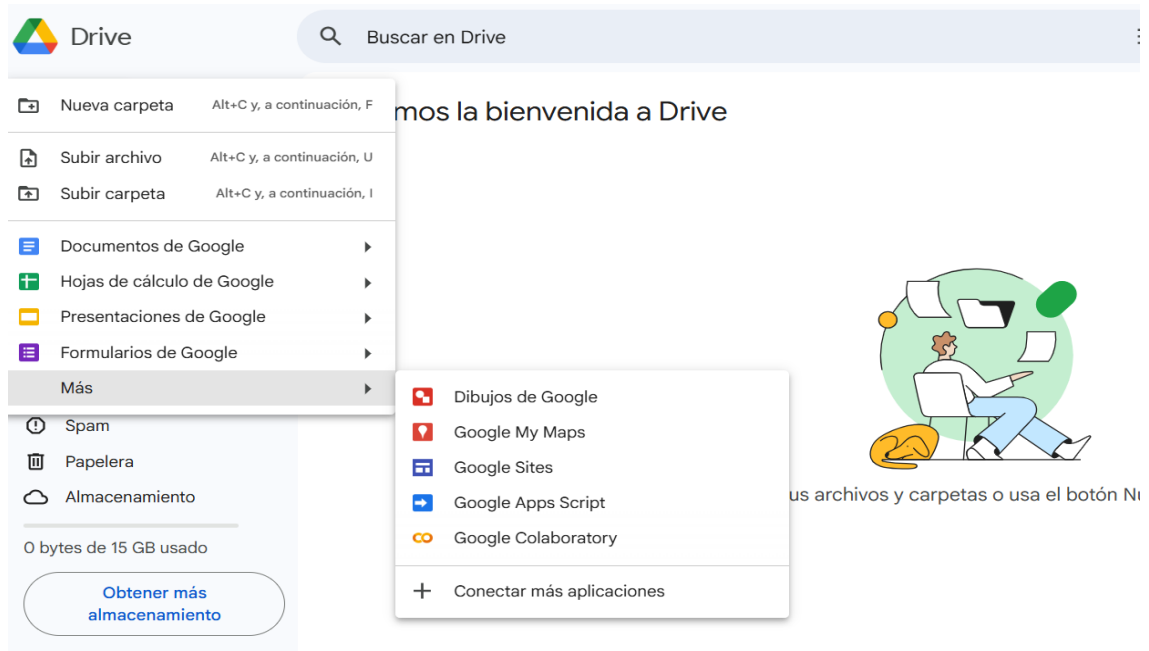


Figura 27. Paso 5 de instalación de Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Estructura de un notebook

Una vez instalado, es posible trabajar en Google Colab ingresando por Google drive, de acuerdo con el siguiente proceso:

En la página principal de Colab, hacer clic en "Nuevo notebook en Drive"

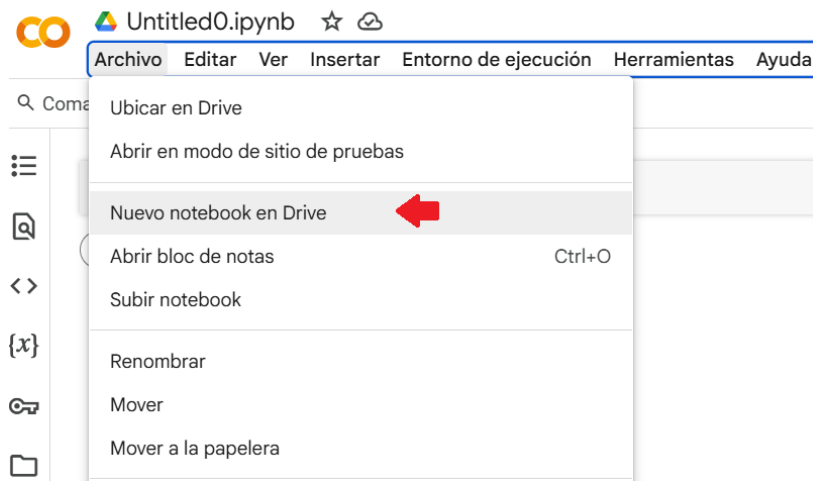


Figura 28. Notebook en drive.

Fuente: Elaboración propia.

Se activará una nueva pestaña que viene a ser el nuevo *notebook*, al cual le vamos a poner, por ejemplo, el nombre "Unidad1". Como se puede apreciar tiene extensión .ipynb, que significa *IPython Notebook*, y es el formato utilizado por Jupyter Notebooks, que es la base tecnológica de Google Colab.

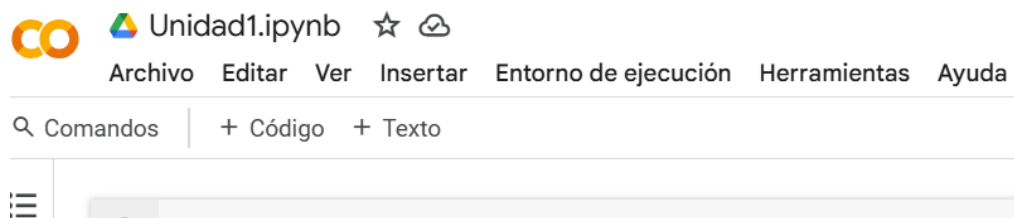


Figura 29. Creación de notebook en drive.

Fuente: Elaboración propia.

Se debe considerar que un *notebook* en Google Colab se divide en dos tipos de celdas:

Celda de código: Se agrega este tipo de celda haciendo clic en "+ Código". En ella se escriben y ejecutan instrucciones en *Python*.

Por ejemplo:



Figura 30. Celda de código.

Fuente: Elaboración propia.

Este código genera la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y de su derivada $f'(x) = 2x$, permitiendo una visualización clara del cambio de pendiente en diferentes puntos de la curva.

Celda de texto: Para agregar una celda de texto se debe hacer clic en "+ Texto". Esta celda tiene formato *Markdown* que permite insertar cualquier tipo de como explicaciones, ecuaciones, títulos, enlaces, etc.

Posee una barra de herramientas básicas que permiten modificaciones como: subrayar, insertar viñetas, poner letras negritas o itálicas, etc. Además, se subdivide en dos celdas:

- Celda izquierda, donde se escribe.
- Celda derecha, donde se tiene una vista previa del texto editado.

Por ejemplo:

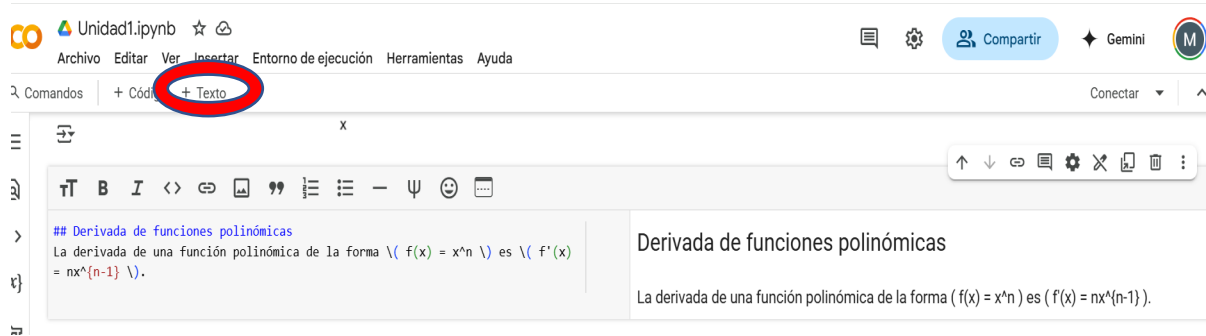


Figura 31. Celda de texto.

Fuente: Elaboración propia.

Ventajas de Google Colab en la enseñanza del cálculo

- **Accesibilidad:** Se ejecuta en cualquier navegador, sin necesidad de instalar software adicional.
- **Interactividad:** Permite modificar parámetros, ejecutar código y visualizar resultados en tiempo real.
- **Colaboración:** Facilita el trabajo colaborativo, ya que varios estudiantes pueden trabajar sobre un mismo *notebook*, compartiendo ideas y soluciones.
- **Documentación integrada:** Cada celda puede incluir explicaciones, fórmulas en LaTeX y código, facilitando la comprensión del contenido.

Además, Google colab se puede combinar con otras herramientas como GitHub Classroom, para crear repositorios de equipos de estudiantes para elaboración de proyectos finales (Snowberger & You, 2025).

Librería SymPy

Antes de pasar a derivar con Colab, es necesario referirnos a las librerías que se van a utilizar, empezando por *SymPy*, que es una biblioteca de *Python* que proporciona funcionalidades de álgebra computacional, incluyendo derivación simbólica, integración, factorización y resolución de ecuaciones. Fue diseñada con fines educativos y de investigación, manteniendo un equilibrio entre funcionalidad, legibilidad y facilidad de uso.

En particular, su módulo *diff* permite obtener derivadas de funciones matemáticas con una sintaxis intuitiva, ideal para introducir a los estudiantes en la computación simbólica (Meurer et al., 2017).

Aunque *SymPy* ya viene preinstalado en la mayoría de los entornos de Colab, se considera necesario incluir las instrucciones de su instalación, por si acaso se necesitara.

```
▶ # Importar las funciones necesarias de SymPy
from sympy import symbols, diff, exp, log, sin, cos, tan, sqrt, init_printing
from sympy.abc import x # Importa x como un símbolo predefinido

# Configurar la impresión para que las expresiones matemáticas se vean mejor
init_printing(use_unicode=True)
```

Figura 32. Instalación de SymPy.

Fuente: Elaboración propia.

Explicación de codificación:

- **symbols:** Función para declarar variables como símbolos matemáticos.
- **diff:** La función principal para calcular derivadas.
- **exp, log, sin, cos, tan, sqrt:** Funciones matemáticas comunes necesarias para definir expresiones.
- **init_printing:** Mejora la visualización de las expresiones simbólicas.
- **sympy.abc.x:** Una forma conveniente de definir x como un símbolo.

Librería **Matplotlib**

Matplotlib es una de las herramientas más importantes de *Python* porque es una biblioteca de trazado de gráficos muy completa. Fue creada por John Hunter en 2003 y su diseño se inspira en el entorno de trazado de MATLAB. Permite crear visualizaciones estáticas, interactivas y animadas con una alta calidad gráfica, aptas para su publicación en el ámbito científico y de ingeniería, así como en la ciencia de datos y el aprendizaje automático (Hunter, 2007).

Posee las siguientes características:

- Su versatilidad permite crear una amplia gama de diseños estáticos, animados e interactivos en *Python* como gráficos: de líneas, de dispersión, de barras, histograma, pastel, mapas de calor. Además, permite organizar múltiples gráficos dentro de una misma figura.
- Aunque su fuerte es los gráficos en 2D, tiene capacidades básicas para visualizaciones 3D.
- Permite personalizar aspectos como: títulos de los gráficos y de los ejes, leyendas, colores, tipos de línea, marcadores, tamaño y la resolución de la figura, anotaciones y texto dentro del gráfico.

- Se integra perfectamente con el ecosistema de *Python*, especialmente con librerías numéricas como
 - NumPy*, para manipulación de *arrays*.
 - SciPy*, para computación científica.
 - Librerías de análisis de datos como *Pandas*.
- Puede generar gráficos en una variedad de formatos de salida: PNG, JPG, PDF, SVG, etc.
- Soporta diferentes *backends* para renderizar los gráficos en distintas interfaces de usuario, permitiendo su uso en *scripts*, aplicaciones de escritorio o entornos web.
- Su modulo más utilizado es *Pyplot*, que es una interfaz que funciona de manera similar a una calculadora gráfica, permitiendo a los usuarios generar gráficos 2D de forma sencilla, ideal para gráficos rápidos y exploratorios.

Biblioteca *NumPy*

NumPy, cuyo nombre es una abreviatura de *Numerical Python*, fue creado en 2005 por Travis Oliphant, combinando características de las bibliotecas *Numeric* y *Numarray*. Nació de necesidad de una biblioteca de computación numérica eficiente y consistente para *Python*, especialmente para tareas que involucran grandes conjuntos de datos y operaciones matemáticas complejas.

Numpy proporciona un objeto de *array* multidimensional de alto rendimiento, llamado *arrays*, así como herramientas para trabajar con estos *arrays*. Constituye la base sobre la cual se construyen muchas otras bibliotecas de ciencia de datos y computación científica en *Python*, incluyendo *Pandas*, *SciPy* y *Matplotlib* (Harris et al., 2020).

En el contexto de la derivación de funciones, *NumPy* se utiliza comúnmente para:

- Generar valores numéricos distribuidos uniformemente.
- Evaluar funciones matemáticas sobre un conjunto de puntos.
- Apoyar el trazado de gráficos junto con bibliotecas como *Matplotlib*.
- Utiliza funciones como *np.linspace* para definir el dominio y aplicar operaciones vectorizadas que permiten graficar una función.

Para hacer un ejemplo práctico, comenzaremos por instalar estas 2 librerías: *Matplotlib* y *Numpy*:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Figura 33. Instalación de Matplotlib y Numpy.

Fuente: Elaboración propia.

Explicación de codificación:

- **import matplotlib.pyplot as plt:** Importa el módulo *pyplot* de la librería *matplotlib*, convencionalmente es importado como *plt* para facilitar su uso.
- **import numpy as np:** Importa la librería *numpy* y se suele importar como *np*.

Una vez instaladas las librerías necesarias, como ejemplo, vamos a crear un gráfico de la función $\sin(x)$ con *Matplotlib* usando la interfaz *Pyplot*:

```
# Datos de ejemplo
x = np.linspace(0, 10, 100) # 100 puntos entre 0 y 10
y = np.sin(x)

# Crear el gráfico
plt.figure(figsize=(8, 4)) # Opcional: Define el tamaño de la figura
plt.plot(x, y, label='Sen(x)', color='blue', linestyle='--')

# Añadir títulos y etiquetas
plt.title('Gráfico de la función Sen(x)')
plt.xlabel('Eje X')
plt.ylabel('Eje Y')
plt.grid(True) # Añadir cuadrícula
plt.legend() # Mostrar leyenda

# Mostrar el gráfico
plt.show()
```

Figura 34. Codificación para graficar la función $\sin(x)$ en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Explicación de codificación:

- `x = np.linspace(0, 10, 100)`: Con `np.linspace`, solicitamos a NumPy 100 puntos perfectamente espaciados que vayan desde el 0 hasta el 10.
- `y = np.sin(x)`: `y` es el resultado de calcular el seno de cada valor de `x`.
- `plt.figure(figsize=(8, 4))`: Pedimos que el dibujo tenga 8 pulgadas de ancho por 4 de alto.
- `plt.plot(x, y)`: Le decimos a Matplotlib que trace una línea conectando todos los puntos `(x, y)`.
- `label='Sen(x)'`: Esto es como ponerle un título a la línea en el dibujo.
- `color='blue'`: elegimos que nuestra línea sea azul.
- `linestyle='--'`: Escogemos una línea de puntos.
- `plt.title('Gráfico de la función Seno')`: Es el título general del gráfico.
- `plt.xlabel('Eje X')`: Etiqueta el eje horizontal.
- `plt.ylabel('Eje Y')`: Etiqueta el eje vertical.
- `plt.grid(True)`: Incorpora una cuadrícula.
- `plt.legend()`: Como pusimos un label a nuestra línea ('Sen(x)'). Ahora, `plt.legend()` hace que esa etiqueta aparezca en una cajita en el gráfico, para saber qué línea es cuál.
- `plt.show()`: Da la orden de terminar el dibujo y mostrarlo.

Siendo así, como al ejecutar la celda de códigos, se obtiene:

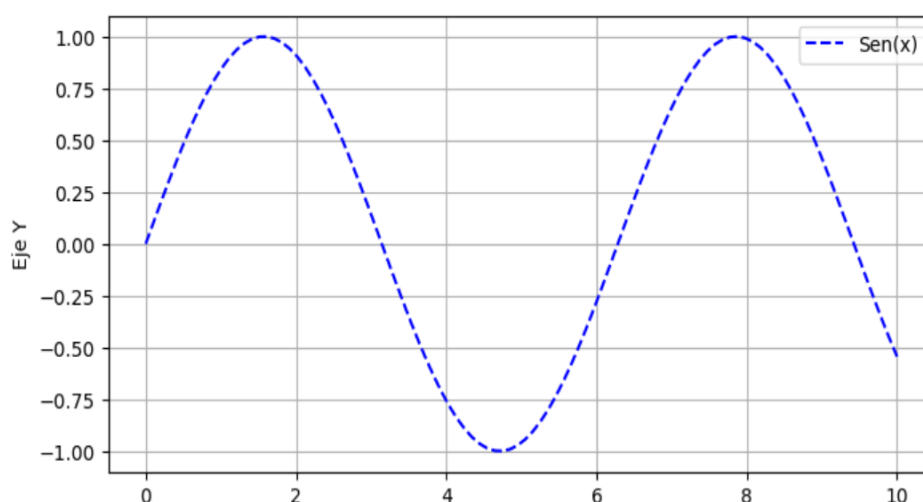


Figura 35. Grafica de la función $\sin(x)$ en Google Colab.

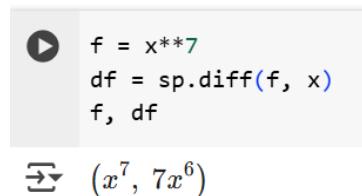
Fuente: Elaboración propia.

Derivación de funciones algebraicas en Google Colab

En esta sección, se desarrollarán en Google Colab algunos de los ejemplos resueltos analíticamente en el capítulo 2, considerando la activación previa de las librerías: *SymPy*, *Matplotlib* y *NumPy*.

Ejemplo 1:

$$\frac{d}{dx}(x^7) = 7x^6$$



```
f = x**7
df = sp.diff(f, x)
f, df
```

$\Rightarrow (x^7, 7x^6)$

Figura 36. Código para derivación de una potencia de x en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Explicación de codificación:

- `f = x**7`: define a la función usando el operador `**` para elevar x a la potencia 7.
- `df = sp.diff(f, x)`: calcula la derivada de f con respecto a x usando la función `diff` de *SymPy*.
- `f, df`: muestra a la función con su derivada: $(x^7, 7x^6)$.

A continuación, se procede a graficar la función dada y su derivada:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f_lamb = sp.lambdify(x, f, 'numpy')
df_lamb = sp.lambdify(x, df, 'numpy')
x_vals = np.linspace(-10, 10, 400)
y_vals = f_lamb(x_vals)
dy_vals = df_lamb(x_vals)

plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(x_vals, y_vals, label='f(x)', color='blue')
plt.plot(x_vals, dy_vals, label="f'(x)", color='orange', linestyle='--')
plt.title('Potencia de x')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Figura 37. Código para graficación de la derivada de una potencia de x en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

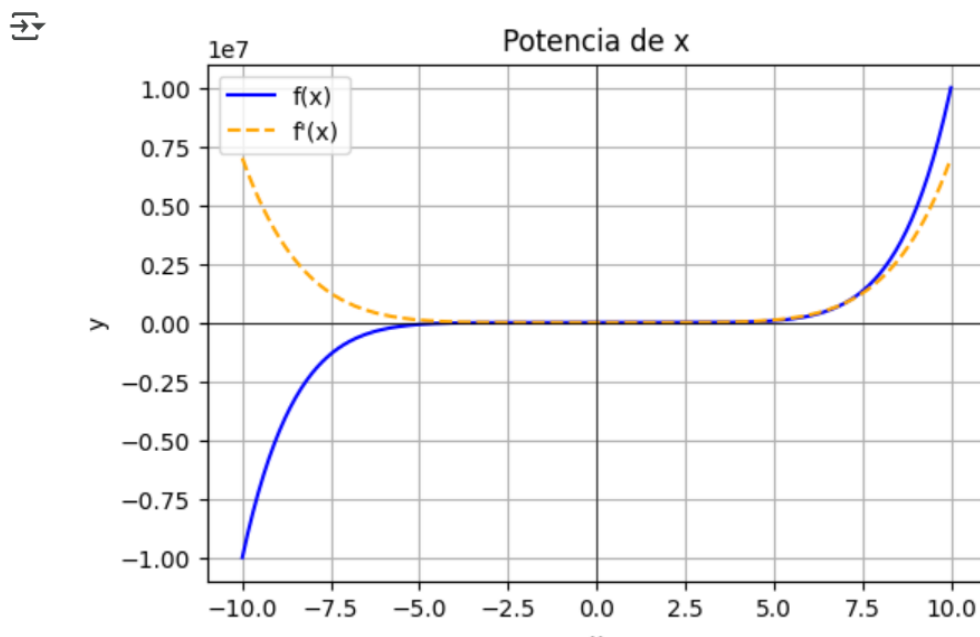


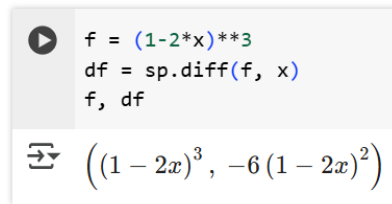
Figura 38. Gráfica de la derivada de una potencia de x en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Se le deja al lector la ejercitación de analizar las gráficas, conforme a los ejemplos dados en los capítulos anteriores.

Ejemplo 2:

$$\frac{d}{dx}(1-2x)^3 = -6(1-2x)^2$$



```
f = (1-2*x)**3
df = sp.diff(f, x)
f, df
```

$\Rightarrow \left((1-2x)^3, -6(1-2x)^2 \right)$

Figura 39. Código para derivación de una potencia de $f(x)$ en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Explicación de codificación:

- `f=(1-2*x)**3`: define a la función usando el operador `*` para elevar $(1-2x)$ a la potencia 3.
- `df = sp.diff(f, x)`: calcula la derivada de f con respecto a x usando la función `diff` de `SymPy`.
- `f, df`: muestra a la función con su derivada: $\left((1-2x)^3, -6(1-2x)^2 \right)$

Ahora, se procede a graficar la función dada y su derivada:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f_lamb = sp.lambdify(x, f, 'numpy')
df_lamb = sp.lambdify(x, df, 'numpy')
x_vals = np.linspace(-10, 10, 400)
y_vals = f_lamb(x_vals)
dy_vals = df_lamb(x_vals)

plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(x_vals, y_vals, label='f(x)', color='green')
plt.plot(x_vals, dy_vals, label="f'(x)", color='red', linestyle='--')
plt.title('Potencia de función')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Figura 40. Código para graficación de la derivada de una potencia de $f(x)$ en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

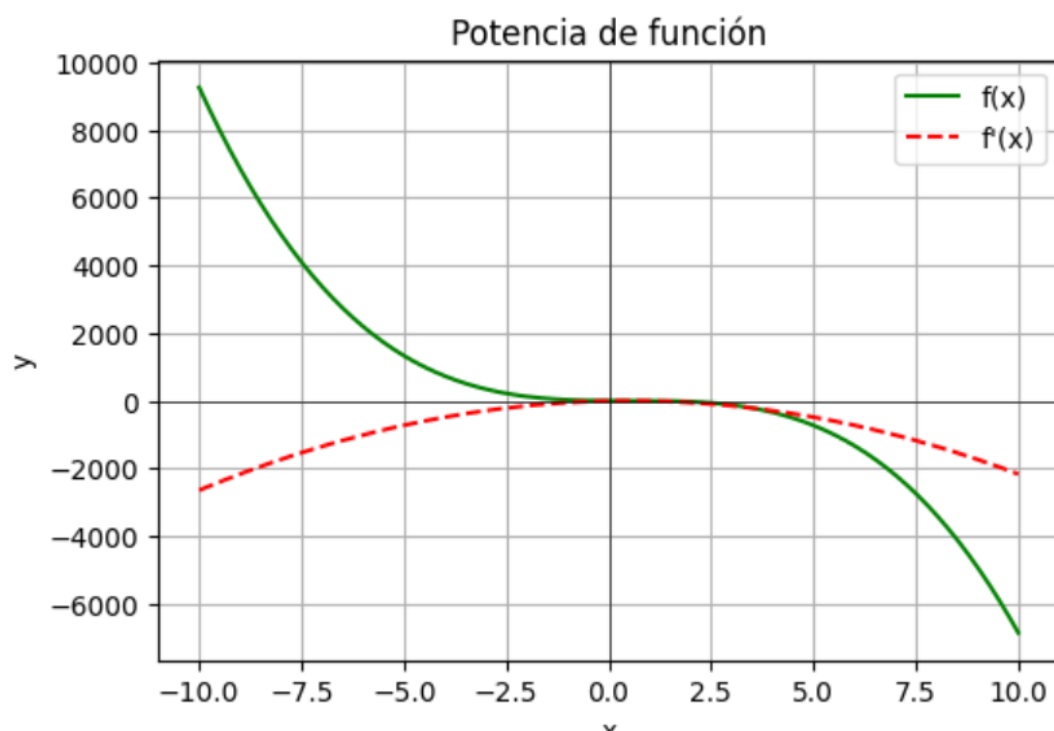


Figura 41. Gráfica de la derivada de una potencia de $f(x)$ en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

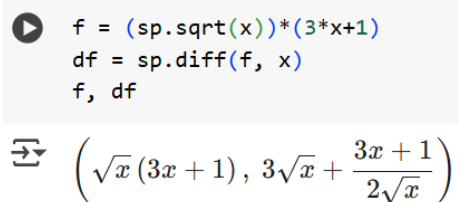
Comparando las codificaciones de estos dos últimos ejemplos, se puede apreciar que son similares, la única diferencia entre ellos está en la forma de la función a derivar.

Igual similitud se observa en la codificación de sus gráficas, con ligeras variaciones en cuanto al título y los colores, manteniendo el tamaño y demás características de presentación de las mismas.

Por ello, en los ejemplos subsiguientes, se presentarán directamente los resultados de sus representaciones gráficas, centrándonos en las derivaciones.

Ejemplo 3:

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x}(3x+1)] = 3\sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$$



The image shows a screenshot of a Google Colab notebook. It contains a code cell with the following Python code: `f = (sp.sqrt(x))*(3*x+1)`, `df = sp.diff(f, x)`, and `f, df`. Below the code cell, there is an output cell showing the result of the differentiation: $\left(\sqrt{x}(3x+1), 3\sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} \right)$. The output is displayed in a large, readable font.

Figura 42. Código para derivación de un producto de funciones en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

En la codificación que consta en la Figura 42, la raíz cuadrada se expresa como `sp.sqrt(x)`, y se multiplica por el binomio $(3x + 1)$.

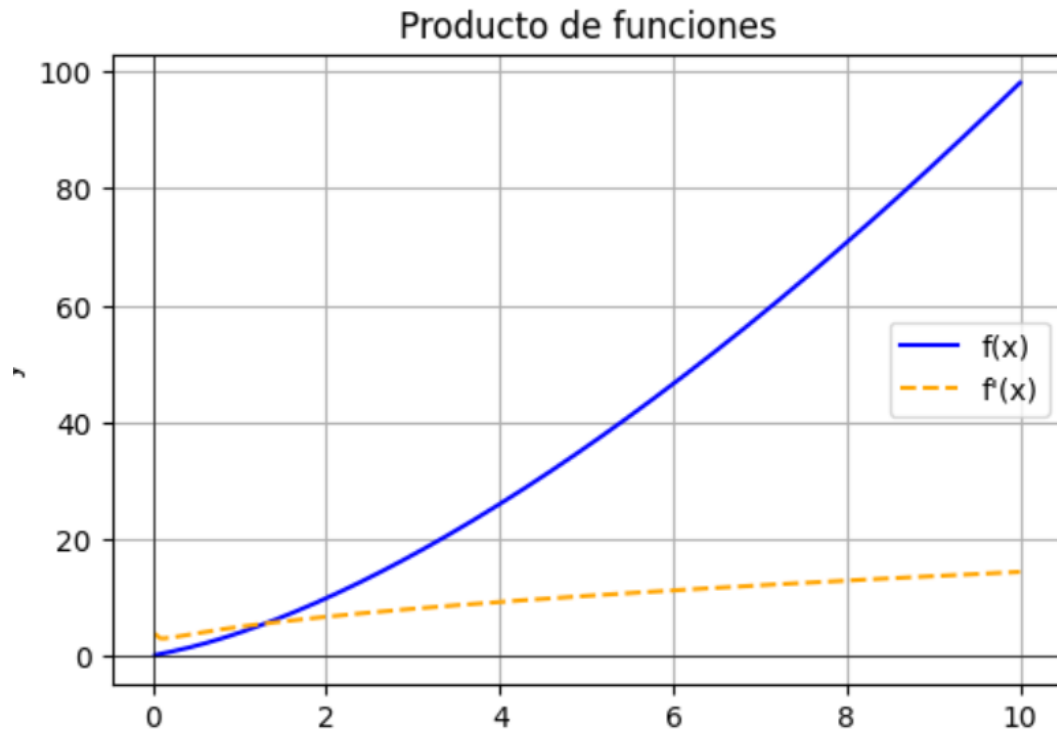


Figura 43. Grafica de la derivación de un producto de funciones en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo 4:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^4}{\sqrt{x}}\right) = -4x^{5/2} - \frac{1-x^4}{2x^{3/2}}$$

En la codificación del ejemplo 4, presentada en la Figura 44, se ha utilizado `init_printing()`, que permite visualizar mejor los resultados. Esta instrucción facilita la comprensión visual de resultados algebraicos y derivadas, al mostrar fracciones, raíces, potencias y símbolos especiales de forma clara.

```
import sympy as sp

# Iniciar impresion mejorada
sp.init_printing()

# Definir la variable simbólica
x = sp.Symbol('x')

# Definir la función
f = (1 - x**4) / sp.sqrt(x)

# Calcular derivada
df = sp.diff(f, x)

# Imprimir resultados con etiquetas
print("f(x) =")
sp.pprint(f)

print("\nf'(x) =")
sp.pprint(df)
```

$$f(x) = \frac{1 - x^4}{\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = -4 \cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{1 - x^4}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$$

Figura 44. Código para derivación de un cociente de funciones en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Además, se han incorporado etiquetas a las curvas para diferenciarlas, como se visualiza a continuación en la Figura 45.

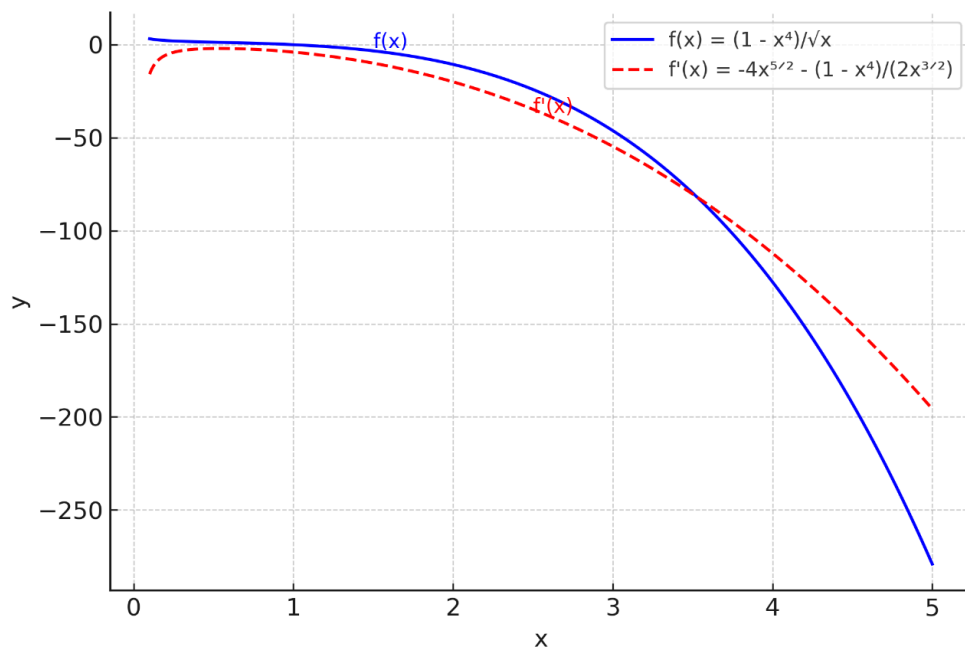


Figura 45. Gráfica de un cociente de funciones y su derivada en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia

Derivación de funciones trascendentes en Google Colab

En esta ocasión, se realizarán en Google Colab algunos de los ejemplos resueltos analíticamente en el capítulo 3.

Ejemplo 1:

$$\frac{d}{dx}(5^{3x}) = 3(5^{3x}) \ln 5$$

En este ejemplo, según la Figura 46, en el resultado aparece $\log 5$ en lugar de $\ln 5$, de la respuesta analítica. Esta diferencia se debe a que en *SymPy* la función $\log(x)$ representa el logaritmo natural $\ln(x)$ y no el logaritmo decimal. Por tanto, $\log(5)$ debe leerse como $\ln(5)$.

```
# 1. Define la variable
x = sp.symbols('x')

# 2. Define tu función
f = 5**(3*x) # Nuestra función: 5 elevado a (3 por x)

# 3. Calcula la derivada
df_dx = sp.diff(f, x) # 'diff' es la función para derivar

# 4. Muestra los resultados (Colab los mostrará bonito gracias a init_printing)
print("Función original:")
display(f) # Muestra la función

print("Su derivada:")
display(df_dx) # Muestra la derivada
```

⇒ Función original:
 5^{3x}
Su derivada:
 $3 \cdot 5^{3x} \log(5)$

Figura 46. Código para derivación de una función exponencial en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

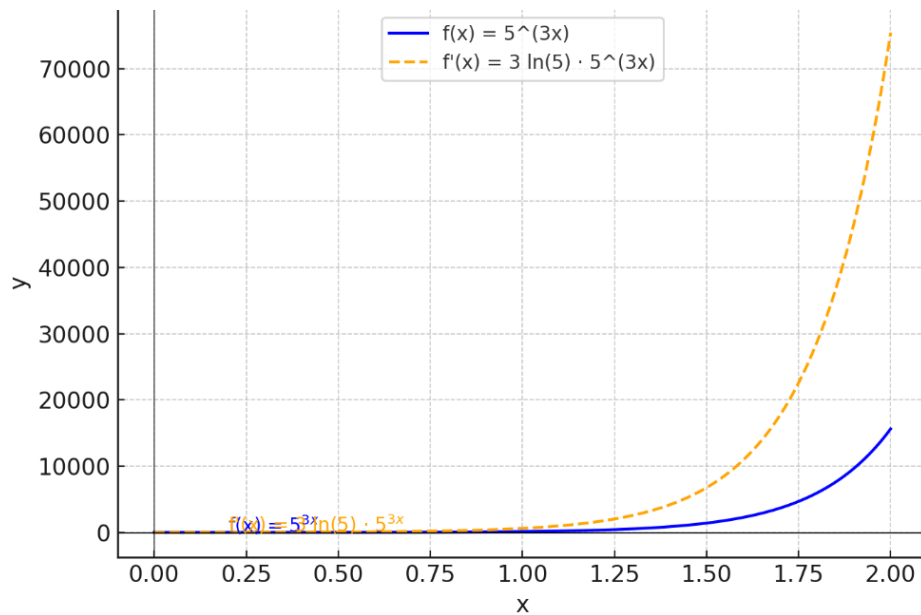


Figura 47. Gráfica de la derivada de una función exponencial en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo 2:

$$\frac{d}{dx}(\log_2 x^2) = \frac{2}{x \ln 2}$$

```
import sympy as sp

# Definir la variable simbólica
x = sp.symbols('x')

# Definir la función
f = sp.log(x**2, 2)

# Calcular la derivada
derivada = sp.diff(f, x)

# Mostrar el resultado
print(f"La derivada de log_2(x^2) con respecto a x es: {derivada}")
```

La derivada de log₂(x²) con respecto a x es: 2/(x*log(2))

Figura 48. Código para derivación de una función logarítmica de base 2 en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

En la codificación, presentada en la Figura 48, se ha expuesto otra forma de presentar la respuesta: sin usar `init_printing()`.

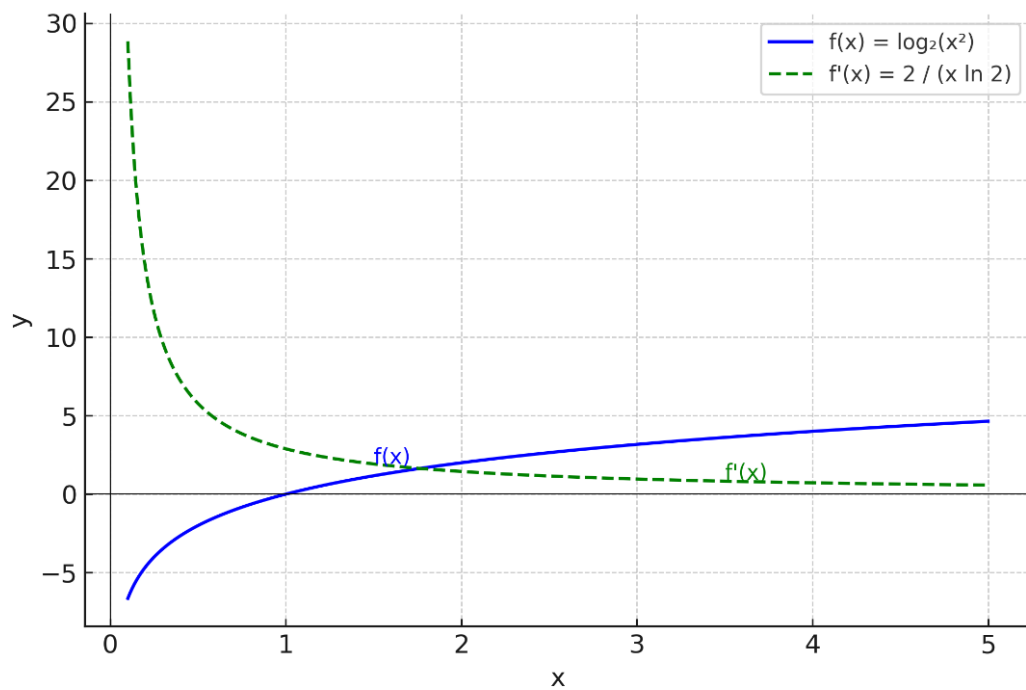


Figura 49. Grafica de la derivada de una función logarítmica de base 2 en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo 3:

$$\frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right] = \frac{2}{x^2 - 1}$$

```
import sympy as sp

# Declarar variable simbólica
x = sp.Symbol('x')

# Definir la función
f = sp.ln((1 - x)/(1 + x))

# Calcular la derivada
df = sp.diff(f, x)

# Simplificar la derivada
df_simplificada = sp.simplify(df)

# Imprimir con encabezado
sp.init_printing()
print("Derivada = ")
sp.pprint(df_simplificada)
```

Derivada =

$$\frac{2}{x^2 - 1}$$

Figura 50. Código para derivación de una función logarítmica natural en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

En la codificación de este ejemplo, se usa `sp.ln()` para declarar el logaritmo natural, Aunque `df` ya contiene la derivada, puede estar en una forma complicada, por lo que utilizamos la instrucción `simplify()` para reducir algebraicamente la respuesta.

La grafica de esta función y su derivada viene dada a continuación en la Figura 51:

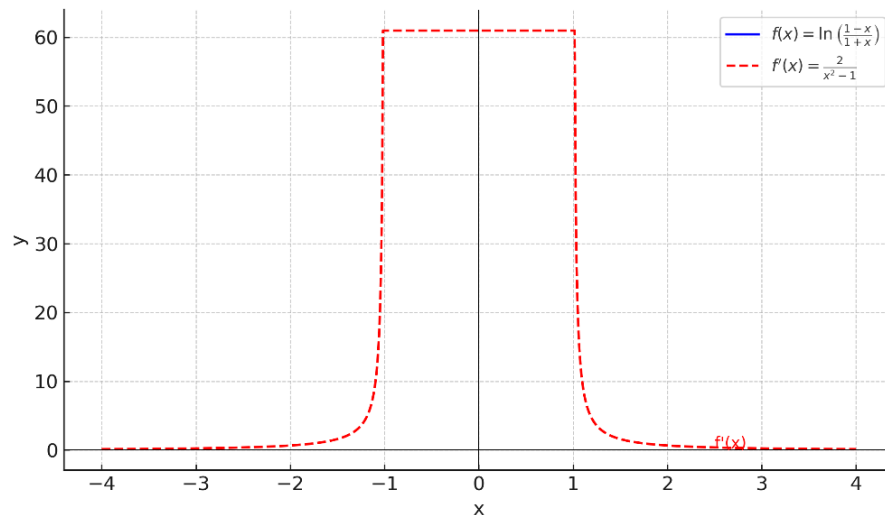


Figura 51. Gráfica de la derivada de una función logarítmica natural en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo 4:

$$\frac{d}{dx}(\sin^6 x) = 6\sin^5 x \cos x$$

```
# Declarar la variable
x = sp.Symbol('x')

# Definir la función: sin(x)^6
f = sp.sin(x)**6

# Derivar la función
df = sp.diff(f, x)

# Mostrar el resultado
sp.init_printing()
print("Derivada = ")
sp.pprint(df)
```

Derivada =

$$6 \cdot \sin^5(x) \cdot \cos(x)$$

Figura 52. Código para derivación de la potencia de una función en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

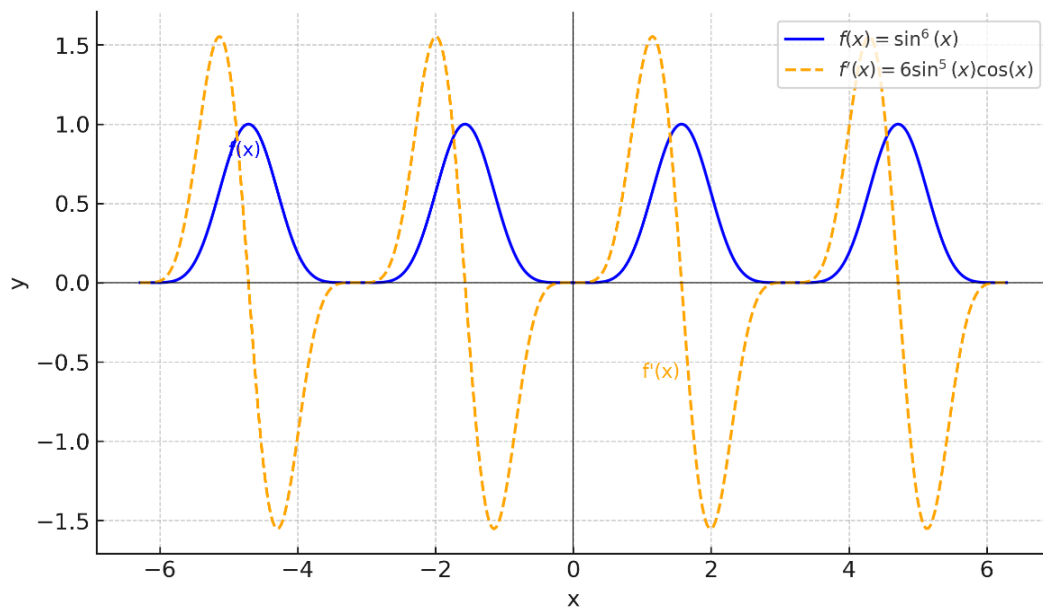


Figura 53. Grafica de la derivada de potencia de la función trigonométrica $\sin^6(x)$ en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Derivación de funciones implícitas en Google Colab

Ejemplo 1:

$$x^2 + xy - y^2 = 16$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 2y} = \frac{2x + y}{2y - x}$$

```
# Definir la ecuación implícita
eq = x**2 + x*y - y**2 - 16

# Derivar con respecto a x (implícitamente)
d_eq = sp.diff(eq, x) + sp.diff(eq, y) * dydx

# Despejar dy/dx
sol = sp.solve(d_eq, dydx)[0]

# Imprimir el resultado
sp.init_printing()
print("Derivada implícita dy/dx =")
sp.pprint(sol)
```

Derivada implícita dy/dx =

$$\frac{-2x - y}{x - 2y}$$

Figura 54. Código para derivación de una función implícita en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la codificación de la Figura 54, hay ciertas diferencias con respecto a las codificaciones de las derivaciones de las funciones explícitas anteriores. Por ello, en la tabla 2 hemos sintetizado las principales diferencias entre la codificación de derivación de funciones explícitas e implícitas.

Tabla 2. Diferencias en codificación de derivación de funciones explícitas e implícitas.

Aspecto	Derivación Explícita	Derivación Implícita
Forma de la función	$y = f(x)$ (despejada)	$F(x, y) = c$ (no despejada)
Derivada directa	Sí	No, requiere regla de la cadena
Uso de <code>sp.diff(f, x)</code>	Directo sobre f	También sobre y , multiplicado por dy/dx
Uso de <code>solve(...)</code>	No	Sí, para despejar dy/dx
Ideal para...	Modelos simples, funciones analíticas	Curvas implícitas, restricciones, superficies

Fuente: Elaboración propia.

Para este caso, vamos a presentar también la codificación de su gráfica:

```
# Derivada implícita: dy/dx = (2x + y) / (2y - x)
# Prevenir divisiones por cero
DYDX = np.where((2*Y - X) != 0, (2*X + Y) / (2*Y - X), np.nan)

# Crear la figura y los dos gráficos
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 5), dpi=300)

# 1. Gráfica de la curva implícita
axs[0].contour(X, Y, Z, levels=[0], colors='blue')
axs[0].set_title("Curva implícita:  $x^2 + xy - y^2 = 16$ ")
axs[0].set_xlabel("x")
axs[0].set_ylabel("y")
axs[0].grid(True)
axs[0].axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
axs[0].axvline(0, color='black', linewidth=0.5)

# 2. Gráfica del campo de pendientes de dy/dx
cf = axs[1].contourf(X, Y, DYDX, levels=100, cmap='RdBu')
axs[1].set_title(r"Campo de derivadas:  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{2y - x}$ ")
axs[1].set_xlabel("x")
axs[1].set_ylabel("y")
axs[1].grid(True)
axs[1].axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
axs[1].axvline(0, color='black', linewidth=0.5)

# Ajustar diseño y mostrar
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Figura 55. Código para graficar una función implícita y su derivada en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia

En el caso de la codificación para graficar, según Figura 55, también hay ciertas diferencias con respecto a las codificaciones para graficar las funciones explícitas e implícitas. Las mismas que se han sintetizado en la tabla 3:

Tabla 3. Diferencias en codificación de graficación de funciones explícitas e implícitas.

Elemento	Explícita	Implícita
Dominio	1D con <i>np.linspace</i>	2D con <i>np.meshgrid</i>

Evaluación	Directa con <i>NumPy</i>	Evaluación de relación x-y
Derivación	Directa con <i>sympy.diff</i>	Derivación parcial + solve
Visualización	<i>plt.plot()</i>	<i>plt.contour()</i> , <i>plt.contourf()</i>
Complejidad gráfica	Baja	Media - Alta

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, en la Figura 56, tenemos la gráfica de este último ejemplo, correspondiente a la derivada de una función implícita.

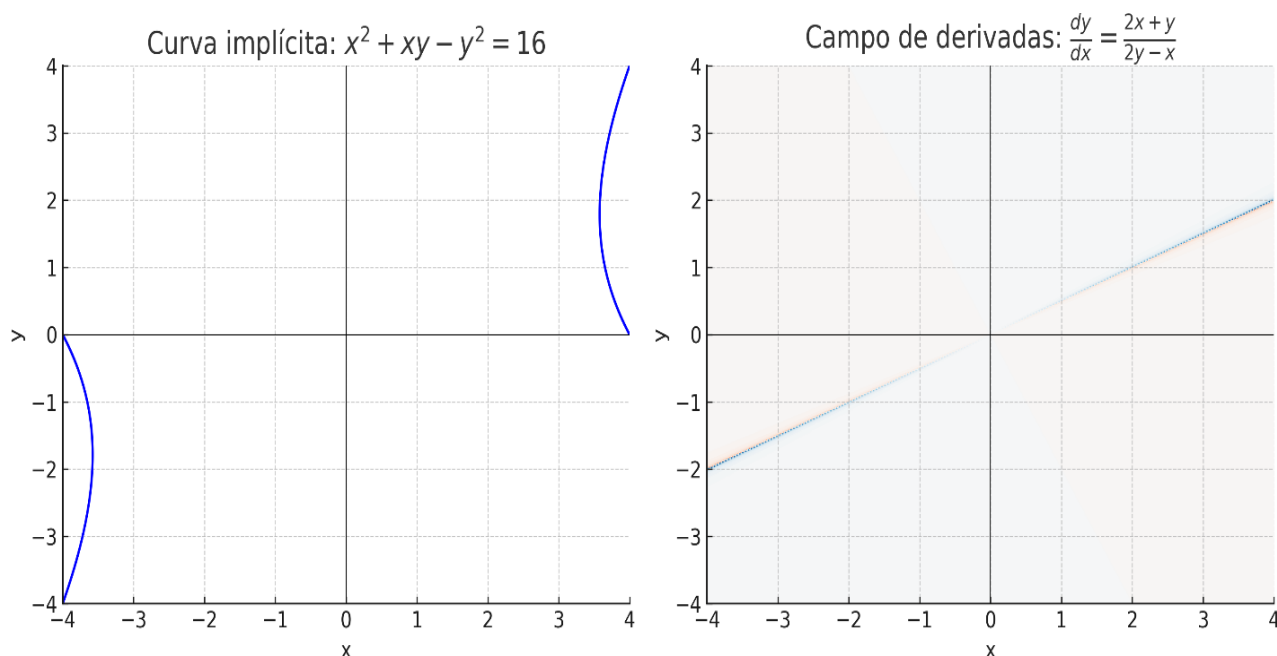


Figura 56. Grafica de la derivada de una función implícita en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia

Ejercicios propuestos

Realizar en Google Colab los ejercicios propuestos en los capítulos 2 y 3, verificando de esta manera los resultados obtenidos analíticamente.

Piensa y analiza



Escenario: Una empresa de tecnología opera una aplicación web basada en una arquitectura de microservicios. Cada solicitud de usuario activa varios servicios que comparten recursos y se comunican entre sí. El equipo técnico modela el tiempo promedio de procesamiento por solicitud $P(x)$, en milisegundos, en función del número promedio de servicios activados por solicitud x , mediante la siguiente expresión:

$$P(x) = \frac{0,5x^3 + 10x^2}{x + 5} + 3x$$

Este modelo matemático considera la sobrecarga de comunicación, latencias compartidas y colas de espera en los servicios.

Planteamiento del problema:

Abre una *notebook* de Google Colab y realiza lo siguiente:

1. Deriva simbólicamente la función $P(x)$, usando *SymPy* para obtener $P'(x)$.
2. Evalúa el comportamiento de la derivada: usa *lambdify* para evaluar $P'(x)$ en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 10$.
3. Grafica $P(x)$ y $P'(x)$ con *Matplotlib*, identificando rangos de x donde el sistema comienza a saturarse.

Preguntas para reflexionar y analizar:

- a. Explica qué representa esta derivada en el contexto del sistema.
- b. Interpreta los valores obtenidos en 2: ¿cuándo empieza a crecer aceleradamente el tiempo por solicitud?
- c. ¿Qué representa el crecimiento de $P'(x)$ desde el punto de vista del rendimiento del sistema?
- d. ¿Qué medidas podrías proponer para evitar que el tiempo de procesamiento se dispare al aumentar la complejidad?
- e. ¿Cómo ayuda el uso de derivadas en la toma de decisiones en sistemas escalables y distribuidos?

Autoevalúate



Escoge el literal de la respuesta correcta a las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuál es la principal función de la librería *SymPy* en Google Colab?
 - a) Realizar cálculos numéricos en matrices
 - b) Resolver ecuaciones diferenciales numéricamente
 - c) Realizar derivación simbólica de funciones matemáticas
 - d) Crear gráficos interactivos
2. ¿Qué instrucción mejora la visualización de expresiones simbólicas en *SymPy*?
 - a) `sympy.view()`
 - b) `init_printing()`
 - c) `plot_output()`
 - d) `visualize_symbols()`
3. ¿Cuál de los siguientes módulos se importa comúnmente como *plt*?
 - a) *NumPy*
 - b) *SymPy*
 - c) *Matplotlib*
 - d) *TensorFlow*

4. ¿Qué permite hacer la función `np.linspace(0, 10, 100)`?
 - a) Crear 100 valores aleatorios entre 0 y 10
 - b) Evaluar funciones entre 0 y 10
 - c) Crear un arreglo de 100 valores equidistantes entre 0 y 10
 - d) Dibujar funciones senoidales en ese intervalo
5. En el contexto de una función implícita $F(x,y) = 0$, ¿qué se requiere para obtener $\frac{dy}{dx}$ en `SymPy`?
 - a) Solo usar `diff(f, x)`
 - b) Aplicar `integrate()`
 - c) Usar `solve(..., sp.Derivative(y, x))`
 - d) Calcular directamente la pendiente con `Matplotlib`
6. ¿Qué tipo de celda se utiliza en Google Colab para insertar explicaciones, fórmulas y texto formateado?
 - a) Celda de entrada
 - b) Celda de código
 - c) Celda de sistema
 - d) Celda de texto
7. ¿Cuál es una ventaja destacada de Google Colab frente a otros entornos de programación?
 - a) Solo permite programar en C++
 - b) Solo se puede ejecutar localmente
 - c) Permite trabajo colaborativo en la nube
 - d) No permite importar librerías
8. ¿Qué tipo de gráfico se recomienda para representar funciones implícitas?
 - a) `plt.plot()`
 - b) `plt.contour()`
 - c) `plt.bar()`
 - d) `plt.hist()`
9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre `Matplotlib` es correcta?
 - a) No permite ajustar el tamaño del gráfico
 - b) Solo permite gráficos en blanco y negro
 - c) Se inspira en el entorno de MATLAB
 - d) Solo puede usarse en Jupyter Notebook

10. En la derivación de funciones trascendentes, ¿cómo se interpreta $\log(5)$ en SymPy?

- a) Logaritmo decimal de 5
- b) Logaritmo natural de 5
- c) Exponencial de 5
- d) Error de sintaxis

Respuestas: 1. c 2. b 3. c 4. c 5. c 6. d 7. c 8. b 9. c 10. B

Referencias

- harris, c. R., millman, k. J., van der walt, s. J., gommers, r., virtanen, p., cournapeau, d., wieser, e., taylor, j., berg, s., smith, n. J., kern, r., picus, m., hoyer, s., van kerkwijk, m. H., brett, m., haldane, a., del río, j. F., wiebe, m., peterson, p., ... oliphant, t. E. (2020). Array programming with numpy. *Nature*, 585(7825), 357-362. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
- Hunter, j. D. (2007). Matplotlib: a 2d graphics environment. *Computing in science & engineering*, 9(3), 90-95. <https://doi.org/10.1109/mcse.2007.55>
- Meurer, a., smith, c. P., paprocki, m., čertík, o., kirpichev, s. B., rocklin, m., kumar, am., ivanov, s., moore, j. K., singh, s., rathnayake, t., vig, s., granger, b. E., muller, r. P., bonazzi, f., gupta, h., vats, s., johansson, f., pedregosa, f., ... scopatz, a. (2017). Sympy: symbolic computing in python. *Peerj computer science*, 3, e103. <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>
- Pinargote-zambrano, j. J., lino-calle, v. A., & vera-almeida, b. J. (2024). Python en la enseñanza de las matemáticas para estudiantes de nivelación en educación superior. *Mqinvestigar*, 8(3), 3966-3989. <https://doi.org/10.56048/mqr20225.8.3.2024.3966-3989>

Snowberger, a. D., & you, k. (2025). Leveraging github classroom and google colab for short-term student machine learning team projects. *Journal of practical engineering education*, 17(1), 49-61.
[Http://dx.doi.org/10.14702/jpee.2025.049](http://dx.doi.org/10.14702/jpee.2025.049)



Ing. Maritza Alexandra Pinta, PhD.

0000-0002-5697-0474 mpinta@utmachala.edu.ec. Filial: Universidad Técnica de Machala. Filial: Universidad Técnica de Machala. Ingeniero Civil, Licenciado en Ciencias de la Educación Especialidad de Matemáticas, Doctor en Ciencias de la Educación Mención en Investigación Y Planificación Educativa, Magister en Desarrollo de la Inteligencia Y Educación, egresada de Maestría en Big Data y Ciencias de Datos, Doctora dentro del Programa de Doctorado en Matemáticas por la universidad de Almería, España. Se desempeña como docente universitaria del área de Matemáticas desde 1996, dictando actualmente las cátedras de Análisis Matemático y Álgebra Lineal en la carrera de Tecnologías de la Información de la Universidad Técnica de Machala. Ha participado como autora de libros de Análisis Matemático y Métodos Numéricos y en proyectos de investigación relacionados con las matemáticas y las Tecnologías de la Información.



Ing. Edison Luis Loján Cueva, Msig.

0000-0002-7092-1281 elojan@utmachala.edu.ec Filial: Universidad Técnica de Machala. Ingeniero de Sistemas, Magister en Sistemas de Información Gerencial y Especialista en Docencia Universitaria. Con más de dos décadas de experiencia en la enseñanza universitaria, ha ejercido la cátedra desde el año 2003 en instituciones como la Universidad Católica de Cuenca y actualmente en la Universidad Técnica de Machala, en donde continúa formando nuevas generaciones de profesionales. En su campo de experticia ha desarrollado una destacada labor docente e investigativa. Ha dirigido numerosos proyectos de tesis de grado y posgrado, contribuyendo al fortalecimiento académico y científico de la comunidad universitaria. Se distingue por su compromiso con la educación, su vocación por la enseñanza y su firme propósito de democratizar el conocimiento técnico a través de obras como esta, que buscan revelar la estructura lógica que sostiene el mundo de la computación.