

ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES PRÁCTICAS: Enfoques didácticos para la Ingeniería Química

Fredis Franco Pesantez
Wilson Patricio León Cueva
Delly Maribel San Martín Torres

ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES PRÁCTICAS: Enfoques didácticos para la Ingeniería Química

Fredis Franco Pesantez
Wilson Patricio León Cueva
Delly Maribel San Martín Torres



© **Fredis Franco Pesantez**

fpesantez@utmachala.edu.ec

Docente de la Carrera de Ingeniería Química, Facultad de Ciencias Químicas y de la Salud, Ecuador.

<https://orcid.org/0000-0001-5700-1344>

Wilson Patricio León Cueva

wleon@utmachala.edu.ec

Docente de la Carrera de Ingeniería Química, Facultad de Ciencias Químicas y de la Salud, Ecuador.

<https://orcid.org/0000-0002-5474-430X>

Delly Maribel San Martin Torres

dsanmartin@utmachala.edu.ec

Docente de la Carrera de Ingeniería Química, Facultad de Ciencias Químicas y de la Salud, Ecuador.

<https://orcid.org/0000-0002-4680-4042>

Primera edición, 2025-11-01

ISBN: 978-9942-53-090-5

DOI: <http://doi.org/10.48190/9789942530905>

Distribución online

 Acceso abierto

Cita

Pesantez, F., León, W., San Martín, D. (2025) ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES PRÁCTICAS: Enfoques didácticos para la Ingeniería Química. Editorial Grupo Compás

Este libro es parte de la colección de la Universidad Técnica de Machala y ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad de la publicación. El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones en las leyes, la producción o almacenamiento total o parcial de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de la misma por cualquiera de sus medios, tanto si es electrónico, como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización de los titulares del copyright.

Contenido	
CAPÍTULO 1	7
Conceptos fundamentales de las Ecuaciones Diferenciales	7
OBJETIVO:	7
1. Generalidades	8
1.1. Conceptos básicos y terminología empleada en las ecuaciones diferenciales	8
2. Clasificación de las ecuaciones diferenciales	10
2.1. De acuerdo con el orden.	10
2.2. De acuerdo a su linealidad.	11
2.2.1. Ecuación diferencial ordinaria lineal.	11
2.2.2. Ecuación diferencial ordinaria no lineal.	11
2.3. Ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas.	12
2.3.1. Ecuación homogénea.	12
2.4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.	14
2.5. Ecuaciones Diferenciales Parciales.	15
2.6. Ecuaciones Diferenciales exactas.	16
3. Encontramos la función potencial Fx, y tal que:	17
3.1. Curvas ortogonales.	17
3.2. Campos Direccionales.	18
3.3. Isóclinas.	18
3.4. Modelados Matemáticos	20
3.4.1. Formulación de supuestos	21
3.4.2. Aceptación de modelos simplificados	21
3.4.3. Representación matemática.	21
3.4.4. Verificación y ajuste	21
3.4.5. Esquema del proceso	22
3.4.6. Aplicación.	22
TALLER INTRA-CLASE	26
ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS	32
4. Referencias	34
CAPÍTULO 2	36
Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y sus Aplicaciones.	36
OBJETIVO	36
1. Variables separables.	38
2. Ecuación de la forma $dydx = fax + by$	39

3. Ecuaciones diferenciales homogéneas.....	41
3.1. Funciones Homogéneas.....	41
3.2. Definición Ecuación Diferencial Homogénea	41
3.3. Técnicas de Solución	42
<i>“Exploración de técnicas de modelado en sistemas dinámicos mediante ecuaciones diferenciales”</i>	43
3.4. Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas.....	43
3.5. Ecuaciones diferenciales exactas	45
<i>“Animaciones en Matlab y maple de ecuaciones diferenciales parciales de la física-matemática”</i>	46
ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS	54
4. Referencias	55
CAPÍTULO 3	57
<i>Ecuaciones Diferenciales de orden Superior y sus Aplicaciones.....</i>	57
OBJETIVO	57
1. Ecuación de Bernoulli.	59
1.1. Método para resolver ecuaciones diferenciales de Bernoulli:.....	60
2. Ecuación de Riccati	62
2.1. Método de Solución	62
<i>“Modelo de control óptimo para el sistema Producción - Inventarios” ..</i>	64
3. Ecuación de Cauchy- Euler.....	64
3.1. Método de Euler o de la recta tangente.....	67
3.2. Método de Euler mejorado o Método de Heun	69
Aplicación para la evaluación de un sistema de suspensión neumático. 71	
semiactivo-basada en métodos numéricos de Euler, Heun y Runge-Kutta de cuarto orden (RK4)	71
4. Método de Runge-Kutta	72
Análisis de la estabilidad transitoria en sistemas eléctricos de potencia por el método de Runge-Kutta.....	75
Introducción a la mecánica de fluidos: las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes.	76
Simulación unidimensional del comportamiento dinámico de una tubería horizontal biempotrada que transporta flujo bifásico gas - líquido usando un modelo homogéneo	76
ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA	81
5. Referencias	82

INTRODUCCIÓN

El sistema académico en Ecuador y a nivel del mundo ha avanzado significativamente en los últimos años, reformando su estructura, metodología, recursos académicos y actualizando la información obtenida respecto a asignaturas generales, a pesar de este cambio aún hay instituciones que enfrentan ciertos niveles de dificultad respecto a la formación continua de los estudiantes.

Las universidades crean el rol de aprendizaje: docente-estudiante el cual es bastante efectivo hasta cierto punto, ya que a menudo, la mayor parte de los educandos que conforman el curso no comprenden en su totalidad los contenidos propuesto en clase, ¿qué solución se podría implementar para aquellos estudiantes que necesitan ayuda en la comprensión de ciertos temas que representan distintos tipos de complejidad, siendo una alternativa en la elaboración e implementación de una guía didáctica o guía de estudio la cual es un recurso esencial que constituye una herramienta pedagógica en la mejora de los procesos de aprendizaje.

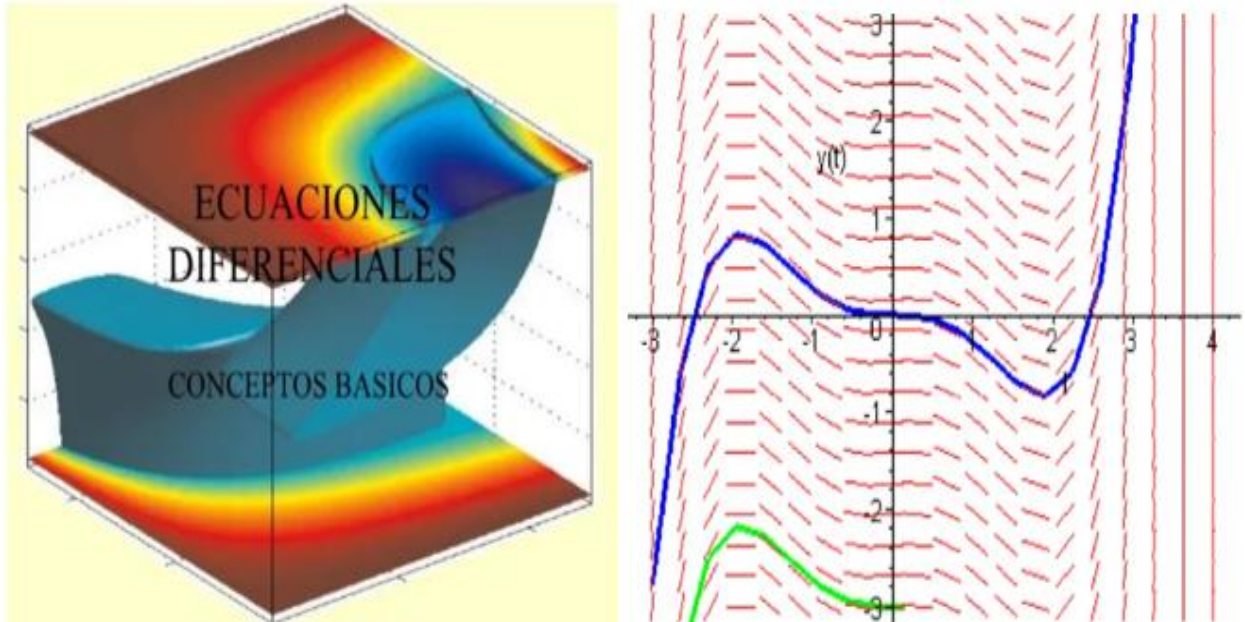
La asignatura de Ecuaciones Diferenciales se encuentra ubicada en el componente de la unidad básica en la carrera de Ingeniería Química, y se relaciona con otras asignaturas básicas como las matemáticas, cálculo diferencial e integral, análisis instrumental, físico químico y con asignaturas profesionales como el análisis numérico, estadística, termodinámica aplicada, fenómenos de transporte II, bromatología y entre otras. La intención fundamental es fortalecer los cálculos, técnicas lógicas y simulaciones de procesos ingenieriles que le permita predecir algoritmos y la posibilidad de analizar el comportamiento dinámico a través de los modelos matemáticos.

Además, comprende un papel fundamental para modelar una gran cantidad de fenómenos que se presentan en la naturaleza. También desarrolla habilidades en la utilización de técnicas y procedimientos aptitudinales para la modelación y resolución de problemas. Esta asignatura le permite al estudiante desarrollar habilidades con destrezas lógicas, criterios matemáticos para poder emplear diferentes métodos para la solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden, ecuaciones diferenciales de orden superior y aplicar métodos numéricos para simular y diseñar proyectos integradores que pueden ser aplicados en áreas de procesos de la minería, metalurgia y agroindustrial

Cada capítulo sigue una estructura establecida que inicia con una exposición teórica donde se explican de manera clara, sencilla y detallada los conceptos principales del tema. Para facilitar la comprensión, se incorporan ejemplos, notas y observaciones. Posteriormente, se presentan problemas resueltos con diferentes niveles de dificultad que aplican los conceptos teóricos previamente explicados. Finalmente, los capítulos concluyen con problemas propuestos, cuya dificultad es similar a los problemas resueltos, con el objetivo de que los estudiantes puedan verificar si han comprendido adecuadamente los conceptos abordados.

CAPÍTULO 1

Conceptos fundamentales de las Ecuaciones Diferenciales



OBJETIVO GENERAL: Relacionar los diferentes modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante una función desconocida y una variable independiente para la resolución ejercicios enfocados al entorno ingenieril.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Comprender qué es una ecuación diferencial relacionando las funciones desconocidas con sus derivadas para ser aplicados a ejercicios.
- Identificar las ecuaciones diferenciales según su orden, linealidad y homogeneidad por medio de ejemplos con respectivas demostraciones.
- Reconocer las diferencias entre ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales mediante ejercicios propuestos.

RESUMEN:

El cálculo se conoce como la matemática del cambio, pues permite describir y analizar cómo varían las cantidades. Las tasas de cambio se representan a través de derivadas, y una de sus aplicaciones más frecuentes es el planteamiento de ecuaciones diferenciales, donde intervienen una función desconocida $y=f(x)$ y su derivada. Resolver estas ecuaciones resulta esencial porque ofrece información precisa sobre cómo evolucionan ciertos fenómenos y, en muchos casos, ayuda a comprender las razones que explican dichos cambios. Existen diversas técnicas para resolver ecuaciones diferenciales, que van desde métodos analíticos tradicionales, hasta el uso de gráficos interpretativos o cálculos apoyados en herramientas computacionales. Cada enfoque tiene sus ventajas según el tipo de problema a resolver y la complejidad de la ecuación.

En este capítulo se introducen los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales, cómo verificar si una función dada es realmente solución, y se estudian algunos de los métodos más comunes para resolverlas. Además, se presentan ejemplos prácticos que ilustran su aplicación en problemas reales, resaltando el papel de las ecuaciones diferenciales como herramienta clave en la modelación matemática y en la comprensión de procesos dinámicos en física, biología e ingeniería.

1. Generalidades

1.1. Conceptos básicos y terminología empleada en ecuaciones diferenciales

Una de las formas de modelar fenómenos naturales es mediante su caracterización a través de una función matemática, digamos: $G = G(x, y, z, t)$. A su vez, Una de las formas para modelar los cambios de esta función, G , de la posición (x, y, z) y del tiempo t , es a través de una ecuación en la cual están implicadas la función $G = G(x, y, t)$ y sus derivadas (García A.E, 2016).

Cuando un cuerpo experimenta el fenómeno de caída libre, l o actúan sobre este la fuerza de gravedad y , por tanto, la aceleración de la gravedad (véase figura 1.1); entonces, una ecuación de movimiento del objeto es:

A continuación, se presenta un ejemplo de caída libre de un cuerpo.

Cuando un cuerpo experimenta el fenómeno de caída libre, lo actúan sobre este la fuerza de gravedad y , por tanto, la aceleración de la gravedad (véase figura 1.1); entonces, una ecuación de movimiento del objeto es:

$$F = ma = mu$$

Puesto que es un movimiento vertical, la ecuación es:

$$mg = m \frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt}$$

1a

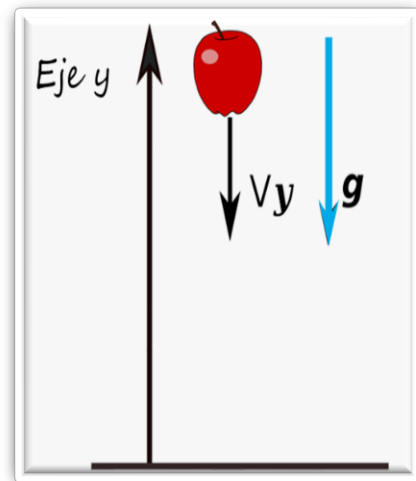


Figura 1.1

La velocidad es una función del tiempo. En esta ecuación se deriva la velocidad y la posición con respecto al tiempo, por tanto, es una ecuación diferencial. Entonces, ¿Qué es una ecuación diferencial? (García A.E, 2016)

Una ecuación diferencial es una igualdad que contiene derivadas de la variable dependiente y de la variable independiente. Asimismo, es una igualdad que contiene una o más derivadas que pueden ser de primer o segundo orden, para la mayoría de los fenómenos físicos (Acevedo, 2009).

Entonces, $g = \frac{dv}{dt}$ es una ecuación diferencial; la velocidad depende del tiempo. Por tanto, la solución es $v(t)$ donde v es la variable dependiente y t la variable independiente o considerando las condiciones iniciales:

$$v(t = 0) = v_0$$

$$-g = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = -g \int_0^t dt \Rightarrow v(t) = v_0 - gt$$

Al generalizar, podemos decir que una ecuación diferencial es de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y, y')$$

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y, y' \dots y^n)$$

En estos casos, (**y**) es la variable dependiente y (**t**) la variable independiente.

2. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

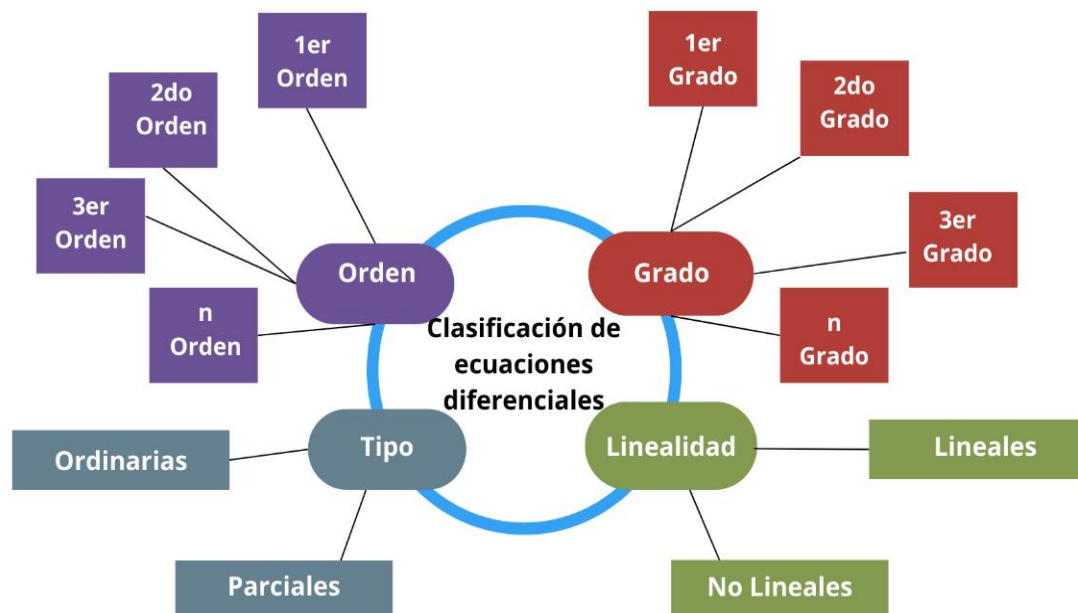


Figura 2: Clasificación de Ecuaciones diferenciales

Fuente: <https://elibro.net/es/ereader/utmachala/39371?page=15>

2.1. De acuerdo con el orden.

Una ecuación diferencial lineal de **primer orden** es una ecuación que involucra una función desconocida y su derivada primera, y que puede ser escrita en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(X)$$

Una ecuación diferencial lineal de **segundo orden** es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas primera y segunda, y que puede ser escrita en la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

Según Barreira, una ecuación diferencial **lineal de orden n** es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas hasta el orden n, y que puede ser escrita en la forma:

$$\frac{d^ny}{dx^n} + P(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + Q(x)y = R(x)$$

Además, el grado de una ecuación diferencial es el exponente de la derivada de mayor orden.

2.2. De acuerdo a su linealidad.

2.2.1. Ecuación diferencial ordinaria lineal

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden "n" es una ecuación en la que la derivada **n**-ésima de la variable y es una función lineal de las demás derivadas y de la propia función "y" (Rodríguez, 2022), es decir, es de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

2.2.2. Ecuación diferencial ordinaria no lineal

Este tipo de ecuaciones diferenciales no cumple las propiedades anteriores. Observa los ejemplos y sus características (Barreira, 2013).

- La ecuación diferencial $y'' + xyy' = \operatorname{sen} x$ es una ecuación diferencial ordinaria, de orden 2, grado 1, no lineal.
- La ecuación diferencial $c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = A$ es una ecuación diferencial parcial, de orden 2, grado 0.
- La ecuación diferencial $x^3 y y''' - x^2 y y'' + y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria, de orden 3, grado 1, lineal.
- La ecuación diferencial $y'' + 2x^3 y' - (x - 1)y = xy$ es una ecuación diferencial no homogénea, de orden 2, no lineal.
- La ecuación diferencial $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y} = \frac{x}{y}$ es una ecuación diferencial parcial, de orden 2, grado 1.

¿Sabías que? La física está llena de ecuaciones diferenciales parciales (PDE) lineales y no lineales, en áreas como el electromagnetismo y mecánica cuántica, pero en otras áreas, como la dinámica de los medios continuos o la relatividad general, las ecuaciones fundamentales son no lineal.



2.3. Ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas.

2.3.1. Ecuación homogénea.

La clase más conocida de ecuaciones diferenciales cuya estructura particular permite que puedan reducirse a la forma separable es la *ecuación homogénea*. Este tipo de ecuaciones son muy comunes y fáciles de manejar cuando se pueden separar las variables (Cengel, 2011). Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es homogénea si es posible expresarla como $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$y' = \frac{x^3 - y^3}{x^2 y} = \frac{x^3}{x^2 y} - \frac{y^3}{x^2 y} = \frac{x}{y} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{v} - v^2$$

La homogeneidad de las ecuaciones simples puede determinarse con facilidad mediante la inspección. Pero cuando se trata de ecuaciones complicadas, quizá sea necesario aplicar la siguiente prueba de homogeneidad: en la ecuación diferencial, reemplace todas las x por kx , y todas las y por ky , y simplifique. (Cengel, 2011)

Si después de la simplificación todas las k se cancelan y terminamos con la ecuación original, entonces la ecuación diferencial es homogénea; en caso contrario, no lo es. Por ejemplo, la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 y} =$$

es homogénea porque la sustitución $x = kx$ y $y = ky$ da:

$$\frac{d(ky)}{d(kx)} = \frac{(kx)^3 - (ky)^3}{(kx)^2(ky)} \rightarrow \frac{k dy}{k dx} = \frac{k^3 x^3 - k^3 y^3}{k^2 x^2 (ky)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 y}$$

Otra definición. - La función $f(x, y)$ se llama homogénea de grado n respecto a las variables x e y , si para todo t se verifica la identidad (C., 1992).

$$F(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Solución de una ecuación diferencial de primer orden.

Según Rodríguez la hipótesis de que la función $f(x, y)$ homogénea de grado cero, entonces $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ si se tiene una función tal que: $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Para comprobar si es homogénea, se realiza la sustitución (o cambio de variable) $tx = x$; $ty = y$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2$$

$$f(tx, ty) = t^2 x^2 + t^2 y^2 = t^2 (x^2 + y^2)$$

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$$

Es decir, la función homogénea de grado "n" depende sólo de la razón de los argumentos x e y . Si una ecuación diferencial tiene la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ tiene la siguiente propiedad (C., 1992).

$$1. M(tx, ty) = t^n M(x, y)$$

$$2. N(tx, ty) = t^n N(x, y)$$

Entonces se dice que tiene coeficientes homogéneos o que es una ecuación diferencial homogénea, si M y N son homogéneas del mismo grado, es posible hacer la siguiente sustitución: $x = yv$ ó $y = xv$. Por ejemplo, dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - 2y^2}$$

Es posible determinar si es homogénea usando la sustitución $x = yv$ y su diferenciación $dx = ydv + vdy$

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 2y^2)dy - xydx &= 0 \\
 ((yv)^2 - 2y^2)dy - (yv)y(ydv + vdy) &= 0 \\
 y^2v^2dy - 2y^2dy - y^3v dv - y^2v^2dy &= 0 \\
 -2y^2dy - y^3v dv &= 0 \\
 -2y^2dy &= y^3v dv
 \end{aligned}$$

2.4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (**EDO**) son ecuaciones matemáticas que describen la relación entre una o más funciones desconocidas con sus derivadas respecto a una sola variable independiente "y" (Zill, 2013).

Si una ecuación diferencial contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) (Cepeda, 2022).

Si se tiene una función que depende del tiempo, una ecuación diferencial podría ser algo como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} m = -R_u$$

Aunque parezca a primera vista una ecuación compleja, la realidad es que esta relación depende únicamente del tiempo (t) la cuál es la variable independiente, mientras que X es la variable dependiente con m expresado como una constante (Cepeda, 2022).

***Sabías que...** Hoy en día, existen enfoques de enseñanza y aprendizaje de las EDOPO que todavía privilegian los procedimientos algebraicos y no hacen uso adecuado de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (Cáceres, 2024). Por tanto, existe la necesidad de desarrollar estrategias didácticas que muestren cómo acomodar en la estructura cognitiva del estudiantado un esquema gráfico-algebraico sobre lo qué significa resolver una EDOPO.*



2.5. Ecuaciones Diferenciales Parciales.

De acuerdo (Sánchez, 2020) las ecuaciones diferenciales, son aquellas que tienen una o más derivadas de una función conocida. Se dice que es ordinaria, si la función incógnita tiene una sola variable, mientras que, si la misma depende de dos o más variables, la ecuación se denomina ecuación diferencial parcial.

Las ecuaciones diferenciales parciales (*EDP*) son ecuaciones que involucran derivadas parciales de una función con respecto a más de una variable independiente. A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), que solo involucran una variable independiente (por ejemplo, el tiempo), las *EDPs* describen fenómenos que dependen de varias variables (C., 1992).

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

Donde u es una función de las variables x y y , y 0 es una constante. En este caso, $\frac{d^2u}{dx^2}$ representa la derivada parcial de con respecto a x , mientras que $\frac{d^2u}{dy^2}$ es la segunda derivada parcial de con respecto a la variable y .

2.6. Ecuaciones Diferenciales exactas.

Una ecuación diferencial exacta es una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Que satisface una condición de exactitud, es decir, existe una función tal que:

$$\frac{Dr}{Dx} = M(x, y) \text{ y } \frac{Dr}{Dy} = N(x, y)$$

Si se cumple esta condición, entonces la ecuación es exacta y se puede resolver mediante la integración con respecto **(a)** y con respecto **(a)**, para encontrar la función que es la solución implícita de la ecuación diferencial.

Si no cumple con la condición para ser una diferencial exacta y se cumplen las condiciones del teorema Cauchy, entonces existe una función denominada factor integrante tal que (Barreira, 2013):

$$U[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = du$$

De donde se obtiene, que la función satisface la ecuación:

$$\frac{D}{Dx}(uM) = \frac{D}{Dy}(uN)$$

Otra definición: Si $z = f(x, y)$ es una función con derivadas parciales de primer orden continuas en una región rectangular R del plano xy, entonces su diferencial total, denotada por dz o df , se define como:

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$$

De modo que la solución de la ecuación diferencial $df = 0$ está dada implícitamente por: $f(x, y) = C$

Ejemplo: $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$

Resolución:

1. Identificamos "M" y "N":

$$M(x, y) = 5x + 4y; N(x, y) = 4x - 8y^3$$

2. Para verificar que es exacta hacemos la comparación $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4; \frac{\partial N}{\partial x} = 4 \rightarrow \text{Es exacta}$$

3. Encontramos la función potencial $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 5x + 4y$$

Integramos con respecto a "x"

$$F(x, y) = \int (5x + 4y)dx = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + h(y)$$

Ahora derivamos la función con respecto a "y":

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x + h'(y)'$$

Igualamos esta ecuación a "N": $N = 4x - 8y^3$

$$4x + h'(y) = 4x - 8y^3$$

$$h'(y) = -8y^3$$

Integramos esta ecuación:

$$\frac{d(h)}{dy} = -8y^3$$

$$\int dh = \int -8y^3 dy$$

$$h(y) = -2y^4$$

Entonces la función $F(x, y)$ es:

$$F(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4$$

3.1. Curvas ortogonales.

Las curvas ortogonales un concepto geométrico que aparece en el contexto de ecuaciones diferenciales, y se refiere a un conjunto de curvas que se interceptan de manera perpendicular entre sí. Este concepto es particularmente relevante cuando se analizan familias de soluciones de ecuaciones diferenciales. Una definición más rigurosa es:

$$F\left(x, y - \frac{1}{y}\right) = 0$$

Las Trayectorias ortogonales son las curvas que se interceptan formando ángulo recto. Para obtener las trayectorias originales de una ecuación diferencial, se toma:

$$m1 = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ y } m2 = -\frac{1}{m1}$$

3.2. Campos Direccionales.

Un campo direccional es una representación gráfica que muestra cómo las soluciones de una ecuación diferencial, como, se comportan en un plano. En cada punto, se dibuja una pequeña flecha cuya pendiente corresponde al valor de, es decir, a la derivada en ese punto. Esto permite visualizar cómo varían las soluciones sin necesidad de resolver la ecuación.

En términos formales, para cada punto en un dominio, la función proporciona la pendiente de la solución que pasa por ese punto. El campo direccional se construye dibujando pequeños segmentos de línea o vectores tangentes a las curvas solución en cada punto del dominio, de modo que cada segmento tiene pendiente. Esto permite visualizar la estructura geométrica de las soluciones de la ecuación diferencial, sin necesidad de conocer sus expresiones explícitas.

3.3. Isóclinas

Se llama **isóclina** al lugar geométrico de los puntos en los que las rectas tangentes a las curvas integrales consideradas tienen una misma dirección. La familia de las isóclinas de la ecuación diferencial viene dada por la condición (González J. &, 2023).

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

donde la función $f(x, y)$ está definida en algún conjunto D del plano xy , determina en cada punto (x, y) de D , el valor de y' , o sea, la pendiente de la recta tangente a la curva integral en este punto. Luego, podemos interpretar la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ como un conjunto de pendientes llamado **campo de direcciones**. La terna de números (x, y, y') determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x, y) . El conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del campo de direcciones (Alarcón, 2019).

El problema para resolver puede interpretarse como: encontrar una curva cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo en este punto. Para construir las curvas integrales introducimos las **isoclinas**.

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = -y - \text{sen}(x)$$

Resolución:

1. Calcular el factor integrante.

$$\frac{dy}{dx} + y = -\text{sen}(x)$$

$$u(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$$

Multiplicar la ecuación original por el factor integrante.

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = -e^x \text{sen}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = -e \text{sen}(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}(e^x y) dx = \int -e \text{sen}(x) dx$$

$$e^x y = -\int e^x \text{sen}(x) dx$$

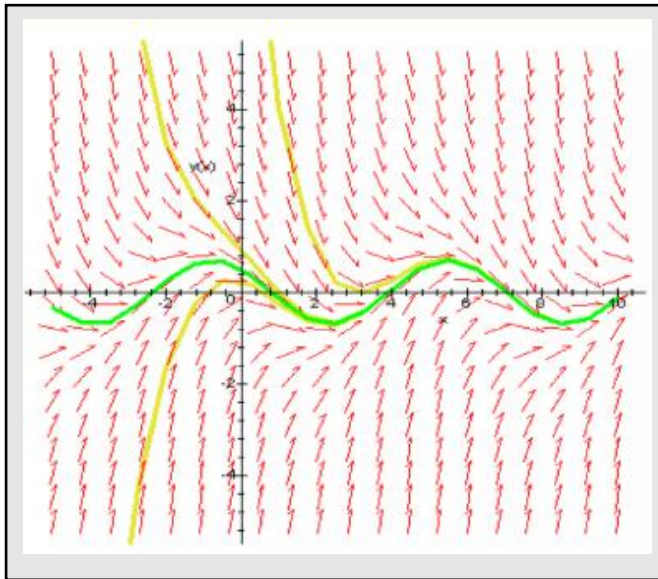
$$\int e^x \text{sen}(x) dx = \frac{e^x}{2} (\text{sen}(x) - \cos(x)) + C$$

$$e^x y = -\frac{e^x}{2} (\text{sen}(x) - \cos(x)) + C$$

$$y = -\frac{1}{2} (\text{sen}(x) - \cos(x)) + C e^{-x}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} (\cos(x) - \text{sen}(x)) + C e^{-x}$$

Gráfico en GeoGebra Para $C = 0$; Para $C \in \mathbb{R}$



Figuras 3.3: Isoclinas

Curva Isoclina; geogebra.25

3.4. Modelados Matemáticos

Un modelo es un objeto, concepto o conjunto de relaciones, que se utiliza para representar y estudiar de forma simple y comprensible una porción de la realidad empírica. Por consiguiente, debemos exponer lo que es un modelo matemático (Vilches, 2019).

(Rodríguez Gallegos, 2016), considera que el ciclo de modelación matemática está configurado por una sucesión de praxeologías donde, al menos, exista una por cada una de las etapas de éste, así como algunas presentes en las transiciones entre las etapas.

Definir las variables que describen el sistema es crucial. Estas variables, denotadas como $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$, representan las cantidades que cambian con el tiempo o con otras variables dependientes. Por ejemplo, en un modelo de población $x(t)$, podría representar el número de individuos en el sistema en el tiempo t (Alarcón, 2019).

3.4.1. Formulación de supuestos

Los supuestos sobre el comportamiento del sistema se expresan como relaciones matemáticas. Esto puede incluir aproximaciones sobre la linealidad o la dependencia de las variables. Por ejemplo, si se asume que la tasa de cambio de la población depende de la población misma de forma proporcional, podríamos escribir un supuesto como:

$$\frac{d}{dt}x(t) = rx(t)$$

3.4.2. Aceptación de modelos simplificados

A menudo, para simplificar el análisis, se aceptan ciertos modelos de baja resolución. Esto puede implicar omitir términos de baja magnitud o condiciones ideales. Por ejemplo, si ignoramos la resistencia del aire en un modelo de caída libre de un objeto, podemos representar la dinámica solo con la ecuación diferencial (Alarcón, 2019).

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{kdy}{dt}$$

3.4.3. Representación matemática

Las ecuaciones diferenciales que describen el sistema son fundamentales en esta etapa. Estas ecuaciones suelen expresarse como:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

3.4.4. Verificación y ajuste

Una vez que se ha obtenido una solución al sistema de ecuaciones, esta solución debe compararse con datos experimentales. Si las predicciones no se ajustan a la realidad, se puede ajustar el modelo modificando los parámetros del sistema o incluyendo términos adicionales. Por ejemplo, si la solución no encaja bien con los datos, podríamos ajustar en el modelo de población, o bien añadir términos que representen nuevos efectos, como el consumo de recursos (Cullen, 2023).

$$\frac{d}{dt}x(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

3.4.5. Esquema del proceso

El modelo debe ser flexible y permitir la incorporación de nuevas variables o la modificación de los supuestos. Esto se refleja en la forma matemática mediante la adición de términos adicionales o la introducción de nuevos estados variables. Por ejemplo, en un modelo climático, podemos agregar variables como la temperatura $T(t)$, la concentración de CO₂ $C(t)$, y escribir un sistema de ecuaciones diferenciales interrelacionadas (Cullen, 2023).

$$\frac{dT}{dt} = kT + nC$$

Proceso de estudio de fenómenos físicos



Figura 3.4.5: Esquema del proceso

3.4.6. Aplicación

3.4.6.1 Ley de enfriamiento de Newton.

La ley de enfriamiento de Newton describe o predice el cómo un cuerpo gana o pierde calor, cuando se encuentra en un entorno con una temperatura diferente de la suya. Es útil para predecir la velocidad a la que cambia la temperatura de un objeto con respecto al tiempo.

La ley de enfriamiento de Newton afirma que el ritmo de pérdida de calor de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno.

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_A)$$

Fórmula 1.1.

En donde:

- dT es la tasa de transferencia de calor respecto al tiempo, expresado en otros textos como Q o $T'(t)$. [K/s]
- k es una constante de proporcionalidad, dependiente de características físicas de la sustancia o material que la contiene. [$1/s$]
- $T(t)$ es la transferencia de calor respecto al tiempo. [K]
- T_A es la temperatura ambiente. [K]

Esta ecuación diferencial es muy útil en ingeniería química sobre todo en procesos químicos, intercambiadores de calor, para analizar enfriadores y calentadores de equipos industriales, y en procesos térmicos, para diseñar sistemas de enfriamiento o calefacción. Además de la ingeniería tiene importantes aplicaciones en las **ciencias forenses**, ayuda a estimar el tiempo transcurrido desde la muerte (algor mortis) mediante la pérdida de temperatura del cuerpo.

Como ejemplo de aplicación de esta ley en procesos cotidianos, calcularemos la hora de muerte en un caso de homicidio:

“Antes del mediodía, el cuerpo de una aparente víctima de homicidio se encuentra en un cuarto que se conserva a una temperatura constante de 70°F, al medio día la temperatura del cuerpo es de 80°F y a las 13:00 horas es de 75°F considerando que la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte era 98.6°F. ¿Cuál fue la hora de la muerte?”

A continuación, se procede a realizar los siguientes pasos, basados en el contexto de la aplicación de la matemática, cálculo diferencial y cálculo integral, haciendo uso de las herramientas tecnológicas.

Paso 1: Integrando la fórmula **1.1** obtenemos la siguiente función de T .

$$T(t) = T_A + Ce^{kt}$$

Paso 2: Datos:

$$- T_A: 70^\circ F \quad T_0: 80^\circ F \quad T_1: 75^\circ F$$

Paso 3: Resolución:

$$\begin{aligned} T(0) &= 70^\circ F + Ce^{k(0)} = 80^\circ F \\ &= 70^\circ F + C(1) = 80^\circ F \end{aligned}$$

$$= C = 80^{\circ}F - 70^{\circ}F = 10^{\circ}F \quad \mathbf{C = 10^{\circ}F}$$

$$T(1) = 70^{\circ}F + (10^{\circ}F)(e^{k(1)}) = 75^{\circ}F$$

$$= 70^{\circ}F + (10^{\circ}F)(e^k) = 75^{\circ}F$$

$$= (10^{\circ}F)(e^k) = 75^{\circ}F - 70^{\circ}F$$

$$= e^k = \frac{5^{\circ}F}{10^{\circ}F}$$

$$\ln(e^k) = \ln(0.5)$$

$$\mathbf{k = -0.693147}$$

Paso 4

Finalmente obtenemos el tiempo transcurrido desde el instante en que el cadáver tenía una temperatura de 98.6°F.

$$T(t) = T_A + Ce^{kt}$$

$$\frac{T(t) - T_A}{C} = e^{kt}$$

$$\ln\left(\frac{T(t) - T_A}{C}\right) = \ln(e^{kt})$$

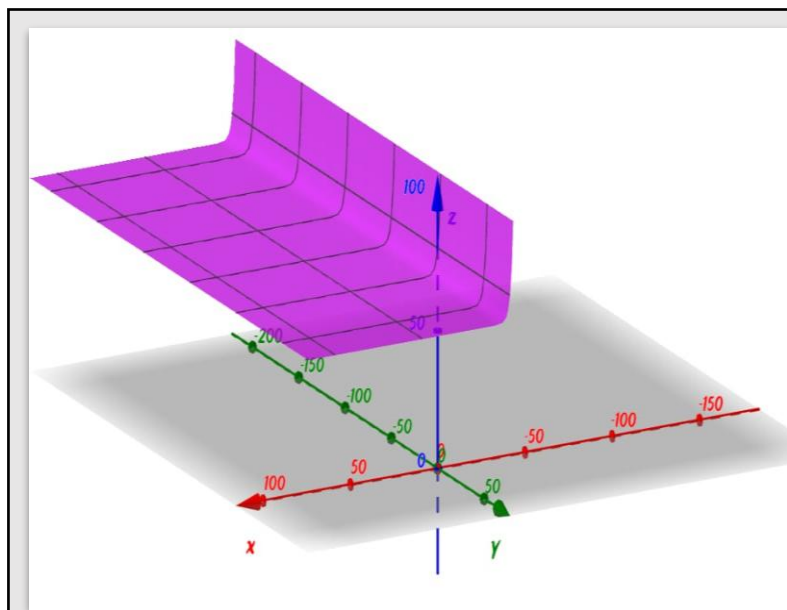
$$\left(\frac{\ln\left(\frac{T(t) - T_A}{C}\right)}{k}\right) = t$$

$$\left(\frac{\ln\left(\frac{98.6^{\circ}F - 70^{\circ}F}{10^{\circ}F}\right)}{-0.693147 \frac{1}{s}}\right) = t$$

$$t = -1.516$$

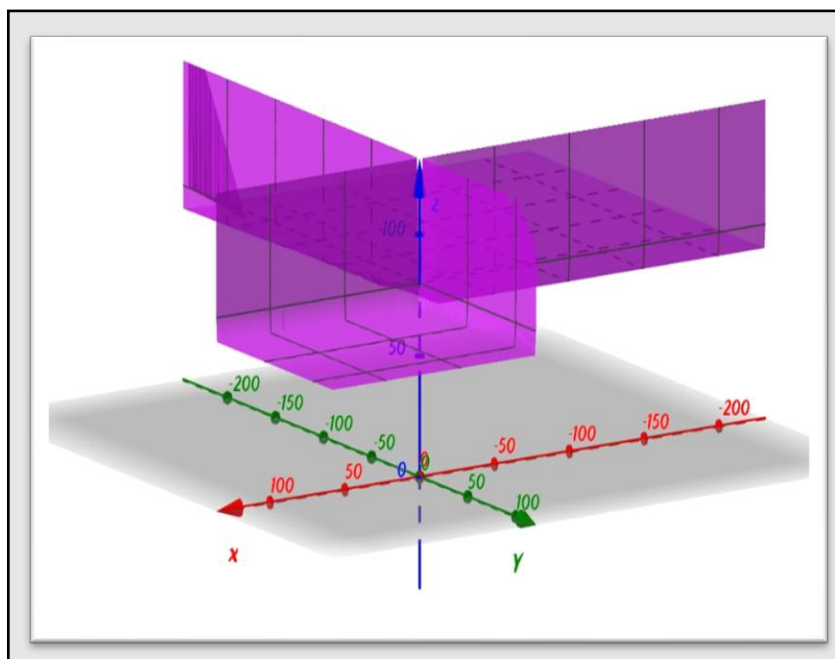
Según la descripción del ejercicio podemos deducir que el tiempo está en unidades de horas, por lo que el deceso se produjo hace 1.516 horas o 90.96 min hasta ese momento, el signo negativo no es un error de cálculo, sino que expresa "hace cuanto" el cuerpo empezó a enfriarse.

$$T(t) = 70^{\circ}F + (10^{\circ}F)e^{-0.6931t}$$



Grafica 6

Fuente: GeoGebra, 2024. Ejes: (x, tiempo; z, temperatura)



Grafica 7

Fuente: GeoGebra, 2024. Ejes: (x, tiempo; z, temperatura)

TALLER INTRA-CLASE

TEMA: Ecuación diferencial ordinaria lineal y no lineal

Escoja e indique el tipo, orden, grado, variable dependiente (y) variable independiente de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $dy + (3xy + \cos x)dx = 0$

- a) ordinaria, primer orden, primer grado, lineal, variable dependiente (y), variable independiente (x).
- b) ordinaria, segundo orden, tercer grado, no lineal, variable dependiente (x), variable independiente (y).
- c) parcial, primer orden, segundo grado, lineal, variable dependiente (y), variable independiente (x).

2. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - xy^3 + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$

- a) parcial, tercer orden, segundo grado, no lineal, variable dependiente (y), variables independientes (x, t).
- b) parcial, segundo orden, primer grado, no lineal, variable dependiente (y), variables independientes (x, t).
- c) Parcial, primer orden, segundo grado, lineal, variables dependientes (y, t), variable independiente (x).

TEMA: Ecuaciones Diferenciales Homogéneas y no Homogéneas

1) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

a) $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$

2) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas.

a) $y'' - 9y = -6 \cos 3x$

b) $y'' - 3y = -12t$

TEMA: Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Indique el tipo y el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales parciales.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot x \cdot y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \cdot \partial y} + x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \cdot u = 5 \cdot y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = y$$

TEMA: Ecuaciones diferenciales exactas

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas.

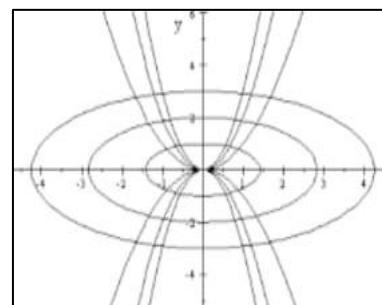
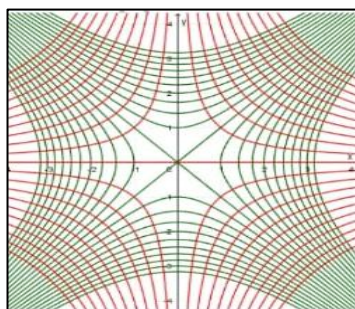
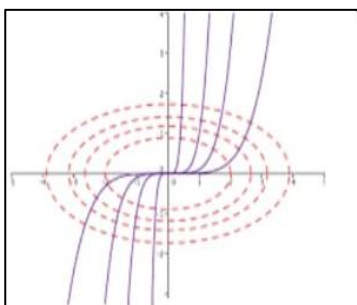
a) $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$

b) $(2xy^2 - 3)dx + (2x^2y + 4)dy = 0$

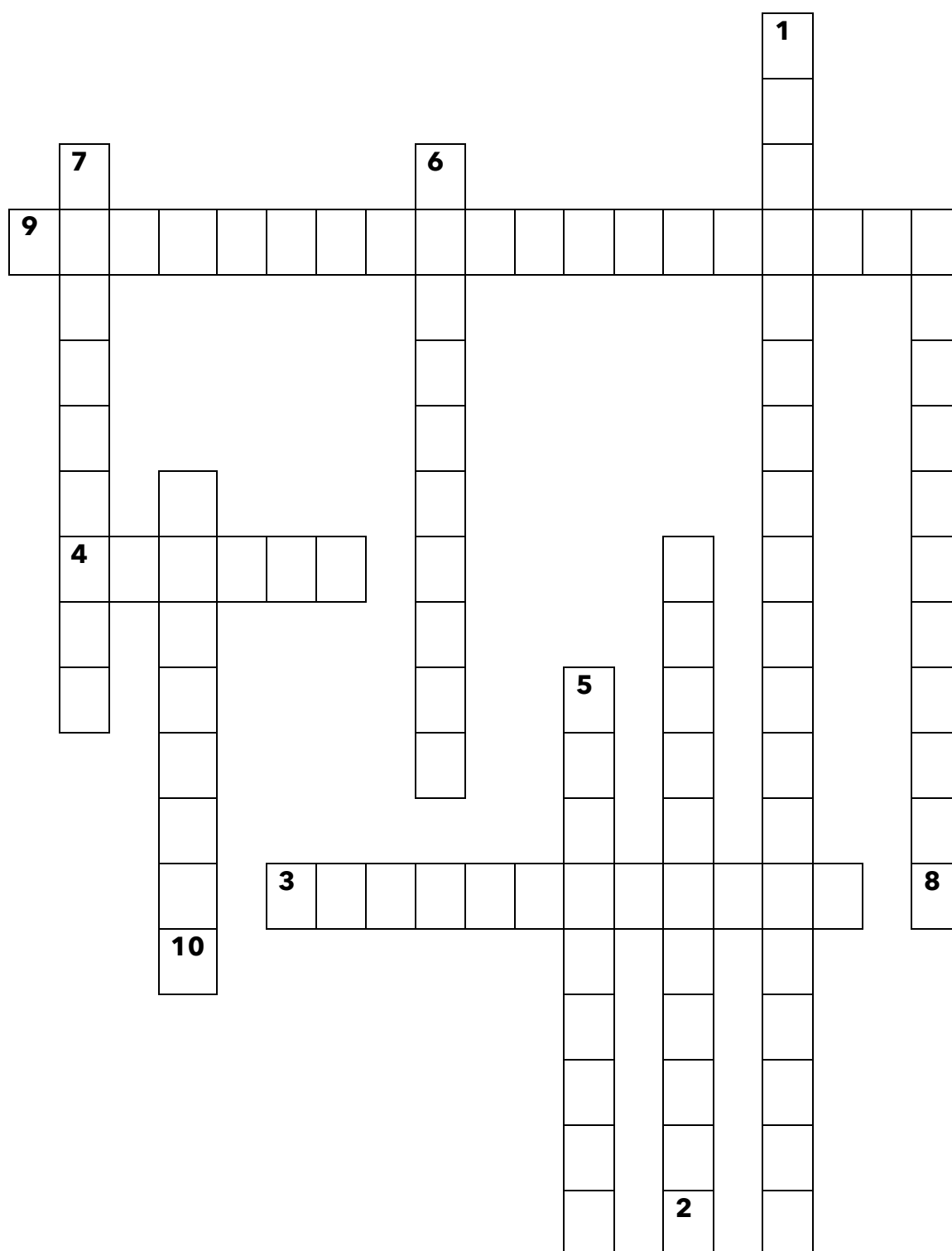
TEMA: Curvas ortogonales

Seleccione la respuesta correcta: ¿A qué curva le pertenece la siguiente ecuación?

a) $x^2 - y^2 = k$



ACTIVIDAD 1 CRUCI-ECUACIONES



ACTIVIDAD 2 ¡Pon a prueba tu mente y revela todo tu conocimiento

resolviendo esta sopa de letras desafiante!

J	T	B	J	Z	L	M	L	J	N	M	O	I	Y	U	E
G	G	D	C	V	K	H	J	G	B	C	S	Z	F	H	G
U	R	L	V	A	I	T	K	N	G	R	A	R	J	E	C
L	A	M	B	R	H	C	A	L	Q	H	T	H	O	C	V
Y	F	H	N	I	G	R	N	K	U	F	C	C	P	U	B
F	I	G	M	A	F	E	C	U	R	V	A	S	U	A	N
L	C	H	P	B	D	N	U	H	F	T	X	N	Y	C	M
E	A	K	O	L	S	J	G	N	O	L	E	O	T	I	F
S	J	H	D	E	R	I	V	A	D	A	S	I	K	O	H
F	D	A	I	S	A	O	J	M	S	J	C	C	J	N	G
G	O	E	U	E	M	K	K	S	I	G	I	N	M	A	H
N	O	H	O	M	O	G	E	N	E	A	S	U	L	Y	J
R	F	D	T	R	A	Y	E	C	T	O	R	I	A	S	L
A	H	A	R	Y	C	F	L	Y	Y	D	K	U	I	O	P
M	O	D	E	L	O	M	A	T	E	M	A	T	I	C	O

- **Gráfica**
- **Modelo matemático**
- **Variables**
- **Ecuación**
- **No homogéneas**
- **Exactas**
- **Trayectorias**
- **Derivadas.**
- **Curvas**

Actividad 3 ¡Completa los enunciados y demuestra cuánto sabes resolviendo este reto lleno de conocimiento!

- a) El modelo debe ser flexible y permitir la incorporación de.....o la modificación de los supuestos.
- b) El.....se construye dibujando pequeños segmentos de línea o vectores tangentes a las.....en cada punto del dominio, de modo que cada segmento tiene pendiente.
- c) Una de las formas de modelar fenómenos naturales es mediante su.....a través de una función.....
- d) Una.....es una igualdad que contiene derivadas de la variable dependiente y de laindependiente.
- e) El grado de una ecuación diferencial es el.....de la derivada de mayor orden.
- f) La.....de las ecuaciones simples puede determinarse con facilidad mediante la inspección.
- g) Las curvas ortogonales es un concepto.....que aparece en el contexto de ecuaciones diferenciales
- h) Se llama.....al lugar geométrico de los puntos en los que las rectas tangentes a las.....consideradas tienen una misma dirección.

- nuevas variables
- campo direccional
- curvas solución
- caracterización
- matemática
- ecuación diferencial
- variable
- exponente
- homogeneidad
- geométrico
- isóclina
- curvas integrales



ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Indica si las siguientes expresiones corresponden o no a una ecuación diferencial. Justifica con detalle tu respuesta.

- $y' = y \cos x$
- $u + v \operatorname{sen}^2 u = 0$
- $\frac{5}{dx} + 2v = 3$
- $\frac{1}{2}x + 2y^5 - 2 = 6$
- $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x$

2. Completa la siguiente tabla sobre la clasificación de las ecuaciones diferenciales

Ecuación Diferencial	Ordinaria o Parcial	Variable Independiente	Variable Dependiente
$\frac{dy}{dx} = x^3 - 2 + 3$			
$y' = \sqrt{3x - 1}$			
$\frac{\partial^2 v}{\partial v} = 5 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}$			
$y'' = \operatorname{sen} x - y$			
$t' = \frac{2v - 4}{3 + t^2}$			
$\frac{\partial p}{\partial t} = e^x p$			

3. Resolver:

"Sea la función $y = 2x^3 - 2x^2 - 13x + 22$. Comprobar que esta es la solución de la ecuación diferencial $y' = 12x - 4$

4. Clasifica las siguientes ecuaciones ordinarias o parciales, y señala su orden, grado y si es lineal o no lineal.

a) $y'' - 4z^4y' + (z - 1)y = xz^3$

b) $\frac{d^2y}{dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

c) $t^2y - t^3y'' + 6y = 0$

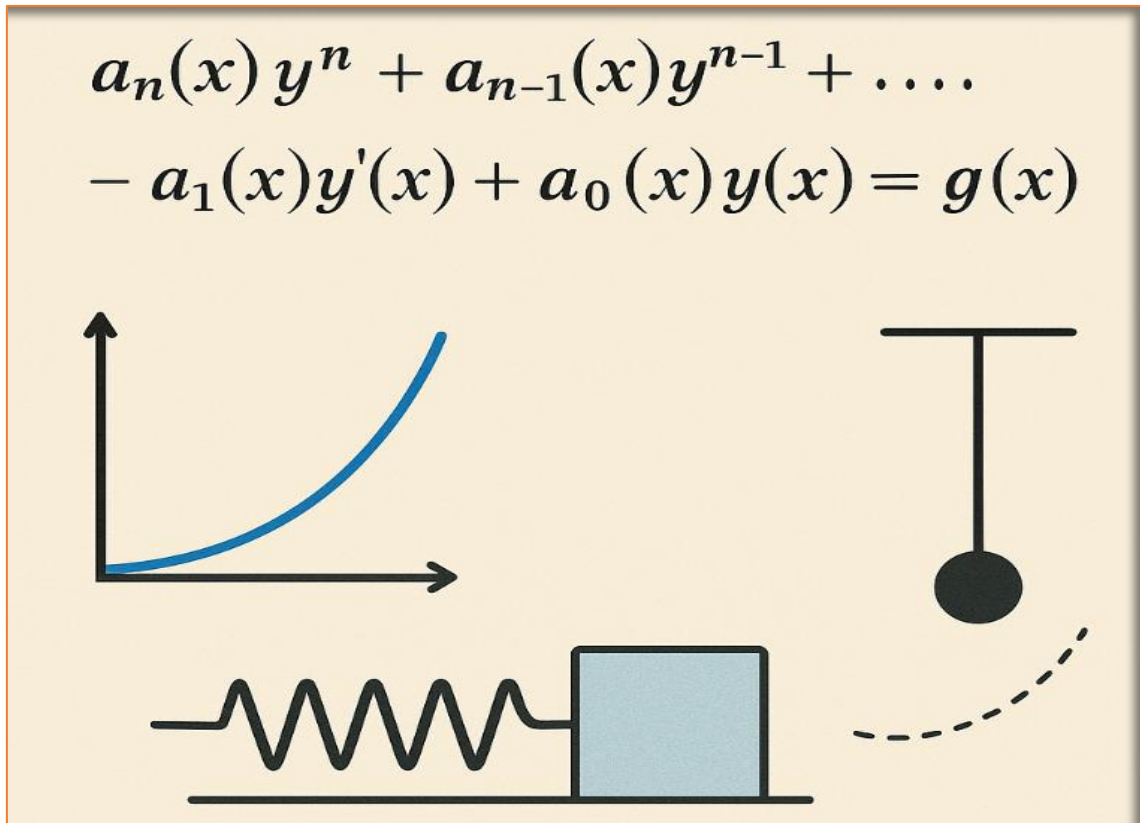
4. Referencias

- Acevedo, E. (2009). *Ecuaciones diferenciales* . Santiago de Chile: Ebooks Patagonia-Editorial.
- Alarcón, A. S. (2019). *Ecuaciones diferenciales parciales (2a ed.)*. Valparaíso .
- Barreira, L. &. (2013). *Ecuaciones diferenciales ordinarias* . Madrid: Delta Publicaciones .
- Becerril, J. V. (2004). *Ecuaciones diferenciales: Técnicas de solución y aplicaciones* . México : Universidad Autónoma Metropolitana .
- C., J. I. (1992). *Ecuaciones diferenciales* . México : Addison Wesley .
- Cáceres, M. E. (2024). Aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias mediado con GeoGebra. *Guatemalteca de Educación Superior*, 7(1), 96-112.
- Castrillo, C. J. (2022). Aprendizaje de ecuaciones diferenciales aplicadas en física utilizando tecnología. *Torreón Universitario*, 11(31), 26-35.
- Cengel, Y. A. (2011). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias* . Ciudad de México: McGraw-Hill.
- Cepeda, L. (2022). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: Teoría y ejercicios propuestos* . Guayaquil, Ecuador: CIDE .
- Cullen, D. G. (2023). *Matemáticas avanzadas para ingeniería. Vol. 1: Ecuaciones diferenciales* . México: McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- García A.E, &. R. (2016). *Ecuaciones Diferenciales: una nueva visión.* . México: Grupo Editorial Patria .
- González, J. &. (2023). *Ecuaciones diferenciales: Aplicaciones y modelo de biomatemáticas con Matlab y Simulink*. Quito, Ecuador: Universitaria Abya-Yala.
- Molina, P. P. (2023). Predicción del rendimiento académico mediante técnicas del análisis multivariado en la asignatura de ecuaciones diferenciales. *Tesla Revista Científica*, 3(1), e126-e126.
- Orlandini, I. &. (2020). Crecimiento económico y crecimiento poblacional: una aplicación del modelo de ecuaciones diferenciales en Bolivia. *Investigación & Negocios*, 13(22), 70-77.

- Ramírez, J. H. (2022). *Ecuaciones diferenciales libro interactivo* . Córdoba, España: Fondo RED Descartes .
- Rodríguez Gallegos, R. &. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1), 99-124. Obtenido de El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. .
- Rodríguez, R. M. (2022). *Ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones* . La Habana: Universitaria .
- Sánchez, M. A. (2020). Las ecuaciones diferenciales y su aplicación en la economía. *E-IDEA Journal of Business Sciences*, 2(4), 1-7.
- Vilches, G. (2019). *Modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales y su aplicación a la economía*. Jaén, España: Universidad de Jaén.
- Zill, D. G. (2013). *Matemáticas avanzadas para ingeniería* . Ciudad de México : McGraw-Hill.

CAPÍTULO 2

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y sus Aplicaciones.



OBJETIVO GENERAL: Comparar los tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante la aplicación de sus axiomas para entender su desarrollo en los ejercicios propuestos con énfasis al área ingenieril.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Identificar diferentes tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden y sus propiedades mediante la aplicación de teoremas y expresiones matemáticas.

- Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de separación de variables, para la obtención de la solución general.
- Solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas y reducibles a homogéneas para obtener la solución general.
- Aplicar el método del factor integrante para la solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

RESUMEN:

Este capítulo aborda de manera integral el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden y los métodos fundamentales para resolverlas. Se inicia con la explicación de la técnica de separación de variables, mostrando cómo permite obtener soluciones generales mediante integración. Posteriormente, se desarrollan las ecuaciones homogéneas, en las que se introduce el cambio de variables como herramienta clave para simplificar y facilitar el proceso de resolución. También se examinan las ecuaciones exactas, destacando las condiciones necesarias para su aplicabilidad. De igual forma, se presenta el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, explicando su forma canónica y la utilidad del método del factor integrante para hallar soluciones precisas. Cada método es acompañado de ejemplos prácticos orientados a la física, la ingeniería y otros campos aplicados. En conjunto, el capítulo resalta la relevancia de estas técnicas en el análisis y comprensión de sistemas dinámicos.

1. Variables separables.

El método de separación de variables en ecuaciones diferenciales parciales nos permite reducir el problema original a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), el cual se puede resolver por cuadraturas. La aplicación exitosa de este método a varias ecuaciones lineales de la fisicomatemática nos lleva a buscar una transformación de variables tal que en las nuevas variables la EDP se puede resolver mediante un variable separable (aditivo o multiplicativo) para encontrar una solución (Shingareva, 2010).

Llamamos así a las ecuaciones que pueden escribirse de la siguiente manera:

$$F(x) G(y) dx + H(x) P(y) dy = 0$$

Son ecuaciones en las que ambas variables, dependiente e independiente, pueden separarse. Para resolverlas, se procede a dicha separación y se integra respecto de cada variable (López, 2007). El proceso de resolución es el siguiente:

En primer lugar, dividimos la ecuación por $G(y) H(x)$:

$$\frac{F(x) G(y)}{H(x) G(y)} dx = - \frac{H(x) P(y)}{P(y) H(x)} dy$$

A continuación, simplificamos para separar las variables:

$$\frac{F(x)}{H(x)} dx = - \frac{P(y)}{G(y)} dy$$

La ecuación queda resuelta integrando en cada miembro respecto de su variable:

$$\int \frac{F(x)}{H(x)} dx = - \int \frac{P(y)}{G(y)} dy$$

Y la solución general es: $f(x) + g(y) = C$

Es importante señalar que, durante las operaciones realizadas, al dividir entre $G(y) H(x)$, $G(y)$ y $H(x)$ no deben ser nulas. Se debe comprobar, para tener la seguridad de haber obtenido la solución general del problema, que

$G(y) = 0$ y $H(x) = 0$ no llevan a una solución y , si lo hacen, añadir las si no están incluidas en la expresión calculada al integrar (López, 2007).

¿Sabías que...? La nueva pedagogía viene realizando grandes aportes con el propósito de mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje en la educación, sin embargo, según (Jaimes-Contreras, 2012) en el estudio de las ecuaciones diferenciales (ED) actualmente "predomina el enfoque algebraico como reflejo de la primera forma que se tuvo de resolver estos problemas" y que algunos docentes emplean como estrategia didáctica.

2. Ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$

Cuando se tiene una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$ para resolverla es necesario considerar los siguientes puntos:

Se realiza el cambio de variable $z = ax + by$

La función $y(x)$ se cambia por $z(x)$; este cambio de variable transforma la ecuación en Una ecuación de variables separables (García Hernández, 2016).

Pasos para resolver una ecuación de este tipo:

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y' = 3x + 5y$

Hacer el cambio de variable $z = 3x + 5y$.

Entonces:

$$\frac{dz}{dx} = 3 + 5 \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} \frac{dz}{dx} - \frac{3}{5}$$

Por tanto, la ecuación diferencial será: $\frac{1}{5} \frac{dz}{dx} - \frac{3}{5} = z$

Separar las variables:

$$\frac{dz}{dx} = 5z + 3 \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{5z+3} = dx$$

Integrar:

Fórmula de integración utilizada:

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$$

$$\int \frac{dz}{5z+3} = \int dx$$

$$\frac{1}{5}\ln(5z+3) = x + C \quad \Rightarrow \quad \ln(5z+3) = 5x + 5C$$

$$e^{\ln(5z+3)} = e^{5x+5C} = Ae^{5x} \quad \Rightarrow \quad (A = e^{5C})$$

$$5z + 3 = Ae^{5x}$$

La solución z es: $z = \frac{A}{5}e^{5x} - \frac{3}{5}$

Regresar a la variable y. Puesto que $z = 3x + by$:

$$3x + 5y = \frac{A}{5}e^{5x} - \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad C_1e^{5x} - \frac{3}{5}x - \frac{3}{25}$$

Comprobación de la solución:

Derivar y con respecto a x:

$$y = 5C_1e^{5x} - \frac{3}{5}$$

Despejar a C1 de y:

$$C_1 = ye^{-5x} + \frac{3}{5}xe^{-5x} - \frac{3}{25}e^{-5x}$$

Al sustituir C, en y' se obtiene la ecuación diferencial:

$$y' = 5 \left(ye^{-5x} + \frac{3}{5}xe^{-5x} - \frac{3}{25}e^{-5x} \right) e^{5x} - \frac{3}{5} = 5y + 3x + \frac{3}{5} - \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \quad y' = 5y + 3x$$

3. Ecuaciones diferenciales homogéneas

3.1. Funciones Homogéneas.

Definición: Una función homogénea es aquella que todos sus términos son del mismo grado.

Para poder identificarlas: Sea una $f(x, y)$ una función homogénea de grado n :

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Esto significa que debemos reemplazar en toda la ecuación x e y por tx y ty respectivamente, si se obtiene la misma ecuación multiplicada por t^n se dice que es homogénea y además su grado es el valor de n , tal como se muestra en los ejemplos descritos a continuación:

Ejemplo: Comprobar si la siguiente función es homogénea:

$$f(x, y) = x + y$$

Solución:

$$f(tx, ty) = tx + ty$$

$$tf(x, y) = t(x, y)$$

Cumple con la condición, por lo tanto, es homogénea de grado 1.

-Ejemplo... Comprobar si la siguiente función es homogénea:

$$f(x, y) = \sin(x + y)$$

Solución:

$$f(tx, ty) = \sin(tx + ty)$$

$$tf(x, y) = \sin[t(x, y)]$$

No cumple con la condición, por lo tanto, no es homogénea.

3.2. Ecuación Diferencial Homogénea

Definición 2.4 Si se tiene una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.7)$$

Se puede aplicar una regla general que permite identificar si la ecuación es homogénea o no, para ello se analiza los coeficientes $M(x, y)$ y $N(x, y)$ si son funciones del mismo grado entonces la ecuación es HOMOGÉNEA.

3.3. Técnicas de Solución

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales se debe utilizar sustituciones que las convertirán en ecuaciones diferenciales de variables separables.

Ejercicio: Resolver

$$2x^3ydx + (x^4 + y^4)dy = 0$$

Solución:

Se aplica la sustitución: $x = uy$

$$\frac{dx}{dy} = y \frac{du}{dy} + u$$

$$dx = ydu + udy$$

$$2u^3y^4(ydu + udy) + (u^4 + y^4)dy = 0$$

$$2u^3y^5du + 2u^4y^4dy + u^4y^4dy + y^4dy = 0$$

$$2u^3y^5du + 3u^4y^4dy + y^4dy = 0$$

$$2u^3y^5du + y^4(3u^4 + 1)dy = 0$$

$$\int \frac{2u^3}{3u^4 + 1} du + \int \frac{dy}{y} = 0$$

$$t = 3u^4 + 1, dt = 12u^3 du$$

$$\frac{1}{6} \ln(3u^4 + 1) + \ln(y) = \ln(c)$$

$$\frac{1}{6} \ln\left(3 \frac{x^4}{y^4} + 1\right) + \ln(y) = \ln(c)$$

$$\left(3 \frac{x^4}{y^4} + 1\right) y^6 = c$$

La solución general es:

$$3x^4y^2 + y^6 = c$$

Nota: A veces es conveniente intentar los dos cambios de variable sugeridos ya que puede conducir a una ecuación más sencilla de resolver.

Ejercicios propuestos

$$2x^3ydx + (x^4 + y^4)dy = 0$$

$$ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0 \qquad (xy' - y) \arctan \frac{y}{x} = x$$

“Exploración de técnicas de modelado en sistemas dinámicos mediante ecuaciones diferenciales”

Autor/a: Emily Ashley Alvarado Bastidas

El modelado de sistemas dinámicos mediante ecuaciones diferenciales es esencial para comprender y predecir el comportamiento temporal en sistemas complejos en diversas áreas como la física, la ingeniería, la biología y la economía. Estas ecuaciones actúan como herramientas matemáticas precisas que describen la evolución de las variables en los sistemas, considerando sus dependencias temporales y espaciales. El desarrollo del modelado de sistemas dinámicos ha avanzado considerablemente desde la física teórica, explorando diversas técnicas que amplían su aplicabilidad en múltiples campos. Este estudio se centró en realizar una revisión exhaustiva de estas técnicas, utilizando un enfoque metodológico riguroso. La investigación se estructuró en varias etapas clave para abarcar todo el campo, con un énfasis particular en el análisis detallado de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales (EDO y EDP) (Bastidas, 2024, 18 octubre).

3.4. Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Si se tiene una ecuación diferencial de la forma:

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

En la que el numerador y denominador son rectas, se puede reducir a una ecuación homogénea haciendo un cambio de variable. Para ello primero se analizan dichas rectas y su punto de intersección, se obtiene el determinante λ de la matriz de coeficientes de x e y como se muestra a continuación:

$$\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Sí, λ es diferente de 0 entonces se sustituye:

$$x = u + \alpha$$

$$y = v + \beta$$

En la ecuación diferencial y ahora el problema se reduce a encontrar los valores de α y β para ello se resuelve el siguiente sistema:

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

Que se obtiene de sustituir en las rectas la variable x por α e y por β , para ello se puede seguir cualquier procedimiento que el lector conozca. De esta sustitución se obtiene una ecuación diferencial homogénea respecto a las nuevas variables u y v .

Sí, $\lambda = 0$ se debe utilizar la sustitución simple $a_1x + b_1y = u$ que permite obtener una ecuación diferencial de variable separable en términos de la nueva variable u .

Ejemplo: Resolver

$$y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$$

Solución:

Se comprueba el valor de λ :

$$\lambda = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, se utiliza la sustitución:

$$x + y = u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Sustituyendo se tiene:

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1 - 3u}{1 + u}$$

$$(du - dx) = \frac{1 - 3u}{1 + u} dx$$

$$du = \left(\frac{1 - 3u}{1 + u} + 1 \right) dx$$

$$du = \left(\frac{1 - 3u + 1 + u}{1 + u} \right) dx$$

$$du = 2 \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right) dx$$

$$\frac{u + 1}{u - 1} du + 2dx = 0$$

$$du + 2 \int \frac{du}{u - 1} + 2dx = 0$$

$$u + 2\ln|u - 1| + 2x = 0$$

Se reemplaza el valor de u: $x + y + 2\ln|x + y - 1| + 2x = 0$

La solución general es: $3x + y + 2\ln|x + y - 1| = c$

3.5. Ecuaciones diferenciales exactas

Son conocidas como ecuaciones en diferenciales totales. Se parte de la ecuación diferencial:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Si se cumple la igualdad:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Se dice entonces que es una ecuación diferencial exacta o en diferenciales totales. Se puede escribir de la forma $dU(x, y) = 0$ la integral general de esta ecuación es:

$$U(x, y) = c$$

La función $U(x, y)$ se determina por la fórmula:

$$U = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy$$

Ejemplo... Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(3x^2 + 6y^2 x)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy$$

Se comprueba que son exactas y se resuelve:

$$U = \int (3x^2 + 6y^2x)dx + \varphi(y)$$

$$U = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} 6x^2y + \varphi'(y)$$

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$\varphi'(y) = 4y^3$$

$$\varphi(y) = y^4 + c$$

La solución general es:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$$

"Animaciones en Matlab y maple de ecuaciones diferenciales parciales de la física-matemática"

Autor: G.M. Ortigoza Capetillo

Las soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales que dependen del tiempo; estas soluciones son de la forma $u(x, t)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Las gráficas de las soluciones a diferentes tiempos permiten la creación de animaciones de las soluciones. Se muestra de manera general la forma de crear animaciones en Maple y Matlab. Estas animaciones pueden utilizarse como herramienta didáctica para presentar fenómenos físicos como son: la propagación de ondas de un medio a otro, superposición de ondas, difusión, etc. así mismo pueden usarse para despertar el interés de los estudiantes por el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales y sus aplicaciones. Para las animaciones se eligió un subconjunto importante de ecuaciones de la física matemática, entre las que se cuentan: la ecuación del transporte, la ecuación de ondas (vibración de cuerdas y membranas, problema de transmisión), las ecuaciones de Klein Gordon, Korteweg de Vries (no lineal), del calor y de Maxwell. Brevemente se describen algunas de las técnicas como son: escalamiento, método de características, separación de variables, etc. puede ser útil para la verificación de implementaciones numéricas. (García, 2007).

3.6. Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación es lineal si "y" y sus derivadas están establecidas de forma lineal, es decir, no están elevadas a una potencia mayor a 1 ni aparecen multiplicadas entre sí. Por otro lado, se consideran de primer orden si su derivada más alta es de primer orden: $\frac{dy}{dx}$ (García Hernández, 2016).

La ecuación lineal de primer orden se puede representar en la forma:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = b(x)$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ sólo dependen de la variable independiente x, y no de y. Al dividir la última expresión entre $a_1(x)$. (1) Se obtiene la *forma canónica* de las ecuaciones diferenciales de primer orden. (García Hernández, 2016).

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Este tipo de ecuaciones diferenciales se resuelven mediante el método del factor integrante, el cual es dependiente de x. Esto se logra obteniendo el factor integrante $\mu(x)$ utilizando la expresión siguiente: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

La solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden es:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) q(x) dx + \frac{C}{\mu(x)}$$

Método para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

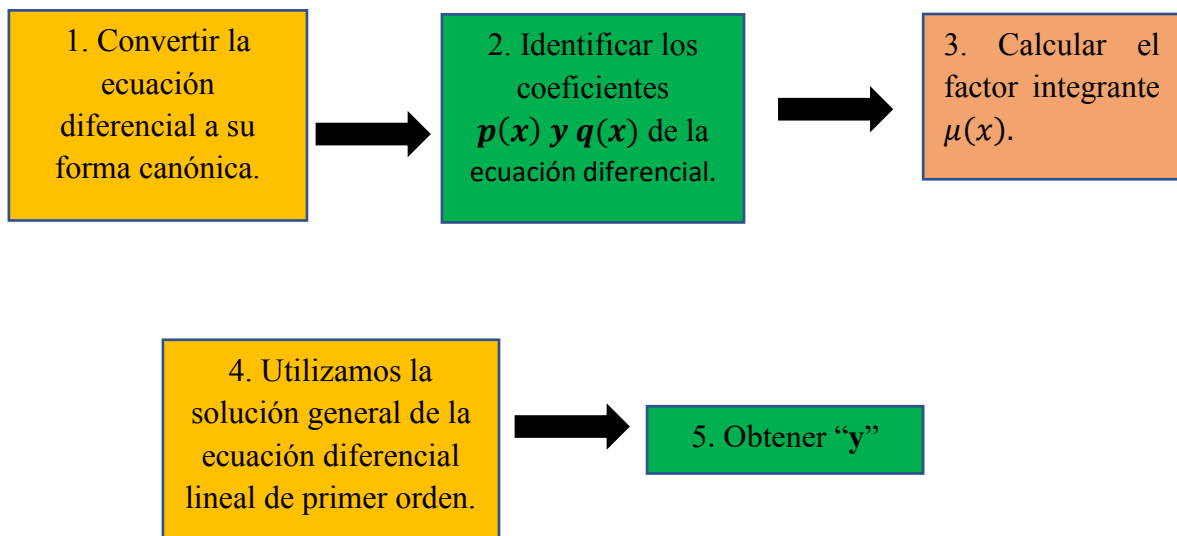


Figura 3.6: Ecuaciones lineales de primer orden

Problema resuelto

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\left(3\frac{y}{x} - 8\right)dx + 3dy = 0$$

Paso 1: Convertir la ecuación a su forma canónica:

$$\begin{aligned} \left(3\frac{y}{x} - 8\right)dx + 3dy &= 0 \\ \left(3\frac{y}{x} - 8\right)dx &= -3dy \\ \frac{y}{x} &= -\frac{dy}{dx} + \frac{8}{3} \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{aligned} 3\frac{y}{x} - 8 &= -3\frac{dy}{dx} \\ 3\frac{y}{x} &= -3\frac{dy}{dx} + 8 \\ \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Paso 2: Identificar los coeficientes, en este caso:

$$p(x) = \frac{1}{x}; q(x) = \frac{8}{3}.$$

Paso 3: Calcular el factor Integrante:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int p(x)dx} \\ \mu(x) &= e^{\int \frac{1}{x}dx} \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{aligned} \mu(x) &= e^{\ln x} \\ \mu(x) &= x \end{aligned}$$

Paso 4: Utilizamos la expresión de la solución de la ecuación difere

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) q(x) dx \\ y &= \frac{1}{x} \int \left(x \frac{8}{3}\right) dx + \frac{C}{x} \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{aligned} y &= \frac{1}{x} * \frac{8}{3} * \frac{x^2}{2} + \frac{C}{x} \\ y &= \frac{4}{3}x + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

“Artículo científico (Santos, 2024)”

Estudio de caso del diseño y construcción de un túnel de viento vertical en el club deportivo de paracaidismo Gravita.

El artículo describe el diseño y construcción de un túnel de viento vertical en el club deportivo GRAVITY, en Bogotá, Colombia, destinado a entrenar a paracaidistas. Este túnel simula una caída libre al generar un flujo de aire ascendente lo suficientemente fuerte para mantener a una persona en el aire, permitiendo entrenamientos más seguros, largos y económicos que los tradicionales saltos desde aviones.

Para el proyecto, se estudiaron principios de aerodinámica como el de Bernoulli y el número de Reynolds para asegurar un flujo estable y evitar turbulencias en la cámara de vuelo. Se trabajó en el diseño preciso del túnel, la selección de materiales duraderos y el uso de ventiladores potentes. El mayor reto fue lograr un flujo de aire que simulara la caída libre real, lo cual requirió una cuidadosa planificación en el diseño y control de los sistemas.

El túnel de viento ha permitido reducir costos y mejorar la calidad del entrenamiento al ofrecer más tiempo de práctica. Además, al estar ubicado en Colombia, elimina la necesidad de viajar al extranjero. También se implementaron medidas para hacer el túnel más sostenible y reducir su impacto ambiental.

Este proyecto resalta la importancia de la planificación, la colaboración entre ingenieros de diversas disciplinas y un enfoque en la seguridad. Además, demuestra cómo este tipo de infraestructura puede tener aplicaciones más allá del paracaidismo, contribuyendo a la innovación y el desarrollo de nuevas tecnologías.

Articular 2. (Tsuzuki, s.f.)

Low-rank approximated Kalman filter using Oja's principal component flow for discrete-time linear systems.

El artículo aborda una mejora significativa en el uso del filtro de Kalman, una herramienta esencial para la estimación de estados en sistemas dinámicos, ampliamente utilizada en aplicaciones como la predicción meteorológica, las finanzas y la gestión de redes eléctricas. Aunque el filtro de Kalman es óptimo y efectivo, su principal desafío radica en su alta complejidad computacional, especialmente cuando se aplica a sistemas de gran dimensión. Esto se debe principalmente a la necesidad de resolver la ecuación de Riccati, que

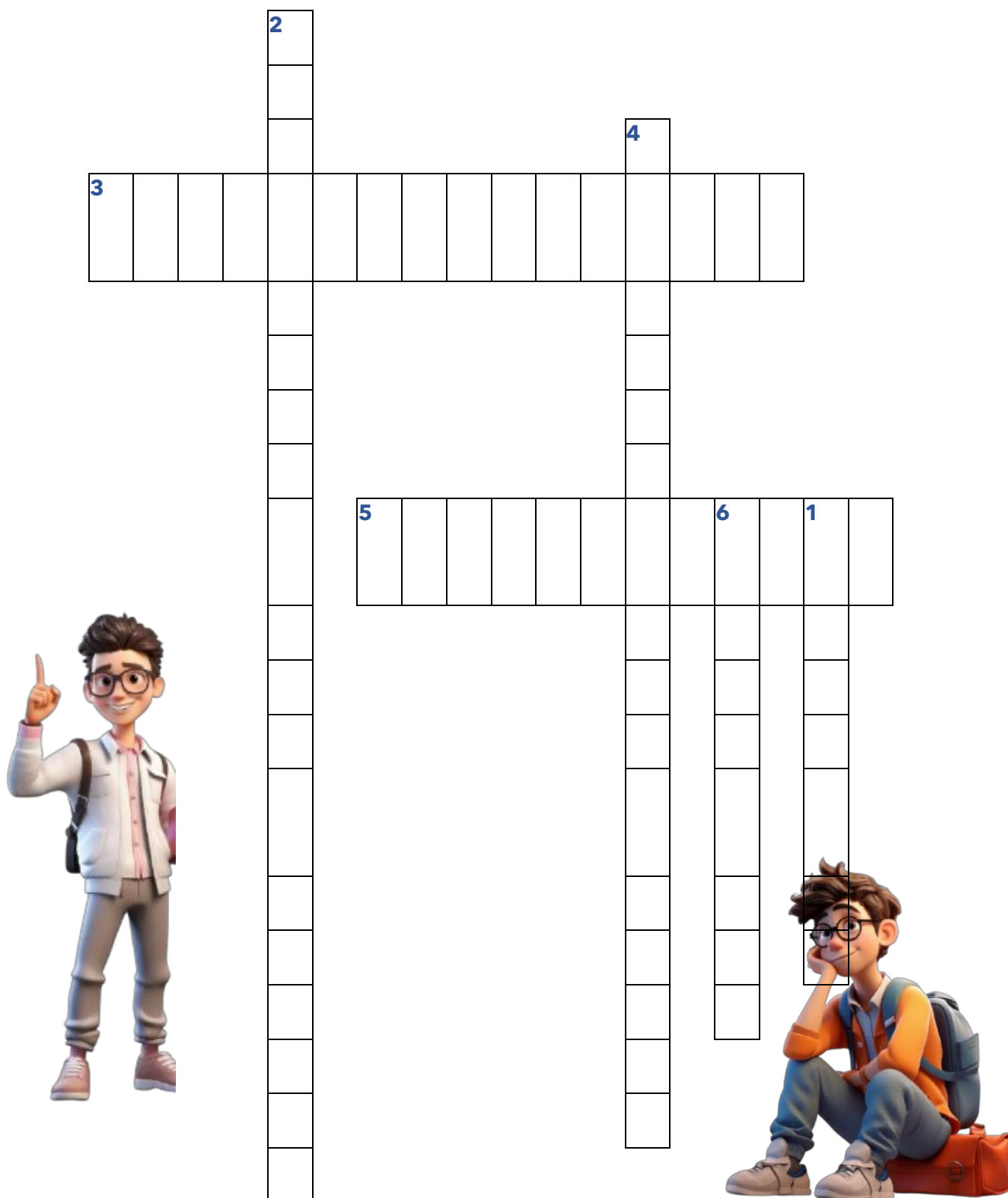
incrementa exponencialmente el costo de cálculo conforme aumenta la dimensión del sistema.

Para abordar este problema, el artículo propone un filtro de Kalman de bajo rango para sistemas lineales en tiempo discreto, basado en el flujo de componentes principales de Hoja. Este flujo identifica y mantiene únicamente las partes más significativas del sistema, lo que permite trabajar con matrices de menor rango y reducir drásticamente la complejidad de los cálculos. Mientras que el filtro estándar tiene una complejidad de cálculo de $O(n^3)$, el filtro propuesto logra reducirla a $O(n^2)O(n^2)O(n^2)$, lo que lo hace mucho más eficiente para sistemas de gran escala.

El trabajo detalla cómo se garantiza la estabilidad del nuevo filtro y la acotación de los errores de estimación bajo ciertas condiciones. Estas incluyen asegurar que el sistema sea alcanzable y observable, y elegir adecuadamente el rango reducido r , que corresponde al número de valores propios inestables del sistema. El artículo también presenta simulaciones numéricas que demuestran la eficacia del método, mostrando que los errores de estimación permanecen acotados incluso en sistemas de alta dimensión.

TALLER INTRA-CLASE

ACTIVIDAD 1 CRUCI-ECUACIONE



ACTIVIDAD 2 ¡Pon a prueba tu mente y revela todo tu conocimiento resolviendo esta sopa de letras desafiante!

1. Son conocidas como ecuaciones en diferenciales totales.
2. Son ecuaciones en las que ambas variables, dependiente e independiente, pueden separarse.
3. Primer paso para resolver Ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$
4. Que método se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden.
5. Que se debe identificar en el segundo paso para resolver una ecuación de primer orden.
6. Una ecuación diferencial de Bernoulli es un tipo de ecuación diferencial.

- Variables
- Aplicación
- Bernoulli
- Riccati
- Orden
- Método
- Lineal
- Función

V	I	I	T	A	C	C	I	R	A
Q	A	F	U	N	C	I	O	N	P
E	A	R	L	S	D	F	G	G	L
R	U	O	I	E	E	Y	O	U	I
T	G	Q	N	A	U	K	D	J	C
Y	F	K	H	E	B	F	O	G	A
U	L	A	E	N	I	L	T	M	C
O	R	D	E	N	E	J	E	B	I
P	K	H	G	F	D	S	M	S	O
B	E	R	N	O	U	L	L	I	N

ACTIVIDAD 3

¡Completa los enunciados y demuestra cuánto sabes resolviendo este reto lleno de conocimiento!

1. Para resolver la ecuación de Bernoulli, primero se realiza el..... vy^{1-n} , lo que transforma la.....de Bernoulli en una ecuación lineal.
2. La aplicación exitosa de este método a varias ecuaciones lineales de la.....nos lleva a buscar una transformación de variables tal que en las..... la EDP se puede resolver mediante un.....separable.
3. Una función..... es aquella que todos sus términos son del mismo grado.
4. Una ecuación es lineal si “y” y sus derivadas están establecidas de.....es decir, no están elevadas a una.....mayor a 1 ni aparecen multiplicadas entre sí.
5. Este tipo de ecuaciones diferenciales se resuelven mediante el.....del factor integrante, el cual es.....de x.

cambio de variable

método

ecuación

fisicomatemática

nuevas variables

ansatz

dependiente

homogénea

forma lineal

potencia



ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

Indique si las siguientes funciones son homogéneas.

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + y}}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = xy$$

$$f(x, y) = \frac{x}{2x + y}$$

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(x - y + 4)dx + (x - y + 5)dy = 0$$

Resolver la siguiente ecuación y elegir la respuesta correcta

$$(3x^2 - y)dx + (3y^2 - x)dy = 0$$

Indique su solución general

$$y^2 + y - x = y$$

$$x^4 - y^2x + x = c$$

$$x^3 - xy + y^3 = c$$

4. Referencias

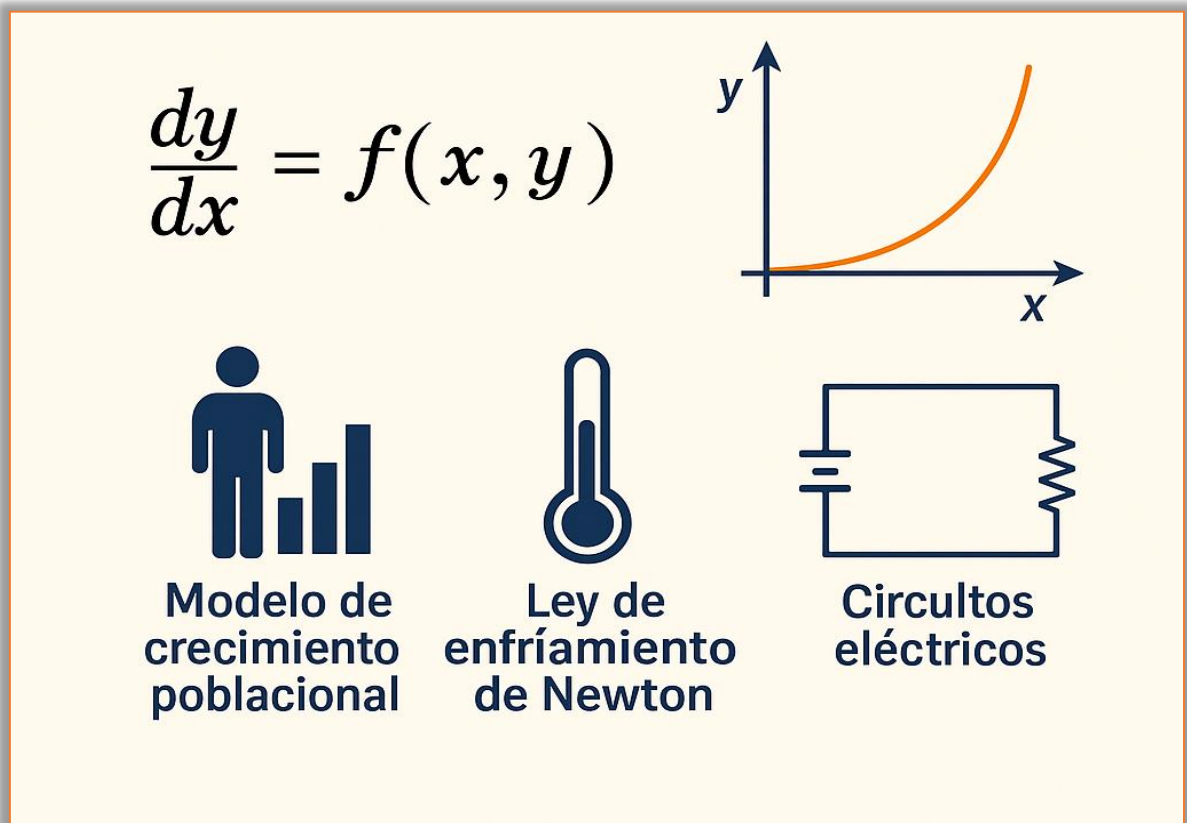
- (s.f.), C. (s.f.). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Repositorio CIDE.
- (s.f.), E. (s.f.). *Ecuaciones diferenciales homogéneas*. Obtenido de Weebly: https://edumatth.weebly.com/uploads/1/3/1/9/13198236/ecuaciones_diferenciales_homogneas.pdf
- (s.f.), S. (s.f.). *Ejercicios resueltos: EDO exactas*. Obtenido de <https://es.slideshare.net/slideshow/ejercicios-resueltos-edo-exactas/41068942>
- Bastidas, E. A. (2024, 18 octubre). Exploración de técnicas de modelado en sistemas dinámicos mediante ecuaciones diferenciales. *revista académica*.
- f.), J. R. (s.f.). *Maths History*. Obtenido de https://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/Riccati/?utm_source=chatgpt.co
- García Hernández, A. E. (2016). *Ecuaciones diferenciales: una nueva visión*. México: Grupo Editorial Patria.
- García, L. M. (2007). Análisis de la reforma educativa en México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 12(1), 45-67.
- Garzón, L. e. (2024). *Estudio de caso del diseño y construcción de un túnel de viento vertical en el club deportivo de paracaidismo Gravity*. Obtenido de Encuentro Internacional de Educación en Ingeniería: <https://doi.org/10.26507/paper.3932>
- Griselda. (19 de julio de 2023). *La ecuación de Bernoulli: fundamentos y aplicaciones*. Obtenido de La ecuación de Bernoulli: fundamentos y aplicaciones: https://ielogis.com/ecuacion-bernoulli/?utm_source=chatgpt.com
- Jaimes-Contreras, L. A.-E. (2012). Propuesta de actividades para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, con variables separables mediante el apoyo de software libre "GeoGebra". *Eco Matemático*, 3(1), 28-29.
- López, M. (2007). *Ecuaciones diferenciales: teoría y problemas (2ª ed.)*. Madrid, España: Tébar Flores.
- Malumbres, J. L. (1996). *Métodos clásicos de resolución de EDO*.
- Santos, L. S. (2024). Bernoulli's equation, energy and enthalpy. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 46.

Shingareva, I. &-C. (2010). . Ecuaciones diferenciales parciales no lineales: separación de variables, soluciones simbólicas. *XX Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 1, 1-7.

Tsuzuki, D. &. (s.f.). *Low-rank approximated Kalman filter using Oja's principal component flow for discrete-time linear systems*. Obtenido de arXiv.org: <https://www.arxiv.org/abs/2407.05675>

CAPÍTULO 3

Ecuaciones Diferenciales de orden Superior y sus Aplicaciones



OBJETIVO GENERAL: Resolver ecuaciones diferenciales de orden superior mediante diversos procedimientos, para aplicaciones posteriores en la ingeniería.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Comprender la estructura y características de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.
- Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y de orden superior aplicando teoremas de Bernoulli, Recata y Cauchy-Euler mediante métodos adecuados.

- Aplicar métodos numéricos para resolver problemas prácticos en ingeniería, como sistemas de suspensión neumáticos y analizadores de estabilidad transitoria.

RESUMEN:

El presente capítulo tiene como finalidad proporcionar al estudiante una base sólida, tanto teórica como práctica, para abordar las ecuaciones diferenciales de orden superior y comprender su importancia en el campo de la ingeniería. Estas ecuaciones permiten modelar fenómenos dinámicos y complejos, por lo que constituyen una herramienta esencial en la formación de un ingeniero químico. Se inicia con una reseña conceptual sobre las ecuaciones diferenciales de orden superior y su utilidad en la representación matemática de sistemas físicos y químicos, destacando su papel en el análisis y predicción del comportamiento de procesos industriales. A lo largo del capítulo se detallan diversos métodos de resolución aplicados a ecuaciones representativas como Bernoulli, Riccati y Cauchy-Euler. La ecuación de Bernoulli, de carácter no lineal, se transforma en una lineal mediante un cambio adecuado de variable, lo que facilita su solución y aplicación en problemas prácticos. La ecuación de Riccati se analiza como un caso particular y complejo dentro de las ecuaciones no lineales, subrayando que su resolución requiere el conocimiento previo de una solución particular para simplificar el proceso. Por su parte, la ecuación de Cauchy-Euler se presenta como un modelo característico en sistemas donde las variables aparecen con potencias crecientes, siendo especialmente útil en problemas de elasticidad y vibraciones. Finalmente, cada uno de los métodos se ilustra con ejemplos aplicados al ámbito de la ingeniería, destacando la importancia de estas técnicas en el modelado y solución de sistemas dinámicos que influyen directamente en el desarrollo tecnológico.

1. Ecuación de Bernoulli.

Grandes de la Ciencia

Daniel Bernoulli

Fue un matemático y físico suizo nacido en 1700 y fallecido en 1782. Es conocido principalmente por sus contribuciones en el campo de la hidrodinámica, la rama de la física que estudia el movimiento de los fluidos.

Desde joven, Bernoulli mostró un gran interés por las matemáticas y la física, siguiendo así los pasos de su familia, que contaba con varios miembros destacados en estos campos. Estudió en la Universidad de Basilea, donde obtuvo su doctorado en filosofía en 1721.



Una ecuación diferencial de Bernoulli es un tipo de ecuación diferencial *no lineal* el cual tiene la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Siempre que n sea positivo y diferente de cero y uno, pues de ocurrir esto se convertiría en una ecuación diferencial lineal. (García Hernández A. E., 2016).

Para resolver la ecuación de Bernoulli, primero se realiza el cambio de variable $v = y^{1-n}$, lo que transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal. Luego, se multiplica la ecuación de Bernoulli por y^{-n} ; entonces:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)yy^{-n} = Q(x)y^n y^{-n}$$

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

Luego se realiza el cambio de variable:

$$v = y^{1-n} \rightarrow \frac{dv}{dx} (1-n)y^{1-n-1} \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{(1-n)y^{-n}} \frac{dv}{dx}$$

Entonces finalmente reducimos términos y obtenemos:

$$v^{-n} \frac{1}{(1-n)v^{-n}} \frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

1.1.Método para resolver ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

Con el propósito de facilitar la comprensión del método para resolver ecuaciones diferenciales de Bernoulli, a continuación, se presenta el siguiente esquema:

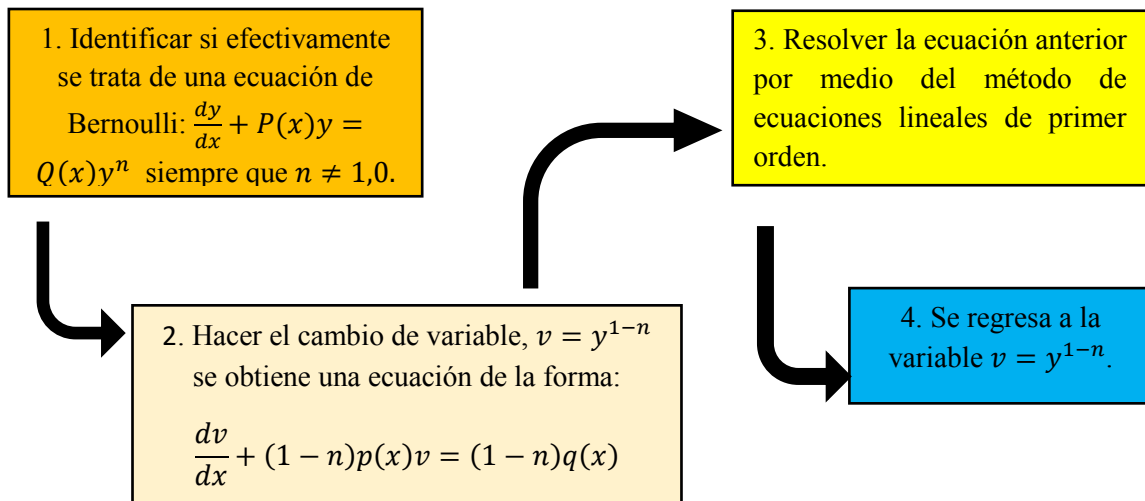


Diagrama 1.1: Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Problema Resuelto:

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$$

Solución:

Paso 1: este caso $n = 3$; hacer el cambio de variable $v = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$ entonces:

$$\frac{dv}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y^{-3}} \frac{dv}{dx} = -0.5y^3 \frac{dv}{dx}$$

Paso 2: Sustituir $\frac{dy}{dx} = -0.5y^3 \frac{dv}{dx}$ en la ecuación diferencial $-0.5y^3 \frac{dv}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$.

Paso 3: Dividir entre $-0.5y^3$ y sustituir $v = y^{-2}$.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{5y}{-0.5y^3} = -\frac{5}{2} \frac{xy^3}{(-0.5y^3)}$$

$$\frac{dv}{dx} + 10y^{-2} = 5x$$

$$\frac{dv}{dx} + 10v = 5x$$

Como se puede ver, esta última ecuación ya es una ecuación diferencial lineal de primer orden escrita en su forma canónica.

Paso 4: Calcular el factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 10dx} = e^{10x}$$

Así, utilizando la solución de la ecuación diferencial es:

$$v = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx + \frac{C}{\mu(x)}$$

$$v = \frac{1}{e^{10x}} \int 5xe^{10x}dx + \frac{C}{e^{10x}}$$

$$v = e^{-10x} (5) \left(\frac{1}{10} xe^{10x} - \frac{1}{100} e^{10x} \right) + Ce^{-10x}$$

$$v = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}$$

Entonces, para obtener la solución hay que regresar a la variable y , al sustituir $v = y^2$:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x} \rightarrow y^2 = \frac{1}{\frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}}$$

2. Ecuación de Riccati

Grandes de la Ciencia

Jacopo Francesco Riccati

Nacido en 1676 en Venecia y fallecido en Treviso en 1754. Realizó sus estudios en Brescia y Padua, y desde muy pronto se familiarizó con las herramientas, por entonces recientes, propuestas por Leibniz y Newton. Al regresar a Venecia, la república le nombró ingeniero en las obras que se desarrollaban en el puerto del lido de San Nicolás y en la plaza de San Pedro. Nombrado conde, continuó sus investigaciones matemáticas y formuló una ecuación, que lleva su nombre, que resolvió por medio de integración en determinados casos particulares junto con su colomboño Bernouilli y Goldbach.



Esta es un tipo de ecuación no lineal de primer orden que aparece en varias áreas de las matemáticas aplicadas, que tiene la forma general:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

Que es una ecuación generalizada, si se conoce una solución $u(x)$ de la ecuación de Riccati, el cambio de variable $y = u + v$ reduce a la ecuación de Riccati a una ecuación diferencial lineal de primer orden en v . (García Hernández A. E., 2016).

2.1.Método de Solución

Solución Implícita mediante reducción a una ecuación lineal.

Si se reconoce una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación de Riccati, entonces puedes hacer un cambio de variable para convertir la ecuación en una ecuación lineal.

Hacer el cambio de variable:

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{u(x)}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la de Riccati original, se obtiene una ecuación diferencial lineal para $u(x)$.

$$u'(x) - (b(x) + 2a(x)y_p(x))u(x) = a(x)$$

Resuelve la ecuación diferencial para $u(x)$ y luego usa $y(x) = y_p(x) + \frac{1}{u(x)}$ para obtener la solución general.

Resulta importante destacar que desafortunadamente, no hay ningún procedimiento general que permita obtener alguna solución particular, por lo que muchas veces las E. D. de Riccati no resultan integrables en términos de funciones elementales.

Ejercicio Propuesto:

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal $\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$ si se conoce una solución $u(x)=2$.

Solución:

Paso 1: Identificar esta ecuación con la ecuación de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

Entonces;

$$P(x) = 1 ; Q(x) = -1 ; R(x) = -2$$

Al hacer el cambio de variable $y = 2 + \frac{1}{v}$ se obtiene la ecuación diferencial lineal de primer orden para v .

$$\frac{dv}{dx} + v(2uP + Q) + P = 0$$

Por lo tanto: $\frac{dv}{dx} + 3v = -1$

Paso 2: Calcular el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 3dx} = e^{3x}$$

Y así la ecuación diferencial queda:

$$v = -\frac{1}{e^{3x}} \int e^{3x} dx + \frac{C}{e^{3x}} = -\frac{1}{3} + Ce^{-3x}$$

Por lo tanto:

$$y = 2 + \frac{1}{v} = 2 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + Ce^{-3x}}$$

“Modelo de control óptimo para el sistema Producción - Inventarios”

Autores: Óscar Mauricio Cepeda Valero; Luis Felipe Jiménez Sánchez

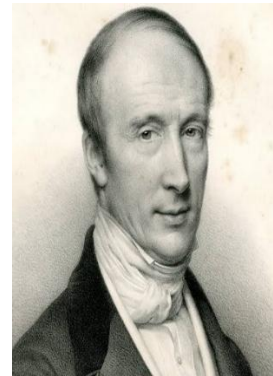
El artículo presenta un modelo de control óptimo aplicado a un sistema de producción e inventarios, con el objetivo de minimizar costos y mejorar la eficiencia en la gestión de inventarios y producción en función de la demanda. Para ello, se formulan ecuaciones diferenciales que describen la evolución del sistema, y se emplean herramientas matemáticas como la programación dinámica y el control óptimo. La ecuación de Riccati aparece en la solución del problema, ya que es fundamental en la determinación de funciones de valor en problemas de optimización dinámica, permitiendo calcular estrategias óptimas de producción y almacenamiento. Su presencia en el modelo refleja su importancia en la resolución de sistemas dinámicos con restricciones y costos asociados, facilitando la obtención de soluciones eficientes para la toma de decisiones en la gestión de inventarios.

3. Ecuación de Cauchy- Euler

Grandes de la Ciencia

Augustin-Louis Cauchy

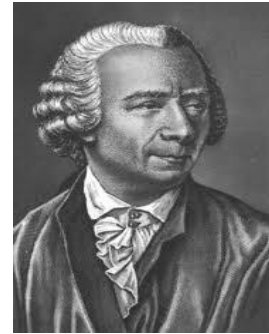
Nacido el 21 de agosto de 1789 en París, Francia; fallecido el 23 de mayo de 1857 en Sceaux) fue un matemático francés pionero en el análisis y la teoría de grupos de sustitución. Convencido por Lagrange y Laplace, se dedicó por completo a las matemáticas. En 1814 publicó sobre integrales definidas, que fueron esenciales para la teoría de funciones complejas. Trabajó como catequista en varias instituciones parisinas a partir de 1816 antes de reemplazar a Gaspard Monge en la Academia de Ciencias. Instituciones parisinas a partir de 1816 antes de sustituir a Gaspard Monge en la Academia de Ciencias obtuvo el gran premio del Instituto de Francia por su trabajo sobre la propagación de ondas ese mismo año (The Editors of Encyclopaedia Britannica, 1998).



Grandes de la Ciencia

Leonhard Euler

Leonhard Euler (15 de abril de 1707–18 de septiembre de 1783) fue un matemático suizo cuyas contribuciones marcaron profundamente el desarrollo de las matemáticas y la física. Su obra abarcó diversas áreas, desde el análisis hasta la teoría de números, la mecánica y la óptica. Entre sus aportes más destacados se encuentra la identidad de Euler, considerada una de las ecuaciones más bellas de las matemáticas, pues conecta de manera sorprendente cinco constantes fundamentales: e , i , π , 1 y 0 . Esta relación no solo refleja la elegancia del razonamiento matemático, sino también su capacidad de unificar conceptos aparentemente distantes. Además, Euler introdujo notaciones y métodos que se mantienen en uso hasta la actualidad. Entre ellas destaca la notación moderna para expresar funciones matemáticas, que permitió simplificar y sistematizar la escritura de expresiones, facilitando la comunicación y el avance científico. Sus aportes continúan siendo pilares esenciales en el estudio matemático. (About Leonhard Euler - EFMU, 2023).



Tomando en cuenta a (García Hernández A. E., 2015), las ecuaciones de Cauchy-Euler son ecuaciones lineales con coeficientes variables que pueden transformarse, mediante un cambio de variables, en ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

La ecuación de Cauchy-Euler es de la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0, \quad \text{donde } a, b \in \mathbb{R}$$

Para encontrar su solución se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1}, y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Al sustituir en la ecuación de Cauchy-Euler tenemos:

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

$$m(m-1)x^m + axmx^m + bx^m = 0$$

$$x^m(m(m-1)x^m + am + b) = 0$$

$$\text{Como } x^m \neq 0$$

La ecuación auxiliar es:

$$m(m-1) + am + b = 0$$

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

Caso 1

Si las raíces de la ecuación característica son reales y distintas, entonces la solución de la ecuación diferencial es

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

Caso 2

Si las raíces de la ecuación característica son reales e iguales, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 (\ln x) x^{m_1}$$

Caso 3

Si las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = x^\alpha (A \cos(\ln x^\beta) + B \sin(\ln x^\beta))$$

Solución de la Ecuación de Cauchy - Euler por medio de la Transformada de Mellin

Autor: José Rodrigo Gonzales

El artículo Solución de la ecuación de calor por medio de la transformada de Mellin expone un método analítico para resolver la ecuación de calor, un modelo esencial en la descripción de la transferencia térmica. La transformada de Mellin se utiliza para transformar la ecuación original en una forma más simple, permitiendo la obtención de soluciones exactas bajo condiciones de frontera específicas. El documento detalla el proceso matemático, desde la formulación inicial hasta la inversión de la transformada, y valida los resultados obtenidos al compararlos con soluciones conocidas. Este enfoque resalta la versatilidad de la transformada de Mellin, especialmente en problemas con geometrías no euclidianas o dominios infinitos, donde otros métodos pueden resultar ineficaces. Además, subraya

su relevancia en la física de materiales y la ingeniería, proporcionando un marco teórico sólido para analizar la propagación del calor en sistemas complejos, lo que contribuye al desarrollo de modelos más precisos y eficientes en diversos campos científicos y tecnológicos (Gonzalez, 2009).

3.1.Método de Euler o de la recta tangente

El método de Euler o de la recta tangente es el método más sencillo y simple de los métodos numéricos para resolver un problema de valor inicial. Para estudiar este método y sus aplicaciones se tiene el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = f(x, y)$$

con la condición inicial: $y(x_0) = y_0$

Para este caso se supone que el problema con valor inicial tiene una solución única en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_n$.

Ahora bien, si la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ se interpreta como un campo de direcciones en el plano x - y y la condición inicial $y(x_0) = y_0$, como un punto (x_0, y_0) de dicho plano, se puede aproximar la función solución $y(x)$ mediante la recta tangente a la misma que pasa por el punto:

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

donde se ha utilizado que la pendiente de dicha tangente es:

$$m = y'(x_0)$$

En consecuencia:

$$m = f(x_0, y_0)$$

De esta forma, calculamos de manera aproximada el valor de la solución y en el punto de abscisa x , como:

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

Una vez calculado este punto aproximado, se puede repetir el método para obtener otro punto aproximado (x_2, y_2) de la forma $y(x_2) = y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$ y así de manera sucesiva.

En este método se recomienda el uso de abscisas equis espaciadas (subintervalos); es decir, calcular la solución aproximada en puntos de la forma $x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh$, donde h es la longitud de paso (por lo general, se considera constante). De este modo se obtienen las fórmulas que determinan la solución aproximada:

$$x_n = x_{n-1} + h; y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

Problema resuelto

Resolver con el método de Euler el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \text{ con } y(1) = 0 \text{ con } h = 0.1 \text{ para los puntos } x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 \text{ y } 1.5.$$

Solución

Para este caso tenemos que $h = 0.1$, $(x_0, y_0) = (1.4)$, donde la función $f(x, y)$ es:

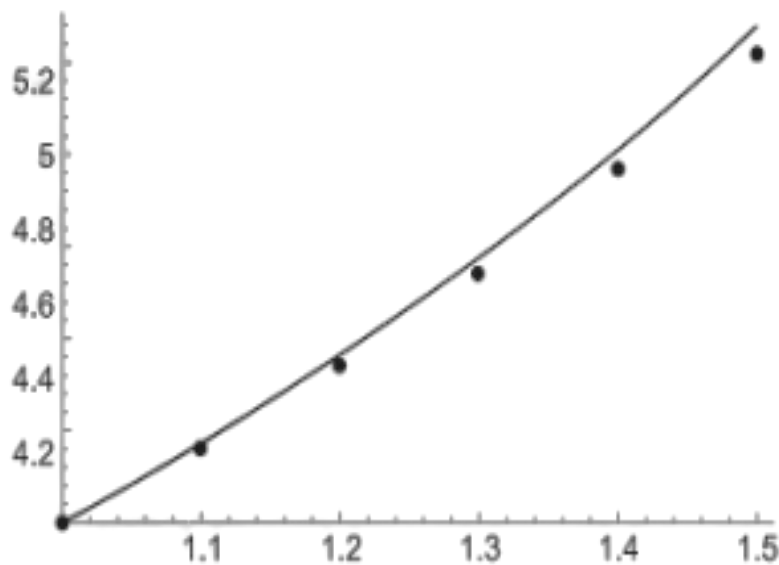
$$f(x, y) = x\sqrt{y}$$

Por tanto:

$$y_n = y_{n-1} + x_{n-1}\sqrt{y_{n-1}}h$$

Este problema también se puede resolver de forma exacta; los resultados se muestran en la tabla:

i	x_i	y_i	Solución exacta
0	1	4	4
1	1,1	4,2	4,21276
2	1,2	4,42513	4,45210
3	1,3	4,67787	4,71976
4	1,4	4,95904	5,01760
5	1,5	5,27081	5,34766



Fuente: <https://elibro.net/es/ereader/utmachala/39371?page=320>

Diagrama 3.1: Metodo de Euler

3.2.Método de Heun

Grandes de la Ciencia

Karl Heun

El matemático alemán Karl Heun es conocido por la ecuación diferencial de Heun que generaliza la ecuación diferencial hipergeométrica. Karl Heun fue a la escuela en Wiesbaden y comenzó sus estudios de matemáticas y filosofía en 1878 en Gotinga (con Ernst Schering Alfred Enneper, Hermann Amandus Schwarz Despeses da Halle para estudiar con Eduard Heine quien, en 1861, había publicado su famoso libro sobre armónicos esféricos. La primera parte de este libro apareció en su segunda edición en 1878. Heun permaneció en Halle solo entre abril y octubre de 1880, probablemente debido al deterioro de la salud de Heine, quien murió en 1881. La ecuación de Heun es una ecuación diferencial lineal de segundo orden del tipo fuchsiano con cuatro puntos singulares. Generaliza la ecuación diferencial hipergeométrica que tiene tres puntos singulares y se utiliza hoy en día en física matemática, por ejemplo, en el contexto de sistemas integrables.



El método de Euler posee un serio defecto en su aproximación para determinar la pendiente usando en cada paso de la iteración.

El paso de iteración de t_j a t_{j+1} usa solo la pendiente en el punto t_j al final del intervalo. A menos que la función $Y(t)$ sea esencialmente una línea recta en el plano $x-y$, el uso de la pendiente evaluada solamente en un punto terminal del intervalo resulta en el uso de una pendiente que no necesariamente representa muy bien la pendiente promedio a lo largo del intervalo.

Un esquema en el cual sea deseable hacer la modificación al método de Euler resulta de la forma:

$$Y_{j+1} = Y_j + \frac{h}{2} (F(t_j, y_j) + F(t_{j+1}, y_{j+1}))$$

En el cual se usa el promedio de la pendiente a lo largo del intervalo.

Por supuesto la dificultad aquí es que debido a que no se conoce la función $Y(t)$, no se conoce el promedio de Y_{j+1} al final del intervalo, así que el esquema basado en la pendiente promedio sobre el intervalo no es directamente posible.

Una vía muy usada de ver la dependencia de la solución $Y(t_{j+1})$ en el valor de $Y(t)$ sobre el intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ viene de escribir la forma integral de la antiderivada:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} Y'(t) dt = Y(t_{j+1}) - Y(t_j)$$

De modo que reescribiendo la expresión resulta:

$$Y(t_{j+1}) = Y(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, Y(t)) dt$$

Donde se ha usado la ecuación diferencial $Y'(t)=F(t, Y)$. Se puede escribir de la siguiente forma:

$$Y(t_{j+1}) = Y(t_j) + h \langle F(t, Y) \rangle_{[t_j, t_{j+1}]}$$

Donde:

$$\langle F(t, Y) \rangle_{[t_j, t_{j+1}]}$$

es solo el valor medio de $F(t, Y)$ en el intervalo.

Esto resulta hacer más fácil el intento de modificar el método de Euler razonablemente, también hace muy claro la necesidad de obtener más información acerca de $Y(t)$, en el intervalo para calcular $Y(t)$ al final del intervalo.

Algunos textos refieren el método de Heun como simplemente el método de Euler Modificado, mientras que otros utilizan el término de Método de Punto Medio (midpoint method) donde la pendiente es usada en cada paso en el cálculo de la pendiente desde el predictor del paso al punto medio del intervalo; más que el promedio basado en el punto medio de la pendiente.

Aplicación para la evaluación de un sistema de suspensión neumático semiactivo-basada en métodos numéricos de Euler, Heun y Runge-Kutta de cuarto orden (RK4)

Autores: César Martínez, Antonio Millán, Jesús Pérez, Carlos Jiménez, Juan Arcila, Wilmer Sanz.

Las nuevas tecnologías están estrechamente ligadas al automovilismo, es más, podría decirse que una de las áreas de la industria a nivel mundial que se mantiene como pionera en el desarrollo de nuevos avances tecnológicos para sus partes componentes es el automovilismo, en el caso particular, los sistemas de suspensión de los autos no son una excepción. Lo que hasta hace algunos años se había observado en el medio automovilístico en relación a los sistemas de suspensión eran las tradicionales suspensiones pasivas, que

aún siguen vigentes en gran medida por su menor costo, pero presentan el problema del compromiso comodidad- estabilidad; mientras más cómodo se diseñe el vehículo.

Menor rendimiento en el comportamiento dinámico tendrá y viceversa. Es aquí en donde entran en juego los sistemas de regulación de suspensiones semi-activos y activos, que no son más que evoluciones tecnológicas de los sistemas de suspensión pasivos, enmarcados dentro de la tendencia de *suspensiones inteligentes*, las cuales brindan una mayor eficiencia en la estabilidad del vehículo sin disminuir el confort del pasajero. Sus únicos inconvenientes son sus elevados costos y el gran consumo energético del vehículo que presentan.

Es por esta razón que la metodología de este artículo se basó en obtener el modelo equivalente del sistema de suspensión neumático semi-activo, después de plantear los diagramas de cuerpo libre del sistema para desarrollar las ecuaciones diferenciales que lo describen, para luego obtener la solución de las variables de salida del sistema por tres métodos numéricos diferentes, el método de Euler, el método de Heun y el método de Runge- Kutta de cuarto orden (RK4). Una vez obtenidas estas soluciones, se desarrolló la interfaz gráfica, se codificó el algoritmo de

simulación de una escala en el dominio temporal para representar gráficamente las variables de salida del sistema. Se elaboraron los algoritmos de resolución de las ecuaciones diferenciales que describen al sistema mediante los tres métodos numéricos mencionados anteriormente a través del lenguaje de programación Visual Basic 6.0. Se elaboró el diagrama de bloques del sistema bajo ambiente Mat- lab Simulink 6.0, se configuró utilizando un método numérico de paso variable (Dormand-Prince) *ode45*. Por último, se introdujeron las mismas entradas tanto a este como al software elaborado y se compararon las respuestas de las variables de salida del sistema (Martínez, 2009).

3.3.Método de Runge-Kutta

Grandes de la Ciencia

Carl Runge

A la edad de 19 años, tras concluir sus estudios escolares, Runge emprendió un viaje junto a su madre que duró seis meses y tuvo como destino los principales santuarios culturales de Italia. Esta experiencia marcó una etapa significativa en su formación personal y académica. Al regresar a Alemania, decidió matricularse en la Universidad de Múnich con la intención inicial de estudiar literatura, área que despertaba su interés por la cultura y el pensamiento humanístico. Sin embargo, después de tan solo seis semanas de cursos, descubrió que su verdadera vocación se encontraba en el campo de las ciencias exactas, por lo que cambió su orientación hacia la física y las matemáticas. Considerándose a sí mismo discípulo de Karl Weierstrass, Runge trabajó intensamente en la búsqueda de procedimientos que permitieran dar solución numérica a ecuaciones algebraicas complejas. Su esfuerzo lo llevó a desarrollar un método innovador en el que las raíces podían expresarse como series infinitas de funciones racionales de los coeficientes, constituyendo un aporte notable para el análisis matemático. Este logro lo motivó a continuar explorando una amplia variedad de problemas en el álgebra y en la teoría de funciones, consolidando así una trayectoria académica marcada por el rigor y la creatividad.



Grandes de la Ciencia

Martin Wilhelm Kutta

Martin Kutta recibió su educación universitaria en matemáticas en la Universidad de Breslau, donde estudió entre 1885 y 1890. Posteriormente, continuó su formación académica en la Universidad de Múnich, desde 1891 hasta 1894. Aunque las matemáticas fueron siempre su disciplina central y su principal interés, Kutta mostró una notable curiosidad intelectual y un amplio abanico de inquietudes. Durante sus años de estudio exploró campos diversos como los idiomas, la música, la literatura, la historia y el arte, buscando enriquecer su visión del mundo y complementar su formación científica con un trasfondo cultural sólido. Su pasión por el conocimiento lo llevó a integrar estas áreas en su vida académica y personal, aplicando lo aprendido de manera transversal. Esto le permitió adquirir una formación integral que trascendía lo puramente técnico y reflejaba una auténtica vocación humanista. En 1901, publicó su tesis doctoral, en la cual presentó un método que más tarde se convertiría en una de las herramientas fundamentales del análisis numérico: la metodología Runge-Kutta para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Este aporte, realizado en colaboración con Carl Runge, consolidó su legado como un matemático influyente y dejó una huella imborrable en la matemática aplicada y en la ingeniería.



La convergencia lenta del método de Euler y lo restringido de su región de estabilidad absoluta lleva a considerar métodos de orden de convergencia mayor. Se conoce que en cada paso el método de Euler se mueve a lo largo de la tangente de una cierta curva que esta "cerca" a la curva desconocida o buscada.

Los métodos Runge-Kutta extienden esta idea geométrica al utilizar varias derivadas o tangentes intermedias, en lugar de solo una, para aproximar la función desconocida. Los métodos Runge-Kutta, más simples se obtienen usando dos de estas derivadas intermedias.

Una mejora es que para cada intervalo h , se toman varios puntos intermedios y se calculan en ellos las pendientes o derivadas. Se gana en precisión a cambio de un aumento notable del tiempo de cálculo. El uso de las

series de Taylor como elementos de aproximación posee ciertas características deseables, particularmente su habilidad de mantener pequeño el error.

Esto implica una fuerte desventaja, como lo es requerir de la evaluación de las derivadas de orden superior de la función $F(t, y)$.

En el método de las series de Taylor, cada una de estas derivadas de orden superior son evaluadas en el punto t_j , al comienzo del intervalo, en atención a evaluar $Y(t_{j+1})$ al final del intervalo. Se sabe que el método de Euler puede ser mejorado por el cálculo de la función $F(t, y)$ a un punto predictor lejos al final del paso en t .

Runge-Kutta, apunta a las características deseables del método de las series de Taylor, pero reemplaza los requerimientos de evaluación de las derivadas de orden superior con el requerimiento de evaluar $F(t, y)$ en los mismos puntos dentro del intervalo t_j a t_{j+1} .

Debido a que inicialmente no es conocido a que puntos del intervalo las evaluaciones deben ser hechas, es posible elegir esos puntos en tal forma que el resultado sea consistente con la solución de la serie de Taylor para algunos en particular, los cuales darán el nombre al orden del método de Runge-Kutta.

Inicialmente, pártase de la derivación del hacia adelante, el cual no es particularmente útil en la práctica, es muy interesante para entender los métodos de Runge-Kutta. Pártase de escribir la serie de Taylor de la solución $Y(t)$ en la forma:

$$Y(t+h) = Y(t) + hF(t, Y) + \frac{h^2}{2}Y''(t) + O(h^3)$$

Se ha tomado la ecuación diferencial $Y'(t)=F(t, y)$ para evaluar $Y'(t)$, pero esta se mantiene para evaluar $Y''(t)$.

Usando el resultado inicial de la diferenciación de la función como $F(t, y(t))$, se tiene:

$$Y''(t) = F_t(t, Y) + F_y(t, Y)Y'(t)$$

Donde los subíndices t indica diferenciación parcial respecto a t , manteniendo y constante; y en forma similar para el subíndice y . Debido a que $Y'(t)=F(t, y)$, se puede escribir lo siguiente:

$$Y''(t) = F_t(t, Y) + F_y(t, Y)F(t, Y)$$

Y el desarrollo en series de Taylor se transforma en:

$$Y(t+h) = Y(t) + hF(t, y) + \frac{h^2}{2} [F_t(t, Y) + F_y(t, Y)F(t, Y)] + O(h^3)$$

El método de Runge-Kutta asume que el valor correcto de la pendiente sobre el intervalo puede ser escrito como una combinación lineal de la función $F(t, Y)$ evaluado a ciertos puntos dentro del intervalo.

Análisis de la estabilidad transitoria en sistemas eléctricos de potencia por el método de Runge-Kutta

Autor: Jonathan Fernando Quisilema-Quiñaluisa

Este artículo presenta una breve introducción y desarrollo de un método de integración numérico conocido como Runge-Kutta, con el fin de estudiar el comportamiento en el estado transitorio de los sistemas de energía eléctrica, teniendo en cuenta que existen múltiples métodos para la resolución de este problema. Sin embargo, se han considerado las ventajas de usar el método mencionado: alta velocidad de convergencia en comparación con métodos como Euler o el Euler modificado. Al enfatizar sus características y su baja tasa de error, nos permiten encontrar una solución viable a los problemas inherentes al comportamiento de los sistemas de energía eléctrica.

Además, debe tenerse en cuenta que la naturaleza de este artículo radica en el modelado clásico de un generador, esto para dar paso al análisis que se llevará a cabo, teniendo en cuenta los componentes clave en el caso a estudiar, y considerando los efectos que ocurren cuando este modelado permite que el método actúe para conocer un comportamiento en relación con los tipos de fallas que pueden ocurrir, como salidas de línea, problemas de carga, índices dañinos dentro de los parámetros operativos, problemas de generación (vinculados a él cambios desde los ángulos de los motores y los tiempos de corrección para a un estado estable) y componentes relacionados con el concepto de la barra infinita (Quisilema-Quiñaluisa, 2021).

Introducción a la mecánica de fluidos: las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes.

Autor: Keyna González Armas

Las ecuaciones de Euler son fundamentales en la dinámica de fluidos, ya que proporcionan una formulación matemática simplificada para describir el movimiento de los fluidos sin considerar los efectos viscosos. Desarrolladas por Leonhard Euler en el siglo XVIII, estas ecuaciones fueron un paso clave en la evolución de la mecánica de fluidos, sirviendo como base para las más complejas ecuaciones de Navier-Stokes. Su aplicación es crucial en problemas donde la viscosidad es despreciable, como en la aerodinámica, la hidrodinámica y el estudio de flujos ideales. Además, han sido esenciales en el desarrollo de la física y la ingeniería, permitiendo la comprensión de la conservación del impulso y la energía en fluidos en movimiento.

En este trabajo sobre la dinámica de fluidos, se ha realizado un análisis detallado de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, que son las bases teóricas para describir el movimiento de los fluidos. Mediante la deducción de estas ecuaciones a partir de las leyes físicas fundamentales, se ha buscado comprender cómo se relacionan las propiedades físicas de los fluidos con su comportamiento dinámico. Además de explorar las distintas formulaciones de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, hemos conocido el concepto de la vorticidad, y se han introducido las distintas cantidades conservadas asociadas a ambas ecuaciones.

Estas cantidades, como la masa, el impulso y la energía, tienen un papel fundamental en la descripción de los fenómenos fluidos y son útiles para entender los principios físicos subyacentes. El trabajo se concluye con el estudio de algunas soluciones elementales exactas de las ecuaciones (González, 2023).

Simulación unidimensional del comportamiento dinámico de una tubería horizontal biempotrada que transporta flujo bifásico gas - líquido usando un modelo homogéneo

Autor: David Guillermo Castillo Neciosup

El trabajo analiza la dinámica de una tubería horizontal biempotrada que transporta un flujo bifásico gas-líquido, utilizando un modelo homogéneo sin deslizamiento. Este tipo de flujo es común en industrias como la nuclear y de hidrocarburos, donde las vibraciones inducidas pueden generar fallas estructurales. Para estudiar este fenómeno, se establece una ecuación de

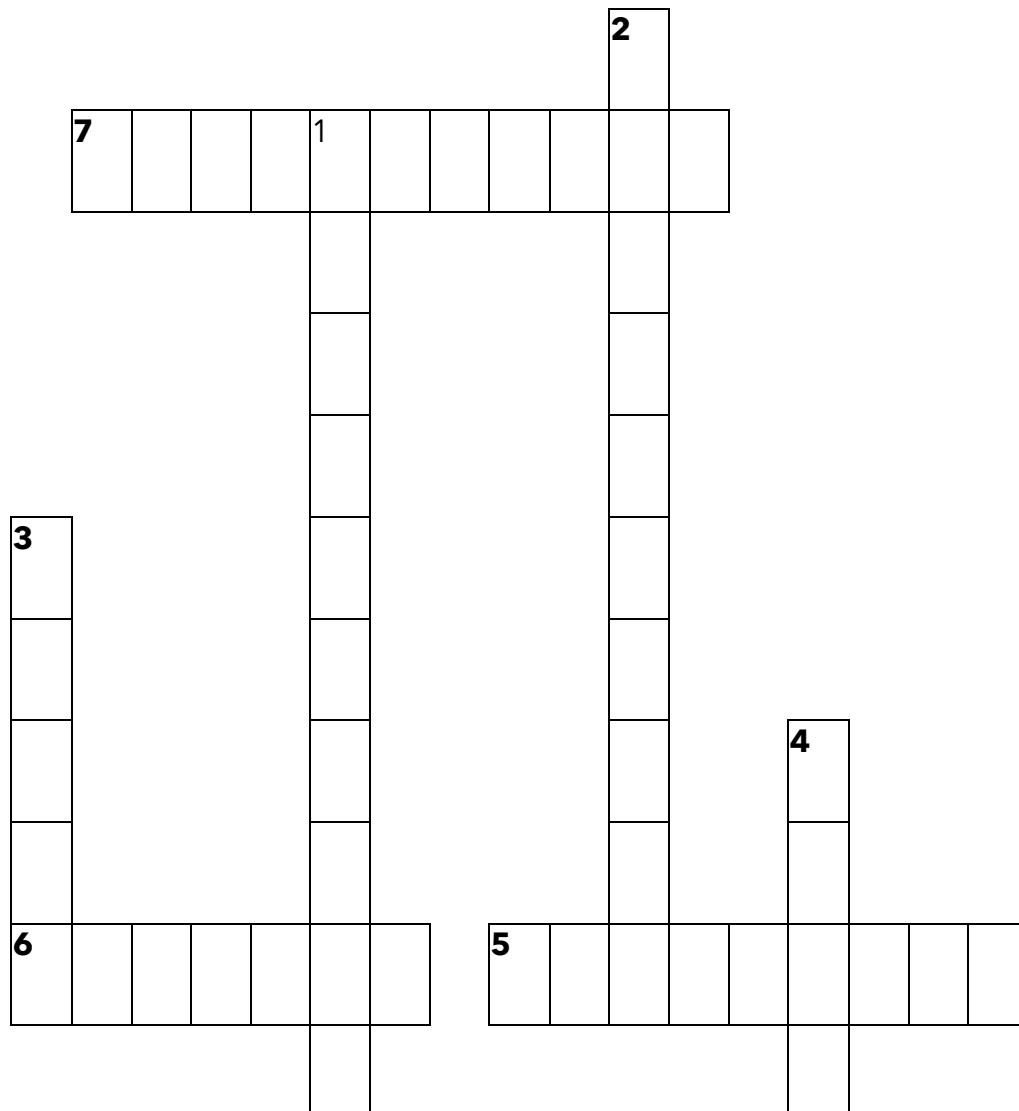
movimiento basada en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, que permite modelar la flexión de la tubería bajo la influencia del flujo. La ecuación resultante es una ecuación diferencial parcial acoplada, la cual se discretiza mediante el método de Galerkin para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, facilitando el análisis de estabilidad y la respuesta estructural del sistema.

Dentro de este estudio, la ecuación diferencial de Bernoulli es relevante en la modelización del flujo bifásico, ya que permite describir la variación de velocidad y presión del fluido a lo largo de la tubería. En este contexto, la ecuación de Bernoulli se utiliza para derivar expresiones clave en la conservación de energía y el cálculo de la velocidad del fluido en función de la fracción de vacío. La formulación homogénea empleada en el modelo asume que ambas fases del fluido se mueven con la misma velocidad, lo que simplifica el análisis sin necesidad de considerar términos adicionales de deslizamiento entre fases. Este enfoque es útil para predecir cómo las propiedades del flujo afectan la estabilidad fluido-elástica y la respuesta dinámica de la tubería.

Los resultados obtenidos muestran que la frecuencia de vibración disminuye a medida que aumenta la velocidad de la mezcla, lo que indica una mayor inestabilidad estructural en condiciones de alto flujo. Además, se observa que la fracción de vacío influye directamente en la respuesta estructural, aumentando la amplitud de las vibraciones cuando la fracción de gas es mayor. Estos hallazgos coinciden con datos experimentales previos, validando el modelo matemático propuesto. En conclusión, el estudio proporciona un marco teórico sólido para comprender el comportamiento de tuberías sometidas a flujo bifásico, destacando el papel inestabilidad fluido-elástica y las vibraciones inducidas por el flujo (Neciosup, 2024).

TALLER INTRA-CLASE

ACTIVIDAD 1. CRUCI-ECUACIONES



1. Método numérico avanzado para resolver ecuaciones diferenciales utiliza una combinación ponderada de evaluaciones de la pendiente para lograr mayor precisión.
2. Método para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables asume una solución de la forma.
3. Método numérico de primer orden para resolver ecuaciones diferenciales es también conocido como el método de la tangente.
4. Qué método numérico utiliza una corrección a la pendiente inicial promediando los valores al inicio y al final del intervalo.
5. Ecuación diferencial no lineal de primer orden.
6. Ecuación diferencial de primer orden
7. Ecuación diferencial cuyo comportamiento de sistemas que cambian con el tiempo. Sus soluciones pueden ser exponenciales, senoidales o una mezcla de ambas.

ACTIVIDAD 2. ¡Pon a prueba tu mente y revela todo tu conocimiento resolviendo esta sopa de letras desafiante!

W	R	U	H	R	H	X	G	B	K	I	P	A	L	A	Q	L	L	W	L
Q	E	X	A	C	T	A	F	M	M	Q	C	P	K	S	F	J	K	D	K
A	H	O	I	T	Q	C	D	J	O	I	F	Z	M	D	S	M	J	G	H
I	L	L	O	Y	W	V	S	H	M	R	E	X	N	F	O	H	H	H	G
N	W	U	P	U	E	B	A	A	H	Y	O	F	B	D	H	G	F	J	F
G	E	T	S	I	R	N	N	G	Q	E	L	A	E	G	J	F	D	N	D
E	R	A	D	P	T	I	O	F	T	W	Q	L	V	H	K	F	S	V	B
N	T	N	F	O	D	K	I	D	O	Q	A	P	C	J	N	D	A	N	U
I	Y	G	G	Ñ	Y	V	U	S	K	D	O	Q	X	K	V	S	Z	B	T
E	U	E	K	L	O	V	Y	A	O	X	Z	M	Z	L	D	A	X	A	R
R	I	N	J	L	C	F	T	F	A	C	X	P	P	M	X	Q	C	Q	S
I	O	T	L	K	I	H	R	G	C	O	E	F	I	C	I	E	N	T	E
A	C	E	Z	J	R	U	E	H	J	V	M	L	O	N	P	W	V	E	Q
E	S	Y	X	H	E	Y	W	J	M	E	T	O	D	O	O	E	B	R	A
S	D	U	C	G	M	T	S	K	Z	V	C	Q	U	V	Y	R	N	T	S
X	F	J	V	F	U	F	D	L	E	B	V	U	Y	C	T	T	M	Y	D
Z	G	K	B	D	N	X	S	E	C	I	A	R	T	X	R	Y	R	U	F
Z	N	H	N	S	Y	Z	I	U	L	M	B	J	R	Z	O	U	G	I	H
U	R	Y	M	A	O	I	N	T	E	G	R	A	N	T	E	I	B	O	L

- Exacta
- Integrante
- Método
- Dinámica
- Ingeniería
- Modelado
- Numérico
- Coeficiente
- Tangente
- Raíces

ACTIVIDAD 3. ¡Conecta las pistas y descubre el misterio! Une con líneas las respuestas de estos acertijos y pon a prueba tu ingenio.!

Soy una ecuación especial, no soy lineal y no soy trivial. Si aplicas un cambio de variable, en una ecuación lineal me convertiré. ¿Quién soy?

Ecuación de Bernoulli

Si conoces una solución particular y haces un cambio de variable, me conviertes en una ecuación lineal. Aparezco en modelos dinámicos y a veces soy difícil de resolver. ¿Qué ecuación soy?

Ecuación diferencial lineal de orden superior

Soy un método sencillo y eficaz, uso rectas tangentes para aproximar soluciones. Avanzo paso a paso, sin necesidad de integrar directamente. ¿De qué método estoy hablando?

Ecuación de Cauchy-Euler

Sin mí, entender los sistemas dinámicos sería muy difícil. Dependo de coeficientes constantes y cuando mis raíces son complejas, mi solución es una oscilación. ¿Qué tipo de ecuación soy?

Ecuación de Riccati

Me utilizan para entender el flujo de aire en túneles de viento o la trayectoria de un proyectil. Mi nombre viene de dos grandes matemáticos y mis coeficientes dependen de potencias de una variable. ¿Quién soy?

Método de Euler

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

Responda las siguientes preguntas:

¿Qué ventaja tiene el **Método de Heun** sobre el **Método de Euler** en términos de precisión?

¿En qué casos sería más conveniente utilizar el **Método de Heun** en lugar de otros métodos numéricos?

¿Cuál es la ecuación general del **Método de Heun** para resolver ecuaciones diferenciales?

¿Qué es el **Método de Runge-Kutta** y para qué se utiliza?

4. Referencias bibliográficas

- (n.d.), A. d. (s.f.). Obtenido de http://fglongatt.org/OLD/Archivos/Archivos/SP_II/PPTCapitulo2.6SP2.pdf
- About Leonhard Euler - EFMU. (6 de enero de 2023). *he Euler-Franeker Memorial University and Institute*. Obtenido de <https://euler.euclid.int/about-leonhard-euler>
- García A.E, & R. (2016). *Ecuaciones Diferenciales: una nueva visión*. . México: Grupo Editorial Patria .
- García Hernández, A. E. (2015). *Ecuaciones diferenciales*. Grupo Editorial Patria.
- Gonzalez, J. R. (2009). Solución de la ecuación de Cauchy-Euler por medio de la transformada de Mellin. *Scientia et Technica*.
- González, K. (2023). Introducción a la mecánica de fluidos: las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. (U. d. Laguna, Ed.) *RIULL - Repositorio Institucional*, 61. Obtenido de <http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/33513>
- Kaw, A. (. (s.f.). Obtenido de <http://mathforcollege.com/nm/anecdotes/runge.html>
- Kaw, A. (n.d.). *Wilhelm Kutta and the Runge-Kutta method*. (s.f.). Obtenido de <http://mathforcollege.com/nm/anecdotes/kutta.html>
- Martínez, C. M. (2009). Aplicación para la evaluación de un sistema de suspensión neumático semi-activo basada en métodos numéricos de Euler, Heun y Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). *Revista Ingeniería UC* .
- Matemalescopio*. (11 de Diciembre de 2021). Obtenido de <https://matemalescopio.over-blog.es/2021/12/matematicos-del-dia-11.html>
- Neciosup, D. (25 de 09 de 2024). Simulación unidimensional del comportamiento dinámico de una tubería horizontal biempotrada que transporta flujo bifásico gas - líquido usando un modelo homogéneo. (P. U. Perú, Ed.) *PUCP*, 86. Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.12404/28988>

Quisilema-Quiñaluiza, J. F. (2021). Análisis de la estabilidad transitoria en sistemas eléctricos de potencia por el método de Runge-Kutta. *revista académica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas*.

The Editors of Encyclopaedia Britannica. (20 de julio de 1998). Obtenido de <https://www.britannica.com/biography/Augustin-Louis-Baron-Cauchy>

The MacTutor History of Mathematics Archive (n.d.). (s.f.). Obtenido de <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Heun/>

The MacTutor History of Mathematics Archive. (n.d.). *Carl Runge*. (s.f.). Obtenido de <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Runge/>

Valero, Ó. M. (2016). Modelo de control óptimo para el sistema Producción-Inventarios. *Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias* (alojada en Redalyc, un repositorio de revistas científicas).

SOLUCIONARIO

CAPÍTULO 1

TEMA: Ecuación diferencial ordinaria lineal y no lineal

Escoja e indique el tipo, orden, grado, variable dependiente (y) variable independiente de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $dy + (3xy + \cos x) dx = 0$

a) ordinaria, primer orden, primer grado, lineal, variable dependiente (y), variable independiente (x).

2. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - xy^3 + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$

b) parcial, segundo orden, primer grado, no lineal, variable dependiente (y), variables independientes (x, t).

TEMA: Ecuaciones Diferenciales Homogéneas y no Homogéneas

1) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

a) $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

- **Resolución.**

1. Una ecuación es **homogénea** si los términos que acompañan a dx y dy son funciones homogéneas del mismo grado.

- $x^2 + y^2$ es homogénea de grado 2.
- $x^2 - xy$ también es homogénea de grado 2.

Por lo tanto, es una ecuación **homogénea**.

2. Sustitución $y = vx \Rightarrow dy = v dx + x dv$

Sustituimos $y = vx$

- $y^2 = v^2 x^2$
- $xy = vx^2$
- $dy = v dx + x dv$

La ecuación queda entonces como:

$$(x^2 + v^2 x^2)dx + (x^2 - vx^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^2(1 + v^2)dx + x^2(1 - v)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^2(1 + v^2)dx + x^2(1 - v)dx + x^3(1 - v)dv = 0$$

$$x^2[(1 + v^2) + (1 - v)v]dx + x^3(1 - v)dv = 0$$

$$(1 + v^2) + (1 - v)v = 1 + v^2 + v - v^2 = 1 + v$$

$$x^2(1 + v)dx + x^3(1 - v)dv = 0$$

$$\frac{1 + v}{x} dx + (1 - v)dv = 0$$

3. Separación de variables.

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1 - v}{1 + v} dv$$

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln|x| + C_1$$

$$\int -\frac{1 - v}{1 + v} dv$$

$$-\int \left(\frac{1 - v}{1 + v}\right) dv = -\int \left(\frac{1 + v - 2v}{1 + v}\right) dv = \int \left(1 - \left(\frac{2v}{1 + v}\right)\right) dv$$

$$= -\int 1 dv + \int \left(\frac{2v}{1 + v}\right) dv$$

$$= -v + 2\int \left(\frac{v}{1 + v}\right) dv$$

4. Sustituimos $u = 1 + v \Rightarrow du = dv, v = u - 1$:

$$\int \left(\frac{v}{1 + v}\right) dv = \int \left(\frac{u - 1}{u}\right) du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = u - \ln|u|$$

$$= (1 + v) - \ln|1 + v|$$

$$\begin{aligned} -v + 2[(1 + v) - \ln|1 + v|] &= -v + 2(1 + v - \ln|1 + v|) \\ &= -v + 2 + 2v - 2\ln|1 + v| = v + 2 - 2\ln|1 + v| \end{aligned}$$

$$\ln|x| = v + 2 - 2 \ln|1 + v| + C$$

$$\ln|x| = \frac{y}{x} + 2 - 2 \ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + C$$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$

- Resolución:

1. Realizamos un cambio de variable como la ecuación tiene la forma $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ es conveniente hacer el **cambio de variable**.

$$y = vx \Rightarrow \frac{dx}{dy} = v + x \frac{dx}{dv}$$

$$v + x \frac{dx}{dv} = \frac{x - vx}{x + vx}$$

$$v + x \frac{dx}{dv} = \frac{x(1 - v)}{x(1 + v)} = \frac{1 - v}{1 + v}$$

2. Aislamos dv/dx :

$$x \frac{dx}{dv} = \frac{1 - v}{1 + v} - v$$

$$\frac{1 - v}{1 + v} - v = \frac{1 - v - v(1 + v)}{1 + v} = \frac{1 + v - v - v^2}{1 + v} = \frac{1 - 2v - v^2}{1 + v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - 2v - v^2}{1 + v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1 - 2v - v^2}{x(1 + v)}$$

3. Realizamos una separación de variables.

$$\frac{1 + v}{1 - 2v - v^2} dv = \frac{1}{x} dx$$

4. Integramos en fracciones parciales.

$$1 - 2v - v^2 = -(v^2 + 2v - 1)$$

$$v^2 + 2v - 1 = (v + 1)^2 - 2$$

$$I = \int \left(\frac{1+v}{1-2v-v^2} \right) dv = -\int \left(\frac{1+v}{v^2+2v-1} \right) dv$$

$$u = v + 1 \Rightarrow du = dv, \quad v = u - 1$$

$$v^2 + 2v - 1 = (u - 1)^2 + 2(u - 1) - 1 = u^2 - 2u + 1 + 2u - 2 - 1 = u^2 - 2$$

$$1 + v = 1 + (u - 1) = u$$

$$-\int \left(\frac{u}{u^2 - 2} \right) du$$

$$w = u^2 - 2 \Rightarrow dw = 2u \, du \Rightarrow \frac{1}{2} dw = u \, du$$

$$-\int \left(\frac{u}{u^2 - 2} \right) du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw = -\frac{1}{2} \ln|w| + C = -\frac{1}{2} \ln|u^2 - 2| + C$$

$$u = v + 1 \Rightarrow u^2 - 2 = (v + 1)^2 - 2 = v^2 + 2v - 1$$

$$\int \frac{1+v}{1-2v-v^2} dv = -\frac{1}{2} \ln|v^2 + 2v - 1| + C$$

5. Integramos el lado derecho.

$$\int \left(\frac{1}{x} \right) dx = \ln(x) + C$$

6. Igualamos ambos lados de la ecuación:

$$-\frac{1}{2} \ln|v^2 + 2v - 1| = \ln|x| + C$$

$$\ln|v^2 + 2v - 1| = -2 \ln|x| + C$$

$$\ln \left(\frac{v^2 + 2v - 1}{x^2} \right) = C'' \Rightarrow \frac{v^2 + 2v - 1}{x^4} = C$$

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1}{x^2} = C \Rightarrow \frac{y^2 + 2xy - x^2}{x^4} = C$$

7. Finalmente multiplicamos todo por " x^4 " y obtenemos la solución general.

$$y^2 + 2xy - x^2 = Cx^4$$

2) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas.

a) $y'' - 9y = -6\cos 3x$

- Resolución:

1. Resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$y'' - 9y = 0 \Rightarrow r^2 - 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3$$

Entonces la solución homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

2. Obtenemos la solución no homogénea $y_p(x)$ para $y'' - 9y = -6 \cos(3x)$

$$y_p(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$$

Si calculamos las derivadas respectivas obtenemos

$$y_p'(x) = -3A \sin(3x) + 3B \cos(3x)$$

$$y_p''(x) = -9A \cos(3x) - 9B \sin(3x)$$

Sustituimos en la ecuación:

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 9y_p &= (-9A \cos(3x) - 9B \sin(3x)) - 9(A \cos(3x) + B \sin(3x)) \\ &= -18A \cos(3x) - 18B \sin(3x) \end{aligned}$$

3. Igualamos al lado derecho:

$$-18A \cos(3x) - 18B \sin(3x) = -6 \cos(3x)$$

Comparando los coeficientes:

- $-18A = -6 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$
- $-18B = 0 \Rightarrow B = 0$

Entonces la solución particular es:

$$y_p(x) = \frac{1}{3} \cos(3x)$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3} \cos(3x)$$

b) $y'' - 3y = -12t$

1. Resolver la ecuación homogénea asociada:

$$y'' - 3y = 0 \Rightarrow y_h(t) = e^{rt}$$
$$r^2 e^{rt} - 3e^{rt} = 0 \Rightarrow e^{rt}(r^2 - 3) = 0$$

Entonces:

$$r^2 - 3 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3}$$

Por lo tanto, la solución homogénea es:

$$y_h(t) = C_1 e^{\sqrt{3}t} + C_2 e^{-\sqrt{3}t}$$

2. Proponer una solución particular de la no homogénea

$$y'' - 3y = -12t$$

$$y_p(t) = At + B$$

Calculamos sus derivadas:

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0$$

Sustituimos en la ecuación:

$$y_p'' - 3y_p = -12t \Rightarrow 0 - 3(At + B) = -12t \Rightarrow -3At - 3B = -12t$$

$$-3A = -12 \Rightarrow A = 4$$

$$-3B = 0 \Rightarrow B = 0$$

Entonces $y_p(t) = 4t$, la solución general a la ecuación es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{\sqrt{3}t} + C_2 e^{-\sqrt{3}t} + 4t$$

TEMA: Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Indique el tipo y el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales parciales.

Tipo: Parcial



Orden: Segundo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot x \cdot y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

Tipo: Parcial



Orden: Tercero

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \cdot \partial y} + x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \cdot u = 5 \cdot y$$

Tipo: Parcial

Orden: Segundo



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = y$$

TEMA: Ecuaciones diferenciales exactas

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas.

a) $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$

1. Verificar si es una ecuación diferencial exacta calculando las derivadas parciales:

$$M(x, y) = 5x + 4y; \quad N(x, y) = 4x - 8y^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(5x + 4y) = 4$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x - 8y^3) = 4$$

2. Esto confirma que la ecuación es **exacta** y ahora buscamos una ecuación $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 5x + 4y; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N = 4x - 8y^3$$

3. Integramos M con respecto a "x":

$$F(x, y) = \int (5x + 4y) dx = \frac{5x^2}{2} + 4xy + h(y)$$

4. Ahora derivamos $F(x, y)$ respecto a y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x + h'(y)$$

5. Igualamos con $N = 4x - 8y^3$:

$$4x + h'(y) = 4x - 8y^3 \Rightarrow h'(y) = -8y^3 \rightarrow h(y) = -2y^4$$

6. Entonces la solución a la ecuación diferencial es:

$$F(x, y) = \frac{5x^2}{2} + 4xy - 2y^4$$

b) $(2xy^2 - 3)dx + (2x^2y + 4)dy = 0$

1. Verificar si es exacta o no.

$$M(x, y) = 2xy^2 - 3 ; N(x, y) = 2x^2y + 4$$

2. Se calculan las derivadas parciales.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 - 3) = 4xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + 4) = 4xy$$

3. Encontrar la función exacta $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 2xy^2 - 3$$

4. Ahora integramos M con respecto a "x":

$$F(x, y) = \int (2xy^2 - 3)dx = x^2y^2 - 3x + h(y)$$

5. Y ahora derivamos $F(x, y)$ respecto a "y" y lo igualamos a $N(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y + h'(y)$$

$$N(x, y) = 2x^2y + 4 \Rightarrow 2x^2y + h'(y) = 2x^2y + 4 \Rightarrow h'(y) = 4 \Rightarrow h(y) = 4y + C$$

6. Entonces la solución general e implícita son:

$$F(x, y) = x^2y^2 - 3x + 4y + C$$
$$x^2y^2 - 3x + 4y = C$$

ACTIVIDAD 2. ¡Pon a prueba tu mente y revela todo tu conocimiento resolviendo esta sopa de letras desafiante!

J	T	B	J	Z	L	M	L	J	N	M	O	I	Y	U	E
G	G	D	C	V	K	H	J	G	B	C	S	Z	F	H	G
U	R	L	V	A	I	T	K	N	G	R	A	R	J	E	C
L	A	M	B	R	H	C	A	L	Q	H	T	H	O	C	V
Y	F	H	N	I	G	R	N	K	U	F	C	C	P	U	B
F	I	G	M	A	F	E	C	U	R	V	A	S	U	A	N
L	C	H	P	B	D	N	U	H	F	T	X	N	Y	C	M
E	A	K	O	L	S	J	G	N	O	L	E	O	T	I	F
S	J	H	D	E	R	I	V	A	D	A	S	I	K	O	H
F	D	A	I	S	A	O	J	M	S	J	C	C	J	N	G
G	O	E	U	E	M	K	K	S	I	G	I	N	M	A	H
N	O	H	O	M	O	G	E	N	E	A	S	U	L	Y	J
R	F	D	T	R	A	Y	E	C	T	O	R	I	A	S	L
A	H	A	R	Y	C	F	L	Y	Y	D	K	U	I	O	P
M	O	D	E	L	O	M	A	T	E	M	A	T	I	C	O

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Indica si las siguientes expresiones corresponden o no a una ecuación diferencial. Justifica con detalle tu respuesta.

- $y' = y \cos x$

Respuesta: Si

- **Justificación:** Esta expresión contiene una función (y) y su derivada de primer orden con respecto a la variable independiente (x). La igualdad establece una relación entre la derivada y la función misma, multiplicada por otra función de la variable independiente (cosx).
- $u + v \operatorname{sen}^2 u = 0$

Respuesta: No

- **Justificación:** Esta expresión relaciona funciones y, pero no aparece ninguna derivada de estas funciones. Entonces, no es una ecuación diferencial.
- $\frac{5}{dx} + 2v = 3$

Respuesta: No

- **Justificación:** Parece haber un error de notación. El término $\frac{5}{dx}$ no tiene sentido porque no hay función que esté derivándose; simplemente aparece un número (5) entre dx. Una ecuación diferencial correcta debería tener una derivada de una función, como o algo similar. Así que, como está escrita, no es una ecuación diferencial.
- $\frac{1}{2}x + 2y^5 - 2 = 6$

Respuesta: No

- **Justificación:** Esta ecuación relaciona x y y, pero no contiene derivadas. Solo son funciones algebraicas. Por tanto, no es una ecuación diferencial.

2. Resolver:

"Sea la función $y = 2x^3 - 2x^2 - 13x + 22$. Comprobar que esta es la solución de la ecuación diferencial $y' = 12x - 4$

1. Calculamos su derivada

$y' = 6x^2 - 4x - 13$ Comprobar con la ecuación diferencial dada

Observaciones:

- $6x^2$ es un término cuadrático (x^2), mientras que en $12x - 4$ no hay x^2
- Además, los coeficientes no coinciden.
- Son expresiones diferentes

3. Completa la siguiente tabla sobre la clasificación de las ecuaciones diferenciales

Ecuación Diferencial	Ordinaria o Parcial	Variable Independiente	Variable Dependiente
$\frac{dy}{dx} = x^3 - 2 + 3$	Ordinaria	x	y
$y' = \sqrt{3x - 1}$	Ordinaria	x	y
$\frac{\partial^2 v}{\partial v} = 5 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}$	Parcial	x, y, z	v, w
$y'' = \text{sen} x - y$	Ordinaria	x	y
$t' = \frac{2v - 4}{3 + t^2}$	Ordinaria	v	t
$\frac{\partial p}{\partial t} = e^{xp}$	Parcial	t, x	p

4. Clasifica las siguientes ecuaciones ordinarias o parciales, y señala su orden, grado y si es lineal o no lineal.

a) $y'' - 4z^4 y' + (z - 1)y = xz^3$

Orden: 2 (máxima derivada es y'') **Ordinaria** (derivadas respecto a una sola variable)

Grado: 1 (grado del mayor derivado)

Linealidad: Lineal (la función y sus derivadas aparecen en primer grado)

b) $\frac{d^2 y}{dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Orden: 2 **Ordinaria** (derivadas respecto a una sola variable)

Grado: 2 (grado del mayor derivado)

Linealidad: No Lineal

c) $t^2y - t^3y'' + 6y = 0$

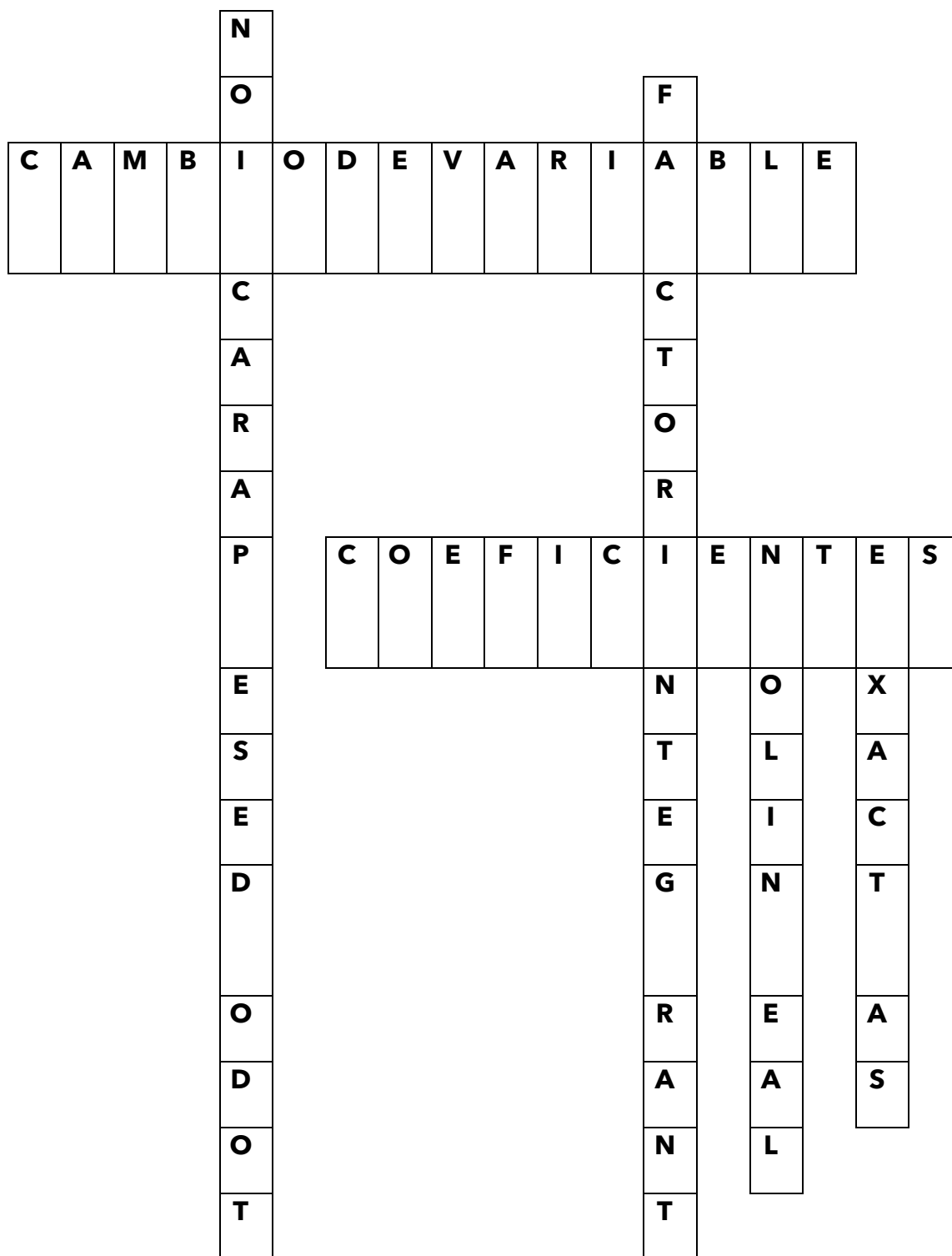
Orden: 2 **Ordinaria** (derivadas respecto a una sola variable)

Grado: 1 (grado del mayor derivado)

Linealidad: Lineal

SOLUCIONARIO CAPÍTULO 2

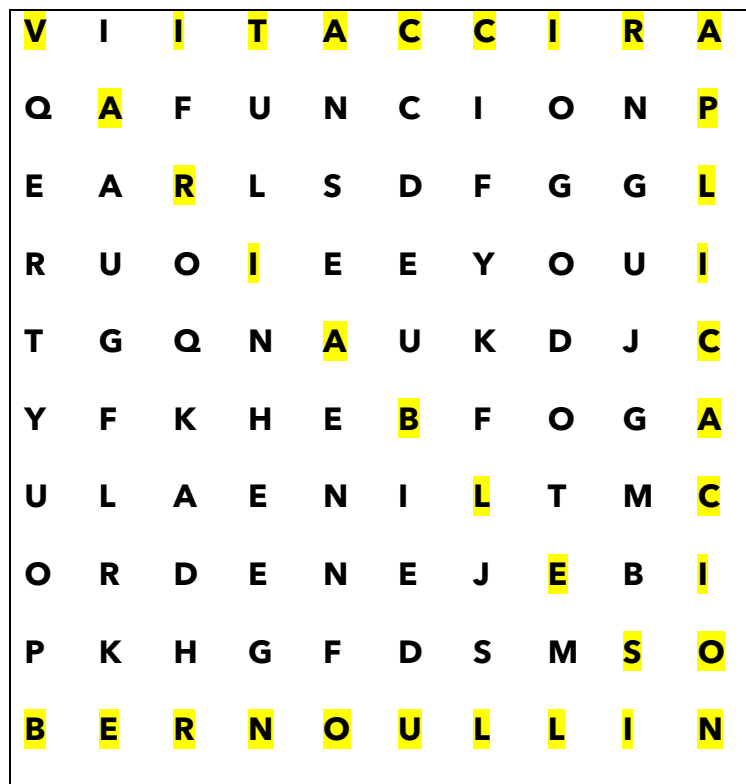
ACTIVIDAD 1 CRUCI-ECUACIONES



E
M

E

ACTIVIDAD 2. ¡Pon a prueba tu mente y revela todo tu conocimiento resolviendo esta sopa de letras desafiante!



Actividad 3 ¡Completa los enunciados y demuestra cuánto sabes resolviendo este reto lleno de conocimiento!

1. Para resolver la ecuación de Bernoulli, primero se realiza el **cambio de variable** $v = y^{1-n}$, lo que transforma la **ecuación** de Bernoulli en una ecuación lineal.
2. La aplicación exitosa de este método a varias ecuaciones lineales de la **física matemática** nos lleva a buscar una transformación de variables tal que en las **nuevas variables** la EDP se puede resolver mediante un **ansatz** separable.

3. Una función **homógenea** es aquella que todos sus términos son del mismo grado.
4. Una ecuación es lineal si "y" y sus derivadas están establecidas de **forma lineal**, es decir, no están elevadas a una **potencia** mayor a 1 ni aparecen multiplicadas entre sí.
5. Este tipo de ecuaciones diferenciales se resuelven mediante el método del factor integrante, el cual es **dependiente** de x.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

Indique si las siguientes funciones son homogéneas o no homogéneas.

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}} \rightarrow \text{Homogénea}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \text{Homogénea}$$

$$f(x, y) = xy \rightarrow \text{Homogénea}$$

$$f(x, y) = \frac{x}{2x+y} \rightarrow \text{Homogénea}$$

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(x - y + 4)dx + (x - y + 5)dy = 0$$

1. Verificamos si la ecuación es exacta, calculando las derivadas parciales respectivas:

$$M(x, y) = x - y + 4 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -1$$

$$N(x, y) = x - y + 5 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

2. Se concluye entonces que la ecuación no es exacta. Por lo que procedemos a buscar una sustitución útil, en este caso $(x - y)$.

$$u = x - y \Rightarrow y = x - u$$

3. De esta forma obtenemos las siguientes igualdades y sustituimos en la ecuación original

$$dx = dx ; dy = d(x - u)$$

$$(x - y + 4)dx + (x - y + 5)dy = 0 \Rightarrow (u + 4)dx + (u + 5)(dx - du) = 0$$

$$(u + 4)dx + (u + 5)dx - (u + 5)du = 0 \Rightarrow (2u + 9)dx - (u + 5)du = 0$$

$$(2u + 9)dx = (u + 5)du \Rightarrow dx = \frac{u + 5}{2u + 9} du$$

4. Ahora, se debe integrar la expresión resultante, para esto usaremos una sustitución para facilitar el cálculo:

$$\int dx = \int \left(\frac{u + 5}{2u + 9} \right) du$$

$$v = 2u + 9 \Rightarrow dv = 2du \Rightarrow du = \frac{dv}{2}$$

$$u + 5 = \frac{v - 9}{2} + 5 = \frac{v - 9 + 10}{2} = \frac{v + 1}{2}$$

Sustituimos en la integral:

$$I = \int \left(\frac{\frac{v + 1}{2}}{v} \right) * \frac{dv}{2} = \int \frac{v + 1}{4v} dv = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4v} \right) dv$$

$$I = \frac{1}{4}v + \frac{1}{4}\ln|v| + C$$

Volvemos a la variable u:

$$v = 2u + 9 \Rightarrow I = \frac{1}{4}(2u + 9) + \frac{1}{4}\ln|2u + 9| + C = \frac{1}{2}u + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\ln|2u + 9| + C$$

Finalmente recordamos que $u = x - y$, entonces la solución general es:

$$\frac{1}{2}(x - y) + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\ln|2(x - y) + 9| = C$$

Resolver la siguiente ecuación y elegir la respuesta correcta

$$(3x^2 - y)dx + (3y^2 - x)dy = 0$$

1. Verificamos si la ecuación es exacta, calculando las derivadas parciales respectivas:

$$M(x, y) = 3x^2 - y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -1$$

$$N(x, y) = 3x^2 - x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

2. Esta ecuación si es exacta por lo que debemos encontrar una función potencial $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = 3x^2 - x ; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = M = 3x^2 - y$$

Integramos " M " con respecto a x , y debemos derivar $F(x, y)$ respecto a y para comparar con N :

$$F(x, y) = \int (3x^2 - y) dx = x^3 - xy + h(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x + h'(y) = 3y^2 - x \Rightarrow h'(y) = 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^3 + C$$

De esta forma obtenemos la solución general:

$$F(x, y) = x^3 - xy + y^3 = C$$

Indique su solución general

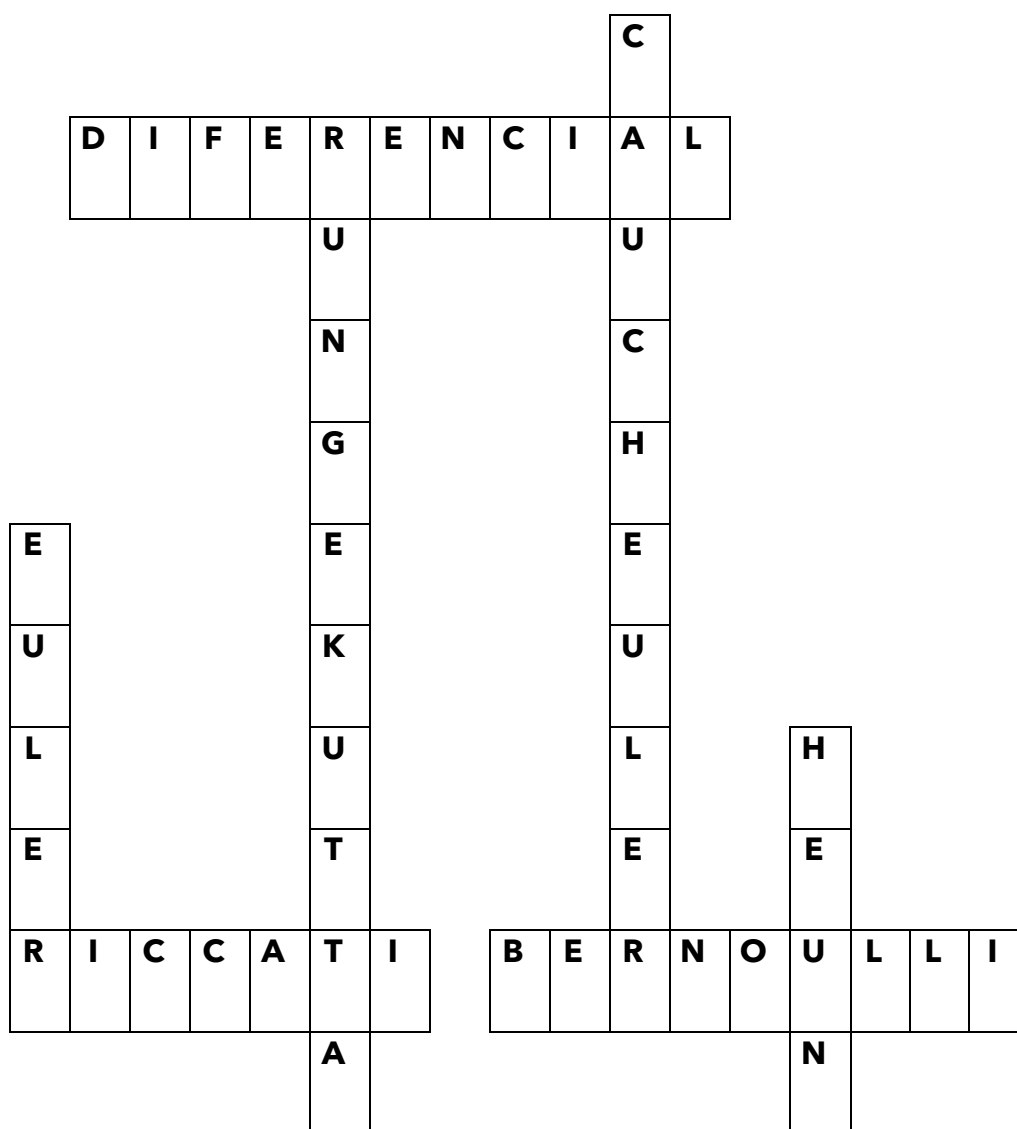
$$y^2 + y - x = y$$

$$x^4 - y^2x + x = c$$

$$x^3 - xy + y^3 = c$$

SOLUCIONARIO CAPÍTULO 3

ACTIVIDAD 1. CRUCI-ECUACIONES

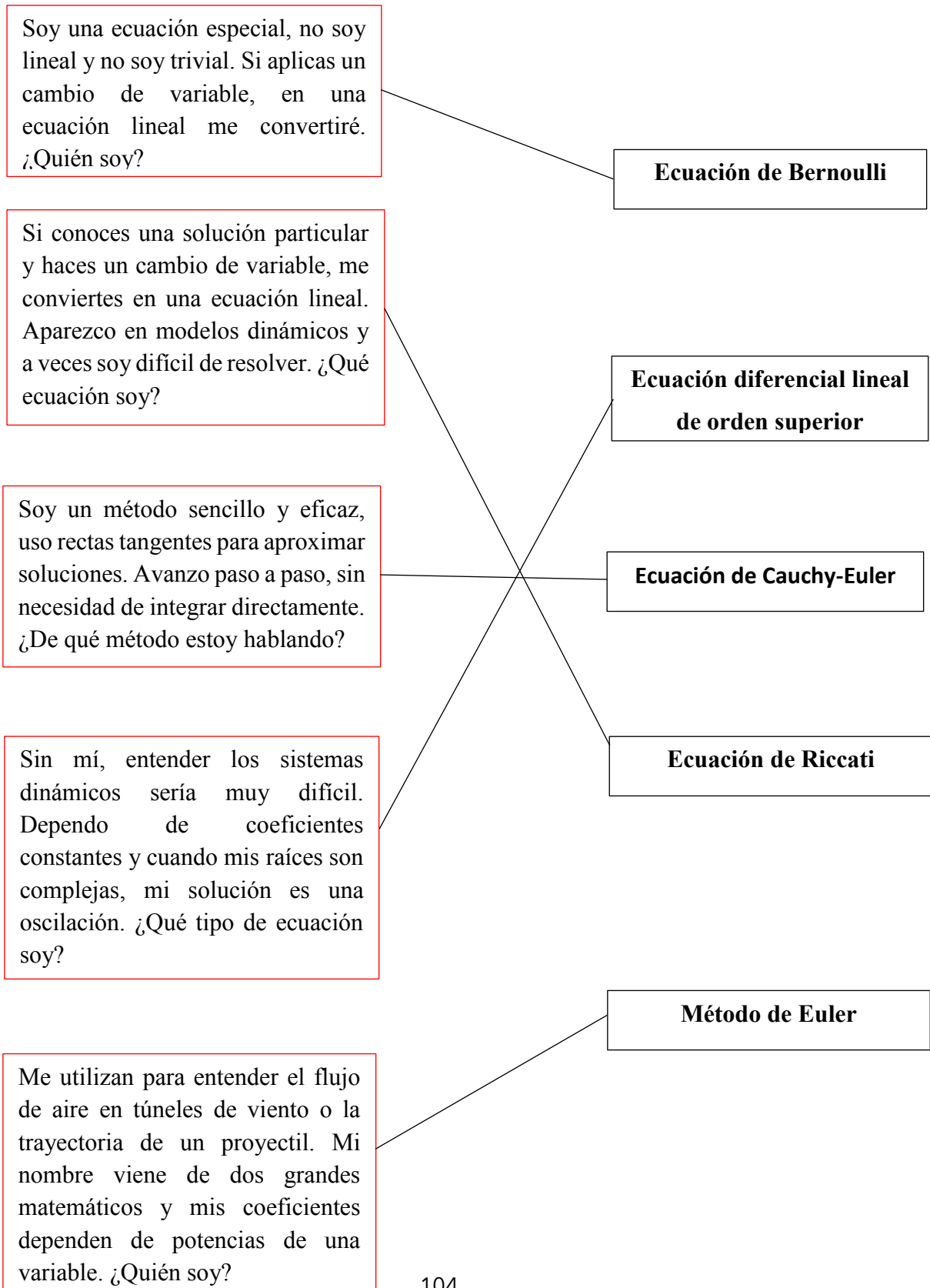


ACTIVIDAD 2. ¡Pon a prueba tu mente y revela todo tu conocimiento resolviendo esta sopa de letras desafiante!

W	R	U	H	R	H	X	G	B	K	I	P	A	L	A	Q	L	L	W	L
Q	E	X	A	C	T	A	F	M	M	Q	C	P	K	S	F	J	K	D	K
A	H	O	I	T	Q	C	D	J	O	I	F	Z	M	D	S	M	J	G	H
I	L	L	O	Y	W	V	S	H	M	R	E	X	N	F	O	H	H	H	G
N	W	U	P	U	E	B	A	A	H	Y	O	F	B	D	H	G	F	J	F
G	E	T	S	I	R	N	N	G	Q	E	L	A	E	G	J	F	D	N	D
E	R	A	D	P	T	I	O	F	T	W	Q	L	V	H	K	F	S	V	B
N	T	N	F	O	D	K	I	D	O	Q	A	P	C	J	N	D	A	N	U
I	Y	G	G	Ñ	Y	V	U	S	K	D	O	Q	X	K	V	S	Z	B	T
E	U	E	K	L	O	V	Y	A	O	X	Z	M	Z	L	D	A	X	A	R
R	I	N	J	L	C	F	T	F	A	C	X	P	P	M	X	Q	C	Q	S
I	O	T	L	K	I	H	R	G	C	O	E	F	I	C	I	E	N	T	E
A	C	E	Z	J	R	U	E	H	J	V	M	L	O	N	P	W	V	E	Q
E	S	Y	X	H	E	Y	W	J	M	E	T	O	D	O	O	E	B	R	A
S	D	U	C	G	M	T	S	K	Z	V	C	Q	U	V	Y	R	N	T	S
X	F	J	V	F	U	F	D	L	E	B	V	U	Y	C	T	T	M	Y	D
Z	G	K	B	D	N	X	S	E	C	I	A	R	T	X	R	Y	R	U	F
Z	N	H	N	S	Y	Z	I	U	L	M	B	J	R	Z	O	U	G	I	H
U	R	Y	M	A	O	I	N	T	E	G	R	A	N	T	E	I	B	O	L

ACTIVIDAD 3. ¡Conecta las pistas y descubre el misterio! Une con líneas

las respuestas de estos acertijos y pon a prueba tu ingenio.!



ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

Responda las siguientes preguntas:

¿Qué ventaja tiene el **Método de Heun** sobre el **Método de Euler** en términos de precisión?

El **Método de Heun** es una **mejora del Método de Euler**. Su principal ventaja es que **ofrece una mayor precisión** al aproximar la solución de una ecuación diferencial. Mientras que el Método de Euler usa solo la pendiente al inicio del intervalo, el Método de Heun promedia la pendiente al inicio y al final del intervalo, lo que reduce el error global. Es un método de segundo orden, frente al primer orden del de Euler.

¿En qué casos sería más conveniente utilizar el **Método de Heun** en lugar de otros métodos numéricos?

El Método de Heun es más conveniente cuando:

- Se requiere **más precisión** que la que ofrece Euler, pero sin la complejidad computacional de métodos de orden más alto como Runge-Kutta de orden 4.
- El modelo por resolver tiene **cambios suaves** y no necesita un método altamente sofisticado.
- Se desea mantener un equilibrio entre **eficiencia computacional y precisión**.
- Se trata de problemas donde una **mejor estimación del comportamiento futuro** del sistema es importante, pero el tiempo de cálculo es limitado.

¿Qué es el **Método de Runge-Kutta** y para qué se utiliza?

El **Método de Runge-Kutta**, en particular el de orden 4 (RK4), es un método numérico **de alta precisión** para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Se utiliza ampliamente porque **no requiere derivadas adicionales ni transformaciones complicadas**, y ofrece gran exactitud con pasos de tamaño moderado.

Se usa en problemas donde:

- Se requiere una **alta precisión** en la solución numérica.
- Otras técnicas como Euler o Heun **no son suficientemente exactas**.
- El comportamiento del sistema es **complejo o no lineal**



Doctor Químico Industrial Fredis Franco-Pesantez, Diploma Superior en Docencia Universitaria, Profesor de Educación Media Especialización Ciencias Naturales, Magister Enseñanza en Física y Diploma Superior en Docencia. Diplomado en Inteligencia Artificial. Egresado del Programa de Doctorado de Estadística y Matemática Aplicada. Laboral: Docente de Universidad técnica de Machala. Revisor de revistas, publicación de artículos Academia: Cursos aprobados Superación profesional de metodología en investigación, Estadística en Investigación con STATA y Espectrometría de masas y otros. Profesional: Integrante del grupo de investigación Bioingeniería y Aplicaciones Analíticas e Ingeniería. Capacitador: Para cursos de estadística en educación media y universitaria. Ponente: En Congresos nacionales e Internacionales



Ingeniero Químico Wilson Patricio León Cueva, Magister en Ingeniería Ambiental y Seguridad Industrial, Magister en Ingeniería Química Aplicada, actualmente Docente Investigador en la Universidad Técnica de Machala de la Facultad de Ciencias Químicas y de la Salud en la carrera de Ingeniería Química en las asignaturas como Operaciones Unitarias, Cálculos computacionales, Diseño de plantas, Simulación de Procesos. Experiencia Profesional en el campo de la Mecánica General en diseño, construcción y mantenimiento de equipos industriales.



San Martin Torres Delly Maribel, Mgs. Ingeniera Química, inicio su formación educativa en Machala y se graduó en el Colegio Nueve de Octubre. Posteriormente, completó una Maestría en Química Aplicada en la Universidad Técnica Particular de Loja. Actualmente cursando el doctorado en ciencias aplicadas de la universidad de Uncuyo. Su trayectoria profesional abarca roles en el campo de docencia, así como la enseñanza en la Universidad Técnica de Machala. Además, es autora del libro "Sostenibilidad hídrica: Adsorción del Arsénico utilizando Zeolitas de arcillas Naturales" y otros trabajos investigativos en el ámbito de la conservación y medio ambiente, incluyendo la redacción de artículos científicos. Docente Investigador de la UTMACH.

ISBN: 978-9942-53-090-5



9 789942 530905

Compás
capacitación e investigación