

# **DISEÑO BÁSICO DE ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO**

**Basado en NEC 2015 y ACI 318-25**

**Marcelo Zárate Encalada**

Facultad de Ingeniería Civil

2  
0  
2  
5

**Primera Edición**

Universidad Técnica de Machala

[www.utmachala.edu.ec](http://www.utmachala.edu.ec)

Noviembre de 2025

# **DISEÑO BÁSICO DE ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO**

## **Basado en NEC 2015 y ACI 318-25**

---

Marcelo Zárate Encalada



© **Marcelo Zárate Encalada**

Primera edición 2025-11-06

**ISBN: 978-9942-53-074-5**

**DOI: <http://doi.org/10.48190/9789942530745>**

Distribución online

 Acceso abierto

#### **Cita**

Peñaloza, W. (2025) DISEÑO BÁSICO DE ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO Basado en NEC 2015 y ACI 318-25. Editorial Grupo Compás

Este libro es parte de la colección de la Univesidad Técnica de Machala y ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad de la publicación. El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones en las leyes, la producción o almacenamiento total o parcial de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de la misma por cualquiera de sus medios, tanto si es electrónico, como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización de los titulares del copyright.

# PREFACIO

Este texto recoge las pautas necesarias para el diseño estructural de elementos de hormigón armado por resistencia última[1]. Su objetivo es servir principalmente de guía para estudiantes cursando la carrera de ingeniería civil, aunque graduados podrían utilizarlo para refrescar algunas ideas concernientes al diseño estructural, y actualizarse con respecto a la normativa vigente. En el desarrollo de este documento se emplea la Norma Ecuatoriana de Construcción (NEC-2015, Estructuras de Hormigón Armado) [2] como normativa principal, y para aquellos temas que la NEC-2015 no cubre, se aplican los Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural del Instituto Americano del Concreto (ACI 318-25) [3]. En este contexto, debe mencionarse que la norma nacional registra al ACI como su principal referencia para desarrollar su contenido.

Las secciones de este documento se limitan al estudio y diseño de los elementos de estructuras más comunes que se necesitan en estructuras medianas y pequeñas. Para un estudio más detallado se debe recurrir a libros de texto avanzados y manuales como *The Reinforced Concrete Design Handbook* [4] publicado por el ACI.

En cuanto al diseño estructural de viviendas de hormigón armado, la NEC tiene un capítulo especializado *NEC-SE-VIVIENDA* [5], cuya aplicación se limita al diseño de viviendas de hasta 2 niveles con luces de hasta 5 metros.

La motivación para este libro nace a partir de conocer que la gran mayoría de los libros de texto relacionados con el diseño de concreto reforzado utilizan el sistema anglosajón de unidades, el sistema cegesimal de unidades (CGS), o el sistema métrico decimal (MKS), mientras que oficialmente en Ecuador rige el sistema internacional de unidades (SI). Situación similar se observa en el día a día, donde a pesar de que el (SI) fue adoptado en Ecuador en 1974<sup>1</sup>, aun hoy es de uso común el *kilo* o la *libra* para medir pesos, y es fácil encontrar el uso de la *pulgada* para medir longitudes o las dimensiones de algún objeto en el ambiente técnico-profesional, sobretodo de artículos pequeños y de ferretería.

Esta discrepancia entre las unidades oficiales y las de uso común no contribuyen al aprendizaje de los estudiantes de ingeniería civil cuando se trabaja en ejemplos prácticos, y se constituye en un obstáculo para el cabal entendimiento del diseño de los elementos de hormigón armado

---

<sup>1</sup>El Sistema Internacional de Unidades (SI) se adoptó en Ecuador mediante Ley No. 1456 de Pesas y Medidas, promulgada en el Registro Oficial No. 468 del 9 de enero de 1974.



y su aplicación en el ámbito profesional. Para contribuir a reducir la brecha, en este texto se usa exclusivamente el sistema internacional de unidades, con lo que se contribuye al desarrollo técnico en el campo del diseño y construcción de estructuras de hormigón armado.

Es importante mencionar que en este documento no se analizan todas las posibilidades teóricas de diseño estructural para elementos de hormigón armado, sino que se enfoca exclusivamente en el diseño por resistencia última, orientando los ejemplos hacia proyectos de pequeña y mediana envergadura.

Puesto que el enfoque de este documento es el desarrollo básico del diseño estructural, los cálculos que se detallan en los ejemplos han sido ejecutados sin la utilización de programas especializados que existen en el mercado, sino utilizando herramientas básicas como calculadoras de bolsillo, hojas electrónicas o programas desarrollados por el autor utilizando herramientas de fuente abierta. La finalidad es que cualquier estudiante universitario los pueda replicar sin tener que incurrir en los gastos que representan la adquisición de programas especializados, y a la vez invitarlos a desarrollar sus propias herramientas. De la misma manera, el contenido mismo de este texto, ha sido desarrollado utilizando herramientas informáticas de fuente abierta.

Es necesario mencionar que el desarrollo de este documento se fundamentó inicialmente en el ACI 318-19 [6]. A la fecha, el Instituto Americano del Concreto ya publicó el reglamento ACI 318-25 [3], por lo que se ha tenido que revisar su contenido para adoptar las mejoras presentadas en la nueva versión. Lo más relevante en la más reciente versión del reglamento, en concordancia con el objetivo de este documento, tiene que ver con las combinaciones de carga para análisis estructural, y el detallado del refuerzo para cumplir con la integridad estructural.

Finalmente es necesario recalcar, que aunque se ha puesto cuidado en la elaboración del texto, tanto en el desarrollo de los ejemplos, como en la aplicación de la normativa, el documento podría contener errores, por lo que el autor no se responsabiliza del uso y aplicación de este documento.

# Tabla de Contenido

|                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. INTRODUCCIÓN</b>                                          | <b>13</b> |
| 1.1. CARACTERÍSTICAS DEL CONCRETO . . . . .                     | 14        |
| 1.1.1. Tipos de cemento . . . . .                               | 14        |
| 1.1.2. Agregado grueso y agregado fino . . . . .                | 15        |
| 1.1.3. Propiedades mecánicas del concreto . . . . .             | 16        |
| 1.1.4. Pruebas realizadas al concreto . . . . .                 | 17        |
| 1.1.5. Propiedades del acero de refuerzo . . . . .              | 18        |
| 1.2. UNIDADES . . . . .                                         | 18        |
| 1.2.1. Nomenclatura y unidades de cálculo . . . . .             | 19        |
| 1.3. CARGAS . . . . .                                           | 21        |
| 1.3.1. Combinaciones de carga . . . . .                         | 22        |
| 1.3.2. Predimensionamiento de elementos estructurales . . . . . | 24        |
| 1.3.3. Evaluación de cargas . . . . .                           | 26        |
| 1.4. FACTORES DE REDUCCIÓN DE RESISTENCIA . . . . .             | 27        |
| 1.5. EXACTITUD DE LOS CÁLCULOS . . . . .                        | 28        |
| <b>2. REQUISITOS DE FUNCIONAMIENTO</b>                          | <b>31</b> |
| 2.1. HIPÓTESIS DE DISEÑO . . . . .                              | 31        |
| 2.1.1. Viga simplemente armada . . . . .                        | 33        |
| 2.1.2. Viga doblemente armada . . . . .                         | 36        |
| 2.1.3. Viga de sección T . . . . .                              | 38        |
| 2.2. DEFLEXIONES . . . . .                                      | 42        |
| 2.2.1. Deflexiones admisibles . . . . .                         | 43        |
| 2.3. DISTRIBUCIÓN DEL REFUERZO . . . . .                        | 44        |
| 2.3.1. Tipos de refuerzo . . . . .                              | 45        |
| 2.3.2. Refuerzo por flexión . . . . .                           | 46        |
| 2.3.3. Refuerzo por compresión . . . . .                        | 48        |
| 2.3.4. Refuerzo por corte . . . . .                             | 50        |
| 2.3.5. Refuerzo por torsión . . . . .                           | 53        |
| 2.3.6. Refuerzo por retracción y temperatura . . . . .          | 54        |
| 2.3.7. Desarrollo y anclaje del refuerzo . . . . .              | 54        |
| 2.3.8. Empalmes . . . . .                                       | 61        |
| 2.3.9. Integridad estructural . . . . .                         | 63        |

|           |                                                                                             |            |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.4.      | ESFUERZOS ADMISIBLES . . . . .                                                              | 65         |
| 2.5.      | TOLERANCIAS ADMISIBLES . . . . .                                                            | 66         |
| <b>3.</b> | <b>REQUISITOS DE RESISTENCIA</b>                                                            | <b>69</b>  |
| 3.1.      | RESISTENCIA A CARGA AXIAL . . . . .                                                         | 70         |
| 3.1.1.    | Efectos de esbeltez . . . . .                                                               | 71         |
| 3.2.      | RESISTENCIA A FLEXIÓN . . . . .                                                             | 71         |
| 3.3.      | RESISTENCIA A CORTANTE EN UNA DIRECCIÓN . . . . .                                           | 72         |
| 3.3.1.    | Miembros sin fuerza axial . . . . .                                                         | 72         |
| 3.3.2.    | Miembros con compresión axial . . . . .                                                     | 73         |
| 3.3.3.    | Miembros con tracción axial significativa . . . . .                                         | 73         |
| 3.3.4.    | Refuerzo para cortante en una dirección . . . . .                                           | 74         |
| 3.4.      | RESISTENCIA A CORTANTE EN DOS DIRECCIONES . . . . .                                         | 74         |
| 3.4.1.    | Refuerzo a cortante en dos direcciones . . . . .                                            | 76         |
| 3.5.      | RESISTENCIA A TORSIÓN . . . . .                                                             | 77         |
| 3.5.1.    | Refuerzo transversal a torsión . . . . .                                                    | 79         |
| 3.5.2.    | Refuerzo longitudinal a torsión . . . . .                                                   | 79         |
| 3.6.      | RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO . . . . .                                                      | 79         |
| <b>4.</b> | <b>DISEÑO DE VIGAS</b>                                                                      | <b>81</b>  |
| 4.1.      | VIGAS SOMETIDAS A FLEXIÓN Y CORTE . . . . .                                                 | 81         |
| 4.1.1.    | Vigas simplemente armadas . . . . .                                                         | 82         |
| 4.1.2.    | Vigas doblemente armadas . . . . .                                                          | 90         |
| 4.1.3.    | Vigas tipo Tee . . . . .                                                                    | 103        |
| 4.2.      | VIGAS SOMETIDAS A TORSIÓN . . . . .                                                         | 107        |
| 4.3.      | CONTROL DE DUCTILIDAD . . . . .                                                             | 115        |
| 4.4.      | CONTROL DE DEFLEXIONES . . . . .                                                            | 116        |
| <b>5.</b> | <b>DISEÑO DE COLUMNAS</b>                                                                   | <b>123</b> |
| 5.0.1.    | Predimensionamiento de columnas . . . . .                                                   | 123        |
| 5.0.2.    | Análisis de columnas mediante el uso de Diagrama de Interacción carga-<br>momento . . . . . | 125        |
| 5.0.3.    | Diagramas de interacción como ayudas de diseño . . . . .                                    | 130        |
| 5.0.4.    | Flexocompresión biaxial . . . . .                                                           | 136        |
| <b>6.</b> | <b>DISEÑO DE LOSAS</b>                                                                      | <b>147</b> |
| 6.1.      | LOSAS EN UNA DIRECCIÓN . . . . .                                                            | 147        |
| 6.1.1.    | Losa maciza en dirección . . . . .                                                          | 147        |
| 6.1.2.    | Franja representativa de diseño para losas en una dirección . . . . .                       | 148        |
| 6.1.3.    | Sistema de viguetas en una dirección . . . . .                                              | 149        |
| 6.2.      | DISEÑO DE ESCALERAS . . . . .                                                               | 154        |
| 6.2.1.    | Diseño arquitectónico de una escalera . . . . .                                             | 154        |
| 6.2.2.    | Diseño estructural de la escalera . . . . .                                                 | 156        |

|                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.3. LOSAS EN DOS DIRECCIONES . . . . .                           | 163        |
| 6.3.1. Sistema reticular de viguetas en dos direcciones . . . . . | 163        |
| 6.3.2. Método de Diseño Directo . . . . .                         | 164        |
| 6.3.3. Método del Pórtico Equivalente . . . . .                   | 169        |
| <b>7. DISEÑO DE CIMENTACIÓN</b>                                   | <b>171</b> |
| 7.1. ZAPATAS AISLADAS . . . . .                                   | 174        |
| 7.2. CABEZALES PARA PILOTES . . . . .                             | 193        |
| <b>8. DISEÑO DE MUROS</b>                                         | <b>201</b> |
| <b>9. ANEXOS</b>                                                  | <b>217</b> |
| 9.1. Anexo A: Acero de refuerzo . . . . .                         | 217        |
| 9.2. Anexo B: Cargas y sobrecargas . . . . .                      | 217        |
| 9.3. Anexo C: Tolerancias admisibles . . . . .                    | 219        |
| 9.3.1. Fabricación y ensamblaje del refuerzo . . . . .            | 219        |
| 9.3.2. Localización del refuerzo . . . . .                        | 219        |
| 9.4. Anexo D: Momentos, cortantes y puntos de inflexión . . . . . | 219        |
| 9.4.1. Vigas simplemente apoyadas . . . . .                       | 220        |
| 9.4.2. Vigas biempotradas . . . . .                               | 222        |
| 9.4.3. Vigas en voladizo . . . . .                                | 224        |
| 9.5. Anexo E: Diagramas de Interacción del ACI . . . . .          | 226        |



# Lista de Figuras

|                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1. Viga simplemente apoyada sometida a carga gravitacional . . . . .                                                                                                                                                          | 33  |
| 2.2. Diagrama de esfuerzos-deformaciones de viga simplemente armada (adaptado de Mattock et al.) . . . . .                                                                                                                      | 33  |
| 2.3. Diagrama de esfuerzos-deformaciones en viga doblemente reforzada . . . . .                                                                                                                                                 | 37  |
| 2.4. Diagrama de esfuerzos-deformaciones en viga doblemente armada (adaptado de Mattock et al.) . . . . .                                                                                                                       | 37  |
| 2.5. Geometría de viga $T$ como parte de un sistema de piso, acorde ACI-6.3.2.1 [3])                                                                                                                                            | 39  |
| 2.6. Geometría de viga $T$ aislada . . . . .                                                                                                                                                                                    | 40  |
| 2.7. Sección transversal efectiva de viga $T$ . . . . .                                                                                                                                                                         | 40  |
| 2.8. Fuerzas internas en viga $T$ . . . . .                                                                                                                                                                                     | 41  |
| 2.9. Descomposición de la sección transversal efectiva en una viga $T$ . . . . .                                                                                                                                                | 41  |
| 2.10. Requerimiento del refuerzo a flexión (adaptado de NEC 2015[2]) . . . . .                                                                                                                                                  | 47  |
| 2.11. Refuerzo superficial para vigas y viguetas con $h > 900$ mm (adaptado de ACI R9.7.2.3 [3]) . . . . .                                                                                                                      | 49  |
| 2.12. Sección transversal de columna. La dimensión $x_i$ medida centro a centro de las barras no debe exceder de 350 mm. La dimensión $h_x$ se toma como la mayor dimensión $x_i$ (adaptado de ACI R-18.5.7.2[3]) . . . . .     | 49  |
| 2.13. Distribución de estribos en vigas (adaptado de NEC [2]) . . . . .                                                                                                                                                         | 50  |
| 2.14. Distribución de estribos en columnas (adaptado de NEC [2]) . . . . .                                                                                                                                                      | 51  |
| 2.15. Longitud de desarrollo del refuerzo por flexión en una viga continua (adaptado de ACI Fig. R9.7.3.2 [3]) . . . . .                                                                                                        | 56  |
| 2.16. Longitud de gancho estándar $\ell_{dh}$ (adaptado de ACI R25.4.3.3 [3]) . . . . .                                                                                                                                         | 58  |
| 2.17. Extensiones mínimas del refuerzo corrugado en losas en dos direcciones sin vigas (adaptado de ACI Fig. 8.7.4.1.3 [3]) . . . . .                                                                                           | 64  |
| 3.1. (a)Esfuerzos de torsión por equilibrio; (b) Esfuerzos de torsión por compatibilidad                                                                                                                                        | 77  |
| 3.2. Parámetros utilizados en el diseño de una viga sometida a esfuerzos de torsión .                                                                                                                                           | 78  |
| 3.3. Aplicación del tronco de pirámide para determinar $A_2$ en apoyos escalonados o inclinados (Adaptado del ACI R22.8.3.2 [3] ). . . . .                                                                                      | 80  |
| 4.1. Viga de 400 mm x 250 mm con diferentes cuantías de refuerzo: a) cuantía próxima a la cuantía mínima reglamentaria, b) cuantía dentro de los límites reglamentarios, c) cuantía superior a la máxima reglamentaria. . . . . | 116 |

|                                                                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1. Diagrama de Interacción uniaxial representando esfuerzos nominales para columna de sección rectangular de $400\text{ mm} \times 300\text{ mm}$ con diversas cuantías de refuerzo. . . . . | 131 |
| 6.1. Losas armadas en una dirección. En el caso de losas apoyadas solo en dos bordes, la dirección de diseño es siempre perpendicular a los apoyos. . . . .                                    | 148 |
| 6.2. Franja representativa de diseño para losa armada en una dirección . . . . .                                                                                                               | 148 |
| 6.3. Sistema de viguetas en una dirección . . . . .                                                                                                                                            | 149 |
| 6.4. Tipos de escaleras de hormigón armado . . . . .                                                                                                                                           | 155 |
| 6.5. Módulo de ascensión cómoda . . . . .                                                                                                                                                      | 155 |
| 6.6. Altura de paso mínima recomendada . . . . .                                                                                                                                               | 156 |
| 6.7. Franja de losa . . . . .                                                                                                                                                                  | 166 |
| 7.1. Tipos de zapatas . . . . .                                                                                                                                                                | 171 |
| 7.2. Distribución recomendada para grupo de pilotes de diámetro $D$ , donde la distancia mínima a ejes de pilotes es $s \geq 2.5D$ , recomendado 3 a $3.5D$ . . . . .                          | 173 |

# Lista de Tablas

|       |                                                                                                                                                                                      |    |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.2.  | Predimensionamiento de losas reticulares . . . . .                                                                                                                                   | 25 |
| 1.3.  | Factores de reducción de resistencia $\phi$ [2] . . . . .                                                                                                                            | 28 |
| 1.4.  | Factor de reducción de resistencia, $\phi$ , para momento, fuerza axial, o combinación de momento y fuerza axial, en elementos reforzados con estribos (Tabla 21.2.2)[3])            | 28 |
| 1.5.  | Factor de reducción de resistencia, $\phi$ , para momento, fuerza axial, o combinación de momento y fuerza axial, en elementos reforzados con espirales (Tabla 21.2.2 [3]) . . . . . | 29 |
| 2.1.  | Valores de $\beta_1$ para la distribución rectangular equivalente [2] . . . . .                                                                                                      | 32 |
| 2.2.  | Espesor mínimo de losas macizas no preesforzadas en una dirección (Tabla 7.3.1.1[3]) . . . . .                                                                                       | 43 |
| 2.3.  | Espesor mínimo de losas no preesforzadas en dos direcciones sin vigas interiores para hormigón de peso normal y $f_y = 420 \text{ MPa}$ (Tabla 8.3.1.1[3]) . . . . .                 | 43 |
| 2.4.  | Espesor mínimo de losas no preesforzadas en dos direcciones con vigas entre los apoyos en todos los lados (Tabla 8.3.1.2[3]) . . . . .                                               | 44 |
| 2.5.  | Altura mínima de vigas no preesforzadas para hormigón de peso normal y $f_y = 420 \text{ MPa}$ (Tabla 9.3.1.1[3]) . . . . .                                                          | 44 |
| 2.6.  | Deflexión máxima admisible $v_v$ calculada (Tabla 24.2.2[3]) . . . . .                                                                                                               | 45 |
| 2.7.  | Ubicación del primer estribo y límite de espaciamiento como refuerzo a cortante para losas en dos sentidos (Tabla 8.7.6.3[3]) . . . . .                                              | 52 |
| 2.8.  | Longitud de desarrollo, $\ell_d$ , para barras corrugadas y alambre corrugado en tracción (Tabla 25.4.2.3 [3]) . . . . .                                                             | 57 |
| 2.9.  | Factores de modificación para el desarrollo de las barras corrugadas y alambres corrugados en tracción (Tabla 25.4.2.5 [3]) . . . . .                                                | 58 |
| 2.10. | Factores de modificación para el desarrollo de ganchos estándar en barras corrugadas en tracción (Adaptada de Tabla 25.4.3.2 [3]) . . . . .                                          | 59 |
| 2.11. | Geometría del gancho estándar para barras corrugadas en tracción (Tabla 25.3.1[3])                                                                                                   | 60 |
| 2.12. | Diámetro mínimo interior de doblado y geometría del gancho estándar para estribos, amarras y estribos cerrados de confinamiento (Tabla 25.3.2 [3]) . . . . .                         | 61 |
| 2.13. | Factores de modificación para barras y alambres corrugados a compresión (Tabla 25.4.9.3 [3]) . . . . .                                                                               | 62 |
| 2.14. | Longitud de empalme por traslapo de barras y alambres corrugados a tracción (Tabla 25.5.2.1 [3]) . . . . .                                                                           | 62 |



|      |                                                                                                                                                                              |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1. | Ecuaciones para el cálculo de $v_c$ en dos direcciones (Tabla 22.6.5.2 [3]) . . . . .                                                                                        | 76  |
| 3.2. | Resistencia nominal al aplastamiento (Tabla 14.5.6.1[3]) . . . . .                                                                                                           | 80  |
| 6.1. | Coeficientes de distribución en un vano final (Tabla 8.10.4.2 [8]) . . . . .                                                                                                 | 167 |
| 6.2. | Fracción del momento negativo interior $M_u$ en una franja de columna (Tabla 8.10.5.1 [8]) . . . . .                                                                         | 167 |
| 6.3. | Fracción del momento negativo exterior $M_u$ en una franja de columna (Tabla 8.10.5.2 [8]) . . . . .                                                                         | 168 |
| 6.4. | Fracción del momento positivo $M_u$ en una franja de columna (Tabla 8.10.5.5 [8])                                                                                            | 168 |
| 6.5. | Fracción del momento $M_u$ de una franja de columna asignable a las vigas (Tabla 8.10.7.1 [8]) . . . . .                                                                     | 169 |
| 9.1. | Propiedades de varillas comerciales para refuerzo estructural, con peso específico $\gamma_s = 78.5 \text{ kN/m}^3$ , y límite de fluencia $f_y = 420 \text{ MPa}$ . . . . . | 218 |

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

El hormigón armado o concreto reforzado, como también se lo llama, sin temor a equivocarse, es en la actualidad y desde hace varias décadas, el material más usado en la construcción, sobretodo en el ámbito de la vivienda, en el que se llega a tener una cobertura del 95% con estructuras de hormigón armado<sup>1</sup>, de acuerdo a las estadísticas de los últimos 15 años respecto a los permisos de construcción otorgados a nivel nacional en Ecuador, obteniendo cifras similares a nivel global.

Sin duda, lo que hace que el hormigón armado sea el material preferido de construcción tiene que ver con las ventajas que el material posee, entre las que podemos citar: alta resistencia a la compresión por costo unitario, alta resistencia a efectos causados por fuego y agua, bajos costos por mantenimiento, conformación de estructuras con alta rigidez, construcciones con larga vida útil, ofrece flexibilidad arquitectónica, frecuentemente es el único material rentable en la construcción de zapatas y losas de entrepiso, se puede construir con materiales de la localidad, y no necesita demasiada intervención de mano de obra calificada. Por supuesto que también presenta algunas desventajas, entre las que podemos señalar: el concreto tiene baja resistencia a la tracción, requiere la construcción de encofrados y obras falsas hasta alcanzar el endurecimiento necesario, pesos unitarios altos que producen cargas muertas altas, tiene relativamente baja resistencia en relación a su peso unitario, la resistencia del concreto varía acorde a su proporcionamiento, mezclado y curado.

En principio, la mezcla básica del concreto está compuesta de agregado grueso (grava), agregado fino (arena), cemento, aire y agua. Sin embargo, dependiendo del origen de los materiales, estos podrían contener impurezas que afectarían negativamente el comportamiento del concreto. Es por ejemplo muy común que el agregado fino esté contaminado con limo, arcillas y material orgánico, sobre todo cuando se extrae del lecho de los ríos de la zona costera. Por tal razón, y para evitar problemas con el diseño y la resistencia del concreto, antes de proceder con la mezcla de los materiales es aconsejable eliminar las impurezas mediante procesos de cribado y lavado del material.

---

<sup>1</sup>Esta cobertura corresponde a los permisos de construcción otorgados en los municipios del país de acuerdo a los datos del Instituto Ecuatoriano de Normalización - INEN

Es también común la necesidad de modificar las características del concreto con el fin de alcanzar cierta condición que favorezca a la ejecución del proyecto. Podría ser necesario acelerar o retardar el fraguado, o requerir un concreto muy fluido, mucho más plástico, por lo que se recurre al uso de aditivos, los que se preparan con el objetivo de modificar una característica específica de la mezcla. Así, encontramos aditivos inclusores de aire, retardantes de fraguado, acelerantes de fraguado, impermeabilizantes, modificadores de color, inhibidores de corrosión, etc. Hay empresas especializadas que proporcionan la información técnica de los productos, incluyendo la relación de proporcionalidad, y que generalmente están dispuestos a orientar al constructor en el uso de sus productos. Para un mejor entendimiento de la clase de aditivos existentes, sus usos y los efectos que pueden provocar en el concreto, se puede recurrir al *Report on Chemical Admixtures for Concrete* [9].

Al concreto también se lo suele modificar agregándole fibras que mejoran su comportamiento y resistencia, encontrándose en el mercado fibra metálica y fibra de vidrio listas para su uso con el concreto. Debido a la importancia global del concreto, las investigaciones continúan y hoy en la industria se habla de hormigones traslucidos, hormigones conductores, hormigones reflectantes, hormigones porosos, etc., tecnologías que aún están en desarrollo, pero que van tomando fuerza en el mercado de la construcción.

En este texto, cuando mencionamos hormigón, o concreto, nos referimos exclusivamente a concreto preparado con los componentes básicos, cemento, grava, arena y agua, asumiendo materiales idóneos sin agregar algún tipo de aditivo.

## 1.1. CARACTERÍSTICAS DEL CONCRETO

Como se menciona en la sección previa, el concreto es una mezcla de agregado grueso, agregado fino, cemento y agua principalmente. Las proporciones de cada componente que interviene en la mezcla determinará parte de las características del concreto. En esta sección se realiza un breve repaso a las características particulares del cemento y los agregados que se utilizan en la mezcla.

### 1.1.1. Tipos de cemento

El cemento se obtienen mediante la calcinación de una mezcla de piedra caliza, arcilla y mineral de hierro. Esta mezcla se lleva a temperaturas que van de 1440 a 1550 grados Celsius aproximadamente, obteniendo como resultado un material granular llamado clinker. Una vez enfriado el clinker se muele con una pequeña proporción de yeso, principalmente como regulador del fraguado. Los principales componentes químicos del cemento son:

Óxido de calcio ( $CaO$ )

Dióxido de silicio ( $SiO_2$ )

Óxido de aluminio ( $CaO$ )

Óxido de hierro ( $Fe_2O_3$ )

Trióxido de azufre ( $SO_3$ )

formándose además algunos compuestos secundarios como el óxido de magnesio  $MgO$ , óxido de azufre  $SO_3$ , y óxido de potasio  $K_2O$ .

Dependiendo de las condiciones del proyecto, se usan diferentes tipos de cemento que se obtienen a partir de diversas proporciones y aditivos utilizados para la mezcla. La principal clasificación [10] la define la especificación ASTM C 150 [11].

Tipo I - Normal

Tipo IA - Normal con aire incluido

Tipo II - Moderada resistencia a los sulfatos

Tipo IIA - Moderada resistencia a los sulfatos con aire incluido

Tipo III - Alta resistencia inicial (alta resistencia temprana)

Tipo IIIA - Alta resistencia inicial con aire incluido

Tipo IV - Bajo calor de hidratación

Tipo V - Alta resistencia a los sulfatos

Adicionalmente se cuenta con otras especificaciones como la AASHTO M85, o la ASTM C 1157 (*Performance Specification for Hydraulic Cements*).

En Ecuador, para el control del cemento la NEC [2] establece la norma NTE INEN 151 [12] para la definición de términos del cemento hidráulico, y la norma NTE INEN 152 [13] para los requisitos del cemento Portland.

### 1.1.2. Agregado grueso y agregado fino

En términos de elaboración de concreto, los agregados son materiales granulares tales como arena, grava, piedra triturada, o material triturado de concreto reciclado. Se los puede clasificar como agregados gruesos y agregados finos. Los Agregados gruesos son aquellos retenidos en el cedazo con malla de  $4.75\text{ mm}$  (No. 4). Los agregados finos son los que pasan el cedazo de  $4.75\text{ mm}$  (No. 4) y retenidos predominantemente por el cedazo de malla de  $75\text{ }\mu\text{m}$  (No. 200) [14]. La selección del agregado dependerá del tipo de concreto que se quiera preparar, y puesto que este interviene en un 60% a 70% en la mezcla, es de mucha importancia el cuidado que se ponga en la selección del mismo. Para mayores detalles a cerca de los métodos de clasificación de los agregados se puede recurrir a las referencia [14], o a la norma ASTM C330 de la *American*

*Standard Testing Material* [2]. El tamaño máximo del agregado grueso dependerá del tipo de elemento a construirse, considerando el espaciamiento mínimo que debe observarse entre refuerzos para que estos desarrollen esfuerzo y adherencia, y el recubrimiento especificado por el reglamento de construcciones. El diseñador deberá recurrir a la norma correspondiente.

### 1.1.3. Propiedades mecánicas del concreto

En este apartado corresponde mencionar principalmente la resistencia a compresión del hormigón ( $f'_c$ ), y el módulo de elasticidad del concreto ( $E_c$ ).

Respecto de la resistencia a compresión, la norma [2] manifiesta que para hormigón de peso normal, su resistencia no debe ser menor que  $f'_c = 21 \text{ MPa}$ , y no debe ser mayor de  $f'_c = 35 \text{ MPa}$  para hormigón liviano. Aunque en la industria se llega a utilizar hormigones de mayor resistencia, debe tomarse en consideración que ello repercutirá en el costo final del proyecto.

En lo que concierne al Módulo de Elasticidad del Concreto ( $E_c$ ), la misma NEC [2] presenta dos maneras de calcularlo:

a) Para hormigones de densidad normal:

$$E_c = 1.15 \sqrt[3]{E_a} \sqrt{f'_c} \quad (1.1)$$

donde:

$E_c$  = Módulo de elasticidad del concreto ( $GPa$ )

$E_a$  = Módulo de elasticidad del agregado ( $GPa$ )

$f'_c$  = Resistencia a la compresión del concreto ( $MPa$ )

b) Para hormigones donde se desconoce el módulo de elasticidad del agregado:

$$E_c = 4.7 \sqrt{f'_c} \quad (1.2)$$

donde:

$E_c$  = Módulo de elasticidad del concreto ( $GPa$ )

$f'_c$  = Resistencia a la compresión del concreto ( $MPa$ )

Respecto del Módulo de Elasticidad del concreto, el ACI presenta dos expresiones similares para calcularlo:

a) para valores de  $w_c$  entre 1440 y 2560  $kg/m^3$

$$E_c = w_c^{1.5} 0.043 \sqrt{f'_c} \quad (1.3)$$

b) para concreto de peso normal:

$$E_c = 4700\sqrt{f'_c} \quad (1.4)$$

Donde:

$E_c$  = Módulo de elasticidad del concreto (MPa)

$w_c$  = densidad, del concreto de peso normal o densidad de equilibrio del concreto liviano,  $kg/m^3$

$f'_c$  = Resistencia a la compresión del concreto (MPa)

#### 1.1.4. Pruebas realizadas al concreto

El obtener un concreto de calidad, acorde con los parámetros que se especifiquen en un determinado proyecto, conlleva esfuerzos técnicos en los procesos de diseño y fabricación del concreto. Si bien es cierto, debido a su resistencia, maleabilidad y facilidad de acceso de los materiales, el concreto pudiera ser considerado el mejor material de construcción, su calidad podría estar limitada por las impurezas que puedan contener los materiales componentes, por factores ambientales como temperatura y humedad al momento de su preparación y curado, y por la errónea manipulación de los materiales al momento de la construcción.

La provisión de los agregados en suficiente cantidad para mantener el diseño durante toda la construcción del proyecto también es importante, pues en la práctica, entre más alejada está la fuente de agregados respecto de la planta de procesamiento o de la obra, mayor será el costo del proyecto. A estos factores debe agregarse además el correcto transporte de la mezcla, su vibrado, y compactación, de tal manera que se evite segregación de los materiales y la consiguiente mala calidad de los elementos estructurales. Si fuera necesario cambiar la fuente de materiales durante la ejecución de un proyecto, los ensayos de materiales que se realizaron para el diseño original, deberán volverse a realizar para obtener el nuevo diseño considerando las características de los materiales obtenidos de la nueva fuente.

Ante las múltiples variables que pueden afectar la calidad del concreto, se debe priorizar las pruebas a realizar, dependiendo del tipo de proyecto y el entorno en el que se desarrolla, en muchos casos son necesarias algunas pruebas y de manera cíclica.

Entre las principales pruebas estandarizadas que se realizan están las relacionadas al asentamiento, densidad, rendimiento, contenido de aire y resistencia del concreto a la compresión. Los detalles para cada ensayo constan en la normativa vigente, cuya principal referencia es la establecida por la *American Society for Testing and Materials (ASTM)*.

### 1.1.5. Propiedades del acero de refuerzo

Respecto del acero de refuerzo que se incluye en el hormigón armado, se resalta la resistencia a la fluencia ( $f_y$ ), y su módulo de elasticidad ( $E_s$ ). La norma [2] limita a que “*la resistencia a fluencia basada en ensayos no sea mayor que  $f_y$  en más de 125 MPa, y que la relación entre la resistencia real de tracción y la resistencia real de fluencia no sea mayor de 1.25*”.

En este aspecto, en Ecuador se emplea acero de refuerzo con límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$ , por lo que debe entenderse que ese es el valor utilizado en los ejercicios de cálculo que se presentan en este documento, a menos que se especifique lo contrario.

En cuanto al Módulo de Elasticidad del acero de refuerzo, la norma [2] lo especifica como:  $E_s = 200000 \text{ MPa}$ .

## 1.2. UNIDADES

A lo largo de todo el documento se utilizará las unidades del Sistema Internacional de Unidades (SI), en concordancia con la Norma Ecuatoriana de Construcción, como se mencionan a continuación:

Aceleraciones:  $m/s^2$

Áreas:  $m^2$

Fuerzas y cargas:  $kN$  ó  $kN/m^2$

Longitudes:  $m$  ó  $mm$

Masas:  $kg$

Momentos:  $kN.m$

Periodos:  $s$

Peso unitario:  $kN/m^3$

Presión:  $Pa$  ó  $N/m^2$

Resistencias:  $MPa$

Velocidad:  $m/s$

### 1.2.1. Nomenclatura y unidades de cálculo

Es extremadamente importante la coherencia en el uso de las unidades al momento de realizar los cálculos, y aunque las mismas se definen en la sección previa, no siempre se pueden utilizar directamente, por lo que será necesario antes de empezar los cálculos que se realice la revisión de las unidades que intervienen en el análisis. Por ejemplo, el peso de un objeto podría estar dado en libras, en toneladas, o en *kilogramos*, y no en *kN*, así como las dimensiones de un objeto podrían estar dadas en pulgadas o centímetros, y no en *mm* como corresponde, por lo que el diseñador debe prestar atención a este detalle muy importante. Con el propósito de mantener coherencia en los cálculos y evitar expresiones matemáticas muy grandes, a lo largo de este texto se utilizará la siguiente nomenclatura con las unidades correspondientes.

|               |                                                                                                                      |                        |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| $a$           | altura del bloque equivalente de compresiones                                                                        | <i>mm</i>              |
| $A_g$         | área de la sección gruesa del concreto                                                                               | <i>mm</i> <sup>2</sup> |
| $A_s$         | área de sección de acero de refuerzo a tracción                                                                      | <i>mm</i> <sup>2</sup> |
| $A_{st}$      | área de sección de acero de refuerzo total                                                                           | <i>mm</i> <sup>2</sup> |
| $A'_s$        | área de sección de acero de refuerzo a compresión                                                                    | <i>mm</i> <sup>2</sup> |
| $b$           | ancho de la cara en compresión del elemento                                                                          | <i>mm</i>              |
| $b_o$         | perímetro de la sección crítica para cortante en dos direcciones en losas y zapatas                                  | <i>mm</i>              |
| $b_w$         | ancho del alma de una viga o diámetro de la sección circular                                                         | <i>mm</i>              |
| $c$           | distancia desde el eje neutro a la fibra extrema en tensión de un elemento sometido a flexión                        | <i>mm</i>              |
| $d$           | peralte efectivo del elemento, medido desde la fibra extrema a compresión hasta el centroide del refuerzo a tracción | <i>mm</i>              |
| $d_b$         | diámetro de barra de refuerzo                                                                                        | <i>mm</i>              |
| $d_t$         | peralte de tensión, medido desde la fibra extrema a compresión hasta el refuerzo extremo a tracción                  | <i>mm</i>              |
| $d'$          | peralte a compresión, medido desde la fibra extrema a compresión hasta el centroide del refuerzo a compresión        | <i>mm</i>              |
| $D$           | efecto de las cargas muertas de servicio                                                                             |                        |
| $E_a$         | módulo de elasticidad del agregado                                                                                   | <i>GPa</i>             |
| $E_c$         | módulo de elasticidad del concreto                                                                                   | <i>GPa</i>             |
| $E_s$         | módulo de elasticidad del acero                                                                                      | <i>GPa</i>             |
| $f'_c$        | resistencia a la compresión del concreto                                                                             | <i>MPa</i>             |
| $\sqrt{f'_c}$ | raíz cuadrada de la resistencia especificada a la compresión del concreto                                            | <i>MPa</i>             |
| $f_y$         | límite de fluencia del acero de refuerzo                                                                             | <i>MPa</i>             |
| $f_{yt}$      | resistencia especificada a la fluencia $f_y$ del refuerzo transversal                                                | <i>MPa</i>             |



|              |                                                                                                                                     |          |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| $h$          | altura total de la sección transversal del elemento                                                                                 | $mm$     |
| $h_f$        | espesor del patín en viga T                                                                                                         | $mm$     |
| $\ell$       | luz de la viga o losa en una dirección; proyección libre del voladizo                                                               | $mm$     |
| $\ell_a$     | longitud de anclaje del acero de refuerzo, más allá del centro del apoyo o punto de inflexión                                       | $mm$     |
| $\ell_c$     | longitud del miembro en compresión en un pórtico, medida centro a centro de los nudos del pórtico                                   | $mm$     |
| $\ell_d$     | longitud de desarrollo del acero de refuerzo                                                                                        | $mm$     |
| $\ell_{dc}$  | longitud de desarrollo del acero de refuerzo en compresión                                                                          | $mm$     |
| $\ell_{dh}$  | desarrollo de gancho estándar en tracción                                                                                           | $mm$     |
| $\ell_{ext}$ | extensión recta en el extremo de un gancho estándar                                                                                 | $mm$     |
| $\ell_n$     | luz libre medida entre cara de apoyos                                                                                               | $mm$     |
| $\ell_{sc}$  | longitud de empalme por traslapeo en compresión                                                                                     | $mm$     |
| $\ell_{st}$  | longitud de empalme por traslapeo en tracción                                                                                       | $mm$     |
| $L$          | efecto de las cargas vivas de servicio                                                                                              |          |
| $M_{max}$    | máximo momento mayorado en la sección debido a las cargas aplicadas externamente                                                    | $N.mm$   |
| $M_n$        | resistencia nominal a flexión en la sección                                                                                         | $N.mm$   |
| $M_o$        | momento estático total mayorado                                                                                                     | $N.mm$   |
| $M_u$        | momento mayorado en la sección                                                                                                      | $N.mm$   |
| $P_c$        | carga crítica de pandeo                                                                                                             | $N$      |
| $P_n$        | resistencia nominal a carga axial de la sección transversal                                                                         | $N$      |
| $P_{n,max}$  | máximo valor de la resistencia nominal a la compresión de un miembro                                                                | $N$      |
| $P_o$        | resistencia axial nominal para una excentricidad igual a cero                                                                       | $N$      |
| $P_u$        | fuerza axial mayorada; debe tomarse como positiva para compresión y negativa para tracción                                          | $N$      |
| $s$          | espaciamiento medido centro a centro de unidades tales como refuerzo longitudinal y refuerzo transversal                            | $mm$     |
| $V_c$        | resistencia nominal a cortante proporcionada por el concreto                                                                        | $N$      |
| $V_n$        | resistencia nominal a cortante                                                                                                      | $N$      |
| $V_s$        | resistencia nominal a cortante proporcionada por el acero                                                                           | $N$      |
| $V_u$        | fuerza cortante mayorada en la sección                                                                                              | $N$      |
| $w_c$        | densidad, peso unitario, del concreto de peso normal                                                                                | $kg/m^3$ |
| $\beta_1$    | factor que relaciona la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos de compresión con la profundidad del eje neutro |          |

|                    |                                                                                                                                              |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varepsilon_{cu}$ | máxima deformación unitaria utilizable en la fibra extrema de concreto a compresión                                                          |
| $\varepsilon_t$    | deformación unitaria neta en el acero longitudinal extremo en tracción, en el estado de resistencia nominal                                  |
| $\varepsilon_{ty}$ | deformación unitaria neta en tracción en el acero longitudinal extremo en tracción, usado para definir una sección controlada por compresión |
| $\rho$             | cuantía de acero en zona de tracción, $A_s$ , evaluada sobre el área $bd$                                                                    |
| $\rho'$            | cuantía de acero en zona de compresión, $A'_s$ , evaluada sobre el área $bd$                                                                 |
| $\phi$             | factor de reducción de resistencia                                                                                                           |

### 1.3. CARGAS

Toda estructura se diseña para dar soporte a los esfuerzos derivados de la aplicación de determinados tipos de carga. Así, un puente se diseñará para que soporte los esfuerzos derivados del peso de todos los vehículos que pudieran pasar sobre su tablero, un muro para que soporte los esfuerzos derivados del empuje lateral producido por el talud de una montaña o un relleno, un edificio para que soporte los esfuerzos derivados de las cargas relacionadas con el uso de la estructura. Aparte de las cargas evidentes derivadas del tipo de uso de la estructura, la misma también estará sometida a su propio peso y otro tipo de cargas que podría ser accidentales o permanentes, destacándose por ejemplo, esfuerzos provocados por vibraciones, viento, impactos, y efectos sísmicos.

Cualquiera sea el origen de las cargas a las que está sometida la estructura, estas cargas provocan esfuerzos internos en cada uno de los elementos de dicha estructura, los mismos que podrían causar la falla de algún elemento o de toda estructura si el esfuerzo resultante supera al esfuerzo resistente. Para que una estructura esté diseñada correctamente, los esfuerzos resistentes deben superar a los esfuerzos resultantes derivados de la aplicación de todas las cargas, con un determinado factor de seguridad; de esto se encarga el diseño estructural.

Aquí se puede afirmar entonces que para obtener un correcto diseño estructural, es de fundamental importancia una correcta y detallada evaluación de las cargas que estarían afectando en determinado momento a la estructura. De lo contrario, el ingeniero no estaría diseñando los elementos para los esfuerzos que deben soportar, pudiendo derivar este descuido en una catástrofe. De aquí se desprende que la evaluación de cargas, si bien es cierto no implica cálculos sofisticados o complicados, debe ser considerada como uno de los pasos más importantes en el análisis y diseño estructural; si las cargas están mal evaluadas, el diseño es cualquier cosa, menos lo requerido.

Los valores de cargas de diseño, de acuerdo a la *NEC* [15] y la *ASCE* [27], responden a los pesos específicos de los materiales a utilizarse en la construcción, y al uso al que la estructura será sometida a futuro, de acuerdo al correspondiente diseño estructural. Las cargas que afectan a una estructura pueden clasificarse en dos grandes grupos: permanentes y accidentales. Las cargas permanentes se pueden clasificar en cargas muertas y cargas vivas, y luego están las accidentales, como el viento y los sismos.

Las *cargas muertas* se refiere al peso de todos los elementos que componen la estructura misma, sea que estos cumplan una función estructural o arquitectónica. En este sentido, el evaluador deberá obtener el volumen de todos y cada uno de los elementos componentes de la estructura, conociendo la densidad del material del cual está fabricado. A las cargas muertas también se debe agregar los recubrimientos, equipos y maquinarias permanentes que pasaran a ser parte de la estructura para su correcto funcionamiento (escaleras eléctricas, elevadores, sistemas de refrigeración y calefacción).

Las *cargas vivas* son aquellas que se pueden desplazar dentro de la estructura, tales como personas, y mobiliario.

Dentro de las *cargas accidentales* se podría distinguir entre aquellas que ocurren durante el periodo de construcción (grúas o elevadores provisionales que se instalan durante el proceso constructivo podrían causar esfuerzo para lo cual la estructura no ha sido diseñada), y aquella que provienen de fenómenos naturales: sismos, vientos, empujes de tierra, empujes de agua, vibraciones.

La siguiente nomenclatura se utiliza para identificar los diferentes tipos de cargas utilizadas para el análisis estructural:

- D* Efecto de las cargas muertas de servicio (carga muerta)
- E* Efecto de las fuerzas horizontales y verticales inducidas por sismo
- L* Efecto de las cargas vivas de servicio (carga viva)
- L<sub>r</sub>* Efecto de las cargas vivas de servicio de cubierta
- R* Efecto de las cargas de servicio por lluvia
- S* Efectos de las cargas de servicio por nieve
- W* Efecto de la carga por viento

### 1.3.1. Combinaciones de carga

El diseño estructural consiste en dimensionar las secciones de los elementos estructurales y determinar la cantidad de acero de refuerzo que debe ubicarse dentro de cada elemento, de tal manera que puedan soportar los esfuerzos de diseño, los mismos que se obtienen luego de

haber realizado el correspondiente análisis estructural, para el cual previamente se evaluaron las cargas, y se realizó la correspondiente combinación de cargas.

A pesar del cuidado que tenga el evaluador, aun pueden persistir algunas inconsistencias y omisiones, por lo que pensando en la seguridad de los usuarios de la estructura, cuando se combinan las cargas para el análisis estructural, también se utilizan factores de mayoración cuyo objetivo es compensar esta incertidumbre.

En la actualidad, la Norma Ecuatoriana de la Construcción [15] recomienda combinaciones de cargas de acuerdo a lo establecido por el reglamento ACI-318-2011 [7]. Estas combinaciones de carga han sido actualizadas en la más reciente versión del reglamento, ACI-318-2025 [3], y son las que se presentan en este documento.

$$U = 1.4D \quad (1.5)$$

$$U = 1.2D + 1.6L + \max(0.5L_r; 0.3S; 0.5R) \quad (1.6)$$

$$U = 1.2D + \max(1.6L_r; 1.0S; 1.6R) + \max(1.0L; 0.5W) \quad (1.7)$$

$$U = 1.2D + 1.0W + 1.0L + \max(0.5L_r; 0.3S; 0.5R) \quad (1.8)$$

$$U = 1.2D + 1.0E + 1.0L + 0.15S \quad (1.9)$$

$$U = 0.9D + 1.0W \quad (1.10)$$

$$U = 0.9D + 1.0E \quad (1.11)$$

Dependerá del diseñador escoger las combinaciones de cargas más apropiadas de acuerdo a la estructura que se esté diseñando, observando las particularidades locales del proyecto; en cualquier caso, se buscará representar las condiciones de cargas más desfavorables para la estructura.

**Combinación de cargas utilizada en este documento**

En el presente documento, como prerequisite para el diseño estructural de los ejemplos que se presentan, se utiliza una mayoración de cargas abreviada basada en  $U = 1.2D + 1.6L$ .

**1.3.2. Predimensionamiento de elementos estructurales**

Las dimensiones con las que están contruidos los elementos estructurales se alcanzan después de un proceso iterativo, en el que cuidadosamente se somete el modelo de un elemento estructural a los diferentes esfuerzos que pudiera llegar a soportar cuando el mismo pasa a formar parte de una estructura. Para llegar a ese proceso iterativo, el diseñador debe tener un punto de partida, el mismo que consiste en el predimensionamiento del elemento estructural.

El objetivo fundamental del predimensionamiento se enfoca en obtener dimensiones de elementos tales que nos permita desarrollar un análisis estructural sin tener que modificar todo el diseño de manera sustancial. Básicamente, no queremos redimensionar la estructura porque el cambio de sección de un elemento ha hecho que el espacio disponible de una habitación se ha visto reducido notablemente, o un dispositivo ya no cabe en el espacio asignado debido a un redimensionamiento.

En este contexto, aquí se presenta algunos criterios para el predimensionamiento de los elementos estructurales que forman parte de un edificio de hormigón armado, de tal manera que el análisis estructural sea lo más preciso posible y se pueda desarrollar con el menor número de iteraciones posibles.

**Predimensionamiento de losas**

Las losas, consideradas como placas indeformables dispuestas principalmente de manera horizontal para brindar cobertura y soporte a cargas distribuidas de manera uniforme en un piso, son los elementos sobre los cuales el diseñador distribuye los espacios útiles de un edificio, y deben prestar las condiciones incluso estéticas que den confianza y seguridad al usuario de la estructura, debiendo tener el espesor suficiencia que evite deflexiones y excesivas vibraciones. En el caso de losas macizas, lo más apropiado es regirse a lo que el reglamento recomienda [3] como espesores mínimos. Para losas macizas en una dirección, los espesores mínimos se establecen de acuerdo a la Tabla 2.2, y para losas macizas en dos direcciones se recomienda la Tabla 2.3, y a partir de esas recomendaciones dimensionar el elemento.

Para el caso de losas alivianadas, o también llamadas losas reticulares, muy usadas en nuestro medio, se presenta la Tabla 1.2 con recomendaciones que provienen de la práctica común, y que han ofrecido buenos resultados. En la mencionada tabla se utiliza la siguiente nomenclatura:

$\ell$  distancia mayor entre ejes de columnas

$h$  espesor de losa

|      |                                  |
|------|----------------------------------|
| $St$ | sobreterraza                     |
| $Ti$ | terraza inaccesible o cubierta   |
| $P$  | piso                             |
| $Ta$ | terraza accesible                |
| $np$ | ancho de nervio principal        |
| $ns$ | ancho de nervio secundario       |
| $cj$ | ancho de cajoneta                |
| $es$ | espesor de placa de sobreterraza |
| $es$ | espesor de placa de pisos        |

Tabla 1.2: Predimensionamiento de losas reticulares

| $\ell$ (m) | $h$ (cm)    |            | $np$ (cm) | $ns$ (cm) | $cj$ (cm) | $es$ (cm) | $ep$ (cm) |
|------------|-------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|            | $St$ o $Ti$ | $P$ o $Ta$ |           |           |           |           |           |
| $\leq 4$   | 15          | 20         | 20        | 10        | 40        | 5         | 5         |
| 4 a 6      | 20          | 25         | 20        | 10        | 40        | 5         | 5         |
| 6 a 8      | 25          | 32         | 30        | 15        | 60        | 7         | 7         |
| 8 a 10     | 32          | 37         | 30        | 15        | 60        | 7         | 7         |
| 10 a 12    | 37          | 45         | 40        | 15        | 75        | 10        | 10        |

### Predimensionamiento de vigas

Las vigas son los elementos encargados de recoger las cargas generadas en losas de piso o cubiertas y transmitir las hacia las columnas. En la normativa nacional con respecto a viviendas se admite una dimensión mínima de 200 x 200, debiendo revisarse de acuerdo a la demanda de esfuerzos, mientras que para otras estructuras recomienda un ancho mínimo de  $b = 0.3h$  o 250 mm, el que sea mayor, y una altura mínima  $h$  que debe cumplir con la correspondiente al control de deflexiones especificado por el ACI, de acuerdo a la Tabla 2.5.

### Predimensionamiento de columnas

Para viviendas la normativa nacional especifica dimensiones mínimas de 250 mm x 250 mm para el primer piso, y de 200 mm x 200 mm para el segundo piso. Para las demás estructuras que no se sujeten a la normativa de vivienda, la sección mínima es de 300 mm x 300 mm. A partir de estas secciones mínimas se deberá evaluar con respecto a los esfuerzos requeridos en cada proyecto.

En cualquier caso, el diseñador deberá asegurarse que las dimensiones de los elementos estructurales cumplan con los requerimientos mínimos establecidos en la normativa, pero de ninguna manera debe permitir que una estructura tenga elementos estructurales con dimensiones menores, a menos que desarrolle sus propios estudios que prueben la validez de la decisión.

Para predimensionar una columna se puede utilizar la ecuación 1.12, derivada de la resistencia a carga axial de una columna de hormigón simple

$$P_u = \phi P_n = 0.65 (0.80 [0.85 f'_c A_g])$$

, afectada por la excentricidad accidental y el factor de reducción de resistencia, como lo podemos deducir más adelante en la sección 3.1.

$$A_g = \frac{P_u}{0.44 f'_c} \quad (1.12)$$

donde:  $A_g$  es el área gruesa de la columna,  $P_u$  la carga axial última<sup>2</sup> que soporta la columna, y  $f'_c$  la resistencia a compresión del concreto que se utilizará para construir la columna. Las dimensiones obtenidas mediante esta ecuación son una aproximación, debiendo ajustarse los resultados mediante el análisis estructural.

### 1.3.3. Evaluación de cargas

Deducir y entender los esfuerzos a los que estarán sometidos los elementos que componen una estructura, debe ser la actividad más importante del diseñador. Los esfuerzos a los que cada elemento estará sometido dependerá de las cargas y la ubicación de las mismas respecto de cada elemento, así como las condiciones de apoyo, causando diferentes tipos de esfuerzos aislados o combinados. Conocidos estos esfuerzos, el diseñador debe entender la respuesta que el elemento tendrá ante tal demanda para evitar que se produzcan deflexiones, fisuramientos, tracciones, torsiones o aplastamientos excesivos que conlleven al colapso del elemento. Este proceso de análisis es el que conduce a un buen diseño estructural, y se basa fundamentalmente en la correcta evaluación de cargas.

Sin importar que el diseñador tenga las más altas calificaciones en análisis estructural, y que sea capaz de utilizar los programas computacionales más sofisticados, sin una correcta evaluación de cargas, el proyecto será un fracaso, y no se debe considerar una exageración la minuciosa revisión de las cargas que actúan en una estructura como paso previo a la realización del análisis estructural.

En este aspecto, el diseñador debe esmerarse en el correcto predimensionamiento y evaluación de cada elemento, requiriéndose para ello contar con planos arquitectónicos muy bien definidos y especificaciones técnicas exclusivas del proyecto evaluado, debiendo verificarse que

---

<sup>2</sup>Obtenida mediante  $P_u = 1.2D + 1.6L$

cada uno de los materiales y dimensiones especificados sea posible obtener y cumplir. Cuando sea necesario se deberá reemplazar materiales o dimensiones que puedan alterar la evaluación de cargas, como sucede por ejemplo cuando el propietario decide cambiar el uso de la estructura, o modificar algún ambiente.

La evaluación de cargas tiene dos componentes básicos, el correcto dimensionamiento de la estructura y todos los elementos que la componen, sean estructurales o no, y conocer el peso específico de todos los materiales que se van a utilizar para la construcción del proyecto. Los dos temas son de responsabilidad exclusiva del diseñador y su equipo de trabajo, pudiendo utilizar especificaciones y normas para los pesos específicos, tales como la NEC, en su capítulo de cargas no sísmicas, y especificaciones entregadas por los fabricantes de productos tales como maquinas y artefactos que se ubicaran dentro de la estructura.

## 1.4. FACTORES DE REDUCCIÓN DE RESISTENCIA

Las incertidumbres a cerca de las características mecánicas de los materiales que conforman el concreto, la falta de precisión en medir los volúmenes de materiales al mezclar los materiales constitutivos del concreto, las situaciones ambientales adversas, los factores relacionados con la manipulación del concreto y el acero, y los errores en el proceso de curado del concreto principalmente, pueden hacer que la resistencia obtenida del hormigón armado puesto en obra no sea igual a la resistencia de diseño establecida en planos y especificaciones técnicas. Adicionalmente, sentado que las ecuaciones de diseño del hormigón armado se obtienen a partir de modelos aproximados, y que no es poco común tener imprecisiones en el dimensionamiento de los elementos durante el proceso constructivo, podemos concluir que existirá diferencia entre la resistencia de diseño especificada, y la resistencia real del material colocado en obra.

Con estas consideraciones, y pensando en la seguridad de los usuarios de la estructura, se crearon los *factores de reducción de resistencia*, sobre lo cual el ACI establece que “*Los propósitos de los factores de reducción de resistencia  $\phi$  son: (1) tener en cuenta la probabilidad de existencia de miembros con una resistencia baja debida a variaciones en la resistencia de los materiales y las dimensiones, (2) tener en cuenta inexactitudes en las ecuaciones de diseño, (3) reflejar la ductilidad disponible y la confiabilidad requerida para el elemento sometido a los efectos de carga en consideración, y (4) reflejar la importancia del elemento en la estructura [3]*”.

Con este propósito, la normativa vigente[2] incluye los factores de reducción de resistencia expuestos en el Tabla 1.3.

En el proceso de diseño, en el caso de elementos sometidos a flexocompresión, es necesario verificar el factor de reducción de resistencia utilizado durante el diseño, de tal manera que se establece con claridad si el elemento está controlado por compresión o tracción. Para esto el ACI establece las relaciones expresadas en la Tabla 1.4, y Tabla 1.5.



Tabla 1.3: Factores de reducción de resistencia  $\phi$  [2]

| Solicitaciones en secciones                                       | $\phi$ |
|-------------------------------------------------------------------|--------|
| controladas por tracción                                          | 0.90   |
| controladas por tracción axial                                    | 0.90   |
| controladas por compresión con refuerzo transversal en espiral    | 0.75   |
| controladas por compresión con estribos como refuerzo transversal | 0.65   |
| controladas por cortante y torsión                                | 0.75   |
| controladas por aplastamiento                                     | 0.65   |

Tabla 1.4: Factor de reducción de resistencia,  $\phi$ , para momento, fuerza axial, o combinación de momento y fuerza axial, en elementos reforzados con estribos (Tabla 21.2.2)[3])

| Deformación unitaria neta a tracción $\epsilon_t$    | Clasificación             | $\phi$                                                   |
|------------------------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------------|
|                                                      |                           | Tipo de refuerzo transversal                             |
|                                                      |                           | Diferente de espirales                                   |
| $\epsilon_t \leq \epsilon_{ty}$                      | Controlada por compresión | 0.65                                                     |
| $\epsilon_{ty} < \epsilon_t < \epsilon_{ty} + 0.003$ | Transición                | $0.65 + 0.25 \frac{(\epsilon_t - \epsilon_{ty})}{0.003}$ |
| $\epsilon_t \geq \epsilon_{ty} + 0.003$              | Controlada por tracción   | 0.90                                                     |

Es muy importante realizar el control del factor de reducción de resistencia si queremos garantizar un comportamiento dúctil de los elementos. Este control lo realizamos una vez diseñado el elemento, considerando las secciones reales de concreto y acero de refuerzo. Es deseable que las columnas estén controladas por compresión, pero que las vigas estén controladas por tracción, en concordancia con el concepto de columnas fuertes y vigas débiles.

## 1.5. EXACTITUD DE LOS CÁLCULOS

En este tema hay que empezar mencionando que el diseño estructural no es una ciencia exacta. Dependiendo de lo que se esté diseñando, algunos procesos pueden alcanzar un alto grado de complejidad y sofisticación, por lo que se podría pensar que es necesario trabajar con todas las cifras significativas posibles, y algunos estudiantes podrían pensar que entre más cifras decimales utilizan, más preciso es el trabajo, sobretodo cuando se utilizan calculadoras científicas u hojas electrónicas que trabajan con 9 o más cifras decimales.

Tabla 1.5: Factor de reducción de resistencia,  $\phi$ , para momento, fuerza axial, o combinación de momento y fuerza axial, en elementos reforzado con espirales (Tabla 21.2.2 [3])

| Deformación unitaria neta a tracción $\epsilon_t$    | Clasificación             | $\phi$                                                   |
|------------------------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------------|
|                                                      |                           | Tipo de refuerzo transversal                             |
|                                                      |                           | Espirales que cumplan con 25.7.3-ACI                     |
| $\epsilon_t \leq \epsilon_{ty}$                      | Controlada por compresión | 0.75                                                     |
| $\epsilon_{ty} < \epsilon_t < \epsilon_{ty} + 0.003$ | Transición                | $0.75 + 0.15 \frac{(\epsilon_t - \epsilon_{ty})}{0.003}$ |
| $\epsilon_t \geq \epsilon_{ty} + 0.003$              | Controlada por tracción   | 0.90                                                     |

En la práctica, nos damos cuenta que los cálculos obtenidos como resultado del análisis, difícilmente pueden ser aplicados con exactitud, sino que tendremos que adaptar nuestros resultados para ajustarlos a cifras de uso práctico. Suponga por ejemplo que de acuerdo al cálculo usted encuentra que una viga debe tener un peralte de 43.11 *cm*, y lo escribe así en los planos. Cuando este plano llegue a la obra, los 0.11 *cm* simplemente serán descartados debido a lo poco práctico que resulta tratar de realizar un encofrado con esa dimensión; la mejor opción sería dejar el peralte definitivo en 45 *cm*. De la misma manera, la sección de acero de refuerzo calculada se tendrá que adaptar a las secciones obtenidas mediante el uso de diámetros de varillas comerciales, por lo que las secciones de acero calculadas por lo general son inferiores a las secciones de acero de refuerzo utilizadas. En la práctica, lo que vemos en los planos son cifras redondeadas y adaptadas que resultan fácil de manejar en el proceso constructivos.

En este contexto, en el diseño estructural implementamos diversos grados de precisión. Empezando con las dimensiones definitivas del elemento estructural, estos no se deben dejar con una precisión mayor a los 5 *mm*, como por ejemplo al diseñar una escalera donde un tamaño común de contrahuella puede ser 17.5 *cm*. En losas, vigas y columnas bastará con una precisión de 1 *cm*, aunque es muy común encontrar que las dimensiones se redondean a los 5 *cm* en vigas y columnas, debido a que resulta muy práctico al momento de construirlo. Durante el cálculo, hay procesos como la evaluación de cargas en las que se trabaja comúnmente en kilonewtons, por lo que algunos autores suelen trabajar sin cifras decimales, más aún sabiendo lo incierto que pueden resultar los valores adoptados en este proceso. Cuando se trata del acero de refuerzo, los diámetros de las barras comerciales están dados en milímetros, por lo que las secciones transversales se trabaja en milímetros cuadrados, de tal manera que tiene poco sentido realizar cálculos utilizando varias cifras decimales. Donde si es necesario trabajar con cifras decimales es en el cálculo del porcentaje de acero de refuerzo con respecto a la sección transversal del

elemento, a la que denominamos cuantía del acero, cuya cantidad está en el orden del 1 al 3 % de la sección transversal del elemento en columnas, es decir, 0.01 a 0.03, y tiene sentido tener una cuantía de 0.017 que representa el 1.7 % de la sección transversal del elemento que se está diseñando. Y finalmente, cuando evaluamos la ductilidad del elemento tenemos que trabajar con las deformaciones unitarias de los materiales constitutivos, cuyos valores están en el orden de los  $0.0021 \text{ mm/mm}$  (deformación de fluencia del acero de refuerzo) o  $0.003 \text{ mm/mm}$  (deformación unitaria del concreto).

Con lo expuesto, en nuestros cálculos, en términos generales, bastará trabajar con dos cifras decimales, dejando la precisión de un centímetro para los elementos estructurales, pensando eso sí, que la dimensión asumida debe ser lo más práctica posible para ser construida con facilidad, y en lo posible generalizando su uso. En esto hay que pensar en términos prácticos, pues es preferible que todas las columnas y vigas de un piso tengan las mismas dimensiones, lo que acelera la elaboración de los moldes y evitará errores constructivos. Cuando se trate de escaleras o algún elemento de diseño único, bastará una precisión de  $5 \text{ mm}$ . Sin embargo, cuando analicemos deformaciones y cuantías de acero, preferiremos trabajar con no menos de 4 cifras decimales.

## Capítulo 2

# REQUISITOS DE FUNCIONAMIENTO

El funcionamiento de los elementos de hormigón armado no depende tan solo del correcto análisis de cargas, y la cuidadosa aplicación de las fórmulas relacionadas a la resistencia del hormigón armado. A partir de una bien aceptada hipótesis de diseño, la cual se describe a continuación, es necesario no perder de vista que un elemento estructural no está compuesto de un material homogéneo, sino que el hormigón puede cambiar sus propiedades mecánicas independientemente de lo bien que se maneje la hipótesis de diseño, y que refuerzos mal ubicados no van a prestar el servicio para el cual se han diseñado. En este contexto, los procesos de corte, armado y ubicación del acero de refuerzo, así como un bien diseñado molde, son elementos que deben observarse con sumo cuidado, especialmente durante el proceso constructivo.

### 2.1. HIPÓTESIS DE DISEÑO

Cuando se examina la sección transversal de un elemento de hormigón armado, es evidente que dicho elemento no está compuesto de un material homogéneo, donde factores como la distribución del agregado grueso y las secciones de acero utilizadas determinan su heterogeneidad. Incluso al hormigón simple no se lo puede considerar como un material homogéneo. Tomando en cuenta estas observaciones, con el fin de modelar el comportamiento del hormigón armado, las siguientes suposiciones han sido aceptadas [3]:

1. La máxima deformación unitaria utilizable en la fibra extrema sometida a compresión del concreto debe suponerse igual a  $0.003^1$ .
2. La resistencia a la tracción del concreto debe despreciarse en los cálculos de resistencia a flexión y resistencia axial<sup>2</sup>.
3. La relación entre los esfuerzos de compresión y la deformación unitaria en el concreto se debe suponer rectangular, trapezoidal, parabólica o de cualquier otra forma que lleve a una predicción de la resistencia que coincida con los resultados de ensayos representativos.

---

<sup>1</sup>En numerosos ensayos se ha probado que la deformación unitaria puede alcanzar el valor de 0.008, sin embargo la resistencia se desarrolla entre valores de 0.003 a 0.004.

<sup>2</sup>Aunque en numerosos ensayos se ha verificado que el hormigón puede presentar resistencia a tracción del 7 a la 15 %, por norma, esta no es considerada en el análisis de resistencia de los elementos de hormigón armado.

Para que estas suposiciones sean aceptadas, como se las representa en la Figura 2.2 , y el análisis se pueda manejar de manera razonable, se ha optado por asumir que los esfuerzos de compresión que resiste el elemento puede representarse por una sección rectangular equivalente, la misma que debe cumplir con lo siguiente:

1. Se debe suponer un esfuerzo de  $0.85f'_c$  uniformemente distribuido en una zona rectangular de compresión equivalente<sup>3</sup>, limitada por los bordes de la sección transversal y por una línea recta paralela al eje neutro, ubicada a una distancia,  $a$ , de la fibra de deformación unitaria máxima en compresión, tal como se calcula con:

$$a = \beta_1 c \quad (2.1)$$

2. La distancia desde la fibra de deformación unitaria máxima al eje neutro,  $c$ , se debe medir en dirección perpendicular al eje neutro.
3. Los valores de  $\beta_1$  (ver Tabla 2.1) deben estar de acuerdo con lo siguiente:
4.
  - a) Para valores de  $f'_c$  entre 17 y 28 MPa, el factor  $\beta_1$  se debe tomar como 0.85.
  - b) Para valores de  $f'_c$  mayores que 28 MPa pero menores que 55 MPa, el factor  $\beta_1$  debe disminuir en forma lineal a razón de 0.05 por cada 7 MPa de aumento sobre 28 MPa.
  - c) Para valores de  $f'_c \geq 55$  MPa, el factor  $\beta_1$  se debe tomar como 0.65.

Tabla 2.1: Valores de  $\beta_1$  para la distribución rectangular equivalente [2]

| $f'_c$ (MPa)           | $\beta_1$                          |
|------------------------|------------------------------------|
| $17 \leq f'_c \leq 28$ | 0.85                               |
| $28 < f'_c < 55$       | $0.85 - \frac{0.05(f'_c - 28)}{7}$ |
| $f'_c \geq 55$         | 0.65                               |

Estos enunciados se mantienen en toda la teoría que respalda el diseño de elementos de hormigón armado, y se ha establecido la formulación correspondiente de acuerdo al tipo de elemento que se esté diseñando. Aquellos elementos no regulares en los que el diseñador deba elaborar su propia formulación de diseño, debe también basarse en los mismos enunciados.

<sup>3</sup>La distribución rectangular de esfuerzos equivalente no representa la distribución real de esfuerzos en la zona de compresión al nivel de resistencia nominal, pero proporciona esencialmente los mismos resultados de las resistencias nominales de flexión y axial que los obtenidos en ensayos [1].

### 2.1.1. Viga simplemente armada

Para el análisis y aplicación de la hipótesis de diseño, revisamos el comportamiento de una viga simplemente apoyada sometida a carga gravitacional, con refuerzo solo en la cara inferior de la sección transversal, como se muestra en la Figura 2.1. Debido a la carga aplicada  $P$ , esta viga se deformará adoptando una forma cóncava, en la que la fibra superior de la viga estará sometida a compresión, y la fibra inferior de la viga estará sometida a tracción, presentándose un eje neutro  $e.n.$  que divide las dos secciones.

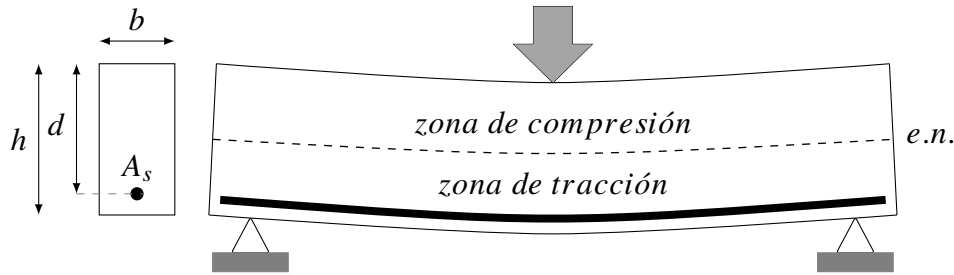


Fig. 2.1: Viga simplemente apoyada sometida a carga gravitacional

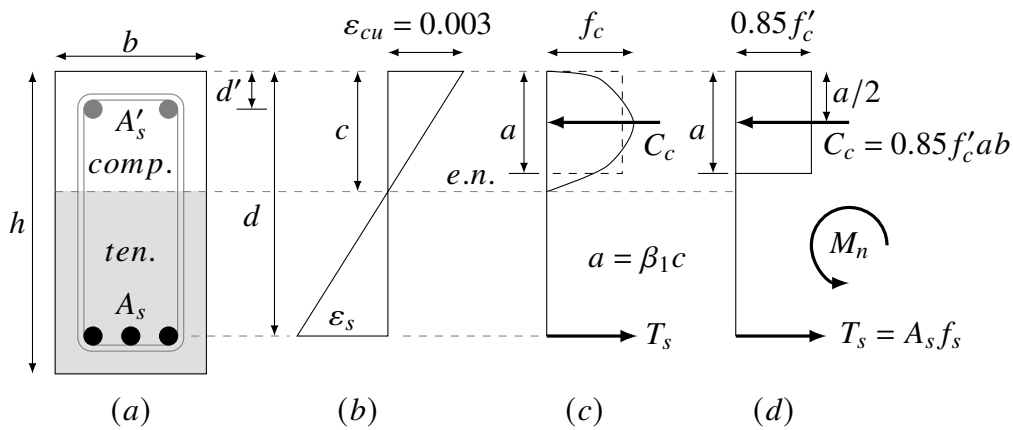


Fig. 2.2: Diagrama de esfuerzos-deformaciones de viga simplemente armada (adaptado de Mattock et al.)

Considerando las suposiciones de diseño reflejadas en la figura 2.2, se tiene que el esfuerzo de compresión  $C$  que puede tomar la viga está determinado por el volumen del bloque equivalente de compresión, cuya resultante está aplicada a una profundidad  $a/2$  a partir de la fibra extrema a compresión, por lo que tenemos que la compresión  $C$  que resiste el elemento es:

$$C = 0.85 f'_c ab \quad (2.2)$$

De la misma manera, podemos decir que el esfuerzo de tensión  $T$  que puede tomar la viga está determinado por el producto del esfuerzo unitario del acero  $f_s$  multiplicado por la sección transversal del acero de refuerzo  $A_s$ , aplicado a una profundidad  $d$ , medida a partir de la fibra

extrema a compresión, hasta el centroide de las barras de acero de refuerzo a tracción.

$$T = A_s f_s \quad (2.3)$$

Tratándose de diseño por resistencia última los esfuerzos llegan al límite, por lo que el acero sometido a tensión alcanzaría el límite de fluencia  $f_y$ , y la ecuación 2.3 debe ser reescrita como:

$$T = A_s f_y \quad (2.4)$$

Por equilibrio de fuerzas podemos igualar 2.2 y 2.4, y recordando que  $a = \beta_1 c$  tenemos:  $\beta_1 0.85 f'_c b = A_s f_y$ , de donde se puede obtener la profundidad del eje neutro:

$$c = \frac{A_s f_y}{0.85 \beta_1 f'_c b} \quad (2.5)$$

por lo que la profundidad del bloque equivalente de compresiones resulta:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} \quad (2.6)$$

y llamando cuantía del refuerzo a la relación de acero de refuerzo respecto de la sección transversal del elemento  $\rho = A_s / bd$ , tenemos:

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} \quad (2.7)$$

Determinada la altura del bloque equivalente de compresiones, el momento nominal  $M_n$  que soporta el elemento se puede obtener mediante el producto de la tensión  $T$  con el brazo de palanca generado entre el par de fuerzas  $(d - a/2)$ , de lo que resulta que el momento nominal máximo es:

$$M_n = T \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (2.8)$$

Ahora bien, si se estableció que el acero alcanza el límite de fluencia  $f_y$ , esto quiere decir que la deformación unitaria del acero  $\epsilon_s$  se convierte en  $\epsilon_{ty} = 0.002$ , es decir la deformación de fluencia<sup>4</sup>. Cuando el acero alcanza la deformación de fluencia, mientras que el concreto mantiene su deformación máxima unitaria de  $\epsilon_{cu} = 0.003$ ; a esta condición la llamamos la *condición balanceada*.

Conociendo las deformaciones extremas del diagrama de esfuerzo deformación representadas en (b) de la Figura 2.2, podemos obtener la profundidad del eje neutro para la condición

---

<sup>4</sup>En el mercado nacional se utiliza acero estructural con límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$ , de lo que resulta que  $\epsilon_{ty} = f_y / E_s = 0.0021$ , aunque el ACI acepta que se use  $\epsilon_{ty} = 0.002$ .

balanceada  $c_b$ , por lo que a partir de la ecuación 2.5 tenemos:

$$c_b = \frac{A_s f_y}{0.85 \beta_1 f'_c b} \quad (2.9)$$

y recordando que  $A_s = \rho_b b d$ , despejando podemos escribir

$$0.85 f'_c \beta_1 c_b b = \rho_b b d f_y$$

de lo que finalmente resulta una cuantía balanceada,  $\rho_b$

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c \beta_1 c_b}{d f_y} \quad (2.10)$$

Del diagrama de deformaciones (Fig. 2.2), para la condición balanceada para acero con límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$ , conociendo que  $\epsilon_{cu} = 0.003$  y haciendo  $\epsilon_s = \epsilon_{ty} = 0.002$ , se obtiene

$$\frac{c_b}{0.003} = \frac{d}{0.005}$$

de lo que resulta

$$c_b = 0.6d \quad (2.11)$$

lo que reemplazado en ecuación 2.10 nos permite expresar la cuantía balanceada como:

$$\rho_b = 0.51 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \quad (2.12)$$

Adicionalmente la norma establece que cuando se use acero de refuerzo con  $f_y > 420 \text{ MPa}$ , el esfuerzo de fluencia que debe considerarse será el que resulte de una deformación unitaria en la fibra extrema de tracción de  $\epsilon_t = 0.0035$ [2].



**Cuantía máxima**

En el tema de la cuantía máxima, en los últimos años se ha visto cambios en la normativa. En el actual reglamento[3] no se especifica una cuantía máxima para refuerzo por flexión, sino que se modificó la manera de clasificar el esfuerzo que gobierna la sección de diseño (Tablas 1.5 y 1.4). Así, las secciones controladas por tracción, en cuyo diseño se emplea un factor de reducción  $\phi = 0.90$ , son aquellas en las que la deformación de la fibra extrema en tracción  $\epsilon_t$  alcanza una deformación mayor o igual a  $\epsilon_{ty} + 0.003$ . En nuestro caso, cuando se utiliza acero con límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$ , esa deformación alcanza 0.0051. Con la finalidad de asegurar un comportamiento dúctil de la sección que se está diseñando, se debe por lo tanto asegurar que  $\epsilon_t$  supere 0.0051. Con esta finalidad, en este documento adoptamos una deformación de la fibra extrema a tracción de  $\epsilon_t = 0.007$ , lo que procesado de acuerdo al diagrama de deformaciones de la hipótesis de diseño resulta

$$\frac{c_b}{0.003} = \frac{d}{0.003 + 0.007}$$

obteniéndose  $c_b = 0.3d$ , que reemplazando en 2.10 tenemos

$$\rho_{0.007} = 0.255\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} = \rho_{max}$$

lo que en términos de cuantía balanceada, como se lo establece en la ecuación 2.12 ( $0.255/0.51 = 0.5$ ) se puede escribir como:

$$\rho_{max} = 0.5\rho_b \quad (2.13)$$

Este resultado concuerda con lo establecido por la NEC, donde se manifiesta que los valores de las cuantías "no pueden exceder del 50% de la cuantía en condición balanceada ( $\rho_b$ )"[2].

**2.1.2. Viga doblemente armada**

Si durante el proceso de diseño de una viga encontramos que la cuantía calculada excede a la máxima admisible para mantener la relación de esfuerzo-deformación, en condición de ductilidad, lo más conveniente desde el punto de vista del diseño es mejorar la resistencia del concreto, o incrementar el peralte del elemento, aunque en no pocas ocasiones esto no es posible debido a restricciones arquitectónicas. Para resolver el problema, reforzamos la viga con acero a compresión, incrementando en la misma cantidad el acero a flexión, manteniendo de esta manera la ductilidad del elemento; a esto llamamos una viga doblemente armada.

La Figura 2.3 muestra la sección transversal de una viga doblemente armada, es decir con acero de refuerzo tanto en la zona de tracción como en la zona de compresión.

Bajo esta condición, la resistencia de la viga puede determinarse mediante un análisis similar

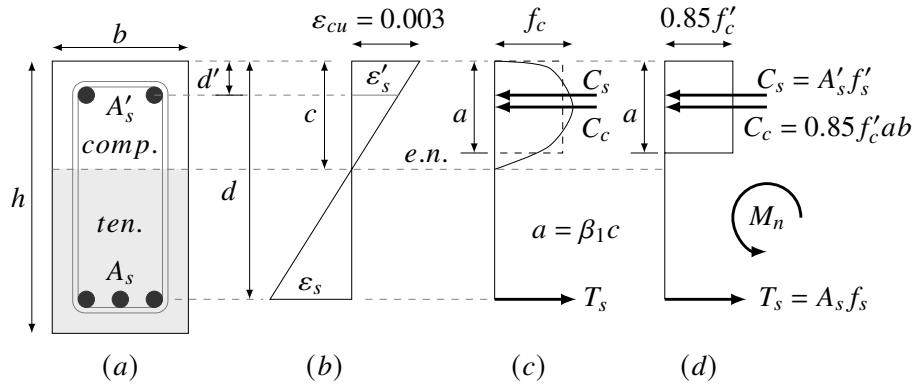


Fig. 2.3: Diagrama de esfuerzos-deformaciones en viga doblemente reforzada

al realizado para una viga simplemente armada, pero considerando tanto el acero ubicado en la zona de compresión  $A'_s = A_{s2}$ , como el acero en la zona de tensión  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$ .

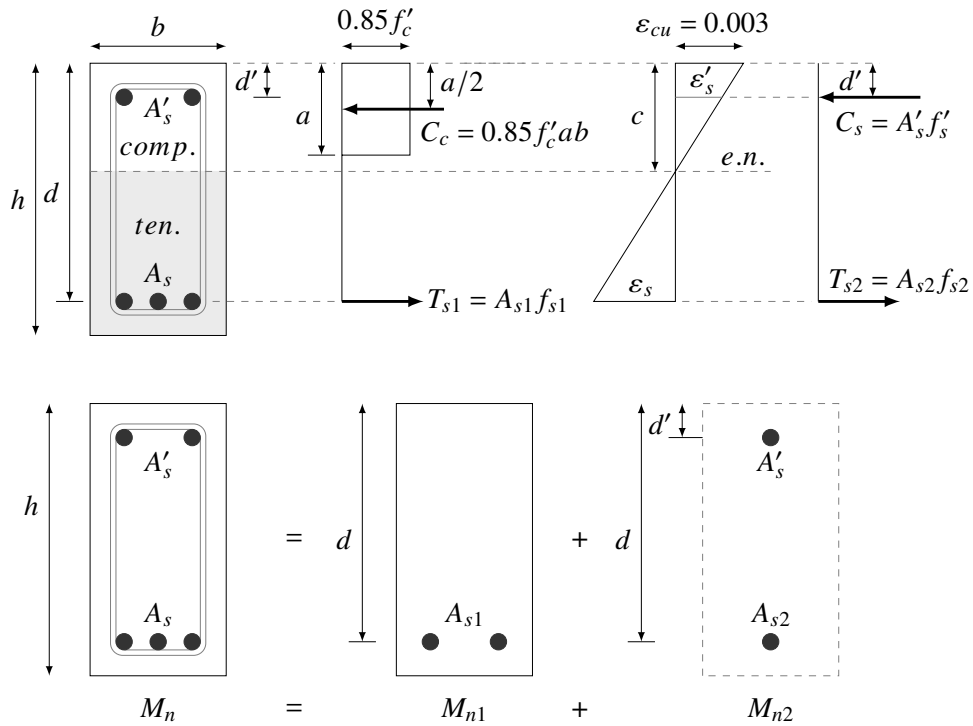


Fig. 2.4: Diagrama de esfuerzos-deformaciones en viga doblemente armada (adaptado de Mattock et al.)

La Figura 2.4 muestra esquemáticamente los esfuerzos que se producen en una viga doblemente armada, por lo que podemos establecer que

$$M_n = M_{n1} + M_{n2} \quad (2.14)$$

siendo

$$M_{n1} = A_{s1} f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (2.15)$$

y

$$M_{n2} = A_{s2}f_y(d - d') = A'_s f'_s (d - d') \quad (2.16)$$

reemplazando ecuaciones 2.15 y 2.16 en ecuación 2.14 tenemos que

$$M_n = A_{s1}f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A_{s2}f_y (d - d') \quad (2.17)$$

por equilibrio de fuerzas internas  $C = T$ , sabiendo que  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$  tenemos

$$A_s f_y = 0.85 f'_c a b + A'_s f'_s \quad (2.18)$$

de donde

$$a = \frac{A_s f_y - A'_s f'_s}{0.85 f'_c b} \quad (2.19)$$

pero  $a = \beta_1 c$ , por lo tanto  $c = a/\beta_1$ , entonces

$$c = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c \beta_1 b} \quad (2.20)$$

En referencia a las deformaciones, del diagrama de deformaciones podemos obtener

$$\varepsilon'_s = \frac{0.003(c - d')}{c} \quad (2.21)$$

Si  $\varepsilon'_s > \varepsilon_y (= f_y/E_s)$ , la hipótesis es válida y  $f'_s = f_y$ .

Si  $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$ , el acero de compresión no está fluyendo y el valor de "c" no es correcto y debe escribirse una nueva ecuación de equilibrio en la que  $f'_s < f_y$ , por lo que

$$\varepsilon_s = \frac{0.003(d - c)}{c} \quad (2.22)$$

### 2.1.3. Viga de sección T

Como se observa, la hipótesis de diseño se mantiene, y esto incluso si el elemento analizado no tuviera una sección transversal de forma regular. En esta sección analizamos vigas de sección T, elementos que con frecuencia se presentan en estructuras de hormigón armado.

Las vigas T pueden aparecer aisladas o conformando sistemas de pisos. En cualquier caso, para ser consideradas como tales deben cumplir con características geométricas señaladas por el reglamento [3]

Para vigas T construidas monolíticamente como parte de una losa o piso, como se indica

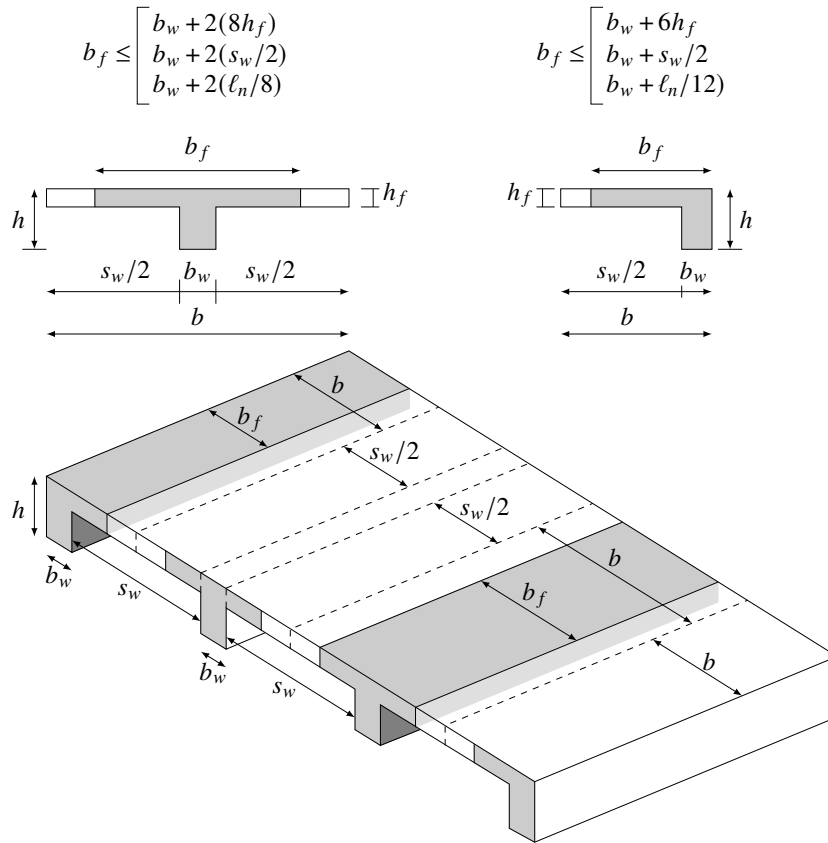


Fig. 2.5: Geometría de viga  $T$  como parte de un sistema de piso, acorde ACI-6.3.2.1 [3])

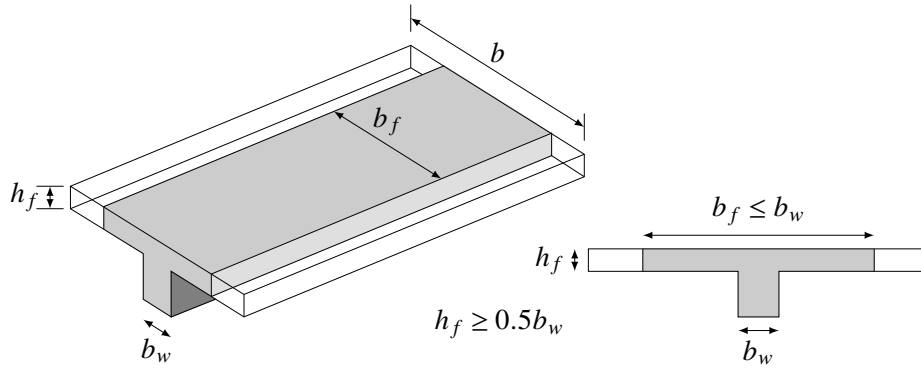
en la Figura 2.5, el ancho efectivo de la losa usada como ala,  $b_f$ , debe incluir el ancho  $b_w$  del alma de la viga más un ancho sobresaliente efectivo del ala, donde  $h_f$  es el espesor de la losa y  $s_w$  es la distancia libre entre vigas.

El ancho efectivo sobresaliente, más allá de la cara del alma debe considerarse el menor calculado entre:

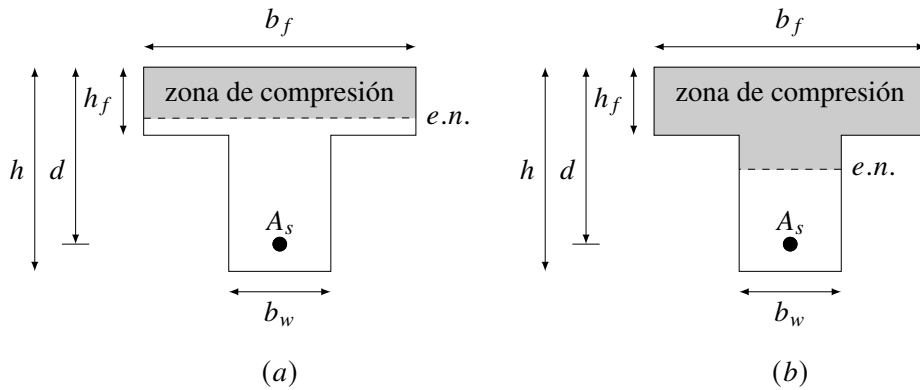
- ° Para vigas internas: a cada lado de alma debe considerarse  $8h_f$ ,  $s_w/2$ , o  $\ell_n/8$ , donde  $\ell_n$  es la luz libre medida en  $mm$  entre cara de los apoyos.
- ° Para vigas de borde:  $6h_f$ ,  $s_w/2$ , o  $\ell_n/12$ , donde  $\ell_n$  es la luz libre medida en  $mm$  entre cara de los apoyos.

Cuando se diseña una viga  $T$  aislada, como se indica en la Figura 2.6, con el propósito de obtener un área mayor de compresión, el ancho efectivo del ala  $b_f$  debe ser menor o igual a  $4b_w$ , y el espesor del patín debe ser igual o mayor que  $0.5b_w$ .

En cualquier caso, si la sección de la viga  $T$  no cumple con las relaciones geométricas especificadas por el reglamento para cada caso, se deberá diseñar como viga y losa.

Fig. 2.6: Geometría de viga  $T$  aislada

En el caso de las vigas  $T$ , como se observa en la Figura 2.7, dependiendo de las resistencias de los materiales, las relaciones geométricas de la sección transversal y la cantidad de acero de refuerzo, la posición del eje neutro cambiará de posición, cambiando con esto la sección trasversal efectiva sometida a compresión. En (a) el eje neutro se localiza dentro del patín ( $a < h_f$ ), en cuyo caso el comportamiento de la viga es igual al de una viga de sección rectangular de ancho  $b_f$  y peralte efectivo  $d$ , y como tal deberá diseñarse. En (b) el eje neutro se localiza en el alma de la viga ( $a > h_f$ ), por lo que la sección comprimida que su ubica en el alma debe considerarse dentro del análisis, comportándose como una viga de sección  $T$ .

Fig. 2.7: Sección transversal efectiva de viga  $T$ 

En la Figura 2.8, para el análisis de una viga  $T$  se adopta convenientemente una distribución de esfuerzos homogénea, igual que se lo hace para una viga de sección rectangular. Aunque inicialmente esta hipótesis se planteó para vigas de sección rectangular, múltiples ensayos han mostrado que se puede adoptar esta distribución de esfuerzos sin introducir errores de consideración [1] [16].

Para el análisis, en la Figura 2.9 se recurre al artificio de separar la sección de la viga  $T$  sometida a compresión en dos partes, la correspondiente al ala de la viga (b), y la sección que corresponde al alma de la viga (c). Podemos deducir que una porción del acero de refuerzo,  $A_{sf}$ , genera una tensión que equilibra la fuerza de compresión del ala de la viga,  $A_{sf}f_y = 0.85f'_c(b_f - b_w)h_f$ , la misma que aplicando un brazo de palanca  $(d - h_f/2)$ , produce un momento  $M_{n1}$ .

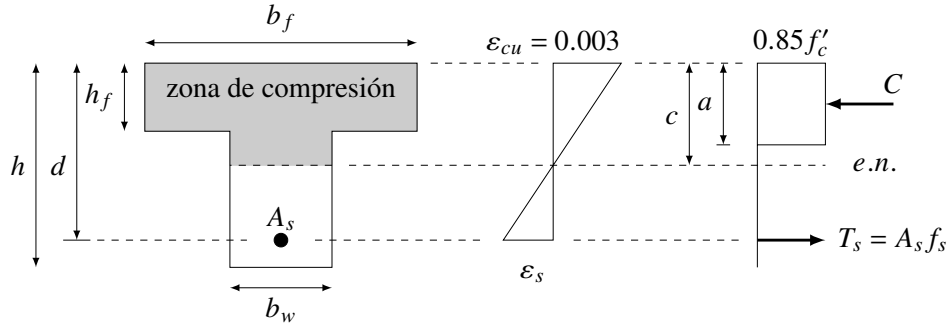


Fig. 2.8: Fuerzas internas en viga T

Si del área total de acero restamos  $A_{sf}$ , la sección de acero restante genera una tracción que se debe equilibrar con la fuerza de compresión generada por el sector de viga dentro del alma, la misma que aplicando un brazo de palanca  $(d - a/2)$ , genera un momento  $M_{n2}$ .

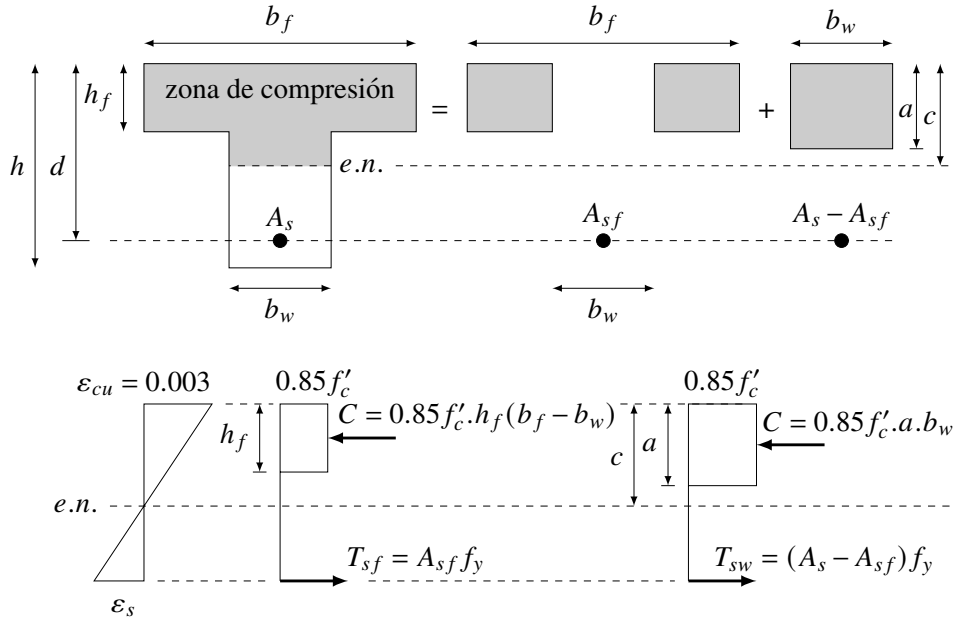


Fig. 2.9: Descomposición de la sección transversal efectiva en una viga T

$$A_{sf} f_y = 0.85 f'_c (b_f - b_w) h_f \quad (2.23)$$

$$A_{sf} = \frac{0.85 f'_c (b_f - b_w) h_f}{f_y} \quad (2.24)$$

$$M_{n1} = A_{sf} f_y \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \quad (2.25)$$

$$(A_s - A_{sf})f_y = 0.85f'_c b_w a \quad (2.26)$$

$$a = \frac{(A_s - A_{sf})f_y}{0.85f'_c b_w} \quad (2.27)$$

$$M_{n2} = (A_s - A_{sf})f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (2.28)$$

El momento nominal  $M_n$  se obtiene mediante la suma de  $M_{n1}$  y  $M_{n2}$ .

$$M_n = M_{n1} + M_{n2} = A_{sf}f_y \left( d - \frac{h_f}{2} \right) + (A_s - A_{sf})f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (2.29)$$

Tratándose de diseño por última resistencia, se debe tomar en consideración que el acero de refuerzo no debe exceder su límite de fluencia  $f_y$ , y recordando que  $a = \beta_1 c$ , por equilibrio de fuerzas tenemos:

$$A_s f_y = 0.85f'_c (b - b_w) h_f + 0.85f'_c \beta_1 c b_w \quad (2.30)$$

haciendo  $\rho_w = A_s / (b_w d)$ , y  $\rho_f = A_{sf} / (b_w d)$ , a partir del diagrama de deformaciones se puede obtener

$$\rho_{wb} = \rho_b + \rho_f \quad (2.31)$$

donde  $\rho_b$  es la cuantía balanceada de la parte rectangular de ancho  $b_w$ .

## 2.2. DEFLEXIONES

Los elementos estructurales tales como vigas y losas pueden sufrir deflexiones inmediatamente después de haber sido construidas, y debido a otros factores dependientes del tiempo. Aunque las deflexiones que se presenten dentro de un rango admisible no causen el colapso del elemento, estas pueden causar problemas inherentes al servicio para el cual la estructura fue diseñada, o simplemente dar una mala impresión estética.

Por ejemplo, deflexiones en vigas causarán fisuras en las paredes que se ubican sobre y debajo de ellas, y deflexiones en losas causaran encharcamientos y rotura de sobrepisos y cielo raso.

Con la finalidad de evitar daños permanentes, siempre que se construya con concreto de peso normal y acero con límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$ , el Reglamento [3] recomienda mantener

un espesor mínimo  $h$ , el cual no debe ser menor de:

1. Para losas macizas no preesforzadas armadas en una dirección el reglamento dispone el Tabla 2.2.
2. Para losas no preesforzadas armadas en dos direcciones, sin vigas interiores, el reglamento dispone el Tabla 2.3, limitando a espesores mínimos de 125 mm para losas sin ábacos, y en 100 mm para losas con ábacos.
3. Para losas no preesforzadas armadas en dos direcciones con vigas entre los apoyos en todos los lados, el reglamento dispone el Tabla 2.4, que se basa en el valor de  $\alpha_{fm}$  (valor promedio de la relación de rigidez a flexión de una viga y la rigidez a flexión de una franja de losa).
4. Para vigas no preesforzadas, el reglamento dispone el Tabla 2.5

Tabla 2.2: Espesor mínimo de losas macizas no preesforzadas en una dirección (Tabla 7.3.1.1[3])

| Condición de apoyo       | Altura mínima, $h(mm)$ |
|--------------------------|------------------------|
| Simplemente apoyadas     | $\ell/20$              |
| Con un extremo continuo  | $\ell/24$              |
| Ambos extremos continuos | $\ell/28$              |
| En voladizo              | $\ell/10$              |

Tabla 2.3: Espesor mínimo de losas no preesforzadas en dos direcciones sin vigas interiores para hormigón de peso normal y  $f_y = 420 MPa$  (Tabla 8.3.1.1[3])

| Sin ábacos         |                    |                    | Con ábacos         |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Paneles exteriores |                    | Paneles interiores | Paneles exteriores |                    | Paneles interiores |
| Sin vigas de borde | Con vigas de borde |                    | Sin vigas de borde | Con vigas de borde |                    |
| $\ell_n/30$        | $\ell_n/33$        | $\ell_n/33$        | $\ell_n/33$        | $\ell_n/36$        | $\ell_n/36$        |

### 2.2.1. Deflexiones admisibles

En el caso de que no cumplir las condiciones establecidas en la sección previa y se deba calcular deflexiones, las mismas no deben exceder las deflexiones máximas admisibles establecidas en la Tabla 2.6 para cada caso, a menos que el diseñador se responsabilice mediante estudios propios de la validez de su diseño.



Tabla 2.4: Espesor mínimo de losas no preesforzadas en dos direcciones con vigas entre los apoyos en todos los lado (Tabla 8.3.1.2[3])

| $\alpha_{fm}$                | Espesor mínimo, $h$ (mm) |                                                                             |     |
|------------------------------|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| $\alpha_{fm} \leq 0.2$       | Se aplica Tabla 8.3.1.1  |                                                                             | (a) |
| $0.2 < \alpha_{fm} \leq 0.2$ | Mayor de:                | $h = \frac{\ell_n(0.8 + \frac{f_y}{1400})}{36 + 5\beta(\alpha_{fm} - 0.2)}$ | (b) |
|                              |                          | 125                                                                         | (c) |
| $\alpha_{fm} > 0.2$          | Mayor de:                | $h = \frac{\ell_n(0.8 + \frac{f_y}{1400})}{36 + 9\beta}$                    | (d) |
|                              |                          | 90                                                                          | (e) |

Tabla 2.5: Altura mínima de vigas no preesforzadas para hormigón de peso normal y  $f_y = 420 \text{ MPa}$  (Tabla 9.3.1.1[3])

| Condición de apoyo       | Altura mínima, $h$ (mm) |
|--------------------------|-------------------------|
| Simplemente apoyada      | $\ell/16$               |
| Con un extremo continuo  | $\ell/18.5$             |
| Ambos extremos continuos | $\ell/21$               |
| En voladizo              | $\ell/8$                |

## 2.3. DISTRIBUCIÓN DEL REFUERZO

El acero de refuerzo debe cumplir con lo establecido en la NEC [2], en la cual se señala la correspondiente norma INEN de acuerdo a las características del refuerzo a utilizarse.

En el país se utiliza barras de acero corrugado para reforzar los elementos de hormigón armado, con un límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$  y los diámetros señalados en el Tabla 9.1, por lo que todos los ejemplos y ejercicios incluidos en este texto se realizarán con base en estas características.

Aunque es permitido el uso de acero de refuerzo liso, y la normativa lo contempla, con el objetivo de no desviar el objetivo de este trabajo, en este texto no se analiza elementos con acero de refuerzo liso.

Tabla 2.6: Deflexión máxima admisible vv calculada (Tabla 24.2.2[3])

| Miembro                | Condición                                                                                                               |                                                              | Deflexión considerada                                                                                                                                                                                                                           | Límite de deflexión |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Cubiertas planas       | Que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes |                                                              | Deflexión inmediata debida a $L_r$ , $S$ y $R$                                                                                                                                                                                                  | $\ell/180$          |
| Entrepisos             |                                                                                                                         |                                                              | Deflexión inmediata debida a $L$                                                                                                                                                                                                                | $\ell/360$          |
| Cubiertas o entrepisos | Soporten o están ligados a elementos no estructurales                                                                   | Susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes    | La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales (la suma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas permanentes, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional) | $\ell/480$          |
|                        |                                                                                                                         | No susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes |                                                                                                                                                                                                                                                 | $\ell/240$          |

### 2.3.1. Tipos de refuerzo

Como resultado del análisis estructural se obtendrá el tipo de esfuerzos a los que está sometido determinado elemento con sus correspondientes magnitudes. Del análisis sabremos entonces que el elemento debe armarse con cualquiera de los siguientes tipos de refuerzo, o con una combinación de ellos:

- (a) refuerzo para soportar esfuerzos por flexión
- (b) refuerzo para soportar esfuerzos por compresión
- (c) refuerzo para soportar esfuerzos por corte
- (d) refuerzo para soportar esfuerzos por torsión
- (e) refuerzo para soportar esfuerzos por retracción y temperatura

Con la finalidad de asegurar el correcto comportamiento del elemento que se esté diseñando, la normativa exige una cantidad mínima de refuerzo, limitando la cantidad máxima, de tal manera que se asegure la ductilidad del elemento.

Los detalles de cantidades mínimas y máximas, así como los requisitos de distribución, los revisamos a continuación para cada tipo de refuerzo.

### 2.3.2. Refuerzo por flexión

#### Refuerzo mínimo

La cantidad mínima de refuerzo por flexión está limitada a:

(a) Para losas no preesforzadas, en una y dos direcciones, la cantidad mínima de refuerzo se calcula con:

$$A_{s,min} = 0.0018A_g \quad (2.32)$$

donde  $A_g$  es el área gruesa del concreto

(b) Para vigas no preesforzadas, la cantidad mínima de acero  $A_{s,min}$ , para resistir los esfuerzos de tracción debe ser la mayor calculada entre las dos siguientes ecuaciones:

$$A_{s,min} = \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} b_w d \quad (2.33)$$

$$A_{s,min} = \frac{1.4}{f_y} b_w d \quad (2.34)$$

lo que equivale a tener una cuantía mínima que es la mayor calculada entre las dos siguientes expresiones:

$$\rho_{min} = \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} \quad (2.35)$$

$$\rho_{min} = \frac{1.4}{f_y} \quad (2.36)$$

“Estos requisitos no son necesarios si el refuerzo colocado a lo largo del elemento en cada sección es al menos un tercio mayor al requerido por análisis”[2].

“Para las losas no preesforzadas,  $\epsilon_t$  debe ser al menos 0.004”[3].

#### Refuerzo máximo

La cantidad máxima de refuerzo por flexión está limitada de tal manera que se asegure la ductilidad del elemento, por lo que se obtendrá mediante la utilización del  $\rho_{max}$  como se lo describe en la hipótesis de diseño. Con respecto al diseño de vigas, como lo vemos en la Figura 2.10, la NEC limita la máxima cuantía al 2.5 %.

Se debe considerar además que en el armado se dispone por lo menos dos varillas cuya

sección total cumplan al menos con la cuantía mínima, tanto en la zona a compresión, como en la zona a tracción. A este respecto el ACI menciona que estas barras se deben desarrollar en tensión en la cara del apoyo, para lo cual se debe sustituir  $f_y$  por  $1.25f_y$  en el cálculo del anclaje.

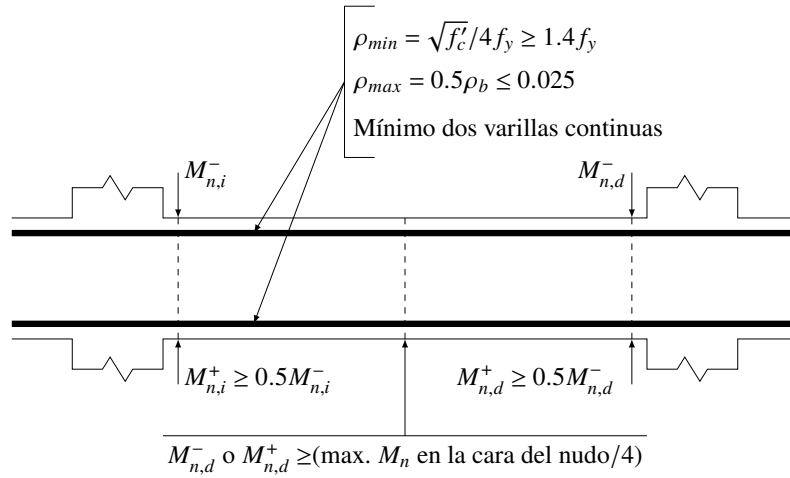


Fig. 2.10: Requerimiento del refuerzo a flexión (adaptado de NEC 2015[2])

Las dos barras en la parte inferior de la viga, que cumplan con la cuantía mínima, deben ser por lo menos  $1/4$  de la sección máxima calculada para la parte inferior el vano, y deben desarrollarse en tensión sustituyendo  $f_y$  por  $1.25f_y$  en la cara del apoyo.

### Distribución del refuerzo

En cuanto al espaciamiento del refuerzo, también hay limitaciones que deben observarse al momento de diseñar el elemento.

a) Para losas macizas en una dirección el espaciamiento libre mínimo  $s$  entre barras paralelas de una capa debe ser al menos el mayor entre  $25 \text{ mm}$ ,  $d_b$ , y  $(4/3)d_{agg}$ . Cuando el refuerzo paralelo se coloque en dos o más capas horizontales, las barras de las capas superiores deben colocarse exactamente sobre las de las capas inferiores, con una distancia libre entre capas no menor de  $25 \text{ mm}$ .

Con el objetivo de evitar fisuramiento, el espaciamiento del refuerzo adherido más cercano a la cara en tracción no debe exceder el valor de  $s$ , expresado en  $\text{mm}$ , calculado con el menor de las siguientes expresiones:

$$s = 380 \left( \frac{280}{f_s} \right) - 2.5c_c \quad (2.37)$$

$$s = 300 \left( \frac{280}{f_s} \right) \quad (2.38)$$

donde  $c_c$  es el recubrimiento libre del refuerzo en  $mm$ , y  $f_s$  se calcula con las cargas de servicio con base en el momento no mayorado. Se permite tomar  $f_s$  como  $(2/3)f_y$ , y considerando  $f_y = 420 \text{ MPa}$ , las ecuaciones 2.37 y 2.38 se reescriben como  $s = 380 - 2.5c_c$ , y  $s = 300$ , respectivamente.

En cuanto al espaciamiento máximo  $s$  del refuerzo corrugado, este debe ser el menor entre  $3h$  y  $450 \text{ mm}$ .

b) Para losas macizas en dos direcciones el espaciamiento mínimo  $s$  se considera igual que para losas en una dirección.

En cuanto al espaciamiento máximo  $s$  del refuerzo longitudinal corrugado debe ser el menor de entre  $2h$  y  $450 \text{ mm}$  en las secciones críticas, y el menor entre  $3h$  y  $450 \text{ mm}$  en las otras secciones.

c) Para vigas el espaciamiento mínimo  $s$  se considera igual que para losas.

Al igual que para losas en una dirección, con el objetivo de evitar fisuramiento, en vigas se aplican las ecuaciones 2.37 y 2.38.

En vigas con  $h$  mayor de  $900 \text{ mm}$ , debe colocarse *refuerzo superficial longitudinal* uniformemente distribuido en ambas caras laterales de la viga dentro de una distancia  $h/2$  medida desde la cara en tracción, como se muestra en la Figura 2.11. El espaciamiento del refuerzo superficial no debe ser mayor a  $s$  calculado con las ecuaciones 2.37 y 2.38. Se puede incluir el refuerzo superficial en el cálculo de la resistencia únicamente si se hace un análisis de compatibilidad de deformaciones.

El refuerzo superficial longitudinal que se instala en las vigas con  $h$  mayor de  $900 \text{ mm}$  sirve para evitar el fisuramiento en el alma de la viga, y de acuerdo a investigaciones realizadas, es más importante la separación entre varillas que el diámetro utilizado, recomendándose el uso de barras de 10 a 16  $mm$  completando un área mínima de  $210 \text{ mm}^2$  por metro de altura.

### 2.3.3. Refuerzo por compresión

Las columnas y muros son considerados elementos resistentes a esfuerzos por compresión. En el caso de las columnas, el ACI establece para diseño sismo resistente un rango del 1 al 6 % del área gruesa de la sección transversal, mientras que la NEC establece un rango del 1 al 3 %.

$$0.01 \leq \frac{\rho_g}{A_g} \leq 0.03 \quad (2.39)$$

donde  $A_g$  es el área gruesa de la sección transversal de la columna

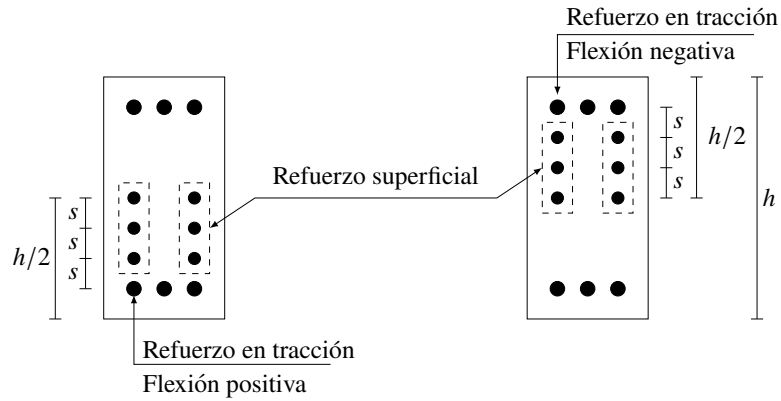


Fig. 2.11: Refuerzo superficial para vigas y viguetas co  $h > 900$  mm (adaptado de ACI R9.7.2.3 [3])

### Distribución del refuerzo

El refuerzo longitudinal en las columnas debe distribuirse de manera homogénea. En columnas de sección rectangular se requiere que por lo menos en cada esquina del estribo se ubique una barra, mientras que en columnas de sección circular se requiere mínimo tres barras, recomendándose 8 barras distribuidas en todo el perímetro.

La distancia libre mínima entre barras longitudinales en las columnas debe ser la mayor de  $40$  mm,  $1.5d_b$ , y  $(4/3)d_{agg}$ , donde  $d_b$  es el diámetro del refuerzo longitudinal, y  $d_{agg}$  es el diámetro del agregado grueso. La separación máxima entre barras longitudinales no debe exceder de  $x_i = 350$  mm como se muestra en la figura 2.12.

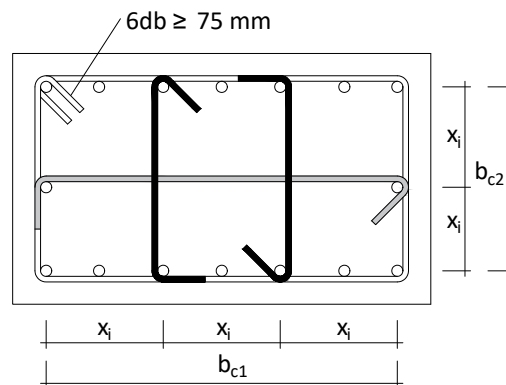


Fig. 2.12: Sección transversal de columna. La dimensión  $x_i$  medida centro a centro de las barras no debe exceder de  $350$  mm. La dimensión  $h_x$  se toma como la mayor dimensión  $x_i$  (adaptado de ACI R-18.5.7.2[3])

Cuando  $P_u > 0.3A_g f'_c$ , o  $f'_c > 70$  MPa, el valor de  $h_x$  no debe exceder  $200$  mm.  $P_u$  debe ser el máximo valor en compresión consistente con las combinaciones de mayoración de carga que incluyan  $E$ .

### 2.3.4. Refuerzo por corte

#### Refuerzo mínimo

Debe colocarse un área mínima de refuerzo por cortante  $A_{v,min}$  donde  $V_u > 0.5\phi V_c$ .  $A_{v,min}$  debe ser el mayor calculado con las expresiones siguientes:

$$\frac{A_{v,min}}{s} = 0.062 \sqrt{f'_c} \frac{b_w}{f_{yt}} \quad (2.40)$$

$$\frac{A_{v,min}}{s} = 0.035 \frac{b_w}{f_{yt}} \quad (2.41)$$

#### Refuerzo máximo

El reglamento no menciona una cantidad máxima a utilizarse, y debe calcularse en función de la necesidad acorde a lo establecido en el capítulo 3. Debe mencionarse sin embargo que la cantidad de refuerzo por cortante debe ser tal que permita el armado sin mayores dificultades, y tomando en consideración la separación mínima reglamentaria.

#### Distribución del refuerzo

El refuerzo para absorber esfuerzos cortantes se ubica de manera perpendicular al eje longitudinal del elemento, y debe distribuirse de acuerdo a condiciones mínimas reglamentarias. Tanto columnas como vigas necesitan refuerzo por cortante, y en el nudo, o punto de intersección viga-columna, se mantienen los estribos de la columna, de tal manera que se evite el congestionamiento de refuerzos.

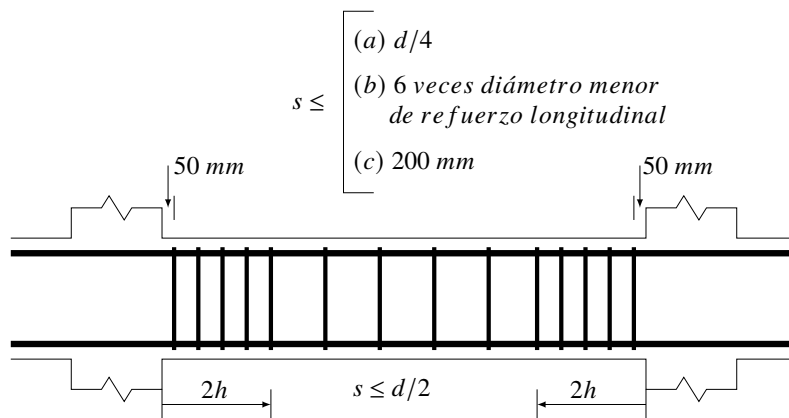


Fig. 2.13: Distribución de estribos en vigas (adaptado de NEC [2])

En el caso de vigas (Figura 2.13), el primer estribo debe colocarse a 50 mm a partir de la cara de la columna. En la zona de confinamiento con una longitud de  $2h$  a partir de la cara de la columna, la separación máxima a ejes de estribos debe ser la menor entre (a)  $d/4$ , (b) 6 veces el

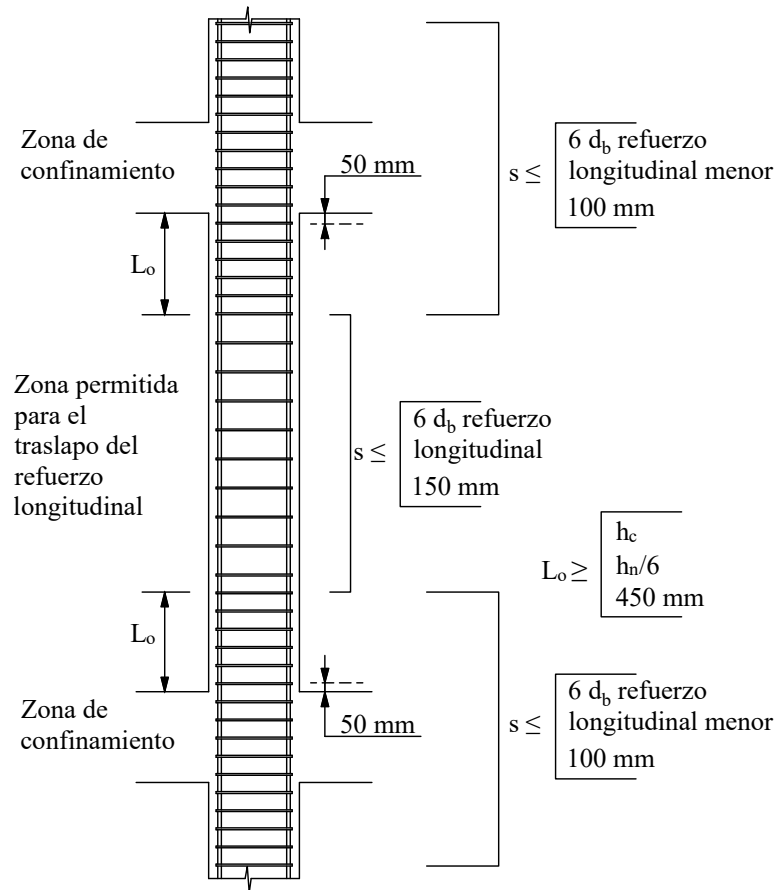


Fig. 2.14: Distribución de estribos en columnas (adaptado de NEC [2])

diámetro del refuerzo longitudinal menor y (c) 200 mm. Fuera de la zona de confinamiento la máxima separación debe ser menor o igual a  $d/2$ .

En el caso de columnas (Figura 2.14), el primer estribo se ubica a 50 mm a partir de la cara de la viga, y la separación libre entre estribos en ningún caso puede ser menor de  $4/3d_{agg}$ . En la zona de confinamiento la separación máxima medida a ejes de estribos debe ser menor o igual a 6 veces el diámetro de la barra longitudinal de menor diámetro, pero en ningún caso mayor de 100 mm. Fuera de la zona de confinamiento la máxima separación a ejes de estribos se calcula como 6 veces el diámetro del refuerzo longitudinal mayor, pero en ningún caso puede ser mayor de 150 mm. La longitud de confinamiento  $L_o$  se calcula como la mayor entre (a) el lado mayor de la sección de la columna  $h_c$ , (b) la longitud libre de la columna dividida para  $h_n/6$ , y (c) 450 mm.

En el caso de losas también se puede utilizar estribos para absorber los esfuerzos por corte, aunque en un sentido práctico, podría ser más apropiado aumentar el peralte de la losa, de tal manera que la capacidad del concreto para absorber cortante sea suficiente para contrarrestar el cortante requerido.

En todas las regiones donde  $V_u > \phi V_c$  debe colocarse un área mínima de refuerzo a cortante



$A_{v,min}$ , la misma que se considerará como el mayor valor que resulte de calcular  $A_{v,min}/s$  con las expresiones 2.42 y 2.43.

$$\frac{A_{v,min}}{s} = 0.062 \sqrt{f'_c} \frac{b_w}{f_{yt}} \quad (2.42)$$

$$\frac{A_{v,min}}{s} = 0.035 \frac{b_w}{f_{yt}} \quad (2.43)$$

Cuando se requiera refuerzo por cortante en losas en una dirección, el refuerzo transversal debe detallarse de acuerdo con el valor calculado de  $V_s$ .

Cuando

$$V_s \leq 0.33 \sqrt{f'_c} b_w d \quad (2.44)$$

la máxima separación  $s$  debe ser la menor entre (a)  $d/2$  a lo largo de la longitud, (b)  $d$  transversal al ancho, y (c) 600 mm.

Cuando

$$V_s > 0.33 \sqrt{f'_c} b_w d \quad (2.45)$$

la máxima separación  $s$  debe ser la menor entre (a)  $d/4$  a lo largo de la longitud, (b)  $d/2$  transversal al ancho, y (c) 300 mm.

Cuando se requiera refuerzo por cortante en losas en dos direcciones, el refuerzo transversal debe detallarse de acuerdo con lo señalado en el Tabla 2.7.

Tabla 2.7: Ubicación del primer estribo y límite de espaciamiento como refuerzo a cortante para losas en dos sentidos (Tabla 8.7.6.3[3])

| Dirección de la medición              | Descripción de la medición                               | Distancia o espaciamiento máximo, mm |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Perpendicular a la cara de la columna | Distancia desde la cara de la columna al primer estribo  | $d/2$                                |
| Perpendicular a la cara de la columna | Espaciamiento entre estribos                             | $d/2$                                |
| Paralelo a la cara de la columna      | Espaciamiento entre las ramas verticales de los estribos | $2d$                                 |

### 2.3.5. Refuerzo por torsión

Elementos ubicados en los bordes o extremos de una estructura pueden estar fácilmente afectados por esfuerzos de torsión. Esto lo podemos verificar en vigas de borde y fachadas donde las cargas se aplican de manera excéntrica, así como en las conexiones viga-losa. Torsión podría presentarse con mayor intensidad aun en elementos como vigas curvas (por ejemplo en puentes que siguen el radio de curvatura en las vías), en escaleras en caracol o en voladizos. Por supuesto, ciertas cargas, si bien están aplicadas de manera excéntrica, no necesariamente causaran esfuerzos intensos de torsión que exija el diseño por torsión, por lo que deberá verificarse si el elemento bajo análisis realmente debe reforzarse por torsión.

#### Refuerzo mínimo

Debe colocarse un área mínima de refuerzo por torsión donde  $T_u \geq \phi T_{th}$ .

Cuando se requiera refuerzo por torsión, el refuerzo transversal mínimo  $(A_v + 2A_t)_{min}/s$  debe ser el mayor calculado entre las expresiones 2.46 y 2.47.

$$\frac{A_{v,min} + 2A_t}{s} = 0.062 \sqrt{f'_c} \frac{b_w}{f_{yt}} \quad (2.46)$$

$$\frac{A_{v,min} + 2A_t}{s} = 0.35 \frac{b_w}{f_{yt}} \quad (2.47)$$

Debe notarse que  $A_v$  es el área de la sección transversal de dos ramas de un estribo cerrado, mientras que  $A_t$  es el área de una sola rama un estribo cerrado.

Cuando se requiera refuerzo por torsión, el refuerzo longitudinal mínimo  $A_{l,min}$  debe ser el menor calculado entre las expresiones 2.48 y 2.49.

$$A_{l,min} = \frac{0.42 \sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_y} - \left( \frac{A_t}{s} \right) p_h \frac{f_{yt}}{f_y} \quad (2.48)$$

$$A_{l,min} = \frac{0.42 \sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_y} - \left( \frac{0.175 b_w}{f_{yt}} \right) p_h \frac{f_{yt}}{f_y} \quad (2.49)$$

#### Refuerzo máximo

Una cantidad máxima de refuerzo por torsión no se puede establecer. Debe considerarse que el refuerzo longitudinal que resulte del análisis por torsión se combinará con el acero longitudinal por flexión, y el acero trasversal por torsión debe combinarse con el acero transversal por corte, considerando los limitantes del acero por flexión y corte respectivamente.

### Distribución del refuerzo

Cuando se requiera refuerzo por torsión, este debe consistir principalmente de estribos cerrados, y se debe colocar por lo menos hasta una distancia igual a  $(b_t + d)$  más allá del punto donde se requiera por análisis, donde  $b_t$  (mm) es el ancho de la parte de la sección transversal que contiene los estribos cerrados que resiste la torsión.

El acero longitudinal por torsión debe distribuirse en todo el perímetro del elemento de manera equidistante.

El acero transversal por torsión (estribos cerrados con gancho de  $135^\circ$ ) no debe estar separados una distancia mayor del menor valor calculado con  $p_h/8$  o 300 mm.

### 2.3.6. Refuerzo por retracción y temperatura

El concreto, con la variación de la temperatura ambiental, varia su volumen, contrayéndose y dilatándose conforme baje o suba la temperatura. Ese cambio de volumen puede causar pequeñas fisuras que conforme pasa el tiempo se pueden convertir en grietas que afecten la integridad del elemento de hormigón. Para evitar que el elemento sea destruido por este proceso de cambio de volumen del concreto, utilizamos el acero de refuerzo por *retracción y temperatura*.

#### Refuerzo mínimo

En elementos con grandes superficies expuestas, considerando la utilización de acero con límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$ , es necesario colocar refuerzo por retracción y temperatura en una cantidad mínima de 0.0018 multiplicada por el área bruta del concreto. Este es el acero que toda losa de hormigón armado lleva aparte del acero destinado a resistir los esfuerzos de flexión.

### Distribución del refuerzo

El espaciamiento mínimo del refuerzo por retracción y temperatura se establece igual que el utilizado para el refuerzo por flexión. El espaciamiento máximo en cambio no debe exceder del menor calculado con  $5h$  o 450 mm, y debe ser capaz de desarrollar  $f_y$  en tracción.

### 2.3.7. Desarrollo y anclaje del refuerzo

Durante el diseño estructural de elementos de hormigón armado el ingeniero revisará los diferentes tipos de esfuerzos a los que está sometido el elemento bajo análisis, de tal manera que se lo pueda reforzar para resistir todos los esfuerzos requeridos. Encontramos esfuerzos que ocurren en puntos críticos del elemento y a partir de ello encontramos la cantidad de refuerzo necesario para satisfacer esa necesidad. Cuando la sección transversal del elemento de concreto contiene una cantidad de refuerzo apropiada para resistir los esfuerzos, es entonces que decimos que tenemos hormigón armado. Para que el diseño sea apropiado, la sección de acero de refuerzo

calculada debe extenderse por una longitud capaz de desarrollar la adherencia suficiente que permita que el acero desarrolle el esfuerzo para el cual se está destinando.

Dicho de otra manera, todo elemento de hormigón armado necesita que la cantidad de refuerzo calculada se extienda por una determinada longitud para que pueda desarrollar los esfuerzos requeridos; a esa longitud la conocemos en términos generales como “longitud de desarrollo”.

Debido a que las investigaciones con hormigones de  $f'_c > 70 \text{ MPa}$  son escasas, el Reglamento condiciona que para el cálculo de la longitud de desarrollo, el valor de  $\sqrt{f'_c}$  no debe exceder de  $8.3 \text{ MPa}$ .

### Longitud de desarrollo en tracción $\ell_d$

El refuerzo de todo elemento de hormigón armado ubicado de forma horizontal dentro de una estructura trabaja principalmente a tracción, y la longitud de desarrollo  $\ell_d$  del acero de refuerzo debe ser la mayor entre  $300 \text{ mm}$  o la calculada de acuerdo a la tabla 2.8 proporcionada por el Reglamento [3]. La longitud de desarrollo debe proyectarse a ambos lados de los puntos críticos. La ubicación de la longitud de desarrollo por tracción  $\ell_d$  calculada debe seguir las recomendaciones de la figura 2.15. Los factores de modificación  $\Psi$  aplicados al cálculo para el desarrollo de las barras corrugadas y alambres a tracción deben tomarse de acuerdo a lo especificado en la tabla 2.9.

De manera más general, la longitud de desarrollo  $\ell_d$  de refuerzo por tracción se puede calcular con:

$$\ell_d = \left( \frac{f_y}{1.1\lambda\sqrt{f'_c}} \frac{\Psi_t \Psi_e \Psi_s \Psi_g}{\left( \frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right)} \right) d_b \quad (2.50)$$

en donde el término de confinamiento  $(c_b + K_{tr})/d_b$  no debe exceder 2.5, y

$$K_{tr} = \frac{40A_{tr}}{sn} \quad (2.51)$$

“en donde  $n$  es el número de barras o alambres que se empalman o desarrollan dentro del plano de hendimiento. Se puede usar  $K_{tr} = 0$  como una simplificación de diseño aún si hay refuerzo transversal presente”[3].

En la ecuación 2.50,  $c_b$  medida en mm, se calcula como la menor de: (a) la distancia medida del centro de una barra o alambre a la superficie más cercana del concreto, o (b) la mitad de la separación centro a centro de las barras o alambres que se desarrollan.

De manera adicional a la longitud de desarrollo  $\ell_d$ , el Reglamento especifica una longitud de anclaje adicional  $\ell_a$  que se proyecta más allá de los puntos críticos, y debe ser el mayor calculado con  $d$  o  $12d_b$  para el momento positivo, y el mayor calculado con  $d$ ,  $12d_b$  o  $\ell_n/16$

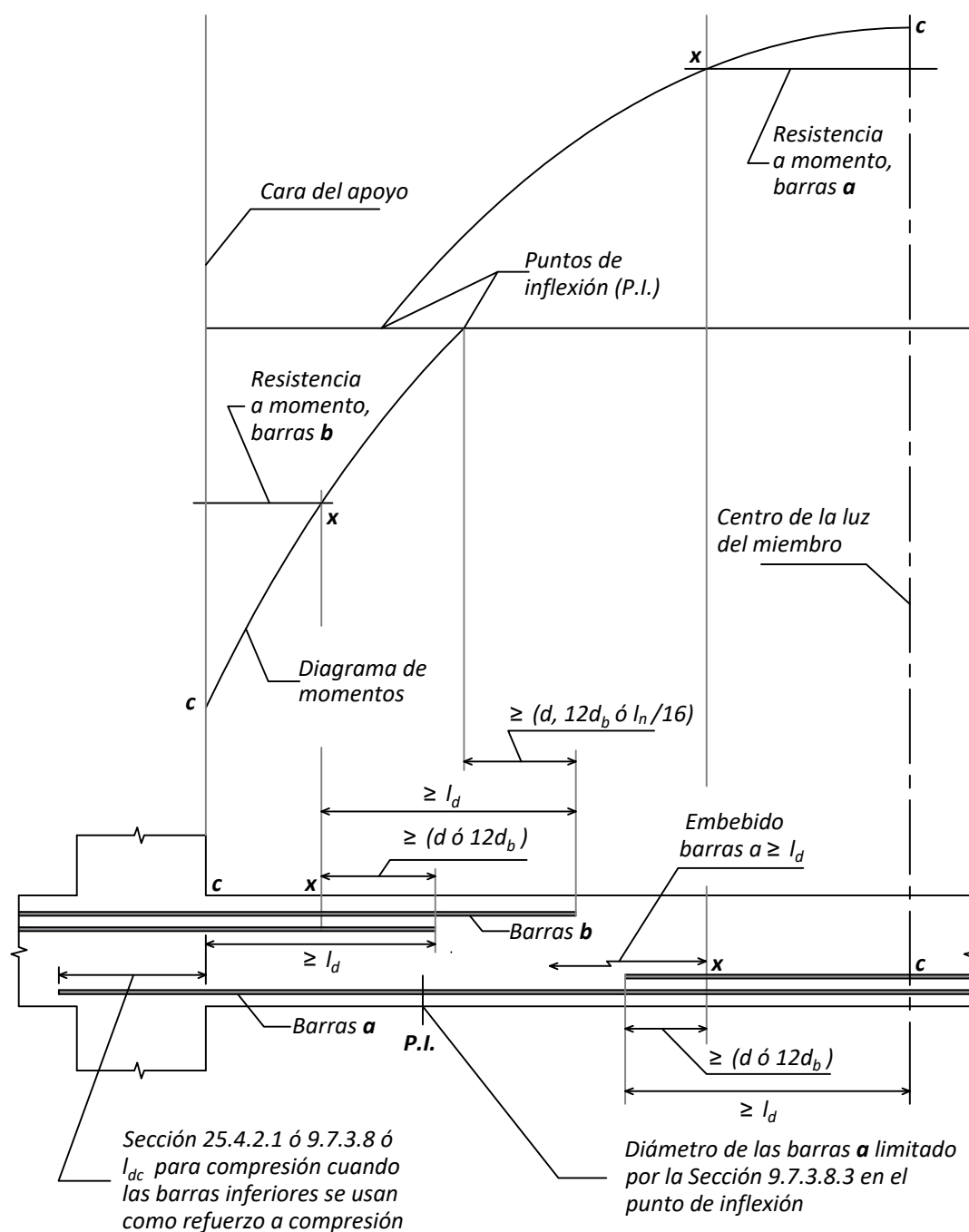


Fig. 2.15: Longitud de desarrollo del refuerzo por flexión en una viga continua (adaptado de ACI Fig. R9.7.3.2 [3])

para el refuerzo negativo.

### Desarrollo de ganchos estándar en tracción $\ell_{dh}$

Cuando un elemento termina en el extremo de una estructura, donde no hay espacio suficiente para albergar la longitud de desarrollo apropiada, o cuando el elemento termina en voladizo, con el objetivo de asegurar el anclaje necesario para desarrollar los esfuerzos requeridos, es necesario implementar ganchos estandarizados (ver figura 2.16) que se extienden por una longitud  $\ell_{dh}$ ,

Tabla 2.8: Longitud de desarrollo,  $\ell_d$ , para barras corrugadas y alambre corrugado en tracción (Tabla 25.4.2.3 [3])

| Espaciamiento y recubrimiento                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Barras N° 19 o menores                                                        | Barras N° 22 y mayores                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Espaciamiento libre entre barras o alambres que se están desarrollando o empalmando por traslapo no menor que $d_b$ , recubrimiento libre al menos $d_b$ , y no menos estribos a lo largo de $\ell_d$ que el mínimo del Reglamento o espaciamiento libre entre barras o alambres que están siendo desarrollados o empalmados por traslapo no menor que $2d_b$ y recubrimiento libre no menor que $d_b$ . | $\left( \frac{f_y \Psi_t \Psi_e \Psi_g}{2.1 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ | $\left( \frac{f_y \Psi_t \Psi_e \Psi_g}{1.7 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ |
| Otros casos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | $\left( \frac{f_y \Psi_t \Psi_e \Psi_g}{1.4 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ | $\left( \frac{f_y \Psi_t \Psi_e \Psi_g}{1.1 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ |

la misma que debe ser la mayor calculada con  $8d_b$ ,  $150 \text{ mm}$ , o mediante la ecuación 2.52. El Reglamento[3] también señala en 18.8.5.1 que para estructuras sismoresistentes,  $\ell_{dh}$  se debe calcular con la ecuación 2.53. En todo caso, se recomendaría que se utilice el mayor de los dos valores que resulten del cálculo.

$$\ell_{dh} = \left( \frac{f_y \Psi_e \Psi_s \Psi_{cc} \Psi_r}{21 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b \quad (2.52)$$

$$\ell_{dh} = \frac{f_y d_b}{5.4 \lambda \sqrt{f'_c}} \quad (2.53)$$

Para el cálculo de  $\ell_{dh}$ , los factores de modificación  $\Psi_e$ ,  $\Psi_s$ ,  $\Psi_{cc}$ ,  $\Psi_r$ , y  $\lambda$  deben tomarse de la

Tabla 2.10.

La geometría del gancho estándar de  $90^\circ$  o  $180^\circ$  para desarrollo de barras corrugadas a tracción se presentan en el Tabla 2.11

En cuanto a la dimensión complementaria del gancho estándar ( $\ell_{ext}$ ), el Reglamento[3] lo especifica de acuerdo con la Tabla 2.12.

Tabla 2.9: Factores de modificación para el desarrollo de las barras corrugadas y alambres corrugados en tracción (Tabla 25.4.2.5 [3])

| Factor de modificación                                         | Condición                                                                                                                                                             | Valor del factor |
|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Peso del concreto $\lambda$                                    | Concreto de peso liviano                                                                                                                                              | 0.75             |
|                                                                | Concreto de peso normal                                                                                                                                               | 1.00             |
| Grado del refuerzo $\Psi_g$                                    | Grado 280 o Grado 420                                                                                                                                                 | 1.00             |
|                                                                | Grado 550                                                                                                                                                             | 1.15             |
|                                                                | Grado 690                                                                                                                                                             | 1.30             |
| Epóxico $\Psi_e$                                               | Refuerzo con recubrimiento epóxico o zinc y barras con recubrimiento dual de zinc y epóxico con menos de $3d_b$ de recubrimiento, o separación libre menor que $6d_b$ | 1.50             |
|                                                                | Refuerzo con recubrimiento epóxico o zinc y barras con recubrimiento dual de zinc y epóxico para todas las otras condiciones                                          | 1.20             |
|                                                                | Refuerzo sin recubrimiento o refuerzo recubierto con zinc (galvanizado)                                                                                               | 1.00             |
| Tamaño $\Psi_s$                                                | Para barras No. 22 y mayores                                                                                                                                          | 1.00             |
|                                                                | Para barras No. 19 o menores y alambres corrugados                                                                                                                    | 0.80             |
| Ubicación $\Psi_t$                                             | Más de 300 mm de concreto fresco colocado bajo el refuerzo horizontal                                                                                                 | 1.30             |
|                                                                | Otros                                                                                                                                                                 | 1.00             |
| El producto $\Psi_t \Psi_e$ no hay necesidad de que exceda 1.7 |                                                                                                                                                                       |                  |

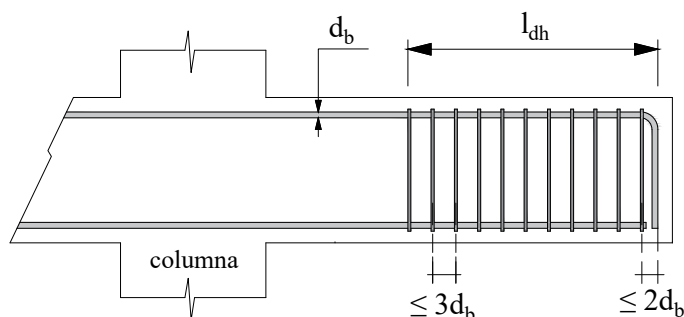


Fig. 2.16: Longitud de gancho estándar  $\ell_{dh}$  (adaptado de ACI R25.4.3.3 [3])

### Longitud de desarrollo en compresión $\ell_{dc}$

La longitud de desarrollo para refuerzos sometidos a compresión  $\ell_{dc}$  debe calcularse como la mayor entre a), b) y c):

Tabla 2.10: Factores de modificación para el desarrollo de ganchos estándar en barras corrugadas en tracción (Adaptada de Tabla 25.4.3.2 [3])

| Factor de modificación                                                                                                               | Condición                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Valor del factor |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Peso del concreto $\lambda$                                                                                                          | Concreto de peso liviano                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0.75             |
|                                                                                                                                      | Concreto de peso normal                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1.00             |
| Epóxico $\Psi_e$                                                                                                                     | Refuerzo con recubrimiento epóxico o zinc y barras con recubrimiento dual de zinc y epóxico                                                                                                                                                                                                                                      | 1.20             |
|                                                                                                                                      | Refuerzo sin recubrimiento o refuerzo recubierto con zinc (galvanizado)                                                                                                                                                                                                                                                          | 1.00             |
| Tamaño $\Psi_s$                                                                                                                      | No. 28 y menores                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1.0              |
|                                                                                                                                      | No. 32 a No. 35                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1.15             |
|                                                                                                                                      | No. 43                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1.3              |
|                                                                                                                                      | No. 57                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1.5              |
| Recubrimiento $\Psi_{cc}$                                                                                                            | Para No. 35 y menores con recubrimiento lateral de 63 mm (perpendicular al gancho), y para ganchos de 90° con recubrimiento de más de 50 mm                                                                                                                                                                                      | 0.7              |
|                                                                                                                                      | Otros                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1.00             |
| Confinamiento del refuerzo $\Psi_r$                                                                                                  | Para ganchos de 90° del No. 35 y menores (1) circunscrito a lo largo de $\ell_{dh}$ dentro de estribos, perpendicular a $\ell_{dh}$ a $s \leq 3d_b$ , o (2) encerrado a lo largo de la extensión de la barra, más allá del gancho, incluido el doblé de los estribos <sup>1</sup> , perpendicular a $\ell_{ext}$ a $s \leq 3d_b$ | 0.8              |
|                                                                                                                                      | Para ganchos de 180° del No. 35 y menores, a lo largo de $\ell_{dh}$ dentro de estribos perpendicular a $\ell_{dh}$ a $s \leq 3d_b$                                                                                                                                                                                              | 0.8              |
|                                                                                                                                      | Otros                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1.0              |
| <sup>1</sup> El primer estribo debe encerrar el doblé del gancho, dentro de una distancia $2d_b$ , desde la cara externa del gancho. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                  |



Tabla 2.11: Geometría del gancho estándar para barras corrugadas en tracción  
(Tabla 25.3.1[3])

| Tipo de gancho estándar | Diámetro de la barra | Diámetro interior mínimo de doblado, $mm$ | Extensión recta $\ell_{ext}, mm$ | Tipo de gancho estándar |
|-------------------------|----------------------|-------------------------------------------|----------------------------------|-------------------------|
| Gancho de 90°           | N° 10 a N° 25        | $6d_b$                                    | $12d_b$                          |                         |
|                         | N° 29 a N° 36        | $8d_b$                                    |                                  |                         |
|                         | N° 43 a N° 57        | $10d_b$                                   |                                  |                         |
| Gancho de 180°          | N° 10 a N° 25        | $6d_b$                                    | $> 4d_b \text{ y } 65 mm$        |                         |
|                         | N° 29 a N° 36        | $8d_b$                                    |                                  |                         |
|                         | N° 43 a N° 57        | $10d_b$                                   |                                  |                         |

(a)

$$200mm \quad (2.54)$$

(b)

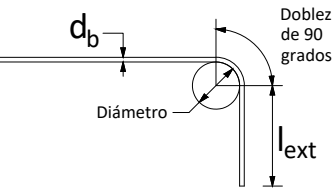
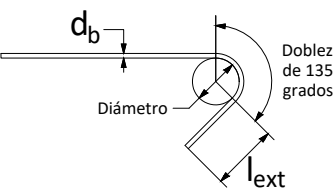
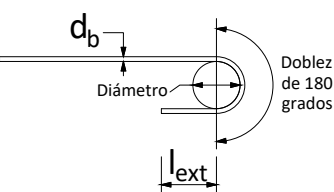
$$\left( \frac{0.24 f_y \Psi_r}{\lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b \quad (2.55)$$

(c)

$$0.043 f_y \Psi_r d_b \quad (2.56)$$

Para el cálculo de  $\ell_{dc}$ , las ecuaciones 2.55 y 2.56 se modificaran mediante los factores de modificación establecidos en la Tabla 2.13, excepto que se permite tomar  $\Psi_r$  igual a 1.0.

Tabla 2.12: Diámetro mínimo interior de doblado y geometría del gancho estándar para estribos, amarras y estribos cerrados de confinamiento (Tabla 25.3.2 [3])

| Tipo de gancho estándar | Diámetro de la barra | Diámetro interior mínimo de doblado, $mm$ | Extensión recta $\ell_{ext}$ , $mm$ | Tipo de gancho estándar                                                              |
|-------------------------|----------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Gancho de 90°           | N° 10 a N° 16        | $4d_b$                                    | Mayor de $6d_b$ y 75 mm             |    |
|                         | N° 19 a N° 25        | $6d_b$                                    | $12d_b$                             |                                                                                      |
| Gancho de 135°          | N° 10 a N° 16        | $4d_b$                                    | Mayor de $6d_b$ y 75 mm             |   |
|                         | N° 19 a N° 25        | $6d_b$                                    |                                     |                                                                                      |
| Gancho de 180°          | N° 10 a N° 16        | $4d_b$                                    | Mayor de $4d_b$ y 65 mm             |  |
|                         | N° 19 a N° 25        | $6d_b$                                    |                                     |                                                                                      |

### 2.3.8. Empalmes

Las barras de acero que se utilizan como refuerzo en el hormigón armado, comercialmente son despachas en longitudes de hasta 12 m, por lo que deben ser recortadas para ajustarse a las dimensiones de los diversos elementos estructurales. Los diferentes tamaños de elementos dejarán, por lo tanto, recortes de barras, que en el caso de querer ser utilizadas, deben ser empalmados con otros recortes para su uso, que de otra manera pasarían a ser desperdicios que encarecerían las construcciones.

Cuando se requiera empalmar las barras por traslapo, se debe evitar que todas las barras del elemento sean empalmadas en la misma sección transversal, de tal manera que no se forme una zona de fisuramiento.

Para el acero de refuerzo a tracción, la longitud de empalme por traslapo en tracción,  $\ell_{st}$ , debe ser la señalada en la tabla 2.14, donde  $\ell_d$  se calcula de acuerdo a la Tabla 2.8 con los correspondientes factores de modificación.

Tabla 2.13: Factores de modificación para barras y alambres corrugados a compresión (Tabla 25.4.9.3 [3])

| Factor de modificación             | Condición                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Valor del factor |
|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Concreto liviano $\lambda$         | Concreto liviano                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.75             |
|                                    | Concreto de peso normal                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1.00             |
| Refuerzo de confinamiento $\Psi_r$ | Refuerzo encerrado dentro de (1), (2), (3) ó (4):<br>(1) Una espiral<br>(2) Un estribo circular continuo con $d_b \geq 6 \text{ mm}$ y paso $100 \text{ mm}$<br>(3) Estribos de barra N° 13 o alambre MD130 de acuerdo con 25.7.2 espaciado $\leq 100 \text{ mm}$ centro a centro<br>(4) Estribos cerrados de confinamiento de acuerdo con 25.7.4 y espaciados a distancias $\leq 100 \text{ mm}$ , centro a centro | 0.75             |
|                                    | Otra                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1.00             |

Tabla 2.14: Longitud de empalme por traslapo de barras y alambres corrugados a tracción (Tabla 25.5.2.1 [3])

| $A_{s,colado}/A_{s,requerido}$ en la longitud del empalme | Porcentaje máximo de $A_s$ empalmado dentro de la longitud de traslapo requerida | Tipo de empalme | $\ell_{st}$ |                                |
|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------------|--------------------------------|
| $\geq 2.0$                                                | 50                                                                               | Clase A         | Mayor de:   | $1.0\ell_d$ y $300 \text{ mm}$ |
|                                                           | 100                                                                              | Clase B         | Mayor de:   | $1.3\ell_d$ y $300 \text{ mm}$ |
| $< 2.0$                                                   | Todos los casos                                                                  | Clase B         |             |                                |

”Cuando se empalman por traslapo barras de diferente diámetro en tracción, la longitud del empalme por traslapo,  $\ell_{st}$ , debe ser la mayor distancia entre el  $\ell_d$  de la barra de mayor tamaño y el  $\ell_{st}$  de la barra de diámetro menor tamaño”[3].

Para el acero de refuerzo a compresión, la longitud de empalme por traslapo a compresión,  $\ell_{sc}$ , debe determinarse de acuerdo con:

- (a) Para  $f_y \leq 420 \text{ MPa}$ :  $\ell_{sc}$  es la mayor de  $0.071 f_y d_b$  y  $300 \text{ mm}$
- (b) Para  $f_y > 420 \text{ MPa}$ :  $\ell_{sc}$  es la mayor de  $(0.13 f_y - 24) d_b$  y  $300 \text{ mm}$

Para  $f'_c < 21 \text{ MPa}$ , la longitud del empalme por traslape debe incrementarse en un tercio.

Cuando sea necesario empalmar barras de diferente diámetro en compresión  $\ell_{sc}$  (cuando hay cambios de sección en columnas, por ejemplo), la longitud de traslape debe ser la mayor entre  $\ell_{dc}$  calculada para la barra de mayor diámetro, y  $\ell_{sc}$  calculada para la barra de menor diámetro.

### 2.3.9. Integridad estructural

La integridad estructural tiene que ver con un conveniente detallado del acero de refuerzo en los elementos de hormigón armado, de tal manera que se asegure el comportamiento eficiente de cada elemento ante eventuales daños o cargas anormales, asegurando sobretodo la ductilidad y redundancia de la estructura.

El Reglamento define la integridad estructural como la "Capacidad de una estructura para redistribuir los esfuerzos y mantener la estabilidad a través de la resistencia, redundancia, ductilidad y detallado del refuerzo cuando se produce un daño localizado u ocurren sobreesfuerzos importantes." [3]

La integridad estructural se logra básicamente con detallados adicionales a los ya especificados en las secciones previas, los mismos que deben implementarse obligatoriamente, de acuerdo al tipo de elemento, siguiendo las siguientes recomendaciones:

*Losas armadas en una dirección* (ACI 318-7.7.7[3]): por lo menos un cuarto del refuerzo calculado con el máximo momento positivo debe ser continuo. En soportes no continuos, el refuerzo debe ser anclado a la cara del soporte, sustituyendo en el cálculo  $f_y$  por  $1.25 f_y$ . Si existiera la necesidad, los empalmes del refuerzo de integridad se los debe realizar cerca del apoyo, mediante empalmes mecánicos o soldados.

*Losas armadas en dos direcciones* (ACI 318-8.7.4.2[3]): todas las barras inferiores dentro de la franja de columna deben ser continuas, estar soldadas, empalmadas mecánicamente o empalmadas por traslape a tracción Clase B, como se detalla en la figura 2.17. Por lo menos dos barras o alambres inferiores de la franja de columna, en cada dirección, deben pasar entre las barras longitudinales de la columna, y deben anclarse en los apoyos exteriores. En el cálculo de los anclajes,  $f_y$  debe ser sustituido por  $1.25 f_y$ .

*Sistema de viguetas en una dirección* (ACI 318-9.8.1.6[3]): al menos una barra de la parte inferior de cada viga debe ser continua, y debe anclarse en la cara de los apoyos para desarrollar tensión, sustituyendo en su cálculo  $f_y$  por  $1.25 f_y$ .

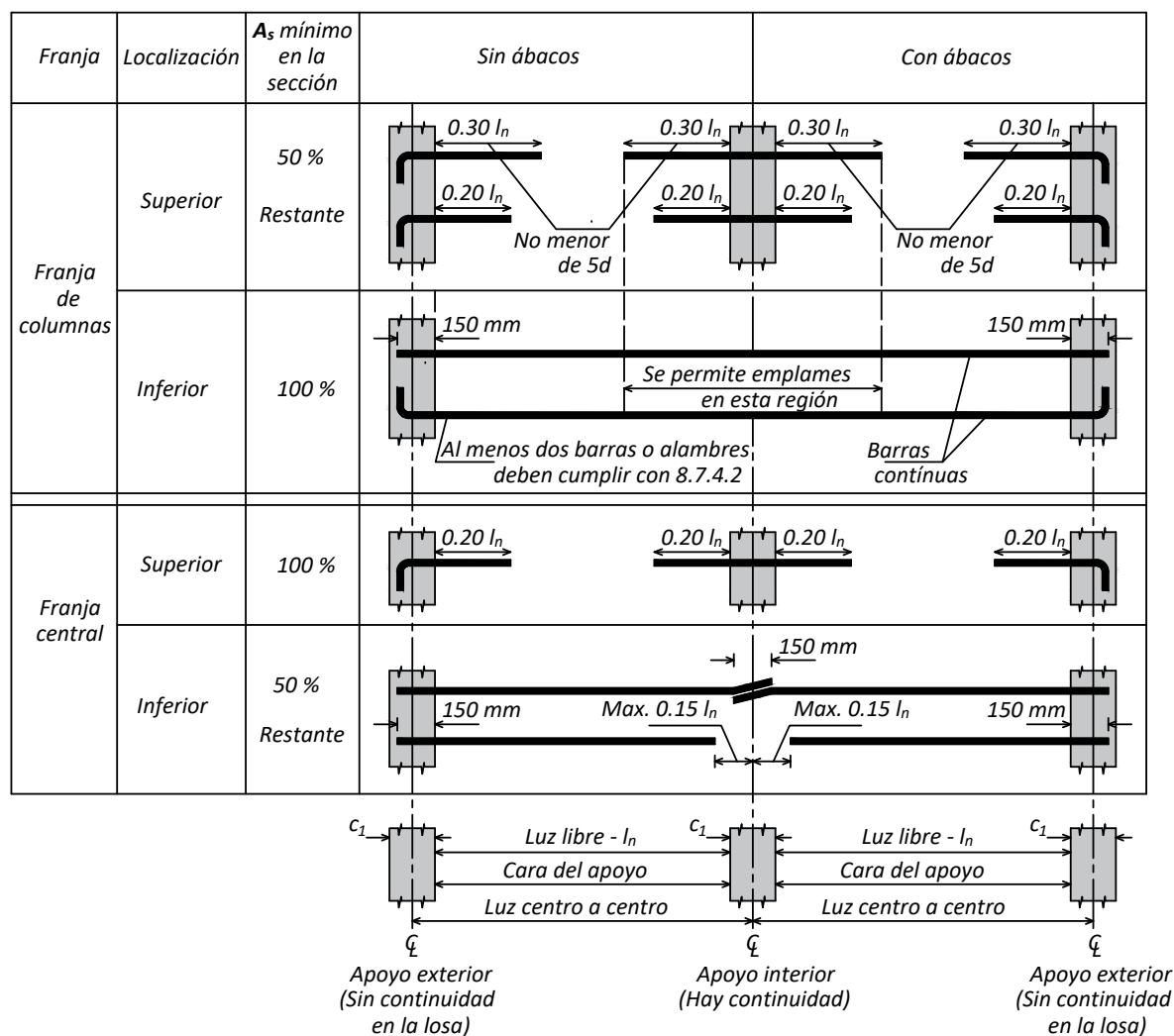


Fig. 2.17: Extensiones mínimas del refuerzo corrugado en losas en dos direcciones sin vigas (adaptado de ACI Fig. 8.7.4.1.3 [3])

*Sistema de viguetas en dos direcciones* (ACI 318-8.8.1.6[3]): al menos una barra de la parte inferior de cada vigueta debe ser continua, y debe anclarse en la cara de los apoyos para desarrollar tensión, sustituyendo en su cálculo  $f_y$  por  $1.25f_y$ .

*Vigas construidas en sitio* (ACI 318-9.7.7[3]):

- 1) En las vigas perimetrales de una estructura debe cumplirse que:
  - a) Por lo menos un cuarto del refuerzo por tracción para momento positivo debe ser continuo.
  - b) Por lo menos un sexto del refuerzo por tracción para momento negativo en el apoyo debe ser continuo, el mismo que debe consistir de por lo menos dos barras.
  - c) El refuerzo longitudinal de integridad debe colocarse dentro de estribos cerrados a lo largo de la luz libre de la viga, con un espaciamiento no mayor de  $d/2$ . En los soportes extremos, los estribos cerrados colocados en la zona de confinamiento de  $2h$  a partir de la cara del apoyo, el distanciamiento será el menor de:

- 1)  $d/4$
  - 2)  $8d_b$  del menor diámetro de barra longitudinal
  - 3)  $24d_b$  del estribo
  - 4)  $300\text{ mm}$
- 2) En las vigas no perimetrales, el refuerzo de integridad estructural debe cumplir con:
- a) Por lo menos dos barras deben ser continuas, con una sección transversal equivalente a por lo menos un cuarto del refuerzo máximo para momento positivo.
  - b) El refuerzo longitudinal debe colocarse dentro de estribos cerrados a lo largo de la luz de la viga.
- 3) El refuerzo longitudinal de integridad estructural debe pasar por la región circunscrita por el refuerzo longitudinal de la columna.
- 4) En los apoyos discontinuos, el refuerzo longitudinal para integridad estructural debe anclarse por tensión en la cara del apoyo, sustituyendo  $f_y$  por  $1.25f_y$  en los cálculos del anclaje correspondiente.

## 2.4. ESFUERZOS ADMISIBLES

Cuando diseñamos una estructura, debemos considerar los esfuerzos unitarios que los materiales constitutivos de los elementos estructurales pueden desarrollar. Así, hablamos de la resistencia a la compresión cilíndrica del hormigón<sup>5</sup> ( $f'_c$ ), o del límite de fluencia del acero de refuerzo ( $f_y$ ). Verificar que los materiales realmente tengan esas características es asunto del control de obras, y no siempre se obtiene en campo las resistencias requeridas por el diseño, especialmente cuando se trata del hormigón, el mismo que está sujeto a variables difíciles de controlar como la humedad y temperatura ambiental, la idoneidad de los agregados, o la exactitud de los volúmenes de los materiales requeridos para la elaboración de la mezcla.

Respecto del acero de refuerzo, su resistencia y características geométricas deberían estar garantizadas por las organizaciones de control y estandarización, e igual cosa podríamos sostener con respecto al cemento. Esto no impide, que si el proyecto lo amerita, se realicen controles de calidad al acero y al cemento que se adquiriera para la ejecución de una obra. Diferente es con el hormigón, que dependiendo de condiciones tales como elaboración, transporte, manipulación y curado, su resistencia puede variar con respecto a la resistencia de diseño requerida para el proyecto. Con este conocimiento, el reglamento implementa limitaciones que aseguren el correcto funcionamiento de los elementos de hormigón armado, las cuales podemos encontrar como parte de los factores de reducción de resistencia, las deflexiones máximas admisibles, o las limitaciones referentes a los días de espera necesarios antes de proceder con el uso de la

---

<sup>5</sup>La resistencia del concreto puede expresarse como resistencia a la compresión cilíndrica [33], o resistencia a la compresión cúbica. En este texto, se refiere exclusivamente a la resistencia cilíndrica.

estructura. Por ejemplo, para las pruebas de carga, el reglamento (numeral 27.4.4[3]) exige que se espere al menos 56 días luego de haber colado el hormigón.

Estas consideraciones tienen que ver entonces con la seguridad de la estructura, lo cual se puede expresar como un factor de seguridad que estaría en función del esfuerzo resistente del material:

$$F.S. = \frac{\sigma_{resistente}}{\sigma_{admisible}} \quad (2.57)$$

donde:

- $F.S.$  = factor de seguridad  $\geq 1.0$
- $\sigma_{resistente}$  es el esfuerzo resistente del material
- $\sigma_{admisible}$  es el esfuerzo admisible del material

El factor de seguridad varia dependiendo del tipo de esfuerzo, condición, o clasificación del proyecto que el reglamento estime. Dependiendo del proyecto y el tipo de esfuerzos al que este sometido el elemento bajo análisis, el diseñador debe observar estrictamente las restricciones anotadas en el reglamento, lo que asegura un proyecto exitoso.

## 2.5. TOLERANCIAS ADMISIBLES

Con el uso de computadoras y sofisticados programas de cálculo, podría pensarse que la exactitud acompaña a todo proceso constructivo en la elaboración de los elementos de hormigón armado. Esto sin embargo, aunque se tengan todos los cuidados en obra, no siempre es posible, pues ninguna obra es exactamente nivelada o aplomada, y tampoco se tiene las dimensiones exactas en todos los elementos diseñados. Obviamente, excesivas desviaciones en las dimensiones constructivas con respecto a lo especificado en los planos de diseño podrían derivar en esfuerzos no considerados en el proceso de diseño que afecten negativamente el comportamiento de la obra.

Ante esta realidad, en el proceso constructivo se admiten desviaciones relativas al dimensionamiento especificado en los planos, lo que el ACI recoge como tolerancias admisibles [17]. En este texto se recogen algunas consideraciones descritas en los anexos, en la sección 9.3, y el lector debe recurrir a la referencia para información más detallada. Obviamente, las tolerancias admisibles tiene que ver también con la seguridad de la estructura, por lo que se deben observar en obra de manera estricta, de otra manera se estaría disminuyendo el factor de seguridad asignado al proyecto.

Hay que anotar que este tema cae en el marco de la ética y la responsabilidad del profesional a cargo de la obra. Si consideramos, por ejemplo, que una columna debería ser derrocada debido

a su falta de verticalidad, rebasando el límite de tolerancia establecido por el reglamento, esto implicaría costos adicionales en el proyecto, por lo que los constructores se verían tentados a "maquillar" el error mediante empastes o enlucidos que cubran el desplome del elemento, lo que si bien remedia la estética, no elimina el sobreesfuerzo al que estará sometido el elemento debido a las excentricidades que provocan estos errores constructivos.





## Capítulo 3

# REQUISITOS DE RESISTENCIA

Un elemento de hormigón armado debe diseñarse para soportar la combinación de esfuerzos causados por su peso propio, las cargas que debe soportar, y los efectos de cargas accidentales. Para su análisis el reglamento[3] provee los criterios apropiados. A pesar de que se recurra a todo el cuidado en la evaluación de cargas, análisis de soportes y anclajes, o cualquier método sofisticado de análisis, siempre habrá alguna incertidumbre que se escapa de los cálculos, por lo que es necesario que se estime una resistencia de diseño mayor o igual a la resistencia requerida, por lo que el reglamento establece como condición que la resistencia de diseño debe calcularse como la resistencia nominal multiplicada por el factor de reducción de resistencia correspondiente, de acuerdo a lo que se establece en la Tabla 1.3, verificando que siempre se cumpla que:.

*Resistencia de diseño  $\geq$  Resistencia requerida*

$$\phi P_n \geq P_u \quad (3.1)$$

$$\phi M_n \geq M_u \quad (3.2)$$

$$\phi V_n \geq V_u \quad (3.3)$$

$$\phi T_n \geq T_u \quad (3.4)$$

$$\phi B_n \geq B_u \quad (3.5)$$

donde:

|        |                                                                  |
|--------|------------------------------------------------------------------|
| $\phi$ | Factor de reducción de resistencia                               |
| $P_n$  | Resistencia nominal a carga axial de la sección transversal, $N$ |
| $P_u$  | Fuerza axial mayorada, $N$                                       |
| $M_n$  | Resistencia nominal a flexión, $N.mm$                            |
| $M_u$  | Momento mayorado en la sección, $N.mm$                           |
| $V_n$  | Resistencia nominal a cortante, $N$                              |
| $V_u$  | Fuerza cortante mayorada en la sección, $N$                      |
| $T_n$  | Resistencia nominal a torsión, $N.mm$                            |
| $T_u$  | Torsión mayorada en la sección, $N.mm$                           |
| $B_n$  | Resistencia nominal al aplastamiento, $N$                        |
| $B_u$  | Carga mayorada de aplastamiento, $N$                             |

### 3.1. RESISTENCIA A CARGA AXIAL

La resistencia nominal a carga axial debe calcularse de acuerdo a lo establecido en la hipótesis de diseño.

Cuando la carga axial actúa en el centroide del elemento, esto es, con excentricidad cero,  $P_o$  se calcula con:

$$P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \quad (3.6)$$

pero debido a excentricidades accidentales que se derivan de factores tales como la distribución heterogénea de los agregados que componen el concreto, las inexactitudes del diseño, y factores constructivos, el reglamento limita la resistencia nominal axial a compresión,  $P_n$ , a un máximo de  $P_{n,max} = 0.80 P_o$  para columnas con estribos, y  $P_{n,max} = 0.85 P_o$  para columnas con espirales, resultando lo siguiente:

(a) para columnas con estribos

$$P_{n,max} = 0.80 (0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}) \quad (3.7)$$

(b) para columnas con espirales

$$P_{n,max} = 0.85 (0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}) \quad (3.8)$$

### 3.1.1. Efectos de esbeltez

Cuando un elemento gana en altura, reduciendo la relación sección transversal-altura, se pueden presentar efectos de esbeltez que generalmente derivan en el pandeo del elemento.

A este respecto, el Reglamento [3] señala que los efectos de esbeltez se pueden omitir en el análisis siempre que se cumpla con la siguiente relación:

a) Para elementos no arriostrados contra desplazamientos laterales

$$\frac{k\ell_u}{r} \leq 22 \quad (3.9)$$

b) Para elementos arriostrados contra desplazamientos laterales

$$\frac{k\ell_u}{r} \leq 34 + 12(M_1/M_2) \leq 40 \quad (3.10)$$

donde:

$k$ ; factor de esbeltez

$\ell_u$ ; altura libre del elemento

$r$ ; radio de giro de la sección transversal del elemento

$M_1$ ; menor momento mayorado en cabeza o pie de columna

$M_2$ ; mayor momento mayorado en cabeza o pie de columna

donde  $M_1/M_2$  es negativo si la columna presenta curvatura simple, y positivo si presenta curvatura doble.

El radio de giro  $r$  se puede calcular con a), b) o c):

a)  $r = \sqrt{\frac{I_g}{A_g}}$

b)  $0.3h$ , siendo  $h$  la dimensión de la sección de la columna en la dirección del análisis

c)  $0.25D$ , siendo  $D$  el diámetro de la columna de sección circular

## 3.2. RESISTENCIA A FLEXIÓN

La resistencia nominal a flexión debe calcularse con base a lo expuesto en la hipótesis de diseño, donde se estableció que  $\phi M_n \geq M_u$ .

De la figura 2.2 se puede determinar que el momento nominal  $M_n$  se obtiene multiplicando la tensión  $T$  por el brazo de palanca  $z = d - a/2$ , por lo tanto:

$$M_n = A_s f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (3.11)$$

reemplazando 2.7 en 3.11 tenemos:

$$M_n = A_s f_y \left( d - \frac{\rho f_y d}{1.7 f'_c} \right) \quad (3.12)$$

y recordando que  $\rho = A_s / bd$ , tenemos:

$$M_n = \rho b d^2 f_y \left( 1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right) \quad (3.13)$$

y haciendo

$$R = \rho f_y \left( 1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right) \quad (3.14)$$

finalmente resulta que:

$$M_n = R b d^2 \quad (3.15)$$

y la resistencia de diseño sería:

$$\phi M_n = \phi R b d^2 \geq M_u \quad (3.16)$$

### 3.3. RESISTENCIA A CORTANTE EN UNA DIRECCIÓN

El cortante en una dirección se manifiesta cuando se produce un plano de fisuramiento que atraviesa la sección transversal del elemento. Este se presenta principalmente en vigas y columnas, o en elementos de relativamente gran longitud comparada con las dimensiones de su sección transversal.

La resistencia a cortante nominal para elementos en una dirección lo establece el reglamento [3] en la sección 22.5, la cual se debe calcular como:

$$V_n = V_c + V_s \quad (3.17)$$

Estableciéndose que la sección transversal del elemento debe cumplir con:

$$V_u \leq \phi \left( V_c + 0.66 \sqrt{f'_c} b_w d \right) \quad (3.18)$$

#### 3.3.1. Miembros sin fuerza axial

Para miembros sin fuerza axial,  $V_c$  debe calcularse con:

$$V_c = 0.17 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \quad (3.19)$$

a menos que se realice un cálculo más detallado mediante el uso de las ecuaciones (a)3.20, (b) 3.21, o (c) 3.22, el que resulte menor.

$$V_c = \left( 0.16\lambda\sqrt{f'_c} + 17\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d \quad (3.20)$$

donde  $M_u$  ocurre simultáneamente con  $V_u$  en la sección considerada.

$$V_c = \left( 0.16\lambda\sqrt{f'_c} + 17\rho_w \right) b_w d \quad (3.21)$$

$$V_c = 0.29\lambda\sqrt{f'_c} b_w d \quad (3.22)$$

### 3.3.2. Miembros con compresión axial

Para miembros sometidos a compresión axial,  $V_c$  debe calcularse con:

$$V_c = 0.17 \left( 1 + \frac{V_u}{14A_g} \right) \lambda b_w d \quad (3.23)$$

a menos que se realice un cálculo más detallado mediante el uso de las ecuaciones (a)3.24 ó (b) 3.25, el que sea menor.

$$V_c = \left( 0.16\lambda\sqrt{f'_c} + 17\rho_w \frac{V_u d}{M_u - N_u \frac{(4h-d)}{8}} \right) b_w d \quad (3.24)$$

donde  $M_u$  ocurre simultáneamente con  $V_u$  en la sección considerada

La Ecuación 3.24 no es aplicable si  $M_u - N_u \frac{(4h-d)}{8} \leq 0$

$$V_c = 0.29\lambda\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{3.5A_g}} \quad (3.25)$$

### 3.3.3. Miembros con tracción axial significativa

Para miembros sometidos a tracción axial significativa,  $V_c$  debe calcularse con:

$$V_c = 0.17 \left( 1 + \frac{N_u}{3.5A_g} \right) \lambda\sqrt{f'_c} b_w d \quad (3.26)$$

donde  $N_u$  es negativo para tracción,  $V_c$  no debe tomarse menor que cero.

### 3.3.4. Refuerzo para cortante en una dirección

En toda sección donde  $V_u > \phi V_c$ , se debe colocar refuerzo transversal a cortante, de tal manera que se cumpla con:

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_c \quad (3.27)$$

Para miembros en una dirección que deban reforzarse con refuerzo transversal a cortante, se permite utilizar:

1. (a) Estribos o estribos cerrados de confinamiento ubicados de manera perpendicular al eje longitudinal del miembro
2. (b) Refuerzo electrosoldado con alambres ubicados de manera perpendicular al eje longitudinal del miembro
3. (c) Espirales

Para que el refuerzo a cortante cumpla con lo previamente establecido,  $V_s$  debe calcularse como:

$$V_s = \frac{A_v f_{yt} d}{s} \quad (3.28)$$

donde  $s$  es el paso de la espiral o el espaciamiento longitudinal de los estribos medido eje a eje del refuerzo. Cuando se trabaja con estribos,  $A_v$  es el área efectiva de dos ramas de barra o alambres dentro del espaciamiento  $s$ . En el caso de refuerzo en espiral o estribo circular,  $A_v$  debe tomarse como dos veces el área de la barra dentro del espaciamiento  $s$ .

Se permite utilizar estribos inclinados con un ángulo de  $45^\circ$  o más que atraviesen el plano de la potencial fisura por cortante.

En este caso  $V_s$  debe calcularse como:

$$V_s = \frac{A_v f_{yt} (\sen \alpha + \cos \alpha) d}{s} \quad (3.29)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre los estribos inclinados y el eje longitudinal del miembro, y  $s$  se mide en la dirección paralela al eje longitudinal del refuerzo. Aunque el reglamento así lo permite, el diseñador debe considerar que esta opción incrementará el grado de dificultad constructiva.

## 3.4. RESISTENCIA A CORTANTE EN DOS DIRECCIONES

El cortante en dos direcciones se manifiesta cuando se producen dos planos de fisuramiento que se proyectan siguiendo un perímetro crítico  $b_o$ , el cual aparece a una distancia crítica

$d/2$  medida a partir de la cara del apoyo del elemento, siempre que el apoyo sea de sección rectangular. El cortante en dos direcciones se presenta principalmente en losas y zapatas, y también se lo denomina cortante por punzonamiento, conformando los planos de fisuramiento una forma de pirámide truncada invertida.

Cuando el apoyo es de sección circular, la sección crítica también proyectará un plano de fisuramiento, pero en este caso adoptará una forma cónica truncada.

La resistencia nominal al cortante para miembros en dos direcciones sin refuerzo a cortante se debe calcular como:

$$v_n = v_c \quad (3.30)$$

Mientras que la resistencia nominal al cortante para miembros en dos direcciones con refuerzo a cortante se debe calcular como:

$$v_n = v_c + v_s \quad (3.31)$$

Para miembros en dos direcciones con refuerzo a cortante, el valor de  $v_c$  calculado en las secciones críticas no debe superar el  $v_{c,max}$  calculado como:

$$v_{c,max} = 0.17\lambda\sqrt{f'_c} \quad (3.32)$$

Para miembros en dos direcciones con refuerzo a cortante, el valor de  $v_u$  calculado en las secciones críticas no debe superar el  $v_{u,max}$  calculado como:

$$v_{u,max} = \phi 0.5\sqrt{f'_c} \quad (3.33)$$

Para miembros en dos direcciones sin refuerzo a cortante, el valor de  $v_c$  debe calcularse de acuerdo a la tabla 3.1, donde ya se considera la dimensión de la columna y el efecto del tamaño de la zapata.

El factor de modificación por efecto de tamaño<sup>1</sup>  $\gamma_s$  se calcula con:

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{(1 + 0.004d)}} \leq 1.0 \quad (3.34)$$

donde  $d$  está dado en  $mm$ .

---

<sup>1</sup>Considerado en el reglamento a partir de la versión 2019 con base en las publicaciones de Bažant et al. 2007, y Frosch et al. 2017



Tabla 3.1: Ecuaciones para el cálculo de  $v_c$  en dos direcciones (Tabla 22.6.5.2 [3])

| Esfuerzo en dos direcciones proporcionado por el concreto $v_c$ (MPa)                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| El menor de (a), (b) y (c):                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $0.33\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}$                                         | (a) |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $0.17\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}$         | (b) |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $0.083\left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_o}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}$ | (c) |
| $\lambda_s$ es el factor de modificación por efecto de tamaño<br>$\beta$ es la relación del lado largo al lado corto de la sección transversal de la columna, carga concentrada o área de reacción.<br>$\alpha_s = 40$ para columna interior<br>$\alpha_s = 30$ para columna de borde<br>$\alpha_s = 20$ para columna esquinera |                                                                           |     |

### 3.4.1. Refuerzo a cortante en dos direcciones

Se permite usar refuerzo a cortante en dos direcciones consistentes en estribos con una o varias ramas, en losas y zapatas, siempre que cumplan con:

1. (a)  $d$  es por lo menos 150 mm
2. (b)  $d$  es igual al menos a  $16d_b$ , donde  $d_b$  es el diámetro de la barra del estribo

Para miembros en dos direcciones reforzadas con estribos,  $v_s$ , debe calcularse como:

$$v_s = \frac{A_v f_{yt}}{b_o s} \quad (3.35)$$

donde  $A_v$  es la suma del área de todas las ramas del refuerzo en una línea periférica que sea geoméricamente similar al perímetro de la sección de la columna, y  $s$  es el espaciamiento de las líneas periféricas del refuerzo de cortante medido en dirección perpendicular a la cara de la columna.

**Factor de modificación por efecto de tamaño**

El factor de modificación por efecto de tamaño  $\lambda_s$  es incorporado al Reglamento[6] a partir de la versión 2019, en el numeral 22.5.5.1.3. La incorporación de este factor en el diseño por cortante, se realiza considerando los resultados de múltiples investigaciones en los últimos años, mencionándose en especial las reportadas en Bažant et al. 2007, y Frosch et al. 2017.

**3.5. RESISTENCIA A TORSIÓN**

Un elemento puede estar sometido a esfuerzos de torsión, por equilibrio, o compatibilidad. En el caso de una viga que soporta una cornisa, se dice que el elemento deberá ser analizado para soportar esfuerzos de torsión por equilibrio (a). En el caso de vigas de borde que soportan losas y vigas auxiliares, el elemento deberá ser analizado para que soporte esfuerzos de torsión por compatibilidad (b).

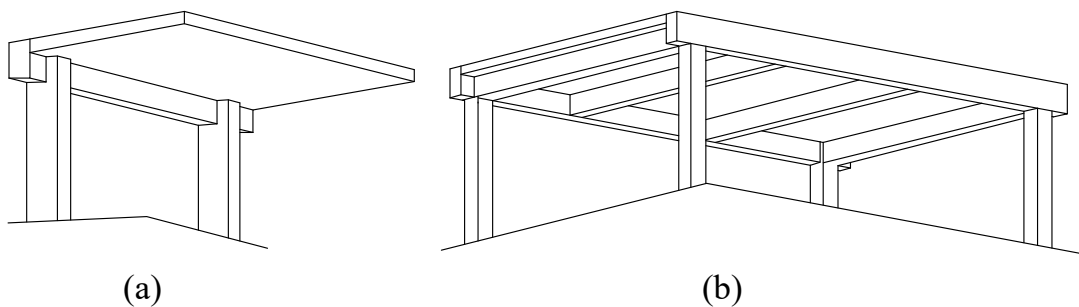


Fig. 3.1: (a) Esfuerzos de torsión por equilibrio; (b) Esfuerzos de torsión por compatibilidad

Un elemento de hormigón armado se debe reforzar por torsión si  $T_u \geq \phi T_{th}$ , donde  $\phi$  es el factor de reducción de resistencia, y  $T_{th}$  es el umbral de torsión.

Cuando  $T_u < \phi T_{th}$ , se permite despreciar los efectos de torsión.

En la figura 3.2 se describen los parámetros utilizados para el análisis de una viga sometida a esfuerzos de torsión.

El umbral de torsión debe calcularse como:

1. (a) Para secciones transversales sólidas

$$T_{th} = 0.083\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right) \quad (3.36)$$

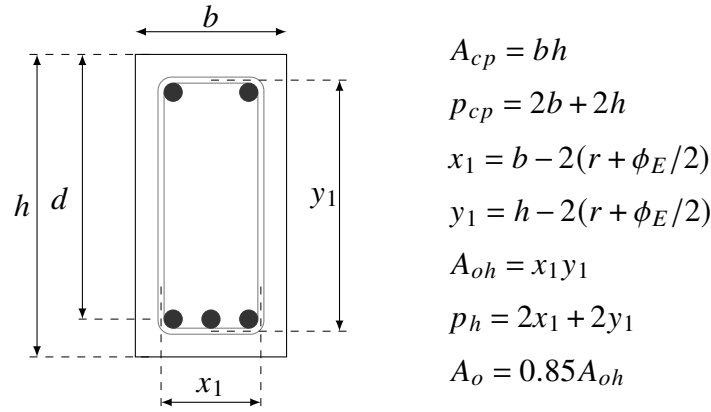


Fig. 3.2: Parámetros utilizados en el diseño de una viga sometida a esfuerzos de torsión

2. (b) Para secciones transversales huecas

$$T_{th} = 0.083 \lambda \sqrt{f'_c} \left( \frac{A_g^2}{p_{cp}} \right) \quad (3.37)$$

Para el cálculo de la resistencia nominal a torsión  $T_n$ , debe considerarse el menor valor calculado entre (a) y (b):

1. (a)

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yt}}{s} \cot \theta \quad (3.38)$$

2. (b)

$$T_n = \frac{2A_o A_l f_y}{p_h} \tan \theta \quad (3.39)$$

donde  $\theta$  se permite tomar igual a  $45^\circ$ , pero en ningún caso menor que 30 grados, ni mayor que 60 grados.  $A_t$  es el área de una rama de estribo cerrado que resiste torsión, y  $A_l$  es el área de refuerzo longitudinal que resiste torsión.  $p_h$  es el perímetro del estribo cerrado colocado más afuera en la sección. En las ecuaciones 3.38 y 3.39 se permite tomar  $A_o$  igual a  $0.85 A_{oh}$ .

Tratándose de torsión por compatibilidad, se permite reducir  $T_u$  a  $\phi T_{cr}$ , donde  $T_{cr}$  es el esfuerzo de torsión por fisuración.

$$T_{cr} = 0.33 \lambda \sqrt{f'_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \quad (3.40)$$

Las dimensiones de las secciones transversales deben ser tales que cumplan con las expresiones

(a) o (b):

1. (a) en secciones sólidas:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0.66 \sqrt{f'_c}\right) \quad (3.41)$$

2. (b) en secciones huecas:

$$\left(\frac{V_u}{b_w d}\right) + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right) \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0.66 \sqrt{f'_c}\right) \quad (3.42)$$

### 3.5.1. Refuerzo transversal a torsión

El refuerzo transversal por torsión, recordando que  $\phi T_n \geq T_u$ , debe cumplir con la ecuación 3.38, de la que se obtiene:

$$A_t = \frac{T_n s}{2 A_o f_{yt} \cot \theta} = \frac{T_u s}{2 \phi A_o f_{yt} \cot \theta} \quad (3.43)$$

haciendo  $T_n = T_u / \phi$  tenemos

$$A_t = \frac{T_u s}{2 \phi A_o f_{yt} \cot \theta} \quad (3.44)$$

### 3.5.2. Refuerzo longitudinal a torsión

El refuerzo longitudinal por torsión que se debe proveer se obtiene combinando la ecuación 3.38 con la ecuación 3.39, de donde obtenemos:

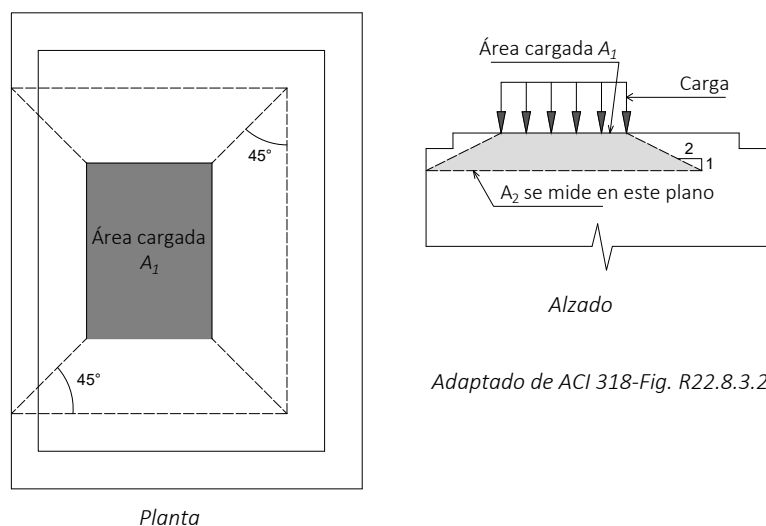
$$A_l = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yt}}{f_y} \cot^2 \theta \quad (3.45)$$

## 3.6. RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO

Cuando una columna descansa sobre un pedestal o zapata, los esfuerzos de compresión que la columna soporta son transmitidos directamente por aplastamiento al pedestal o zapata. La carga concentrada en la base de la columna podría fracturar el concreto de la zapata, pero el concreto que circunda el área de concentración de carga en la zapata contribuye lateralmente a soportar los esfuerzos, produciendo esfuerzos triaxiales que incrementan la resistencia de la zapata.

Bajo estas consideraciones, la resistencia de diseño por aplastamiento debe cumplir con:

$$\phi B_n \geq B_u \quad (3.46)$$



Adaptado de ACI 318-Fig. R22.8.3.2

Fig. 3.3: Aplicación del tronco de pirámide para determinar  $A_2$  en apoyos escalonados o inclinados (Adaptado del ACI R22.8.3.2 [3]).

Tabla 3.2: Resistencia nominal al aplastamiento (Tabla 14.5.6.1[3])

| Condiciones geométricas relativas                                          | $B_n$                  |                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------------|-----|
| La superficie de apoyo es más ancha en todos los lados que el área cargada | El menor de (a) y (b): | $\sqrt{A_2/A_1} (0.85 f'_c A_1)$ | (a) |
|                                                                            |                        | $2(0.85 f'_c A_1)$               | (b) |
| Otros casos                                                                | $0.85 f'_c A_1$        |                                  | (c) |

donde  $B_n$  se calcula de acuerdo a lo establecido en la tabla 3.2.

Para la interfaz de conexión entre columnas y zapatas o pedestales, se establece una sección de mínima de acero  $A_s$  que atraviesa la interfaz de al menos  $0.005 A_g$ , donde  $A_g$  es el área bruta de la sección de la estructura soportada. Esta sección de refuerzo puede obtenerse prolongando el acero de refuerzo longitudinal de la columna dentro de la zapata, o mediante el uso de espigas o bastones (dowels).

## Capítulo 4

# DISEÑO DE VIGAS

Una viga es un elemento estructural cuya longitud es relativamente grande con respecto a las dimensiones de su sección transversal, ubicada por lo general en posición horizontal dentro de una estructura.

Acorde a la Norma Ecuatoriana de la Construcción [2], los elementos estructurales sometidos a flexión deben cumplir requisitos mínimos como los que establecen a continuación:

1. Ser parte de sistemas resistentes a cargas sísmicas,
2. Resistir esas fuerzas fundamentalmente por flexión,
3. Las fuerzas axiales mayoradas de compresión del elemento,  $P_u$ , no exceden  $0.10f'_cA_g$  en ninguna combinación de cargas en que participen las cargas sísmicas.
4. La luz libre sea mayor que cuatro veces la altura útil de la sección transversal
5. El ancho mínimo de la sección transversal está limitando a  $250\text{ mm}$ , o  $0.3h$ , el que sea mayor

La altura mínima de una viga se determina en base al Tabla 2.5, en el que se expresa valores de  $h$  que permiten un buen comportamiento ante posibles deflexiones; en caso contrario deberá calcularse deflexiones.

En el diseño de una viga, debe investigarse la resistencia del elemento a esfuerzos de flexión, corte o torsión, y para la combinación de estos.

### 4.1. VIGAS SOMETIDAS A FLEXIÓN Y CORTE

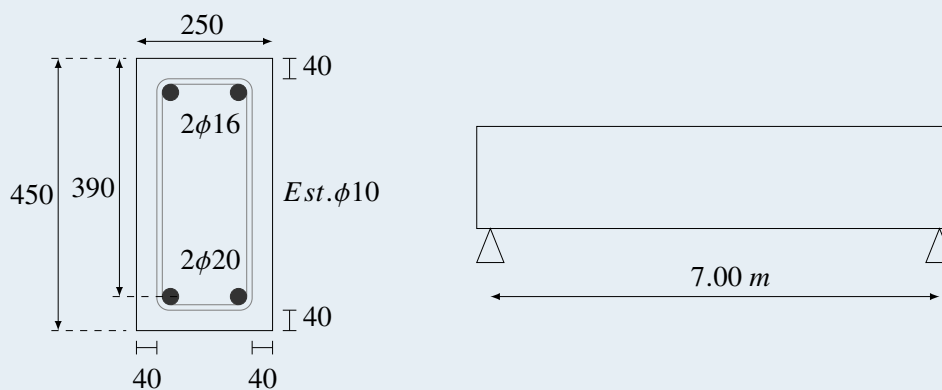
El rol fundamental de una viga es dar soporte a elementos de superficie tales como losas de piso o cubiertas, transmitiendo la carga que esta soporta y su propio peso hacia los apoyos. Las vigas, dependiendo de su forma de apoyo, podrían considerarse con sus extremos perfectamente empotrados (como ocurre en pórticos estructurales), soportadas en apoyos simples (como en puentes) o una combinación de diversos tipos de apoyos.

### 4.1.1. Vigas simplemente armadas

La viga observada en la Figura 2.1 representa una viga simplemente armada, soportada por apoyos simples. En ella se observa acero de refuerzo tan solo en la parte inferior del elemento, y este será el que deba soportar los esfuerzos de flexión que se deriven de las cargas que la viga soporte. Cuando hablamos de viga simplemente armada, nos referimos a una viga que soportar solo momento positivo, y por lo tanto se requiere acero de refuerzo solo en la cara inferior del elemento.

#### **Ejemplo 4.1** Encontrar la resistencia a flexión de una viga simplemente armada.

Una viga de sección rectangular de 250 mm de base y 450 mm de altura está soportada por dos apoyos simples separados entre si una distancia de 7 m. La viga está armada en toda su extensión con 2 barras de 20 mm de diámetro en su parte inferior, y 2 barras de 16 mm en su parte superior, con estribos de 10 mm de diámetro, manteniendo un recubrimiento de 40 mm. Para la construcción de la viga se ha utilizado hormigón con una resistencia a la compresión a los 28 días de  $f'_c = 25 \text{ MPa}$ , y acero de refuerzo con un límite de fluencia de  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . Se debe calcular el momento máximo que resiste el elemento.gdg



#### **Solución:**

En este ejemplo se asume una viga previamente diseñada, por lo que debemos proceder a su análisis para determinar su resistencia.

En la sección 2.1 se evidenció que las deformaciones por tracción y compresión son directamente proporcionales a la profundidad del eje neutro del elemento, y que los esfuerzos de tracción los absorbe el acero de refuerzo y los esfuerzos de compresión los absorbe el concreto, determinándose por equilibrio el momento nominal máximo que puede resistir el elemento mediante  $M_n = T(d - a/2)$ .

Del diagrama adjunto sabemos que  $d = 390 \text{ mm}$ , y que  $A_s = 628.40 \text{ mm}^2$  (sección de  $2\phi 20$ ), con lo que podemos calcular la tensión que absorben las dos barras de 20 mm y la altura del bloque equivalente que se necesita para el cálculo del momento nominal.

*Tensión que absorben las dos barras de 20 mm*

$$T = A_s f_y = 628.40(420) = 263,928 \text{ N}$$

*Altura del bloque equivalente de compresiones*

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{628.40(420)}{0.85(25)(250)} = 49.68 \text{ mm}$$

**Momento nominal**

$$M_n = T(d - a/2) = 263,928(390 - 49.68/2) = 96,375,948.48 \text{ N.mm}$$

$$M_n = 96.38 \text{ kN.m}$$

El momento resistente estará afectado por el factor de reducción de resistencia, que de acuerdo al Tabla 1.3 le corresponde el valor de 0.9, por lo que tenemos:

**Momento resistente**

$$M_u = \phi M_n = 0.9(96.38) = 86.74 \text{ kN.m}$$

Esto resuelve el problema planteado, pero habría que preguntarse: ¿cuánta carga puede soportar la viga?. Las respuestas son múltiples, dependiendo del tipo de carga y de la forma en la que esté distribuida. Para complementar la idea, si se tratase de una viga con carga distribuida de manera uniforme  $U$ , el momento último lo encontramos mediante  $M_u = U\ell^2/8 = 86.74 \text{ kN.m}$ , por lo tanto, la carga mayorada que soporta la viga sería de  $U = 14.16 \text{ kN/m}$ . Sin embargo, en el caso de tratarse de carga puntual  $P$ , ubicada al centro de la viga, el momento último lo encontramos mediante  $M_u = P\ell/4 = 86.74 \text{ kN.m}$ , por lo tanto la carga mayorada sería de  $P = 49.57 \text{ kN}$ .

#### **Nota: operaciones sin unidades**

En los ejemplos propuestos, por claridad del ejercicio, se omite escribir las unidades correspondientes en cada operación. Al respecto, el usuario debe asegurarse que los valores ingresados en las fórmulas mantengan coherencia con el propósito del cálculo.



### **Ejemplo 4.2** *Diseño de viga simplemente armada sobre apoyos simples.*

Diseñar el acero de refuerzo por flexión y corte para una viga de igual geometría que la viga del Ejemplo 4.1, de tal manera que soporte una carga viva de 2.00 kN/m y una carga muerta de 1.50 kN/m, en la que no se incluye el peso propio del elemento. Las dos cargas se distribuyen de manera uniforme a lo largo de toda la viga. Para el diseño considerar hormigón de peso normal con resistencia a la compresión a los 28 días de  $f'_c = 28$  MPa, y acero de refuerzo con límite de fluencia de  $f_y = 420$  MPa.

#### **Solución:**

El problema lo resolvemos mediante los siguientes pasos, considerando la geometría de la viga del Ejemplo 4.1, donde  $h = 450$  mm,  $b = 250$  mm, y  $d = 390$  mm:

**1. Evaluación de cargas:** Como se menciona, la carga muerta no incluye el peso propio del elemento, por lo que debemos calcularlo. Para hormigón armado la NEC especifica un peso unitario de  $\omega_c = 24$  kN/m<sup>3</sup>, por lo que las cargas que afectan a la viga quedarían de la siguiente manera:

$$\text{Peso propio} = (0.25)(0.45)(24) = 2.70 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga muerta total } D = 2.70 \text{ kN/m} + 1.50 \text{ kN/m} = 4.20 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga viva } L = 2.00 \text{ kN/m}$$

**2. Determinación de esfuerzos:** Los esfuerzos deben calcularse con las cargas mayoradas, considerando las combinaciones pertinentes, como se lo menciona en la sección 1.3.1. El mayor esfuerzo que resulte de aplicar las combinaciones es el que debe utilizarse para el diseño definitivo. En este caso, puesto que no se cuenta con mayor información, se aplica la combinación  $U = 1.2D + 1.6L$ , por lo que tenemos:

#### **Carga mayorada:**

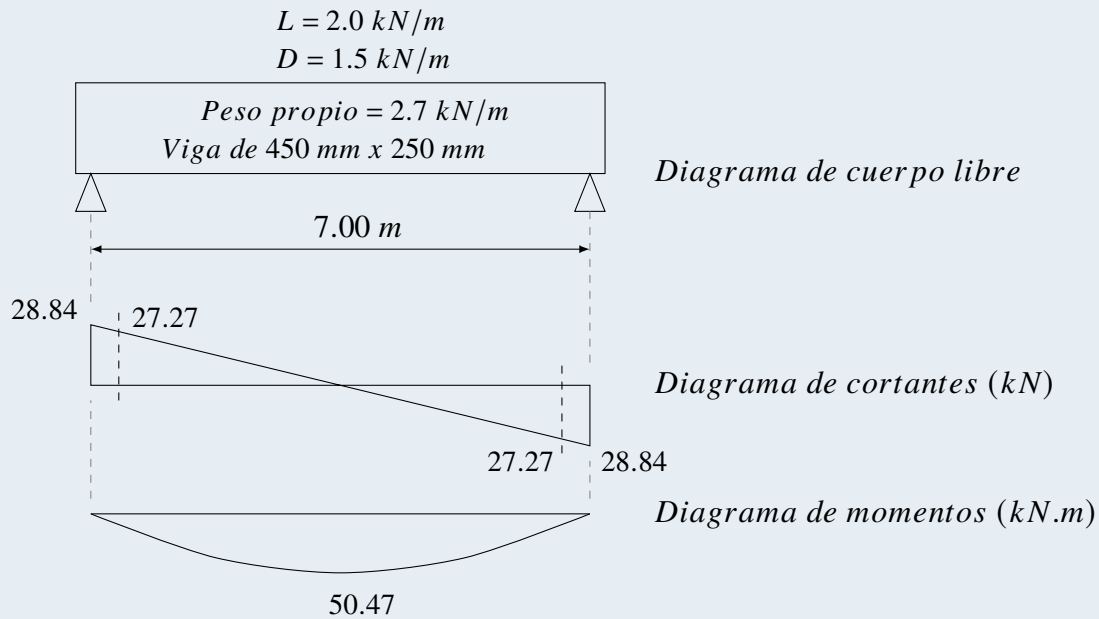
$$U = 1.2(4.20) + 1.6(2.00) = 8.24 \text{ kN/m}$$

#### **Momento último:**

$$M_u = \frac{U\ell^2}{8} = \frac{8.24(7.0)^2}{8} = 50.47 \text{ kN.m}$$

#### **Cortante último:**

$$V_u = \frac{U\ell}{2} = \frac{8.24(7.0)}{2} = 28.84 \text{ kN}$$



El reglamento establece que el cortante crítico se produce a la distancia  $d$  a partir de la cara del apoyo. En el presente caso, se considera que el apoyo es puntual, en consecuencia el cortante crítico  $V_d = 27.27 \text{ kN}$  se calcula a la distancia  $d = 0.39 \text{ m}$ , a partir del punto de apoyo.

**3. Cálculo del acero de refuerzo:** Como requisito de resistencia se estableció que  $\phi M_n \geq M_u$ , por lo que:

$$M_n = \frac{M_u}{\phi} = \frac{50.47}{0.9} = 56.08 \text{ kN.m}$$

y en la sección 3.2 se establecieron las ecuaciones correspondientes al diseño por flexión, y al utilizar la ecuación 3.15 tenemos:

$$R = \frac{M_n}{bd^2} = \frac{56.08(10)^6}{250(390)^2} = 1.4748 \text{ N/mm}^2$$

que reemplazando en la ecuación 3.14 tenemos:

$$1.4748 = \rho(420) \left( 1 - 0.59\rho \frac{420}{28} \right)$$

y resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene:

$$\rho = 0.00363$$

Para cumplir con los requisitos de funcionamiento, el valor de la cuantía calculada debe

estar entre la mayor y menor recomendada por el reglamento, de acuerdo a lo visto en las secciones 2.1 y 2.3.2, y considerando que  $\beta_1 = 0.85$  para  $f_y = 420$  MPa, para el caso que se analiza resulta:

$$\rho_{min} = \frac{1.4}{f_y} \geq \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} = 0.00333$$

$$\rho_{max} = 0.5(\rho_b) \leq 0.025 = 0.5 \left( 0.51\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \right) \leq 0.025 = 0.01445$$

Por lo que la cuantía calculada es aceptada como cuantía definitiva. Recordando que  $\rho = A_s/bd$ , podemos obtener la cantidad de acero de refuerzo requerida para soportar el momento de diseño:

$$A_s = \rho bd = 0.00363(250)(390) = 354 \text{ mm}^2$$

El refuerzo mínimo requerido resulta:

$$A_{s(min)} = \rho_{min} bd = 0.00333(250)(390) = 325 \text{ mm}^2$$

**4. Distribución del refuerzo por flexión:** Una vez verificada que la cantidad de acero calculada este dentro de los límites establecidos por el reglamento, solo resta escoger la combinación adecuada de diámetros de barras para obtener la cantidad requerida. El acero requerido para soportar el momento de diseño resultó  $354 \text{ mm}^2$ , lo que se puede lograr combinando 2 barras de 16 mm, con lo que resulta  $A_s = 402 \text{ mm}^2$ , que es superior a lo requerido, el mismo que se ubica en la parte inferior de la viga. Debido a esfuerzos no sería necesario colocar acero de refuerzo en la parte superior de la viga, sin embargo el reglamento exige que se ubiquen por lo menos dos barras que cumplan con la cuantía mínima, lo que de acuerdo a la sección calculada se cumple con 3 barras de 12 mm, con lo que se obtienen  $339.3 \text{ mm}^2$  que supera al refuerzo mínimo requerido por reglamento.

**5. Revisión del esfuerzo cortante:** De acuerdo a la sección 3.3, para que un elemento pueda soportar adecuadamente el cortante en una dirección, debe cumplirse que:

$$V_u \leq \phi \left( V_c + 0.66\sqrt{f'_c}b_w d \right)$$

Considerando además que se debe colocar una cantidad de refuerzo mínimo por cortante cuando  $V_u \geq 0.5\phi V_c$  (sección 2.3.4), estableciendo secciones mínimas, así como separaciones máximas.

Para verificar si la sección transversal del elemento es apropiada, calculamos  $V_c$  con:

$$V_c = 0.17\lambda\sqrt{f'_c}b_wd = 0.17(1.0)\sqrt{28}(250)(390) = 87,706.66\text{ N} = 87.71\text{ kN}$$

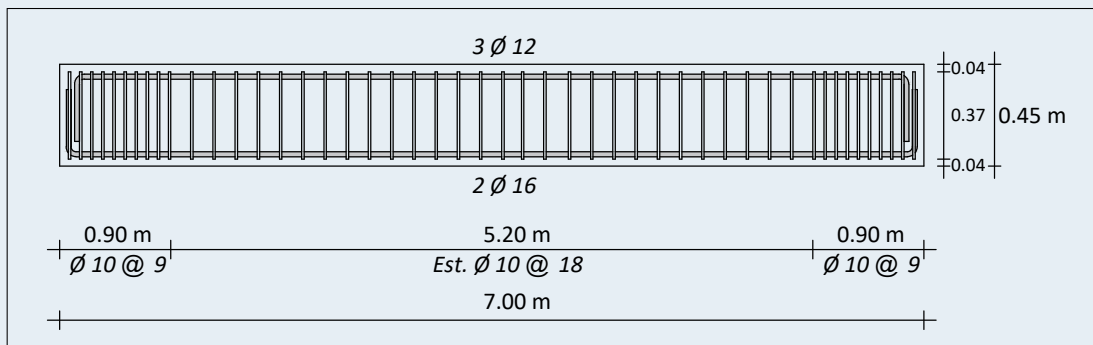
Puesto que  $(V_u = 27.27) < (0.5\phi V_c = 32.89)$ , de acuerdo a la norma, no se necesita colocar refuerzo por cortante.

La sección transversal del elemento se verifica apropiada, puesto que

$$\phi(V_c + 0.66\sqrt{f'_c}b_wd) = 321.16\text{ kN}$$

lo que es ampliamente superior a  $V_d = 27.27\text{ kN}$

Ante la presente situación, lo que corresponde de acuerdo a la NEC 2015, es colocar el refuerzo mínimo recomendado, utilizando la sección transversal mínima como se recomienda en la sección 2.3.4.



#### Nota: Requisitos de funcionamiento

En los ejemplos que se presentan en esta sección se omite a propósito la revisión de requisitos de funcionamiento con el objetivo de beneficiar el entendimiento de la hipótesis de diseño y su aplicación.

#### **Ejemplo** 4.3 *Diseño de una viga simplemente armada biempotrada.*

Diseñar el acero de refuerzo por flexión para una viga de sección rectangular de 250 mm de base y 450 mm de alto, que debe construirse con hormigón de  $f'_c = 28\text{ MPa}$  y acero de  $f_y = 420\text{ MPa}$ . La viga se extiende en voladizo en uno de sus extremos por una longitud de 2.50 metros. Sobre la viga se extiende de manera uniforme una carga viva total de 4.8 kN/m y una carga muerta total de 6.5 kN/m en la que se incluye el peso propio del

elemento.

**Solución:** La viga tiene la misma sección transversal que en el Ejemplo 4.1, donde  $h = 450 \text{ mm}$ ,  $b = 250 \text{ mm}$ , y  $d = 390 \text{ mm}$ .

**1. Evaluación de cargas:** En el presente ejemplo no es necesaria la evaluación de cargas, puesto que en el enunciado ya se menciona cargas totales, incluyendo el peso propio del elemento, debiendo tan solo proceder a la mayoración.

Carga muerta total  $D = 6.5 \text{ kN/m}$

Carga viva total  $L = 4.8 \text{ kN/m}$

**2. Determinación de esfuerzos:**

**Carga mayorada:**

$$U = 1.2(6.5) + 1.6(4.8) = 15.48 \text{ kN/m}$$

**Momento negativo en los empotramientos:**

$$M_{u-\text{emp}} = \frac{U\ell^2}{12} = \frac{15.48(7.0)^2}{12} = 63.21 \text{ kN.m}$$

**Momento positivo en el vano:**

$$M_{u-\text{vano}} = \frac{U\ell^2}{24} = \frac{15.48(7.0)^2}{24} = 31.61 \text{ kN.m}$$

**Momento negativo en el volado:**

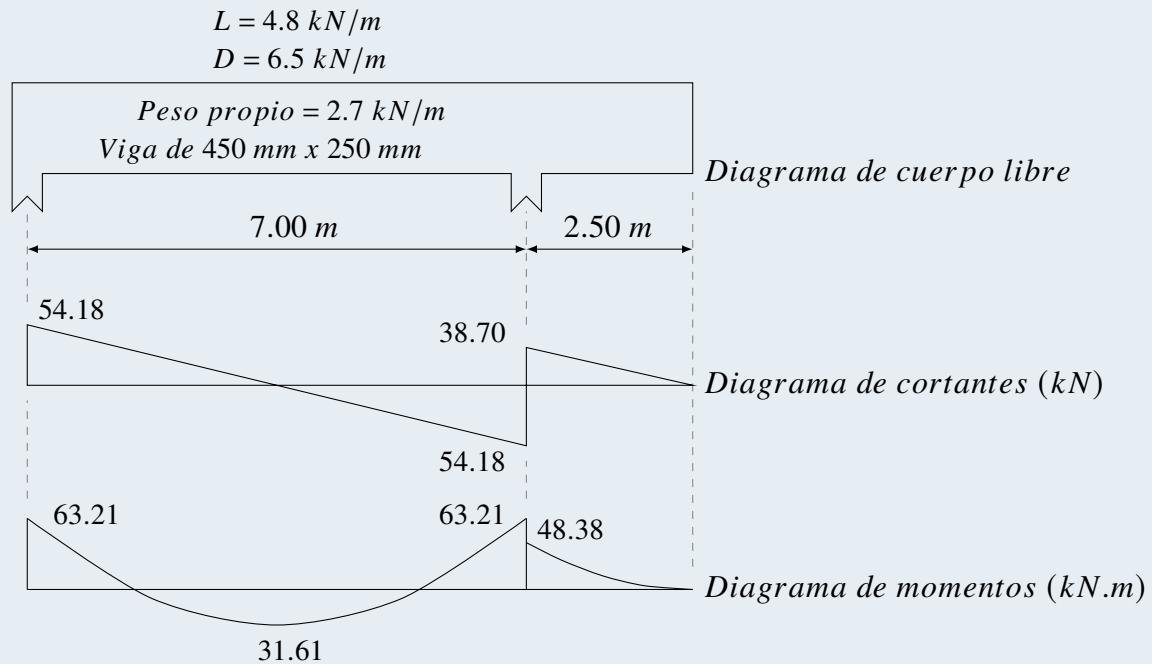
$$M_{u-\text{volado}} = \frac{U\ell^2}{2} = \frac{15.48(2.5)^2}{2} = 48.38 \text{ kN.m}$$

**Cortante en el vano:**

$$V_{u-\text{vano}} = \frac{U\ell}{2} = \frac{15.48(7.0)}{2} = 54.18 \text{ kN}$$

**Cortante en el volado:**

$$V_{u-\text{volado}} = U\ell = 15.48(2.50) = 38.70 \text{ kN}$$

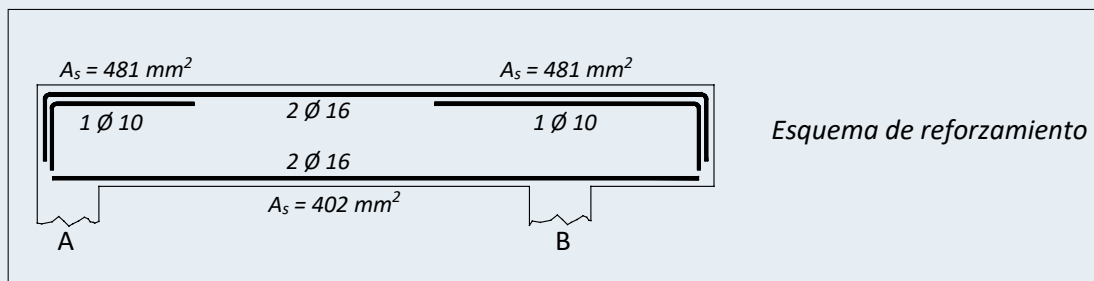


**3. Cálculo del acero de refuerzo:** Para el cálculo del acero de refuerzo se utilizan las mismas ecuaciones que en los ejemplos previos, y los resultados se observan en la tabla adjunta. Debe considerarse que la cuantía definitiva debe ser revisada de tal manera que sea mayor o igual que la mínima reglamentaria, pero menor o igual que la máxima permitida por la norma. En el presente caso, para el momento positivo  $M_{max} = 31.61 \text{ kN.m}$  se obtiene una cuantía de  $0.00224 < \rho_{min} = 0.00333$ , por lo que se adopta la cuantía mínima reglamentaria como cuantía definitiva.

| Momento   | $M_u$<br>(kN.m) | $M_n$<br>(kN.m) | $b$<br>(mm) | $d$<br>(mm) | $R$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $\rho_{def}$ | $A_s$<br>(mm <sup>2</sup> ) |
|-----------|-----------------|-----------------|-------------|-------------|-----------------------------|--------------|-----------------------------|
| $M_{emp}$ | 63.21           | 70.23           | 250         | 390         | 1.84703                     | 0.00458      | 447                         |
| $M_{max}$ | 31.61           | 35.12           | 250         | 390         | 0.92366                     | 0.00333      | 325                         |
| $M_{vol}$ | 48.38           | 53.76           | 250         | 390         | 1.41369                     | 0.00347      | 338                         |

**4. Distribución del acero por flexión:** Previo a la distribución del acero de refuerzo debemos tener en cuenta que la norma exige que a lo largo del elemento se ubiquen por lo menos dos barras cuya sección transversal sea igual o mayor a la sección de acero mínima, tanto en la capa superior, como en la inferior, que para el caso corresponde a  $A_{s,min} = 0.00333(250)(390) = 325 \text{ mm}^2$ , lo que se puede cubrir con dos barras de  $16 \text{ mm}$ . En la tabla se muestra el cálculo del acero de refuerzo para cada sección de viga acorde al momento calculado, luego de haber verificado que la cuantía cumpla con la mínima requerida por reglamento. En el apoyo A tenemos un momento negativo de  $63.21 \text{ kN.m}$  al que corresponde  $447 \text{ mm}^2$  de refuerzo, el mismo que se deberá colocar en la parte superior del elemento, mientras que en el apoyo B se deberá escoger el mayor

valor calculado correspondientes a los momentos que concurren a la sección, que para el caso también corresponde a  $447 \text{ mm}^2$ . En el claro se produce un momento positivo de  $31.61 \text{ kN.m}$ , resultando un área de refuerzo de  $325 \text{ mm}^2$ , que deberá colocarse en la parte inferior del elemento.



En la Figura se muestra un esquema de reforzamiento en el que las áreas de acero no coinciden con las reportadas en la tabla de cálculos de áreas de refuerzo. Esto se debe a que el arreglo de barras debe conformarse con los diámetros de acero que existen comercialmente, consiguiendo que la combinación de áreas individuales sumadas sean iguales o superiores a las requeridas en cada sección de viga. Debe anotarse que el esquema de reforzamiento que se presenta no tiene porque ser el único, se podrían presentar otras combinaciones de diámetros acorde a la conveniencia del diseñador, y en concordancia con la establecido en la sección 2.3.2. En este ejemplo se omite el diseño de refuerzo por cortante.

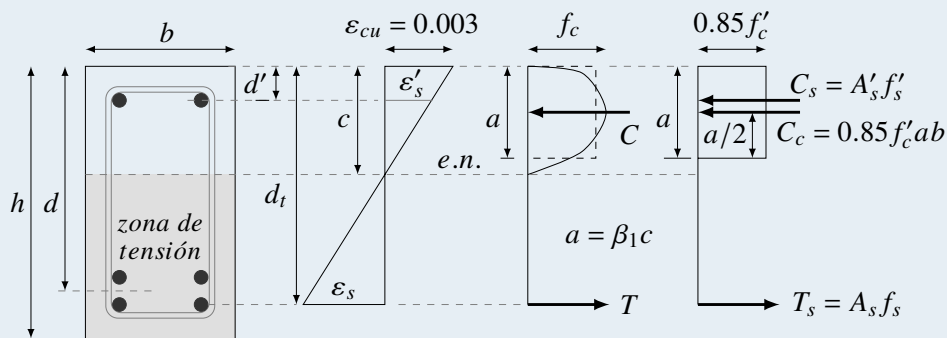
#### 4.1.2. Vigas doblemente armadas

Generalmente el ingeniero diseña vigas simplemente armadas basándose en una sección transversal óptima que le permita mantener la cuantía de refuerzo dentro de un rango admisible en lo técnico y económico. En ocasiones no poco frecuentes, el diseñador no tiene la opción de decidir sobre la sección transversal de la viga, sino que debe aceptar una sección predeterminada por restricciones arquitectónicas, que limitan la altura del elemento. En muchas de estas ocasiones será necesario reforzar el elemento por flexión y compresión, resultando en lo que se denomina una viga doblemente armada, como la que se representa en la Figura 2.3.

#### **Ejemplo** 4.4 Diseño de una viga doblemente armada sobre apoyos simples.

Diseñar el acero de refuerzo para una viga de hormigón armado simplemente apoyada, sobre la cual existen cargas repartidas de manera uniforme que provocan un momento último máximo de  $M_u = 950 \text{ MN.mm}$ . La viga tiene una sección transversal de  $b = 350 \text{ mm}$ , y  $h = 750 \text{ mm}$  y se construirá con hormigón de peso normal, cuya resistencia cilíndrica a la compresión los 28 días es de  $f'_c = 25 \text{ MPa}$ , y acero de refuerzo con límite

de fluencia de  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . En la siguiente se representa la sección transversal de la viga en relación a los esfuerzos y deformaciones que la misma resiste.



**Solución:**

**1. Evaluación de cargas:** En el presente caso, la evaluación de cargas se ha realizado previamente, entregándose como dato el momento último máximo, que tratándose de una viga simplemente apoyada, con cargas repartidas de manera uniforme, el mismo se ubica al centro del vano.

Tratándose de una viga relativamente grande que soporta un gran momento, es posible que se necesite colocar el refuerzo a doble capa. Bajo estas condiciones, respetando un recubrimiento mínimo de  $r = 40 \text{ mm}$ , utilizando estribos con diámetro de  $10 \text{ mm}$ , y asumiendo acero de refuerzo de  $25 \text{ mm}$ , resultan los datos incluidos en la tabla de datos del ejercicio.

**2. Cálculo del acero de refuerzo:** Inicialmente se considera como si la viga fuera de tipo simplemente armada, utilizando la máxima cuantía permisible. Si con el refuerzo que se obtenga utilizando la máxima cuantía se logra obtener un momento igual o mayor al requerido, la viga se puede considerar como simplemente armada, en caso contrario se debe diseñar una viga doblemente armada. En nuestro caso, conociendo que  $\rho_{max} = 0.5\rho_b$ , y conociendo que  $\beta_1 = 0.85$  para  $f'_c = 25 \text{ MPa}$ , obtenemos:

$$\rho_{max} = 0.5 \left( 0.51 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \right) = 0.5 \left( 0.51 (0.85) \left( \frac{25}{420} \right) \right) = 0.01290$$

lo que reemplazado en la ecuación 3.14 obtenemos el valor de  $R_{max}$ , que aplicado en  $M_u = \phi R b d^2$ , nos permite obtener el máximo momento que se puede obtener con la cuantía máxima.

$$R_{max} = \rho_{max} f_y \left( 1 - 0.59 \rho_{max} \frac{f_y}{f'_c} \right)$$



$$R_{max} = 0.01290(420) \left( 1 - 0.59(0.01290) \left( \frac{420}{25} \right) \right) = 4.72523 \text{ N/mm}^2$$

$$M_{u1} = 0.9(4.72523)(350)(662.5)^2 = 653,288,889 \text{ N.mm} = 653.29 \text{ MN.mm}$$

y considerando que para el cálculo de  $M_{u1}$  estamos utilizando la cuantía máxima, podemos decir que  $A_{s1} = \rho_{max}bd = 2,991 \text{ mm}^2$

Puesto que  $M_{u1} < M_u$ , se debe diseñar una viga doblemente armada.

#### **Tabla de datos: Ejemplo 4.4**

|                                                     |           |
|-----------------------------------------------------|-----------|
| Altura de viga, $h$                                 | 750 mm    |
| Base de viga, $b$                                   | 350 mm    |
| Momento último máximo, $M_u$                        | 950 MN.mm |
| Resistencia a la compresión del concreto, $f'_c$    | 25 MPa    |
| Límite de fluencia del acero, $f_y$                 | 420 MPa   |
| Recubrimiento, $r$                                  | 40 mm     |
| Diámetro del estribo, $\phi_{est}$                  | 10 mm     |
| Diámetro de refuerzo asumido, $\phi$                | 25 mm     |
| Distancia al centroide del acero a tracción, $d$    | 662.5 mm  |
| Distancia al centroide del acero a compresión, $d'$ | 62.5 mm   |

Revisando la sección 2.1, aplicando la ecuación 2.14, tenemos que:

$$M_{u2} = M_u - M_{u1} = 950.00 - 653.29 = 296.71 \text{ MN.mm}$$

y conociendo que  $M_{u2} = \phi M_{n2} = \phi A'_s f_y (d - d')$ , podemos obtener la cantidad de refuerzo requerida para  $M_{u2}$ :

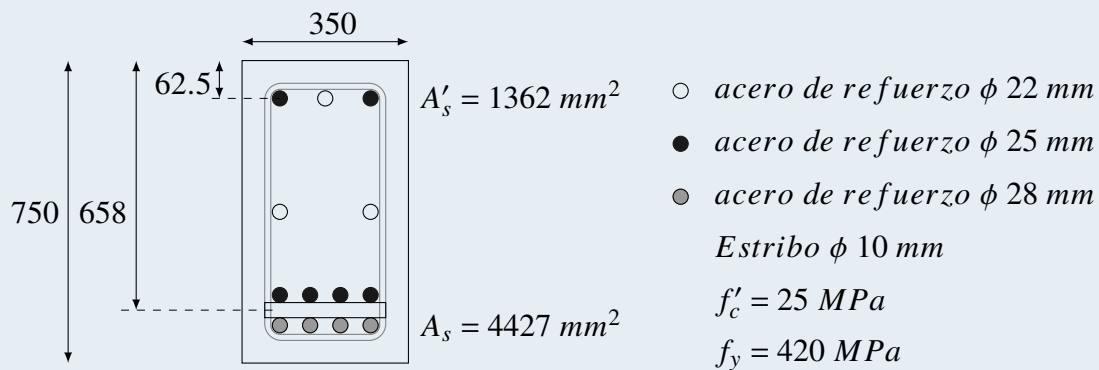
$$A'_s = \frac{M_{u2}}{\phi f_y (d - d')} = \frac{296.71(10)^6}{0.9(420)(662.5 - 62.5)} = 1308 \text{ mm}^2$$

puesto que  $A'_s = A_{s2}$ , el refuerzo requerido para la sección transversal de la viga sometida a compresión resulta igual a  $1,308 \text{ mm}^2$ , que se puede obtener con un arreglo de 2 barras de 25 mm más una barra de 22 mm, para obtener un área total de  $1,362 \text{ mm}^2$ .

**3. Distribución del refuerzo:** Considerando que  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$ , el refuerzo requerido a tracción será  $A_s = 2,991 + 1,308 = 4,299 \text{ mm}^2$ , lo que se puede lograr con una arreglo de barras en dos capas, cuatro barras de 25 mm en la primera capa, y cuatro barras de 28 mm en la segunda capa, resultando una sección total de acero sometido a tracción

de  $4,427 \text{ mm}^2$ , que supera a la sección de refuerzo requerido. En la siguiente figura se muestra la distribución del acero de refuerzo propuesto.

Una vez calculadas las áreas de refuerzo y distribuidas las barras, debe verificarse que se cumplan las normas de servicio, tales como recubrimientos y separaciones mínimas entre barras y la longitud del gancho sísmico. Se observa además que debido a la altura de la viga, se coloca barras adicionales a la mitad de la altura de la viga. Aunque la normativa no lo especifica (lo exige a partir de 90 cm de peralte), en vigas relativamente esbeltas con fuertes cargas de servicio, es una buena costumbre colocar acero en las caras laterales del elemento, de tal manera que evite el pandeo a causa de posibles excentricidades de carga que podrían causar torsión (el acero en la cara lateral de la viga se calcula en vigas bajo esfuerzos de torsión).



Se verifica también el acero de refuerzo mínimo requerido por Reglamento, que para nuestro caso resulta inferior al efectivamente colocado.

$$A_{s(\min)} = \rho_{\min} b d = 0.00333(350)(662.5) = 772 \text{ mm}^2.$$

Otro punto que observar es la ubicación de un refuerzo con diámetro diferente al asumido. En este caso, se asumió barras de 25 mm de diámetro, pero la barra utilizada en la capa de refuerzo inferior es de 28 mm, y considerando que la separación entre barras debe ser al menos 25 mm o el diámetro de barra mayor, se colocará un separador de 25 mm, lo que cambia el peralte efectivo de 662.5 mm a 658 mm, alterando el cálculo del refuerzo. Sin embargo, al revisar los cálculos con  $d = 658 \text{ mm}$ , el refuerzo resultante es igual al calculado inicialmente, por lo que no se necesita cambio alguno.

**4. Verificación de ductilidad:** En una viga simplemente armada generalmente la cuantía de refuerzo utilizada siempre está por debajo de la cuantía máxima, asegurándonos que la viga falle por fluencia del acero. En vigas doblemente armadas podría presentarse el caso de que estemos sobrerreforzando el elemento, por lo que la viga no fallaría de manera dúctil, sino de manera frágil, lo que va en contra de la hipótesis de diseño. Como se vio en

la sección 1.4, el factor de reducción de resistencia para elementos que utilizan estribos como refuerzo transversal es apropiado siempre y cuando se cumpla con el rango de deformaciones establecidos en la tabla 1.4, donde se acepta que  $\epsilon_{ty} = 0.002$  para acero con límite de fluencia  $f_y = 420$  MPa.

Para nuestro caso, considerando que la deformación de tensión se mide desde la fibra extrema a compresión hasta el centroide de la capa de refuerzo más próxima a la fibra en tensión, tenemos que  $d_t = 686$  mm, valor que se debe utilizar para el cálculo de deformación por tensión.

$$a = \frac{(A_s - A'_s)f_y}{0.85f'_c b} = \frac{(4,427 - 1,362)(420)}{0.85(25)(350)} = 173.1 \text{ mm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{173.1}{0.85} = 203.6 \text{ mm}$$

$$\epsilon_s = \frac{0.003(d - c)}{c} = \frac{0.003(686 - 203.6)}{203.6} = 0.0071$$

$$\epsilon'_s = \frac{0.003(c - d')}{c} = \frac{0.003(203.6 - 62.5)}{203.6} = 0.0021$$

En la zona sometida a tracción tenemos que la deformación unitaria alcanza 0.0071 que es mayor a  $\epsilon_{ty} + 0.003$ , lo que garantiza que el acero de refuerzo está fluyendo, por lo que el factor  $\phi = 0.9$  está correctamente aplicado. Para la zona sometida a compresión, la deformación unitaria resultó 0.0021, que corresponde a la fibra controlada por compresión.

### Falla dúctil

La filosofía del diseño del hormigón armado establece que los elementos estructurales deben ser diseñados de tal manera, que si por alguna razón tienen que fallar, la falla que se produzca debe ser de carácter dúctil, por lo cual es necesario realizar la revisión por ductilidad de todos los elementos diseñados.

### Ejemplo 4.5 Diseño de una viga doblemente armada biempotrada.

Diseñar el acero de refuerzo por flexión y corte para una viga de hormigón armado biempotrada, sustentada por dos columnas de 400 mm x 400 mm. Sobre la viga se extiende de manera uniforme una carga viva de 60 kN/m, y una carga muerta de 120 kN/m en la que no está incluido el peso propio del elemento. La viga tiene una sección transversal constante de  $b = 350$  mm, y  $h = 750$  mm y se construirá con hormigón de peso normal, cuya resistencia cilíndrica a la compresión los 28 días es de  $f'_c = 25$  MPa, y acero de

refuerzo con límite de fluencia de  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . En la figura siguiente se representa el elemento y los esfuerzos a los que está sometida, y en la tabla de datos del ejercicio se incluyen los datos de trabajo.

**Solución:**

**1. Evaluación de cargas:** La carga muerta se establece mediante la suma de la carga muerta externa más el peso propio del elemento ( $w_c = 24 \text{ kN/m}^3$ ), por lo que tenemos:

$$\text{Peso lineal de la viga} = (0.35)(0.75)(24) = 6.30 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga muerta total, } D = 120.0 + 6.30 = 126.30 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga viva total, } L = 60.0 \text{ kN/m}$$

**2. Determinación de esfuerzos:** Los esfuerzos a los que está sometida la viga están representados en la figura siguiente.

**Carga mayorada:**

$$U = 1.2(126.30) + 1.6(60.0) = 247.56 \text{ kN/m}$$

**Momento negativo en los empotramientos:**

$$M_{u-\text{emp}} = \frac{U\ell^2}{12} = \frac{247.56(7.0)^2}{12} = 1,010.87 \text{ kN.m}$$

**Momento positivo en el vano:**

$$M_{u-\text{vano}} = \frac{U\ell^2}{24} = \frac{247.56(7\text{m})^2}{24} = 505.44 \text{ kN.m}$$

**Momento negativo en el volado:**

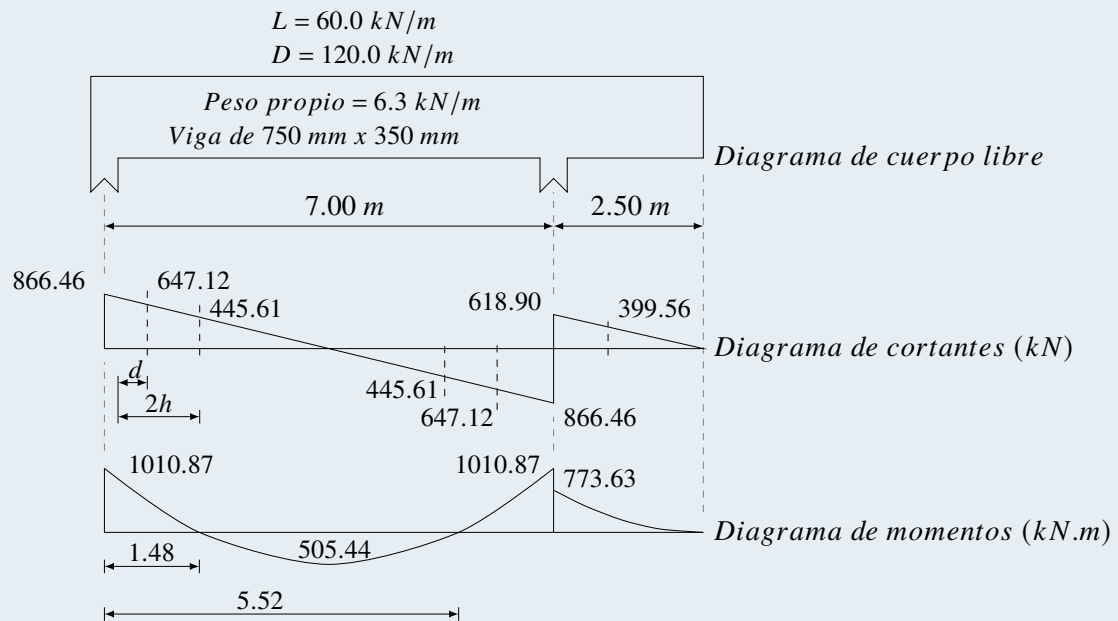
$$M_{u-\text{volado}} = \frac{U\ell^2}{2} = \frac{247.56(2.5)^2}{2} = 773.63 \text{ kN.m}$$

**Cortante en el vano:**

$$V_{u-\text{vano}} = \frac{U\ell}{2} = \frac{247.56(7.0)}{2} = 866.46 \text{ kN}$$

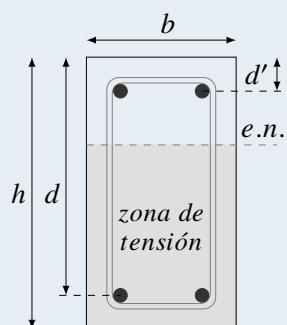
**Cortante en el volado:**

$$V_{u-\text{volado}} = U\ell = 247.56(2.50) = 618.90 \text{ kN}$$

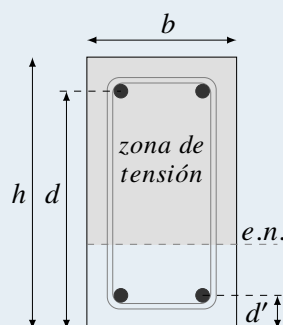


### 3. Diseño por flexión:

a) **Cálculo del acero de refuerzo para momento máximo en el empotramiento:** Tal como en el ejercicio previo, inicialmente se considera como si la viga fuera de tipo simplemente armada, utilizando la máxima cuantía permisible. A diferencia de lo que sucede con una viga simplemente apoyada con carga uniforme cuyo momento máximo es positivo y se localiza al centro del vano, en este caso, tratándose de una viga biempotrada, el momento máximo es negativo y se localiza en el empotramiento. Como se lo ilustra en la siguiente figura, para un momento positivo la zona de tracción se encuentra en la parte inferior de la viga, mientras que para un momento negativo, la zona de tracción se encuentra en la parte superior de la viga.



Sección de viga en área de momento positivo



Sección de viga en área de momento negativo

De manera similar al ejercicio anterior, en este caso conocemos  $\rho_{max} = 0.5\rho_b$ , y conociendo que  $\beta_1 = 0.85$  para  $f'_c = 25 \text{ MPa}$ , obtenemos:

$$\rho_{max} = 0.5 \left( 0.51 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \right) = 0.5 \left( 0.51 (0.85) \frac{25}{420} \right) = 0.01290$$

lo que reemplazado en la ecuación 3.14 nos da el valor de  $R_{max}$ , que aplicado en  $M_u = \phi R b d^2$ , nos permite obtener el máximo momento que se puede obtener con la cuantía máxima.

$$R_{max} = \rho_{max} f_y \left( 1 - 0.59 \rho_{max} \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

$$R_{max} = 0.01290 (420) \left( 1 - 0.59 (0.01290) \frac{420}{25} \right) = 4.72523 \text{ N/mm}^2$$

$$M_{u1} = 0.9 (4.72523) (350) (659.5)^2 = 647,385,706 \text{ N.mm} = 647.39 \text{ MN.mm}$$

y considerando que para el cálculo de  $M_{u1}$  estamos utilizando la cuantía máxima, podemos decir que  $A_{s1} = \rho_{max} b d = 2978 \text{ mm}^2$ .

Puesto que  $M_{u1} < M_u$ , se debe diseñar una viga doblemente armada.

#### Tabla de datos: Ejemplo 4.5

|                                                            |                      |
|------------------------------------------------------------|----------------------|
| Altura de viga, $h$                                        | 750 mm               |
| Base de viga, $b$                                          | 350 mm               |
| Carga muerta, $D$                                          | 120 kN/m             |
| Carga Viva, $L$                                            | 60 kN/m              |
| Peso unitario del concreto, $w_c$                          | 24 kN/m <sup>3</sup> |
| Resistencia a la compresión del concreto, $f'_c$           | 28 MPa               |
| Límite de fluencia del acero, $f_y$                        | 420 MPa              |
| Recubrimiento, $r$                                         | 40 mm                |
| Diámetro del estribo, $\phi_{est}$                         | 10 mm                |
| Diámetro de refuerzo asumido, $\phi$                       | 25 mm                |
| Distancia al centroide del acero a tracción (1 capa), $d$  | 686.0 mm             |
| Distancia al centroide del acero a tracción (2 capas), $d$ | 659.5 mm             |
| Distancia al centroide del acero a compresión, $d'$        | 64.0 mm              |

Revisando la sección 2.1, aplicando la ecuación 2.14, tenemos que:

$$M_{u2} = M_u - M_{u1} = 1,010.87 - 647.39 = 363.48 \text{ MN.mm}$$

y conociendo que  $M_{u2} = \phi M_{n2} = \phi A'_s f_y (d - d')$ , podemos obtener la cantidad de refuerzo requerida para  $M_{u2}$ :

$$A'_s = \frac{M_{u2}}{\phi f_y (d - d')} = \frac{363.48(10)^6}{0.9(420)(659.5 - 64.0)} = 1,615 \text{ mm}^2$$

puesto que  $A'_s = A_{s2}$ , el refuerzo requerido para la sección transversal de la viga sometida a compresión resulta igual a  $1615 \text{ mm}^2$ , que se puede obtener con un arreglo de 2 barras de 28 mm más una barra de 25 mm, para obtener un área total de  $1722 \text{ mm}^2$ .

En consecuencia, si  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$ , se obtiene  $A_s = 2,978 + 1,615 = 4,593 \text{ mm}^2$ , que corresponde al acero de refuerzo por tracción en la sección analizada. El área de  $4,593 \text{ mm}^2$  se obtiene con un arreglo de 6 barras de 28 mm más dos barras de 25 mm, resultando un área final de  $4,676 \text{ mm}^2$

**b) Cálculo del acero de refuerzo para momento máximo en el centro del vano:** En este caso, se debe considerar que la zona de tracción está en la parte inferior de la sección transversal. Iniciamos considerando que la viga es simplemente armada, utilizando la máxima cuantía permisible. Puesto que se mantiene las cualidades de los materiales y la geometría no ha cambiado, se verifica que  $\rho_{max} = 0.01290$ , y  $R_{max} = 4.72523 \text{ N/mm}^2$ , con lo que se obtiene un momento último de  $M_{u(max)} = 647.39 \text{ MN.mm} > M_u = 505.44 \text{ MN.mm}$ , por lo que el refuerzo se calcula como viga simplemente armada. En este caso, a partir del momento requerido, es necesario calcular  $R$  para encontrar el valor de la cuantía requerida. Adicionalmente se debe considerar que puesto que se trabaja como viga simplemente armada, es probable que se necesite solo una capa de refuerzo, lo que hace que el peralte efectivo aumente a  $d = 686.0 \text{ mm}$ .

$$R = \frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{505.44(10)^6}{0.9(350)(686.0)^2} = 3.40966 \text{ N/mm}^2$$

que reemplazando en la ecuación 3.14 tenemos:

$$3.40966 = \rho(420) \left( 1 - 0.59\rho \frac{420}{25} \right)$$

y resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene:

$$\rho = 0.00890$$

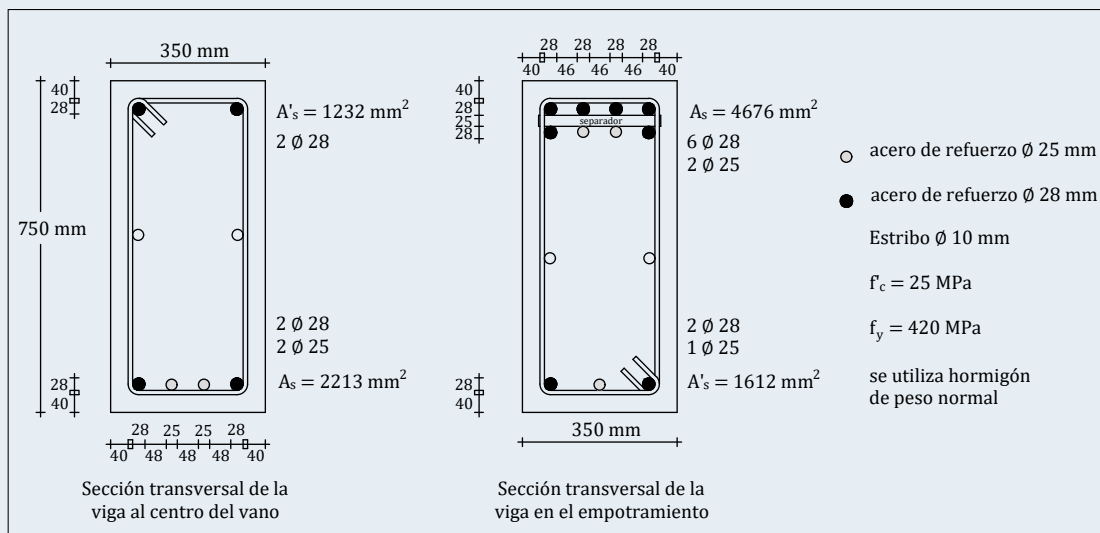
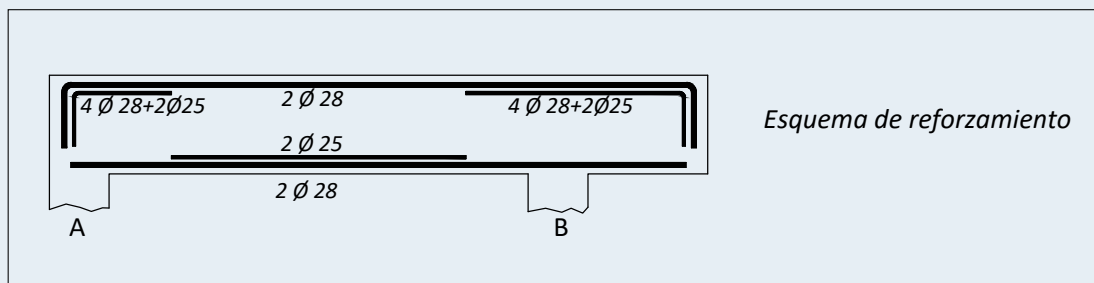
que resulta mayor que la cuantía mínima y menor que la cuantía máxima, por lo que se acepta el diseño.

Recordando que  $\rho = A_s/bd$ , podemos obtener la cantidad de acero de refuerzo requerida:

$$A_s = \rho b d = 0.00890(350)(686.0) = 2,054 \text{ mm}^2$$

lo que se puede obtener con un arreglo de  $2\phi 28$ , más  $2\phi 25$ , para dar una sección final de  $2,213 \text{ mm}^2$ .

**4. Distribución del refuerzo por flexión:** Una vez calculadas las secciones de refuerzo requeridas para absorber los esfuerzos en cada sección de la viga, es necesario buscar los diámetros más convenientes de barras, de tal manera que se puedan combinar adecuadamente para alcanzar una sección lo más próxima a la calculada, y adicionalmente que permita arreglar las barras manteniendo el distanciamiento y recubrimiento adecuando. En la siguiente figura se representa el arreglo de refuerzos sugeridos.



#### 5. Diseño por cortante:

El diseño por cortante lo iniciamos verificando que la sección transversal de la viga sea apropiada para soportar esfuerzos de corte, para lo cual el reglamento establece que:

$$V_u \leq \phi \left( V_c + 0.66 \sqrt{f'_c} b_w d \right)$$



El cálculo de  $V_c$  resulta

$$V_c = 0.17\lambda\sqrt{f'_c}b_wd = 0.17(1.0)\sqrt{28}(350)(686) = 215.98 \text{ kN}$$

y considerando  $V_u = 647.12 \text{ kN}$ , se verifica que efectivamente la sección transversal escogida es apropiada, puesto que

$$\phi(V_c + 0.66\sqrt{f'_c}b_wd) = 790.88 \text{ kN}$$

Para que el diseño por cortante sea apropiado debe cumplirse que  $\phi V_n \geq V_u$ , y considerando  $V_n = V_c + V_s$ , resulta

$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi}$$

y puesto que el esfuerzo cortante que absorbe el refuerzo es

$$V_s = \frac{A_v f_{yt} d}{s}$$

la separación entre estribos para cubrir el esfuerzo cortante requerido se calcula con

$$s = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_u - \phi V_c}$$

Considerado estribos  $\phi = 10$ , se tiene  $A_v = 157 \text{ mm}^2$ .

a) Estribos a la distancia  $d = 0.686 \text{ m}$  a partir de la cara del apoyo;  $V_d = 647.12 \text{ kN}$

$$s = \frac{0.75(157)(420)(686)}{647120 - 0.75(215980)} = 69.9 \text{ mm}$$

b) Estribos a la distancia  $2h = 1.50 \text{ m}$  a partir de la cara del apoyo;  $V_{2h} = 445.61 \text{ kN}$

$$s = \frac{0.75(157)(420)(686)}{445610 - 0.75(215980)} = 119.6 \text{ mm}$$

c) A la distancia  $x = 2.33 \text{ m}$  a partir de la cara de la columna, teóricamente ya no se necesita refuerzo por cortante, puesto que  $V_u = V_c$ .

d) Distribución de estribos: El refuerzo por cortante está limitado por norma a distancias máximas:

- En una longitud de confinamiento igual a  $2h$  medida a partir de la cara del apoyo, la que sea menor:
  - $d/4 = 171.5 \text{ mm}$
  - 6 veces el diámetro menor del refuerzo longitudinal  $150 \text{ mm}$
  - $200 \text{ mm}$
- para la restante longitud del elemento
  - $d/2 = 343 \text{ mm}$

Adicionalmente, a  $2.97 \text{ m}$  medido a partir de la cara de la columna, donde  $V_u > 0.5\phi V_c$ , debe colocarse un área mínima de refuerzo por corte, la que sea mayor de:

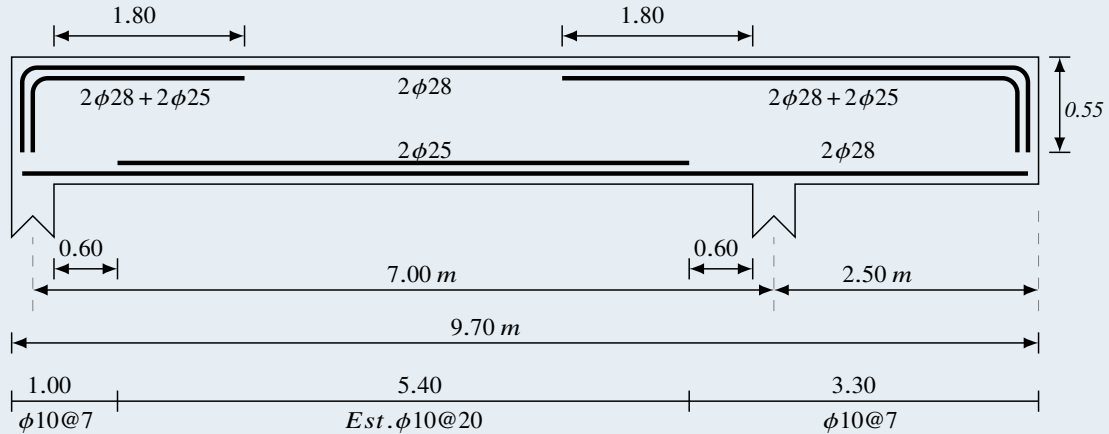
$$\frac{A_{v,min}}{s} = 0.062 \sqrt{f'_c} \frac{b_w}{f_{yt}} \qquad \frac{A_{v,min}}{s} = 0.035 \frac{b_w}{f_{yt}}$$

que para el caso resulta en una separación mucho más grande que las previamente calculadas.

**6. Funcionamiento:** En cuanto al funcionamiento, en el numeral 4 se revisó la separación entre barras, debiéndose verificar las longitudes de desarrollo ( $\ell_d$ ), y anclaje ( $\ell_a$ ), las mismas que se calculan de manera simplificada usando las expresiones de la tabla 2.8 de la sección 2.3.7, que para nuestro caso resultan:

- para barras  $\phi = 25 \text{ mm}$ ,  $\ell_d = 1167 \text{ mm}$ 
  - en momento positivo  $\ell_a = 686 \text{ mm}$
  - en momento negativo  $\ell_a = 686 \text{ mm}$
- para barras  $\phi = 28 \text{ mm}$ ,  $\ell_d = 1307 \text{ mm}$ 
  - en momento positivo  $\ell_a = 686 \text{ mm}$
  - en momento negativo  $\ell_a = 686 \text{ mm}$

Para el presente caso es necesario también calcular el desarrollo de ganchos estándar en tracción  $\ell_{dh}$ , de acuerdo a lo establecido en la sección 2.3.7.



### 7. Verificación de ductilidad:

Como se vio en la sección 1.4, el factor de reducción de resistencia para elementos que utilizan estribos como refuerzo transversal es apropiado siempre y cuando se cumpla con el rango de deformaciones establecidos en la tabla 1.4, donde se acepta que  $\epsilon_{ty} = 0.002$  para acero con límite de fluencia  $f_y = 420$  MPa.

En nuestro caso, para la sección de empotramiento resulta:

$$a = \frac{(A_s - A'_s)f_y}{0.85f'_c b} = \frac{(4,676 - 1,722)(420)}{0.85(25)(350)} = 166.8 \text{ mm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{166.8}{0.85} = 196.2 \text{ mm}$$

$$\epsilon_s = \frac{0.003(d - c)}{c} = \frac{0.003(686 - 196.2)}{196.2} = 0.00749$$

$$\epsilon'_s = \frac{0.003(c - d')}{c} = \frac{0.003(196.2 - 64.0)}{196.2} = 0.00202$$

En la zona sometida a tracción resulta que  $\epsilon_t = 0.00749 > (\epsilon_{ty} + 0.003)$ , lo que garantiza que el acero de refuerzo está fluyendo, por lo que el factor  $\phi = 0.9$  está correctamente aplicado. Para la zona sometida a compresión, la deformación unitaria resultó 0.00202, que corresponde a la fibra controlada por compresión.

Para la sección de la viga al centro del vano se considera solo el acero calculado para resistir el momento positivo, el mismo que su ubica en la parte inferior de la sección. El acero ubicado en la parte superior de la sección transversal corresponde al requerimiento de la Norma [2] de colocar al menos 2 barras con la cuantía mínima, por lo que resulta:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{2,213(420)}{0.85(25)(350)} = 125.0 \text{ mm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{125.0}{0.85} = 147.0 \text{ mm}$$

$$\epsilon_s = \frac{0.003(d - c)}{c} = \frac{0.003(686 - 147.0)}{147.0} = 0.0110$$

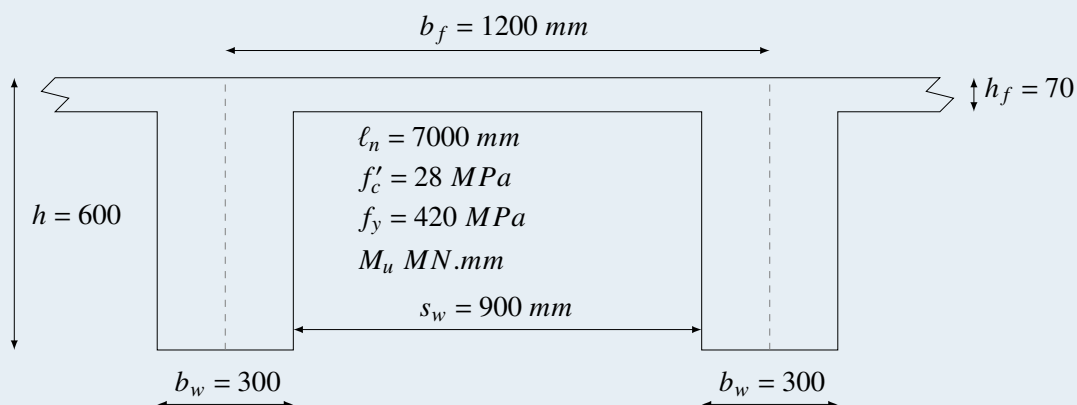
En la zona sometida a tracción tenemos que la deformación unitaria alcanza 0.0110 que es mayor a  $\epsilon_{ty} + 0.003 = 0.005$ , lo que garantiza que el acero de refuerzo está fluyendo, por lo que el factor  $\phi = 0.9$  está correctamente aplicado.

### 4.1.3. Vigas tipo Tee

Las vigas tipo *T* ocurren de manera aislada o como parte de un sistema de piso. La principal característica que las distingue de una viga de sección rectangular, es la contribución a resistir momentos proporcionada por las alas de la viga (patín). Esta contribución dependerá de la profundidad a la que se ubique el eje neutro de la sección transversal de la viga.

#### **Ejemplo** 4.6 *Diseño de viga T simplemente apoyada.*

Una losa maciza de hormigón armado de 70 mm de espesor, que forma parte de un piso, está soportada por vigas de 300 mm x 600 mm, como se observa en la figura. Las vigas tienen una longitud de 7000 mm y están separadas 1200 mm entre sus ejes. Para la construcción de los elementos se usará hormigón con una resistencia cilíndrica a los 28 días de  $f'_c = 28 \text{ MPa}$ , y acero con límite de fluencia de  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . Al estar simplemente apoyadas, las vigas soportan al centro del vano un momento último de  $M_u = 900 \text{ MN}\cdot\text{mm}$ . Se debe diseñar el acero de refuerzo para las vigas que dan soporte de la losa.



#### **Solución**

**1. Evaluación de cargas:** Previo al diseño de cualquier estructura, es necesario realizar

la evaluación de cargas y el cálculo de esfuerzos a los que el elemento está sometido. En este ejemplo, por brevedad del ejercicio, omitimos este proceso entregando como dato el momento máximo que ocurre al centro del vano de la viga. Otras consideraciones de inicio son: recubrimiento 40 mm, uso de estribos de 10 mm de diámetro, diámetro de acero de refuerzo asumido de 28 mm. Adicionalmente, si consideramos el fuerte momento que soporta la viga, es probable que necesitemos ubicar acero de refuerzo en doble capa, por lo que trabajamos inicialmente con un peralte efectivo  $d = 509.5$  mm.

**2. Cálculo del acero de refuerzo:** Una viga de sección  $T$  tiene dos formas de diseñarse: como sección rectangular, o como sección  $T$ . La decisión depende de la ubicación del eje neutro, por lo que como primer paso se debe verificar la profundidad a la que está ubicado el eje neutro.

Puesto que no conocemos la ubicación del eje neutro, el primer tanteo lo realizamos como si se tratara de una viga de sección rectangular, tomando en consideración el peralte asumido y la separación entre vigas, de la hipótesis de diseño podemos calcular el índice de refuerzo por flexión, y la cuantía de acero con la que podremos encontrar la profundidad del eje neutro.

$$R = \frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{900(10)^6}{0.9(1,200)(509.5)^2} = 3.21019 \text{ N/mm}^2$$

lo que reemplazando en la ecuación 3.14 tenemos:

$$3.21019 = \rho(420) \left( 1 - 0.59\rho \frac{420}{28} \right)$$

y resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene:

$$\rho = 0.00824$$

que resulta mayor que la cuantía mínima y menor que la cuantía máxima, por lo que el diseño sería aceptable.

Recordando que  $\rho = A_s/bd$ , podemos obtener la cantidad de acero de refuerzo requerida:

$$A_s = \rho b d = 0.00824(1,200)(509.5) = 5038 \text{ mm}^2$$

recordando una vez más la hipótesis de diseño, podemos calcular la profundidad del eje

neutro

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c d_f} = \frac{5,038(420)}{0.85(28)(1,200)} = 74.1 \text{ mm}$$

como se verifica, la profundidad del bloque equivalente de compresiones sería mayor que el espesor de la losa, lo que indica que el eje neutro está a una profundidad mayor (87.2 mm), por lo que la viga se comportaría como viga T propiamente dicho.

**3. Verificación de la geometría de viga T:** El Reglamento [3] limita el dimensionamiento de una viga T. En este caso, tratándose de vigas integradas en sistemas de pisos se especifica que el ancho efectivo  $b_f$  del ala debe ser el menor de:

$$b_f = b_w + 2(8h_f) = 300 + 2[8(70)] = 1,420 \text{ mm}$$

$$b_f = b_w + 2(s_w/2) = 300 + 2(900/2) = 1,200 \text{ mm}$$

$$b_f = b_w + 2(\ell_n/8) = 300 + 2(7,000/8) = 2,050 \text{ mm}$$

de lo que resulta que las dimensiones definitivas a considerar en el cálculo son:  $b_f = 1,200 \text{ mm}$ ,  $h_f = 70 \text{ mm}$ ,  $h = 600 \text{ mm}$ , y  $b_w = 300 \text{ mm}$ .

**4. Cálculo del acero de refuerzo:** Por equilibrio, el esfuerzo desarrollado por el concreto en la zona de compresión debe ser igual al esfuerzo desarrollado por el refuerzo en la zona de tracción. Como ya se lo verificó al calcular la profundidad del bloque equivalente de compresiones, el ala de la viga esta sometida a compresión en toda su profundidad, por lo que la compresión que soporta se puede calcular con:

$$C_f = 0.85 f'_c (b_f - b_w) h_f = 0.85(28)(1,200 - 300)(70) = 1,499,400 \text{ N}$$

esta compresión debe ser equilibrada por la tracción desarrollada por una parte del refuerzo

$$T = A_{sf} f_y = C_f = A_{sf}(420)$$

lo que nos da la sección del refuerzo indicada como

$$A_{sf} = \frac{1,499,400}{420} = 3,570 \text{ mm}^2$$

Este par de fuerzas generan un momento nominal  $M_{n1}$

$$M_{n1} = C_f(d - h_f/2) = 1,499,400(509.5 - 70/2) = 711,465,300 \text{ N.mm}$$

y un momento último  $M_{u1}$  de

$$M_{u1} = 0.9M_{n1} = 0.9(711,465,300) = 640,318,770 \text{ N.mm}$$

Puesto que el momento requerido es  $M_u = 900 \text{ MN.mm}$ , se calcula la cantidad restante que debe ser equilibrada por la zona de compresión dentro del alma de la viga, de lo que tenemos:

$$M_{u2} = M_u - M_{u1} = 259,681,230 \text{ N.mm}$$

$$R = \frac{M_{u2}}{\phi b_w d^2} = \frac{259,681,230}{0.9(300)(509.5)^2} = 3.7050 \text{ N/mm}^2$$

$$3.7050 = \rho(420) \left( 1 - 0.59\rho \frac{420}{28} \right)$$

y resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene:

$$\rho = 0.00964$$

con lo que se puede calcular la cantidad de refuerzo para esta zona, la cual es:

$$A_{sw} = A_s - A_{sf} = 0.00964(300)(509.5) = 1473 \text{ mm}^2$$

y la profundidad del bloque equivalente de compresiones resulta:

$$a_w = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} = \frac{0.00964(420)(509.5)}{0.85(28)} = 86.7 \text{ mm} > h_f$$

con lo que se verifica que efectivamente la profundidad del bloque equivalente de compresiones tiene una profundidad mayor al espesor de la losa, por lo que la viga es correctamente diseñada como viga T.

La sección total de acero de refuerzo requerida para momento positivo es

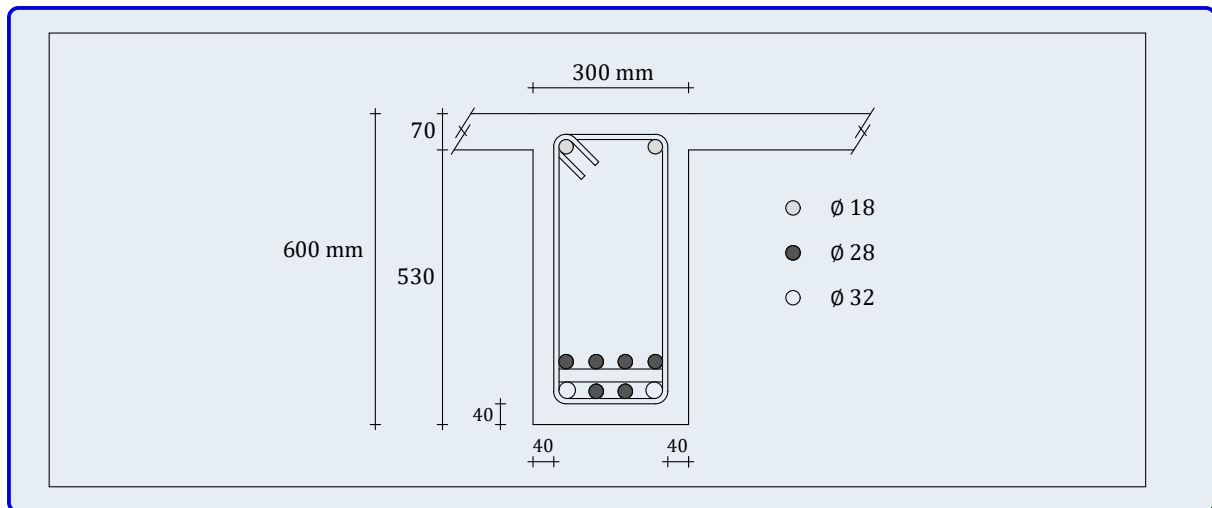
$$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 3,570 + 1,473 = 5,043 \text{ mm}^2$$

Lo que se puede cubrir con  $2\phi 32 + 6\phi 28$ , resultando un área total de  $5303.2 \text{ mm}^2$  colocado en dos capas.

El refuerzo mínimo requerido por reglamento para la capa superior de la viga es

$$A'_s = \rho_{min} b d = 0.00333(300)(509.5) = 509.0 \text{ mm}^2$$

Lo que se puede cubrir con  $2\phi 18$ .

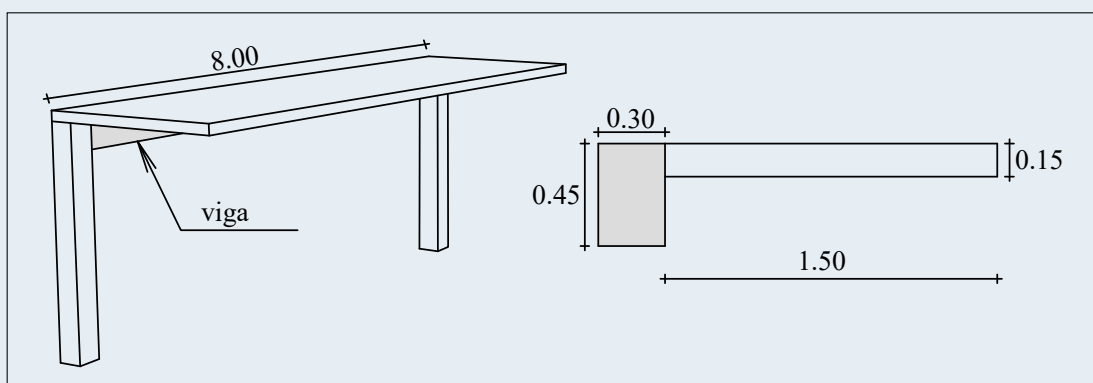


## 4.2. VIGAS SOMETIDAS A TORSIÓN

Una viga sometida a una carga excéntrica, aplicada fuera de su eje longitudinal, debe ser diseñada para resistir esfuerzos de torsión.

### **Ejemplo** 4.7 *Diseño de viga sometida a esfuerzos de torsión*

Se plantea la construcción de una parada de buses con elementos de hormigón armado, la misma que consiste de una viga de 8 m de longitud empotrada en dos columnas de 30 cm de sección, y que da sustento a una cornisa de 1.5 m de ancho y 15 cm de espesor.





**Tabla de datos: Ejemplo 4.7**

|                                                  |                       |
|--------------------------------------------------|-----------------------|
| Altura de viga, $h$                              | 450 mm                |
| Base de viga, $b$                                | 300 mm                |
| Sección de columna                               | 30 cm                 |
| Peso unitario del concreto, $w_c$                | 24 kN/m <sup>3</sup>  |
| Resistencia a la compresión del concreto, $f'_c$ | 35 MPa                |
| Límite de fluencia del acero, $f_y$              | 420 MPa               |
| Recubrimiento, $r$                               | 40 mm                 |
| Carga viva, $CV$                                 | 1.4 kN/m <sup>2</sup> |

**Solución:** En este ejemplo se diseña la viga de 7.70 m, medida a ejes de columnas, que sustenta la losa en voladizo, considerando una sección predefinida de 30 cm x 45 cm que se obtuvo siguiendo las recomendaciones de la norma para dimensiones mínimas. Por claridad del ejemplo, se omite el diseño de la losa, considerándosela solo para la evaluación de cargas.

### 1. Parámetros del material:

$$\rho_{min} = \frac{1.4}{f_y} \geq \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} = 0.00352$$

$$\beta_1 = 0.85 - 0.05 \left( \frac{f'_c - 28}{7} \right) = 0.85 - 0.05 \left( \frac{35 - 28}{7} \right) = 0.8$$

$$\rho_{max} = 0.5\rho_b = 0.5 \left( 0.51\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \right) = b = 0.5 \left( 0.51(0.8) \frac{35}{420} \right) = 0.0170$$

$$R_{max} = \rho_{max} f_y \left( 1 - 0.59 \rho_{max} \frac{f_y}{f'_c} \right) = 0.017(420) \left( 1 - 0.59(0.017) \frac{420}{35} \right) = 6.28 \text{ MPa}$$

Asumiendo acero de refuerzo  $\phi = 18$ , y estribos  $\phi = 10$ , tenemos  $d = 391 \text{ mm}$

### 2. Evaluación de cargas y cálculo de esfuerzos:

La teoría nos dice que los efectos de torsión deben ser combinados con los efectos de flexión y corte que actúan sobre el elemento analizado. En el presente caso, la losa en voladizo causa torsión sobre la viga, y puesto que a lo largo de la viga se mantiene la geometría, se puede considerar que el efecto torsionante será uniforme a lo largo del elemento, por lo que basta evaluar la torsión para una franja de 1 metro de ancho. Para los esfuerzos por corte y flexión, se debe considerar todas las cargas.

La carga mayorada de la losa se considera su peso propio como carga muerta, y la carga viva de  $1.4 \text{ kN/m}^2$

$$U_l = 1.2 (0.15(24)) + 1.6[1.4] = 6.56 \text{ kN/m}^2$$

y la reacción  $R$  que produce la torsión sobre la viga es

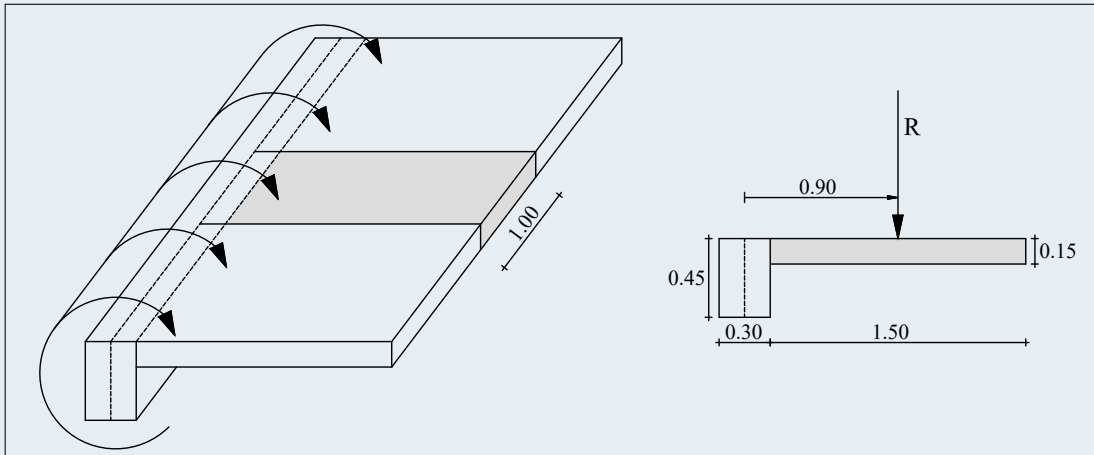
$$R = 6.56[1.0(1.5)] = 9.84 \text{ KN}$$

la reacción  $R$  produce un momento torsor  $T$  con respecto al eje longitudinal de la viga, y por cada metro lineal de viga

$$T = 9.84(0.90) = 8.86 \text{ kN.m/m}$$

lo que produce un momento torsor último  $T_u$  en los extremos del elemento, considerado a ejes de columnas

$$T_u = 8.86 \left( \frac{8.00 - 0.30}{2} \right) = 34.11 \text{ kN.m}$$



Respecto a los esfuerzos por flexión y corte, estos se calculan con la carga total sobre la viga, más la proveniente de la evaluación de la losa.

La carga mayorada  $U_v$  sobre la viga corresponde a su peso propio, más la carga viva en su ancho de 30 cm

$$U_v = 1.2 [0.30(0.45)(24)] + 1.6[0.3(1.4)] = 4.56 \text{ kN/m}$$

y la carga mayorada total  $U$  que actúa sobre la viga corresponde a la carga mayorada

$U_v$ , más la porción de carga que corresponde de la losa  $U_l$ .

$$U = 4.56 \text{ kN/m} + (1.5 \text{ m})(6.56 \text{ kN/m}^2) = 14.40 \text{ kN/m}$$

lo que produce los siguientes esfuerzos

$$M_{u,emp} = \frac{U\ell^2}{12} = \frac{14.40(8.0 - 0.3)^2}{12} = 71.15 \text{ kNm}$$

$$M_{u,max} = \frac{U\ell^2}{24} = \frac{14.40(8.0 - 0.3)^2}{24} = 35.57 \text{ kNm}$$

$$V_u = \frac{U\ell}{2} = \frac{14.40(8.0 - 0.3)}{2} = 55.44 \text{ kN}$$

para la distribución de acero de refuerzo por flexión vamos a necesitar los puntos de

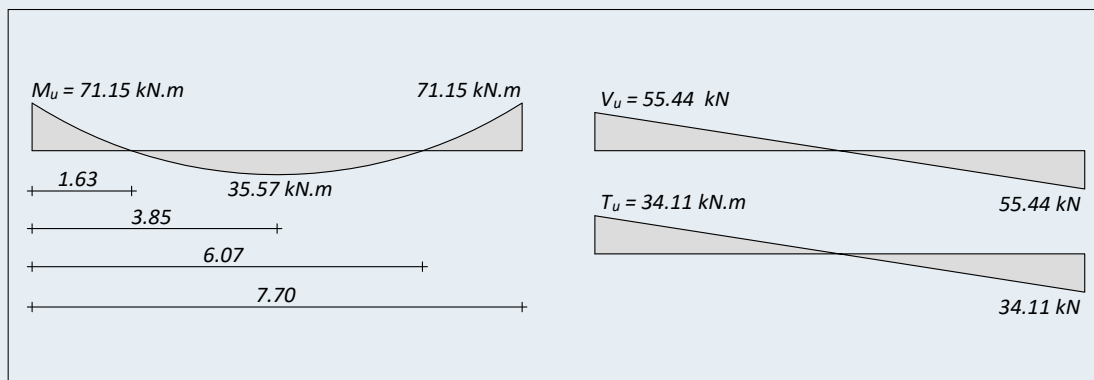
inflexión, los cuales los calculamos igualando a cero la ecuación del momento para un punto a lo largo del eje de la viga

$$M_x = \frac{U}{12} (6\ell_x - \ell^2 - 6x^2)$$

de lo que obtenemos

$$0 = \frac{14.40}{12} (6(7.70)x - (7.70)^2 - 6x^2)$$

y resulta:  $x_1 = 1.63$   $x_2 = 6.07$



### 3. Verificación de la sección transversal de la viga:

**3.a) Verificación por flexión:** Conociendo el momento flector máximo que debe soportar

la viga, utilizamos  $M_n = Rbd^2$ , para a partir del momento último obtener el peralte efectivo  $d$ , requerido para las condiciones críticas. Para el presente caso, considerando el peralte asumido  $d = 391 \text{ mm}$ , tenemos:

$$d = \sqrt{\frac{M_u}{\phi Rb}} = \sqrt{\frac{71.15 \times 10^6}{0.9(6.28)(300)}} = 204.85 \text{ mm} < 391 \text{ mm}$$

por lo que la altura de la sección transversal de la viga resulta apropiada para el diseño por flexión.

**3.b) Verificación por corte:** En lo que corresponde al esfuerzo cortante, la norma establece que una sección transversal es apropiada para resistir esfuerzos cortantes si cumple con

$$V_u \leq \phi \left( V_c + 0.66 \sqrt{f'_c} b_w d \right)$$

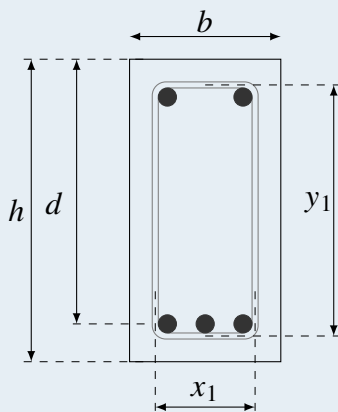
donde

$$V_c = 0.17 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d = 0.17(1.0) \sqrt{35}(300)(391) = 117.97 \text{ kN}$$

Considerando  $V_u = 55.44 \text{ kN}$ , y aplicando la expresión previa, resulta evidente que la sección transversal cumple el requerimiento por corte.

**3.c) Verificación por torsión:** Se puede omitir el diseño por torsión si  $T_u \leq \phi T_{th}$ , siendo  $T_{th}$  es el umbral por torsión

$$T_{th} = 0.083 \lambda \sqrt{f'_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right)$$



$$A_{cp} = bh$$

$$p_{cp} = 2b + 2h$$

$$x_1 = b - 2(r + \phi_E/2)$$

$$y_1 = h - 2(r + \phi_E/2)$$

$$A_{oh} = x_1 y_1$$

$$p_h = 2x_1 + 2y_1$$

$$A_o = 0.85 A_{oh}$$

$$A_{cp} = 135000 \text{ mm}^2$$

$$p_{cp} = 1500 \text{ mm}$$

$$x_1 = 210 \text{ mm}$$

$$y_1 = 360 \text{ mm}$$

$$A_{oh} = 75600 \text{ mm}^2$$

$$p_h = 1140 \text{ mm}$$

$$A_o = 64260 \text{ mm}^2$$

que para el presente caso resulta

$$T_{th} = 0.083(1.0)\sqrt{35} \left( \frac{(135000)^2}{1500} \right) = 5'966070 \text{ N.mm} = 5.97 \text{ kN.m}$$

por lo que aplicando  $T_u \leq \phi T_{th}$  obtenemos

$$34.11 \text{ kN.m} > 0.75(5.97 \text{ kN.m})$$

por lo que debemos reforzar por torsión.

Para que la sección transversal de la viga sea apropiada para resistir esfuerzos de torsión, se debe cumplir la siguiente expresión

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0.66\sqrt{f'_c}\right)$$

donde tanto el cortante crítico  $V_u$ , como el momento torsor crítico  $T_u$  se estiman a la distancia  $d$  a partir de la cara del apoyo, los mismos que resultan  $V_u = 47.65 \text{ kN}$ , y  $T_u = 29.32 \text{ kN.m}$ , lo que reemplazando en la expresión previa obtenemos:

$$\sqrt{\left(\frac{47650}{300(391)}\right)^2 + \left(\frac{29320000(1140)}{1.7(75600)^2}\right)^2} \leq 0.75 \left(\frac{117970}{300(391)} + 0.66\sqrt{35}\right)$$

puesto que de esta expresión resulta que  $3.46 < 3.68$ , concluimos que la sección transversal del elemento es apropiada para resistir esfuerzos de torsión, y por lo tanto podemos continuar con el diseño del elemento.

#### 4. Diseño por flexión

De acuerdo a los esfuerzos calculados obtenemos los siguientes resultados

| Momento   | $M_u$<br>(kN.m) | $M_n$<br>(kN.m) | $b$<br>(mm) | $d$<br>(mm) | $R$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $\rho_{def}$ | $A_s$<br>(mm <sup>2</sup> ) |
|-----------|-----------------|-----------------|-------------|-------------|-----------------------------|--------------|-----------------------------|
| $M_{emp}$ | 71.15           | 79.06           | 300         | 391         | 1.72368                     | 0.00423      | 496                         |
| $M_{max}$ | 35.57           | 39.52           | 300         | 391         | 0.86172                     | 0.00352      | 413                         |

En esta instancia no es conveniente decidir la combinación de barras para cubrir el refuerzo requerido por flexión, puesto que debe combinarse con el acero requerido para resistir los esfuerzos longitudinales de torsión.

### 5. Diseño por corte

De acuerdo a la norma vigente, en toda sección donde  $V_u > \phi V_c$  se debe proveer refuerzo transversal por corte. En el presente caso  $V_u = 47.65 \text{ kN}$ , comparado con  $\phi V_c = 0.75(117.97) = 88.48 \text{ kN}$ , resulta mucho menor, por lo que solo se deberá proveer el refuerzo mínimo por corte a partir de  $V_u = \phi V_c + \phi V_s$ , por lo que el esfuerzo por cortante que absorbe el refuerzo transversal es

$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi} = \frac{47.65 - 88.48}{0.75} = -54.44 \text{ kN}$$

El esfuerzo cortante en el acero resulta negativo. Esto es debido a que  $V_c$  es mucho mayor que  $V_u$ , y si la viga no estuviera sometida a esfuerzos de torsión, este cálculo no sería necesario, debiéndose colocar tan solo el acero mínimo por cortante, de acuerdo a lo establecido en el reglamento. En nuestro ejemplo, puesto que es necesario combinar los esfuerzos de corte y torsión, es necesario obtener la relación área-espaciamiento del refuerzo por cortante, la misma que se combinará con la relación que resulte para torsión. Esto se logra a partir de  $V_s = (A_v f_y d)/s$ , con lo que se obtiene una relación para dos ramas de estribo.

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} = \frac{-54440 \text{ N}}{420 \text{ N/mm}^2 (391 \text{ mm})} = -0.3315 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

Por corte se establece que la distancia máxima de separación en la zona de confinamiento  $2h$ , medida a partir de la cara del apoyo, debe ser la menor entre:  $d/4$ , 6 veces el diámetro menor del refuerzo longitudinal, o 200 mm. Para el presente caso resulta  $s = d/4 = 391/4 = 97 \text{ mm}$ . Para el resto del elemento, la distancia máxima entre estribos se limita a  $d/2 = 391/2 = 195 \text{ mm}$ .

### 6. Diseño por torsión

Un elemento sometido a esfuerzos de torsión se debe reforzar de manera longitudinal y transversal, combinando con el refuerzo por flexión y corte respectivamente. El diseño por torsión está gobernado por  $\phi T_n \geq T_u$ , donde

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yt}}{s} \cot \theta$$

de lo que se obtiene

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_u / \phi}{2A_o f_{yt} \cot \theta}$$

permitiéndose tomar  $\theta = 45^\circ$  para elementos no preesforzados, por lo tanto  $\cot\theta = 1$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_u}{2\phi A_o f_{yt}} = \frac{29320000}{2(0.75)(64264)(420)} = 0.7242 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

### 7. Selección de refuerzo transversal

Combinando las relaciones de refuerzo transversal por corte y torsión se obtiene

$$\frac{A_{t+v}}{s} = \frac{A_v}{s} + 2\frac{A_t}{s} = -0.3315 + 2(0.7242) = 1.1169 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

considerando estribos  $\phi 10$ , para las dos ramas del estribo tenemos  $A_v = 2(78.54) = 157.08 \text{ mm}^2$ , por lo tanto, la separación requerida entre estribos sería:

$$s = \frac{A_v}{1.1169} = 140.64 \text{ mm}$$

Por torsión se establece en el reglamento, que la distancia máxima entre estribos está limitada a la menor entre  $p_h/8$ , y 300 mm, que en este ejemplo resulta  $1140/8 = 142 \text{ mm}$ .

Este espaciamiento se debe controlar mediante lo establecido en el reglamento para separación máxima entre estribos, tanto para corte, como para torsión. Combinando los resultados por corte y torsión, se colocarían estribos  $\phi 10$  cada 9 cm en la zona de confinamiento, y en el resto del elemento cada 14 cm.

### 8. Selección de refuerzo longitudinal

El refuerzo longitudinal por torsión lo calculamos utilizando la ecuación 3.45, utilizando la relación  $A_t/s$  previamente calculada, para lo cual obtenemos

$$A_l = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yt}}{f_y} \cot^2\theta = 0.7242(1140) \frac{420}{420} (1) = 826 \text{ mm}^2$$

se debe procurar que el refuerzo calculado se distribuya de manera homogénea alrededor del estribo, colocando por lo menos una barra en cada esquina, para lo cual dividimos  $A_l$  calculada en tres capas de  $A_l/3 = 275 \text{ mm}^2$  cada una, lo que se deberá agregar al acero longitudinal por flexión.

### 9. Armado de la viga

En el paso 7 se definió el refuerzo transversal combinado, y en el paso 4 se realizó el cálculo del acero requerido para soportar los esfuerzos de flexión, restando definir la combinación de acero longitudinal por flexión más acero longitudinal por torsión.

*El acero de refuerzo requerido para el vano resultó igual al acero mínimo establecido por el reglamento*

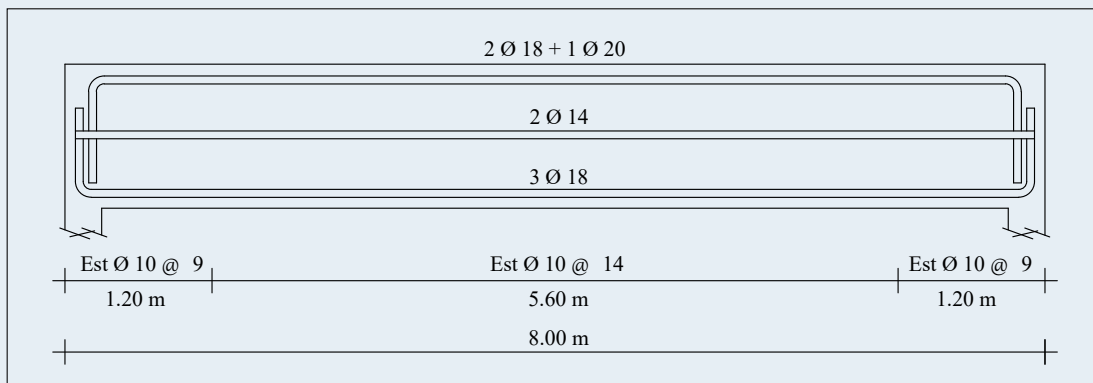
$$A_{s,min} = \rho_{min}bd = 0.00352(300)(391) = 413 \text{ mm}^2$$

*de lo que resulta:*

*a. Refuerzo para momento positivo  $A_s = 413 + 275 = 688 \text{ mm}^2$ , lo que se cubre con  $3\phi 18$*

*b. Refuerzo para momento negativo  $A'_s = 496 + 275 = 771 \text{ mm}^2$ , lo que se cubre con  $2\phi 18 + 1\phi 20$*

*c. Refuerzo por torsión a media altura de viga  $A_t = 275 \text{ mm}^2$ , lo que se cubre con  $2\phi 14$*



### 4.3. CONTROL DE DUCTILIDAD

Un elemento de hormigón armado puede fallar de tres principales formas: frágil, balanceada, y dúctil. Cuando el elemento falla de forma frágil, la falla se produce de manera súbita, colapsando sin previo aviso; este tipo de falla se presentan en elementos sobrerreforzados. Cuando el elemento falla por ductilidad, el colapso es de forma progresiva, presentando fisuras que se van ampliando hasta formar grietas, hasta llegar al colapso, permitiendo a los usuarios de la estructura ser alertados antes del colapso; este tipo de falla se produce en elementos subreforzados. El proceso de falla progresiva de un elemento dúctil permite que el usuario de la estructura esté alerta, y en el caso de ser necesario, pueda evacuar la estructura previo al colapso, lo que no ocurre cuando se presenta una falla frágil. Estos comportamientos tornan el control de ductilidad en un proceso de alta relevancia, y su revisión debe ser considerado en todo diseño estructural.

La ductilidad se puede considerar como la capacidad de resistencia que tiene un elemento para soportar esfuerzos adicionales a los considerados en el diseño. En esas condiciones de sobreesfuerzo, como en el caso de ocurrencia de un sismo, el elemento se podrá deformar o fisurar, pero sin llegar al colapso, siempre que cumpla con los requisitos de ductilidad. El control



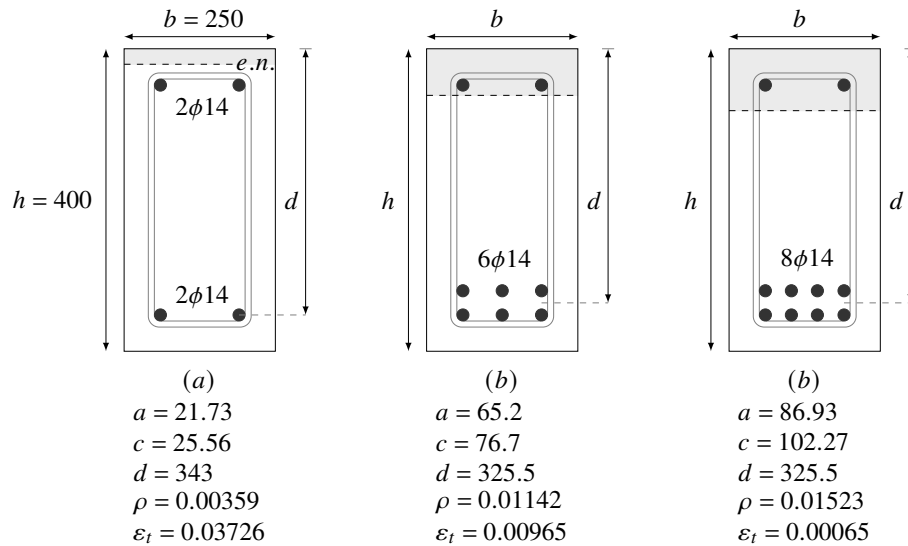


Fig. 4.1: Viga de 400 mm x 250 mm con diferentes cuantías de refuerzo: a) cuantía próxima a la cuantía mínima reglamentaria, b) cuantía dentro de los límites reglamentarios, c) cuantía superior a la máxima reglamentaria.

de ductilidad, por lo tanto, es de alta relevancia para la seguridad de la estructura, y se debe realizar una vez que se cuente con los diseños definitivos.

En la figura 4.1 se presenta una viga de  $h = 400 \text{ mm}$  y  $b = 250 \text{ mm}$  en la cual se ha dispuesto diferentes cantidades de refuerzo que regirán el comportamiento del elemento. (a) La viga con una cuantía de  $\rho = 0.00359 > \rho_{min}$  tendrá un comportamiento dúctil, puesto que la deformación en tensión  $\epsilon_t$  supera el valor de  $\epsilon_y + \epsilon_{cu}$ . (b) La viga esta armada con una cuantía cercana a la cuantía máxima reglamentaria, presentando una deformación en tensión  $\epsilon_t = 0.00965 > (\epsilon_y + \epsilon_{cu})$  asegurando el comportamiento dúctil. (c) La viga ha sido armada con una cuantía en tensión  $\epsilon_t = 0.00065 < (\epsilon_y + \epsilon_{cu})$ , por lo que esta viga se comporta de manera frágil.

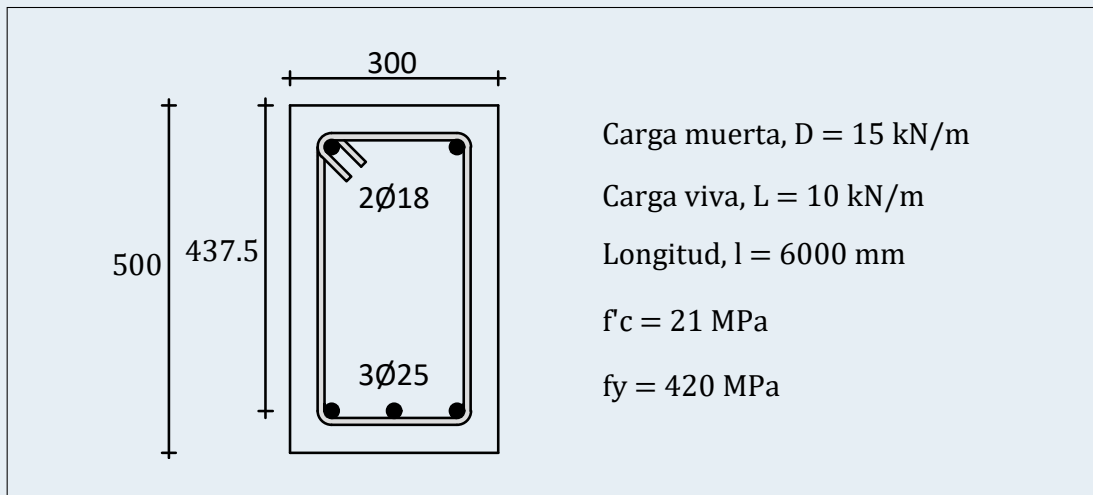
## 4.4. CONTROL DE DEFLEXIONES

Cualquier elemento estructural horizontal puede estar sometido a deflexiones, que dependiendo de la importancia y uso de la estructura, las mismas pueden ser más o menos aceptables. Estas deflexiones deben ser controladas de tal manera que la estructura siga brindando el servicio para la cual fue diseñada. El cálculo de las deflexiones lo trata el reglamento [3] en el capítulo 24, donde se dan los rangos admisibles para diferentes condiciones. En este documento, en la sección 2.2 se resume los espesores y alturas mínimos que las losas y vigas deben tener si se quiere evitar el cálculo de deflexiones.

A en este contexto, la NEC [2] sostiene que "El pandeo del encofrado en losas y vigas debe controlarse construyendo el encofrado con una contraflecha de 2 mm/m".

**Ejemplo 4.8** Cálculo de deflexiones para una viga simplemente apoyada

Se ha diseñado una viga simplemente apoyada con una luz de 6 metros, la misma que soporta una carga muerta  $D = 15 \text{ kN/m}$ , en la que está incluido su peso propio, y una carga viva  $L = 10 \text{ kN/m}$ . Para la construcción de la viga se ha utilizado hormigón con una resistencia a la compresión  $f'_c = 21 \text{ MPa}$ , y acero con límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$ .



- Calcular la deflexión instantánea para  $D + L$
- Calcular la deflexión a largo plazo, dado que 30% de la carga viva se aplica continuamente durante tres años

**Solución:** Para el cálculo de la deflexión instantánea de una viga simplemente apoyada se utiliza la ecuación derivada de la teoría elástica, donde la deflexión al centro de la luz es:

$$\delta_{CL} = \frac{5w\ell^4}{384E_cI_e}$$

donde el momento de inercia efectivo,  $I_e$ , se calcula de acuerdo a la tabla Tabla 24.2.3.5 del reglamento [3].

|                        |                                                                                                           |     |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| $M_a \leq (2/3)M_{cr}$ | $I_e = I_g$                                                                                               | (a) |
| $M_a > (2/3)M_{cr}$    | $I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \left( \frac{(2/3)M_{cr}}{M_a} \right)^2 \left( 1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right)}$ | (b) |

en estas ecuaciones:

$w =$  Carga de servicio ( $kN/m$ )

$E_c =$  Módulo de elasticidad del concreto (MPa)

$$E_c = 4700\sqrt{f'_c}$$

$I_e =$  Momento de inercia efectivo ( $mm^4$ )

$M_a =$  Momento máximo debido a cargas de servicio (N.mm)

$M_{cr} =$  Momento de fisuración (N.mm)

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t}$$

$f_r =$  Módulo de ruptura (MPa)

$$f_r = 0.62\lambda\sqrt{f'_c}$$

$I_{cr} =$  Momento de inercia de sección fisurada del concreto ( $mm^4$ )

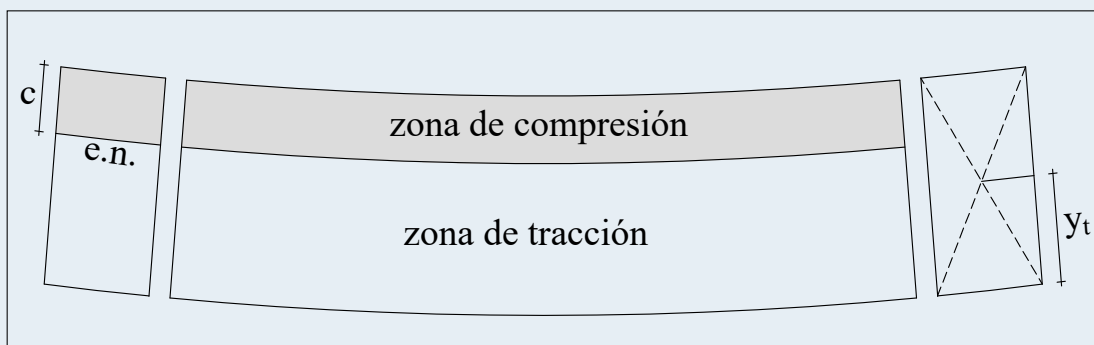
$$I_{cr} = \frac{bc^3}{3} + \eta A_s (d - c)^2$$

$\eta =$  Razón modular

$$\eta = \frac{E_s}{E_c}$$

$y_t =$  Distancia desde el eje que pasa por el centroide de la sección bruta a la cara en tracción, sin considerar el refuerzo (mm)

$c =$  Profundidad el eje neutro desde la fibra extrema a compresión (mm)



(a) Deflexión instantánea D+L

**1. Deflexión instantánea por carga muerta:** Se inicia el cálculo considerando solo la carga muerta, para luego agregar los efectos de carga viva. Para el cálculo de la deflexión tenemos:

$$w = 15 \text{ N/mm}$$

$$\ell = 6000 \text{ mm}$$

$$y_t = 250 \text{ mm}$$

$$E_c = 4700\sqrt{21} = 21538 \text{ N/mm}^2$$

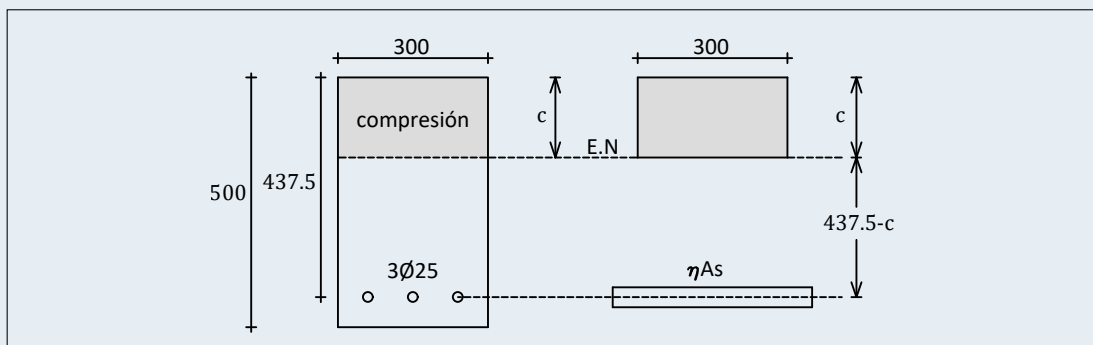
$$f_r = 0.62(1)\sqrt{21} = 2.84 \text{ N/mm}^2$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{300(500)^3}{12} = 3125'000,000 \text{ mm}^4$$

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} = \frac{2.84(3125'000,000)}{250} = 35'500,000 \text{ N.mm}$$

$$M_{aD} = \frac{w\ell^2}{8} = \frac{15(6000)^2}{8} = 67'500,000 \text{ N.mm}$$

puesto que  $M_a > (2/3)M_{cr}$ , utilizamos la ecuación (b) para el cálculo del momento de inercia efectivo  $I_e$ , por lo que necesitamos calcular en primer término el momento de inercia de la sección fisurada,  $I_{cr}$ . Para esto utilizamos la sección de acero de refuerzo equivalente y realizamos momentos de áreas con respecto al eje neutro, de lo que resulta:



$$\eta = \frac{200000}{4700\sqrt{21}} = 9.29$$

$$(300c)(c/2) = \eta A_s(437.5 - c)$$

$$150c^2 = 9.29(1472.62)(437.5 - c)$$

$$c = 159.29 \text{ mm}$$

$$I_{cr} = \frac{300(159.29)^2}{3} + 9.29(1472.62)(437.5 - 159.29)^2 = 1463'063,882 \text{ mm}^4$$

$$I_{eD} = \frac{I_{cr}}{1 - \left[ \frac{(2/3)M_{cr}}{M_a} \right]^2 \left( 1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right)} = \frac{1463'063,882}{1 - \left[ \frac{(2/3)(35'500,000)}{67'500,000} \right]^2 \left( 1 - \frac{1463'063,882}{3125'000,000} \right)}$$

$$I_{eD} = 1565'406,892 \text{ mm}^4$$

por lo que la deflexión instantánea debido a carga muerta resulta

$$\delta_D = \frac{5w\ell^4}{384E_cI_e} = \frac{5(15)(6000)^4}{384(4700\sqrt{21})(1565'406,892)} = 7.508 \text{ mm}$$

**2. Deflexión instantánea por carga muerta + carga viva:** El proceso se repite, actualizando el momento causado por las cargas de servicio, y volviendo a comparar con  $(2/3)M_{cr}$

$$M_{a(D+L)} = \frac{w\ell^2}{8} = \frac{(10+15)(6000)^2}{8} = 112'500,000 \text{ N.mm}$$

por lo que  $M_{a(D+L)} > (2/3)M_{cr}$ , por lo tanto se debe aplicar la opción (b) para calcular el momento de inercia efectivo  $I_e$ .

$$I_{e(D+L)} = \frac{I_{cr}}{1 - \left[ \frac{(2/3)M_{cr}}{M_a} \right]^2 \left( 1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right)} = \frac{1463'063,882}{1 - \left[ \frac{(2/3)(35'500,000)}{112'500,000} \right]^2 \left( 1 - \frac{1463'063,882}{3125'000,000} \right)}$$

$$I_{e(D+L)} = 1498'328,609 \text{ mm}^4$$

por lo que la deflexión instantánea debido a carga muerta + carga viva resulta

$$\delta_{(D+L)} = \frac{5w\ell^4}{384E_cI_e} = \frac{5(10+15)(6000)^4}{384(4700\sqrt{21})(1498'328,609)} = 13.073 \text{ mm}$$

**b) Deflexión a largo plazo, aplicando 30% de carga viva durante 3 años**

**3. Deflexión instantánea por carga viva**

$$\delta_L = \delta_{(D+L)} - \delta_D = 13.073 - 7.508 = 5.565 \text{ mm}$$

**4. Deflexión instantánea por carga muerta + 30% de carga viva**

$$M_{a(D+0.3L)} = \frac{w\ell^2}{8} = \frac{(15+0.3(10))(6000)^2}{8} = 81'000,000 \text{ N.mm}$$

lo que resulta  $M_{a(D+0.3L)} > (2/3)M_{cr}$ , por lo que se aplica la opción (b) para calcular el

momento de inercia efectivo  $I_e$ .

$$I_{e(D+L)} = \frac{I_{cr}}{1 - \left[ \frac{(2/3)M_{cr}}{M_a} \right]^2 \left( 1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right)} = \frac{1463'063,882}{1 - \left[ \frac{(2/3)(35'500,000)}{81'000,000} \right]^2 \left( 1 - \frac{1463'063,882}{3125'000,000} \right)}$$

$$I_{e(D+0.3L)} = 1532'648,125 \text{ mm}^4$$

por lo que la deflexión instantánea debido a carga muerta + 30% de carga viva resulta

$$\delta_{(D+0.3L)} = \frac{5w\ell^4}{384E_c I_e} = \frac{5(15 + 0.3(10))(6000)^4}{384(4700\sqrt{21})(1532'648,125)} = 9.202 \text{ mm}$$

#### 5. Deflexión instantánea debido al 30% de carga viva

$$\delta_{0.3L} = \delta_{(D+0.3L)} - \delta_D = 9.202 - 7.508 = 1.694 \text{ mm}$$

#### 6. Deflexión a largo plazo por carga muerta más 30% de carga viva permanente durante tres años.

La deflexión a largo plazo se obtiene multiplicando la deflexión instantánea por el factor

$$\lambda_\Delta = \frac{\xi}{1 + 50\rho'}$$

en relación con la Tabla 24.2.4.1.3 del reglamento [3].

| Duración de carga sostenida en meses | factor dependiente del tiempo $\xi$ |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 3                                    | 1.0                                 |
| 6                                    | 1.2                                 |
| 12                                   | 1.4                                 |
| 60 ó más                             | 2.0                                 |

Como la aplicación de la carga viva se realiza durante 3 años consecutivos, el valor de  $\xi$  se debe obtener mediante interpolación entre los valores de 1.4 y 2.0, que corresponden a 1 y 5 años respectivamente, de lo que resulta

$$\xi = 1.7$$

*En cuanto a la cuantía del acero de refuerzo a compresión se obtiene mediante*

$$\rho' = \frac{A'_s}{bd} = \frac{2\phi 18}{300(437.5)} = 0.00388$$

*por lo que el factor  $\lambda_\Delta$  resulta*

$$\lambda_{3años} = \frac{1.7}{1 + 50(0.00388)} = 1.42$$

*y finalmente la deflexión total se obtiene mediante*

$$\delta_T = \delta_L + \lambda_\infty \delta_D + \lambda_{3años} \delta_{0.3L}$$

*por lo que la deflexión total por carga muerta, más 30% de carga viva aplicada de manera permanente durante 3 años resulta*

$$\delta_T = 5.565 + 2.0(7.508) + 1.42(1.694) = 22.986 \text{ mm}$$

*Este resultado debe compararse con los establecidos como deflexiones admisibles por el reglamento, de acuerdo al tipo de estructura que se esté considerando.*

## Capítulo 5

# DISEÑO DE COLUMNAS

La hipótesis de diseño (sección 2.1) mantiene su aplicación en el análisis y diseño de columnas de hormigón armado. Aunque las columnas están pensadas para resistir cargas verticales, a causa de la estructuración de la edificación, condiciones de cargas, defectos constructivos o distribución de elementos constitutivos del elemento, las columnas se diseñan a flexocompresión, para lo cual deberá considerarse una excentricidad mínima de aplicación de carga.

### 5.0.1. Predimensionamiento de columnas

Para realizar el diseño de una columna, a más de conocer las características de los materiales constitutivos y los esfuerzos a los que está sometida, debemos contar con las dimensiones del elemento. Sin embargo, la sección transversal definitiva se obtiene al término del diseño, por lo que se debe iniciar con el predimensionamiento de la columna. Para esto se puede recurrir a tablas y ábacos en ayudas de diseño, o predimensionar el elemento utilizando métodos empíricos, como se muestra en los siguiente ejemplo:

#### **Ejemplo** 5.1 *Dimensionamiento de una columna a carga axial*

*Una columna de sección cuadrada con estribos, debe soportar una carga axial muerta de 400 kN y una carga axial viva de 1000 kN, usando hormigón con resistencia a la compresión de  $f'_c = 30$  MPa y acero con límite de fluencia de  $f_y = 420$  MPa. Calcular las dimensiones de la sección de hormigón y de la sección de acero requeridas.*

#### **Datos:**

$$f'_c = 30 \text{ MPa}$$

$$f_y = 420 \text{ MPa}$$

$$P_D = 400 \text{ kN}$$

$$P_L = 1000 \text{ kN}$$



**Solución:** de acuerdo a los datos ingresados, la carga última  $P_u$  que debe resistir la columna es:

$$P_u = 1.2P_D + 1.6P_L = 1.2(400) + 1.6(1000) = 2080 \text{ kN}$$

Si consideramos cero excentricidad de aplicación de carga (esto lo hacemos sólo para el predimensionamiento), y conociendo que  $\phi P_n \geq P_u$ , podemos escribir

$$\phi P_n \geq P_u = \alpha \phi [0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y]$$

que para columna de sección rectangular resulta

$$P_u = (0.80)(0.65)[0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y]$$

y puesto que

$$P_n = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y$$

se puede expresar  $P_u = 0.52 P_n$ , y conociendo que  $P_u = 2080 \text{ kN}$ , resulta

$$P_n = \frac{P_u}{0.52} = \frac{2080}{0.52} = 4000 \text{ kN}$$

Considerando que la Norma[2] determina que la cuantía de acero de refuerzo para columnas debe estar entre el 1 % y el 3 %, podemos asumir que una cuantía del 1.5 %, lo que significa que el acero de refuerzo deberá resistir el 1.5 % de el esfuerzo requerido, y el hormigón deberá resistir el 98.5 %. Puesto que los dos materiales tienen esfuerzos nominales diferentes, obtenemos para nuestro propósito un esfuerzo ponderado  $f_p$ .

$$f_p = 0.985(0.85 f'_c) + 0.015 f_y = 0.985[0.85(30)] + 0.015(420) = 31.42 \text{ MPa}$$

por lo que la sección total requerida sera

$$A_g = \frac{P_n}{f_p} = \frac{4000(10)^3 \text{ N}}{31.42 \text{ N/mm}^2} = 127307 \text{ mm}^2$$

por lo que podemos adoptar una columna de sección cuadrada de 360x360, lo que da como resultado  $A_g = 129600 \text{ mm}^2$ .

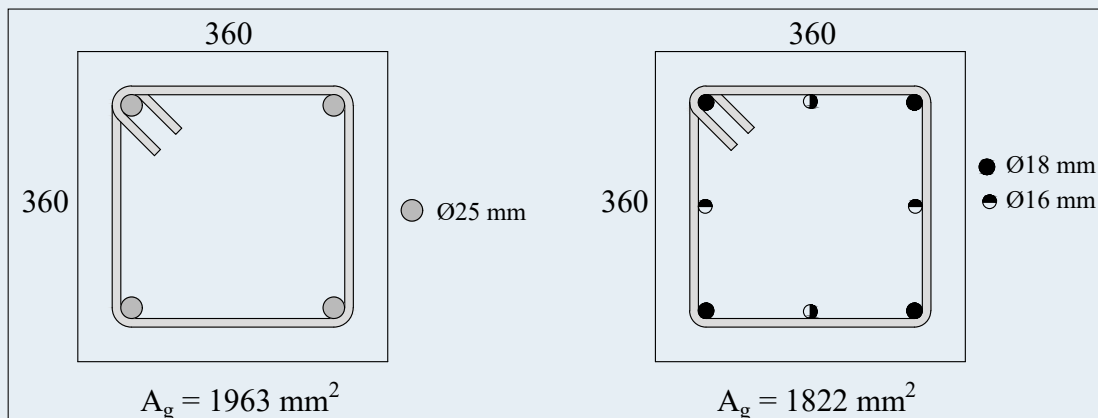
Esta información aplicada en  $P_u = 0.52[0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y]$ , cuidando la coherencia de las unidades, resulta:

$$2080000 = 0.52[0.85(30)(129600 - A_{st}) + 420A_{st}]$$

de lo que obtenemos

$$A_{st} = 1762 \text{ mm}^2$$

*Este requerimiento lo podemos suministrar con  $4\phi 25$  equivalente a  $\rho = 0.01515$ , ó con  $4\phi 18 + 4\phi 16$ , equivalente a una cuantía de  $\rho = 0.01406$ . Este resultado puede variar, dependiendo de las necesidades, aumentando la cuantía hasta un máximo del 3%, o reduciendo la sección transversal de la columna, a conveniencia del diseñador.*



*Otra manera de calcular la sección transversal de la columna con propósitos de predimensionamiento, se puede realizar con*

$$A_g = \frac{P_u}{(0.25 \sim 0.50)f'_c}$$

*que para el caso actual, considerando  $0.50f'_c$ , resultaría:*

$$A_g = \frac{2080(30)^3 \text{ N}}{0.50(30) \text{ N/mm}^2} = 138667 \text{ mm}^2$$

*lo que podemos cubrir con una columna de sección cuadrada de 375 mm x 375 mm.*

## 5.0.2. Análisis de columnas mediante el uso de Diagrama de Interacción carga-momento

Dependiendo principalmente de los resultados arrojados por el análisis estructural, las columnas suelen mayormente diseñarse con sección rectangular. Para su diseño se puede recurrir directamente a las ayudas proporcionadas por varios autores, o aquellas proporcionadas por el ACI [18], en las que conociendo la carga axial y el momento flector al que está sometida la columna, mediante el uso de los diagramas de interacción se puede encontrar la cuantía de acero de refuerzo necesaria para soportar los esfuerzos requeridos.

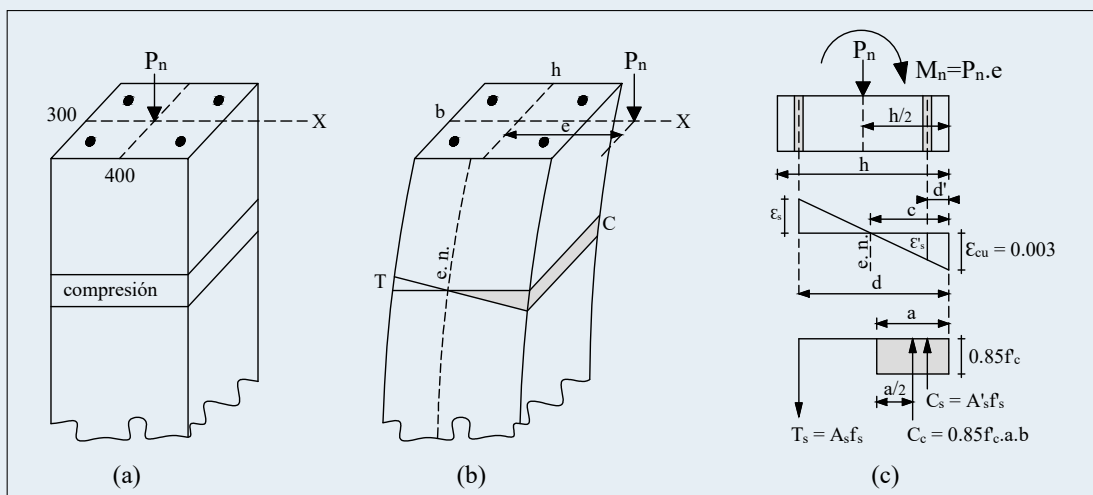
A continuación se ofrece el diseño de una columna de sección rectangular sometida a esfuerzos de flexocompresión uniaxial mediante la elaboración de su diagrama de interacción.

### **Ejemplo 5.2** Diagrama de Interacción de una columna de sección rectangular.

Se ha construido una columna de hormigón armado de sección rectangular con dimensiones  $h = 400 \text{ mm}$  y  $b = 300 \text{ mm}$ , reforzada con  $4\phi 25$  ( $\rho = 0.01636$ ) y estribos de  $10 \text{ mm}$ . La resistencia a compresión del hormigón a los 28 días corresponde a  $f'_c = 30 \text{ MPa}$ , y se cuenta con refuerzos con límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . Con estas características podemos preguntar: (a) ¿Cuál es la resistencia de la columna?

*Nota:* Por facilidad de análisis, en este ejemplo no se revisan las condiciones de funcionamiento reglamentario.

**Solución:** La respuesta a la pregunta planteada la da el diagrama de interacción, puesto que esta columna puede soportar una combinación de carga-momento muy variada que va desde la carga axial pura (momento nulo), hasta la flexión pura (carga axial nula), lo cual dependerá también de la ubicación de la carga con respecto a los ejes ortogonales que pasan por el centroide de la sección transversal de la columna.



En la figura que se adjunta, (a) muestra la ubicación de carga sobre el centroide de la sección transversal de la columna, lo cual causa compresión en toda la sección; (b) representa la columna deformada debido a la posición de la carga sobre el eje X, causando compresión en la cara Este de la columna, mientras causa tensión en la cara Oeste, y (c) representa el modelo de esfuerzo-deformación de la columna afectada por una carga excéntrica sobre el eje X.

La pregunta que se nos presenta es: ¿cuánta carga, y con que excentricidad, es capaz de resistir la columna?. Para responder esta pregunta recurrimos a la estática, que nos dice que si un cuerpo está en equilibrio, es debido a que la suma de todas las fuerzas concurrentes, así como los momentos, son iguales a cero. Por lo tanto, si queremos saber

*cuál es la resistencia de la columna, debemos afectarla con tanta carga y excentricidad hasta llevarla al límite de la resistencia de los materiales constitutivos.*

*Del diagrama (c), haciendo sumatoria de fuerzas en Y igual a cero, tenemos:*

$$\sum F_y = 0$$

$$-P_n - T_s + C_c + C_s = 0$$

$$P_n = C_c + C_s - T_s \quad (5.1)$$

*Haciendo sumatoria de momentos en el centroide de la columna (y por lo tanto eliminando el efecto de  $P_n$ ), tenemos:*

$$\sum M_o = 0$$

$$-M_n + T_s(d - h/2) + C_c(h/2 - a/2) + C_s(h/2 - d') = 0$$

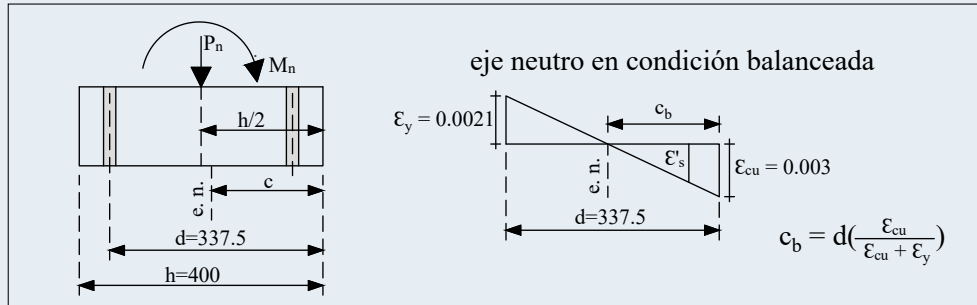
$$M_n = C_c(h/2 - a/2) + C_s(h/2 - d') + T_s(d - h/2) \quad (5.2)$$

*Con las ecuaciones 5.2 y 5.1 graficamos  $M_n$  y  $P_n$ , resultando para diferentes excentricidades, el diagrama de interacción de nuestra columna, conociendo por lo tanto sus límites de resistencia. Al variar la excentricidad de aplicación de la carga, la posición del eje neutro cambiará, variando los esfuerzos de compresión y tensión.*

*Del diagrama, en (c), observamos que la compresión resistida por el concreto se reduce al volumen del bloque equivalente de compresiones,  $C_c = 0.85f'_c ab$ , que la compresión resistida por las barras de refuerzo en la zona de compresión será la sección transversal de acero en compresión por el esfuerzo unitario,  $C_s = A'_s f'_s$ , y que la tensión resistida por las barras en la zona de tensión es el producto de la sección de acero en tensión por su correspondiente esfuerzo unitario,  $T_s = A_s f_s$ . El esfuerzo del acero en tensión,  $f_s$ , es proporcional a la deformación en la zona de tensión,  $\epsilon_s$ , y el esfuerzo del acero en la zona de compresión,  $f'_s$ , es proporcional a la deformación en la zona en compresión,  $\epsilon'_s$ .*

*Con esto en mente, para construir el diagrama de interacción procedemos de la siguiente manera:*

1. *Calculamos la distancia desde la fibra extrema en compresión hasta el eje neutro para la condición balanceada,  $c_b$ , lo que nos permite calcular  $P_b$  y  $M_b$  a partir de las ecuaciones 5.1 y 5.2.*



Para nuestro caso:

$$c_b = 198.53 \text{ mm}, f_s = f_y = 420 \text{ MPa}, \text{ y } f'_s = 411.20 \text{ MPa}$$

con lo que obtenemos

$$P_b = C_c + C_s - T_s = 1261.03 \text{ kN}$$

$$M_b = C_c(h/2 - a/2) + C_s(h/2 - d') + T_s(d - h/2) = 260.75 \text{ kN.m}$$

2. A partir de  $c_b$ , dando valores arbitrarios, mayores y menores que  $c_b$ , calculamos  $P_n$  y  $M_n$  a partir de las ecuaciones 5.1 y 5.2, para la zona de compresión y tensión correspondientemente. Los cálculos correspondientes se pueden ver en la siguiente tabla.

| $c$<br>(mm)   | $f_s$<br>(MPa) | $f'_s$<br>(MPa) | $C_c$<br>(kN)   | $C_s$<br>(kN) | $T_s$<br>(kN) | $M_n$<br>(kN.m) | $P_n$<br>(kN)   | $\phi$      | $\phi M_n$<br>(kN.m) | $\phi P_n$<br>(kN) |
|---------------|----------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|-------------|----------------------|--------------------|
|               |                |                 |                 |               |               | 0               | 3,834.40        |             | 0                    | 2,492.36           |
| 327.50        | 18.40          | 420.00          | 2,094.49        | 412.23        | 18.06         | 191.34          | 2,488.66        | 0.65        | 124.37               | 1,617.63           |
| 313.50        | 46.00          | 420.00          | 2,004.99        | 412.23        | 45.15         | 201.14          | 2,372.07        | 0.65        | 130.74               | 1,541.85           |
| 299.50        | 76.20          | 420.00          | 1,915.41        | 412.23        | 74.79         | 210.26          | 2,252.85        | 0.65        | 136.67               | 1,464.35           |
| 285.50        | 109.20         | 420.00          | 1,825.90        | 412.23        | 107.18        | 218.70          | 2,130.95        | 0.65        | 142.16               | 1,385.12           |
| 271.50        | 145.80         | 420.00          | 1,736.32        | 412.23        | 143.10        | 226.58          | 2,005.45        | 0.65        | 147.28               | 1,303.54           |
| 257.50        | 186.40         | 420.00          | 1,646.82        | 412.23        | 182.95        | 233.95          | 1,876.09        | 0.65        | 152.07               | 1,219.46           |
| 243.50        | 231.60         | 420.00          | 1,557.31        | 412.23        | 227.32        | 240.89          | 1,742.23        | 0.65        | 156.58               | 1,132.45           |
| 229.50        | 282.40         | 420.00          | 1,467.73        | 412.23        | 277.18        | 247.54          | 1,602.78        | 0.65        | 160.90               | 1,041.81           |
| 215.50        | 339.60         | 420.00          | 1,378.22        | 412.23        | 333.32        | 254.01          | 1,457.14        | 0.65        | 165.11               | 947.14             |
| <b>198.53</b> | <b>420.00</b>  | <b>411.20</b>   | <b>1,269.67</b> | <b>403.59</b> | <b>412.23</b> | <b>260.75</b>   | <b>1,261.03</b> | <b>0.65</b> | <b>169.49</b>        | <b>819.67</b>      |
| 187.50        | 420.00         | 400.00          | 1,199.14        | 392.60        | 412.23        | 256.51          | 1,179.51        | 0.68        | 174.43               | 802.07             |
| 172.50        | 420.00         | 382.60          | 1,103.21        | 375.52        | 412.23        | 249.41          | 1,066.50        | 0.71        | 177.08               | 757.22             |
| 157.50        | 420.00         | 362.00          | 1,007.28        | 355.30        | 412.23        | 240.68          | 950.35          | 0.76        | 182.92               | 722.27             |
| 142.50        | 420.00         | 336.80          | 911.34          | 330.57        | 412.23        | 230.12          | 829.68          | 0.82        | 188.70               | 680.34             |
| 127.50        | 420.00         | 305.80          | 815.41          | 300.14        | 412.23        | 217.58          | 703.33          | 0.89        | 193.65               | 625.96             |
| 112.50        | 420.00         | 266.60          | 719.48          | 261.67        | 412.23        | 202.72          | 568.92          | 0.90        | 182.45               | 512.03             |
| 97.50         | 420.00         | 215.40          | 623.55          | 211.42        | 412.23        | 185.05          | 422.74          | 0.90        | 166.55               | 380.47             |
| 82.50         | 420.00         | 145.40          | 527.62          | 142.71        | 412.23        | 163.63          | 258.10          | 0.90        | 147.27               | 232.29             |
|               |                |                 |                 |               |               | 139.13          | 0               |             | 125.22               | 0                  |

3. Para limitar el diagrama calculamos los puntos críticos de compresión pura, ecuación 5.3, y flexión pura, ecuación 5.4. Para el caso de la compresión pura, el área resistente corresponde a toda la sección transversal de la columna, por lo que la estimamos considerando los materiales con su correspondiente esfuerzo unitario:

$$P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y \quad (5.3)$$

con lo que obtenemos

$P_o = 3,834.40 \text{ kN}$  valor que aparece en la primera fila en la tabla de cálculo para  $P_n$ .

Para el caso de la flexión pura, se considera que el único acero resistente es aquel en la fibra extrema en tensión, produciendo un momento  $M_o = T_s d$ :

$$M_o = A_s f_y d \quad (5.4)$$

con lo que obtenemos

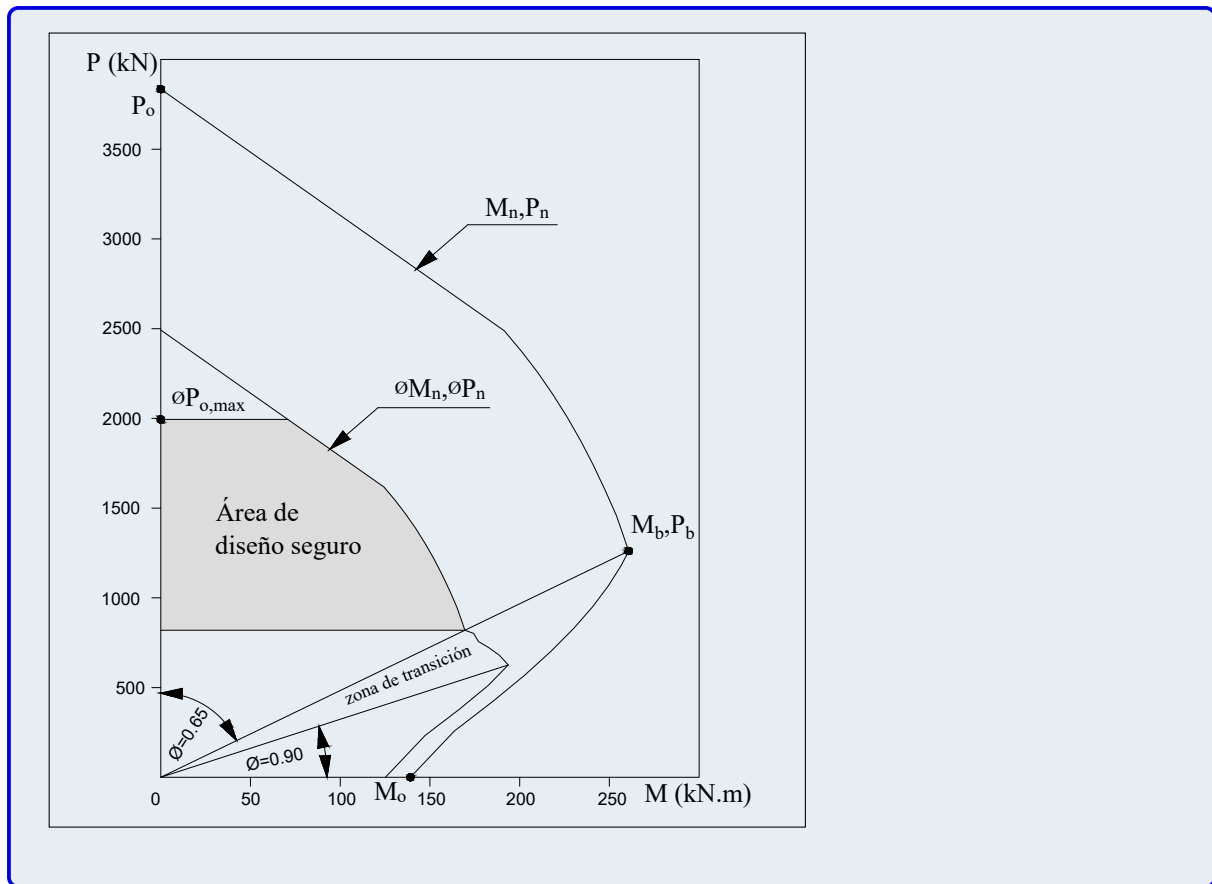
$M_o = 139.13 \text{ kN.m}$  valor que aparece en la última fila en la tabla de cálculo para  $M_n$ .

4. Una vez calculados los valores de  $M_n$  y  $P_n$ , de acuerdo a las deformaciones correspondientes, se procede con el cálculo del factor de reducción de resistencia  $\phi$ , que sirve para calcular los esfuerzos reducidos  $\phi M_n$  y  $\phi P_n$ .
5. En vista de la existencia de una excentricidad accidental, la máxima resistencia a carga axial se reduce a :

$$\phi P_{o,max} = 0.8 \phi (0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y) \quad (5.5)$$

con lo que obtenemos  $\phi P_{o,max} = 1993.89 \text{ kN}$

Realizado este proceso, a continuación se procede con la elaboración del correspondiente Diagrama de Interacción, en el cual se puede observar el área segura de diseño, la misma que se enmarca bajo la curva de esfuerzos reducidos, y la línea que une el origen del plano cartesiano con el punto de esfuerzos balanceados.



### 5.0.3. Diagramas de interacción como ayudas de diseño

En un *Diagrama de Interacción* se representa de manera gráfica los esfuerzos de compresión y flexión que resiste una columna. Esta representación se consigue a partir de pares ordenados conteniendo momentos para valores de abscisas, y carga axial para las ordenadas. Cada curva trazada representa la combinación de esfuerzos a los que una columna está sometida con una cuantía de refuerzo determinada. Expresado de otra manera, podemos obtener diagramas de interacción con varias curvas representando varias cuantías, de donde podemos escoger lo más conveniente para nuestro diseño. En la figura 5.1 se representa los esfuerzos nominales para una columna de 400 x 300, donde cada curva representa una cuantía diferente.

Con la finalidad de contar con una herramienta de evaluación y diseño de columnas de hormigón armado, varios autores han diseñado diagramas de interacción adimensionales que permiten un proceso rápido de análisis, debiendo el usuario bajo su responsabilidad estudiarlos previo a su uso.

En este documento se utilizarán los diagramas de interacción publicados en el Manual de Diseño de Concreto Reforzado del ACI [18], como aquellos de la sección 9.5.

La utilización de los Diagramas de Interacción del ACI está sujeta a la elección de la resistencia a compresión del concreto  $f'_c$ , el límite de fluencia del acero de refuerzo  $f_y$ , y la

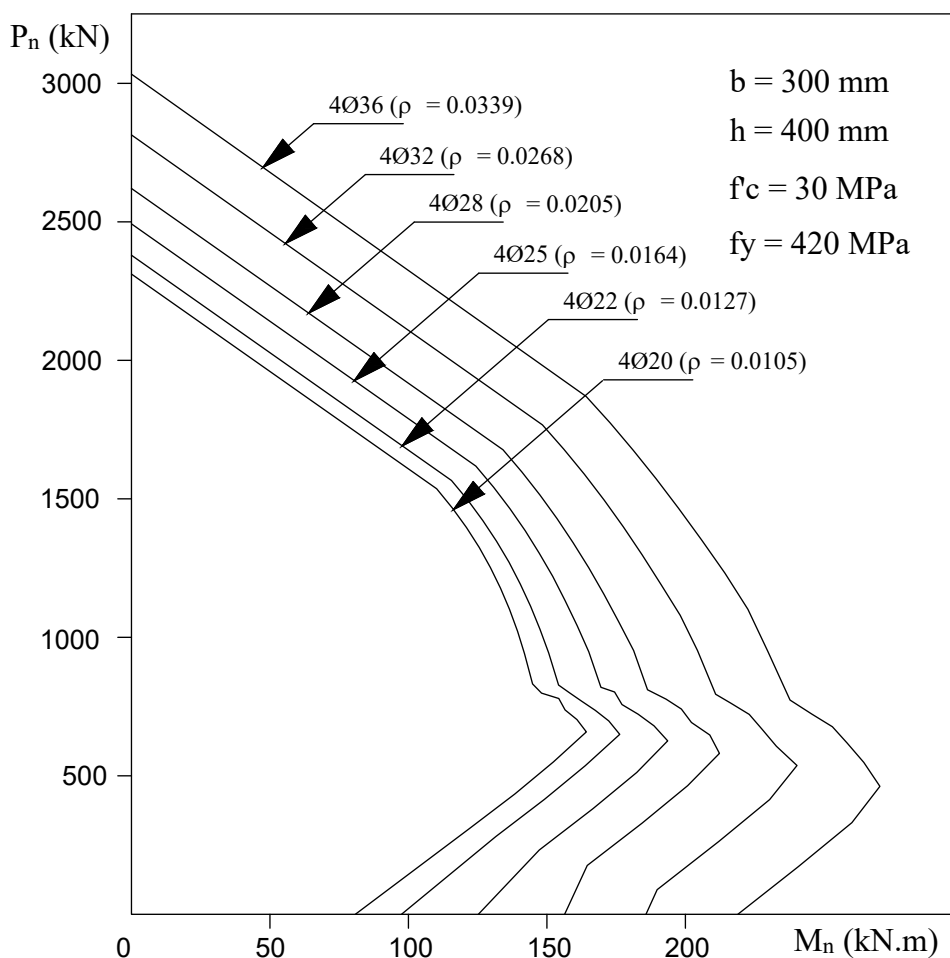


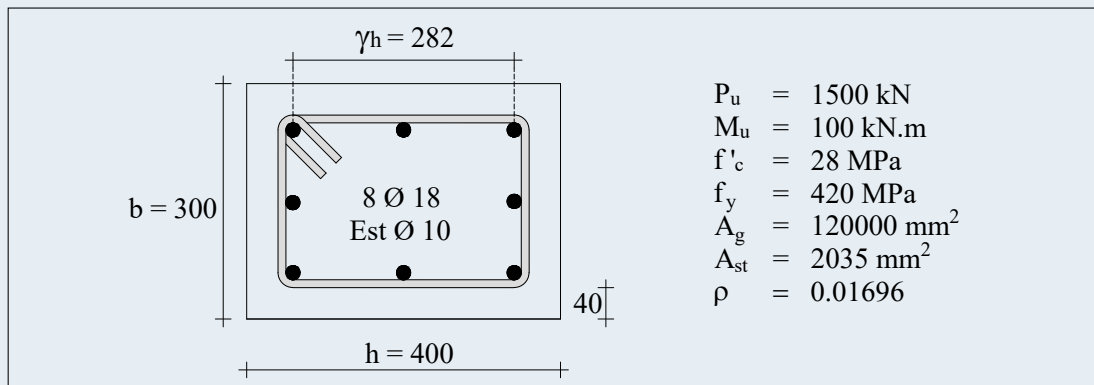
Fig. 5.1: Diagrama de Interacción uniaxial representando esfuerzos nominales para columna de sección rectangular de  $400\text{ mm} \times 300\text{ mm}$  con diversas cuantías de refuerzo.

relación de recubrimiento  $\gamma$ . Cabe indicar que en el Manual de Diseño de Concreto Reforzado del ACI [18] se presentan diagramas de interacción para columnas de sección rectangular, con refuerzo en dos y cuatro caras, y para columnas de sección circular.

### **Ejemplo** 5.3 *Evaluación de columna rectangular utilizando Diagrama de Interacción del ACI*

Se ha construido una columna de hormigón armado de sección rectangular, la misma que debería soportar una carga axial  $P_u = 1500\text{ kN}$  y un momento flector de  $M_u = 100\text{ kN.m}$ , con las características que se muestran en la figura siguiente.



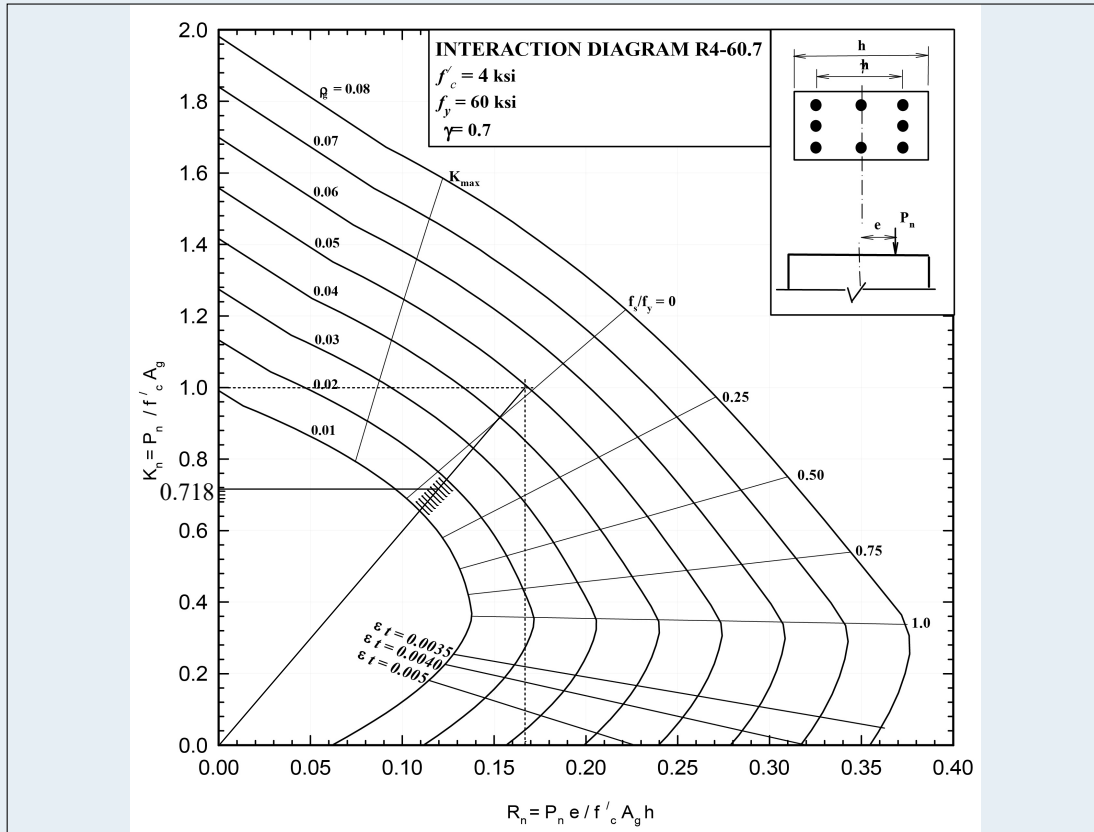


**Solución:** Sabiendo los esfuerzos que debe soportar y las características físicas de la columna, lo que debemos averiguar, si la columna soportará dichos esfuerzos.

1. Escoger el Diagrama de Interacción apropiado, para lo cual necesitamos conocer  $f'_c = 28/7 = 4 \text{ ksi}$ ,  $f_y = 420/7 = 60 \text{ ksi}$ , y  $\gamma = 282/400 = 0.71$ , por lo que podemos escoger el diagrama de interacción: R4 – 60.7[18]
2. Determinar la pendiente  $e/h$ , donde  $e = M_u/P_u = 66.67 \text{ mm}$ , y  $h = 400 \text{ mm}$ , obteniéndose una pendiente  $e/h = 0.167$
3. Trazar la línea de pendiente  $e/h$  en el diagrama, interceptándola con la curva de cuantía  $\rho = 0.01696$ , equivalente al 1.7%
4. A partir del punto de intercepción entre la pendiente  $e/h$  y la cuantía, se traza una horizontal para leer el valor de  $K_n$ , que para el presente caso resulta  $K_n = 0.718$
5. A partir de la ecuación 9.1 obtenemos

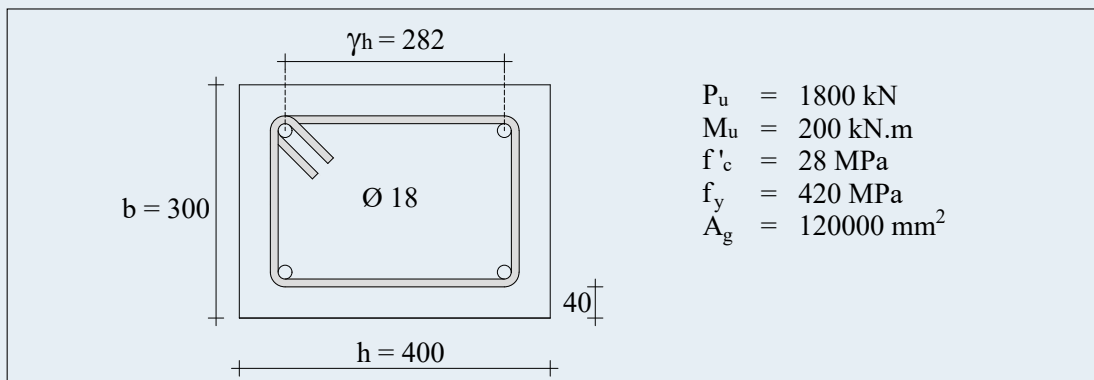
$$P_n = K_n f'_c A_g \quad P_n = 0.718(28)(120000) = 2412480 \text{ N} = 2412.48 \text{ kN}$$

6. Puesto que se debe cumplir que  $\phi P_n \geq P_u$ , a partir del valor calculado de  $P_n = 2412.48 \text{ kN}$  calculamos  $P_u = 0.65 P_n = 1568.11 \text{ kN}$ , que resulta mayor al valor requerido de  $1500 \text{ kN}$ , por lo que se acepta el diseño.



### **Ejemplo 5.4** Diseño de una columna rectangular utilizando Diagramas de Interacción del ACI

A partir del análisis estructural se ha establecido que una columna con pre-dimensiones  $h = 400 \text{ mm}$ , y  $b = 300 \text{ mm}$  debe soportar una carga axial  $P_u = 1800 \text{ kN}$ , y un momento torsor  $M_u = 200 \text{ kN.m}$



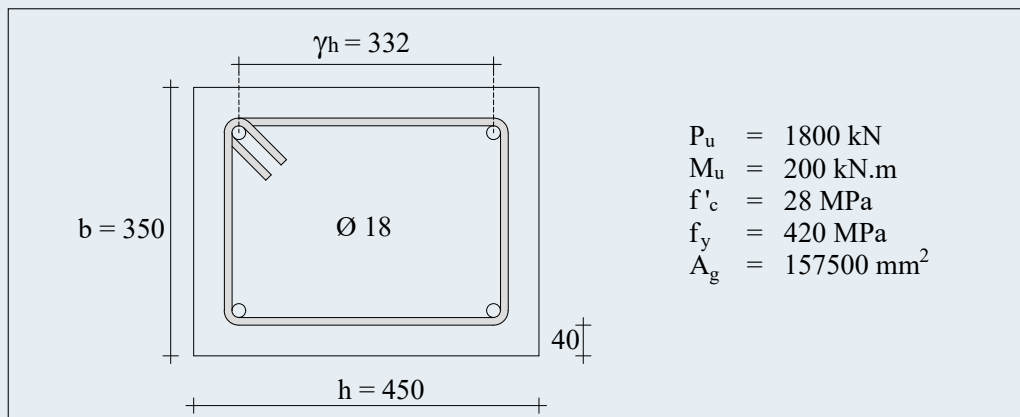
**Solución:** Conocidas las dimensiones de la columna, las cuales se establecieron en el predimensionamiento de la estructura, se escoge el posible diámetro del acero de refuerzo, siendo para el presente caso de 18 mm.

1. Escoger el Diagrama de Interacción apropiado, para lo cual necesitamos conocer  $f'_c = 28/7 = 4 \text{ ksi}$ ,  $f_y = 420/7 = 60 \text{ ksi}$ , y  $\gamma = 282/400 = 0.71$ , lo que nos dice que debemos escoger el diagrama de interacción R4 – 60.7[18]
2. La excentricidad a considerarse debe cumplir que  $e \geq e_{min}$ , donde  $e_{min} = 15 + 0.03h \text{ mm}$ , que para el presente caso resulta  $e_{min} = 27 \text{ mm}$ , por lo que se trabajará con la excentricidad real que resulta  $e = M_u/P_u = 111.11 \text{ mm}$
3. A partir de  $P_u$  y  $M_u$  procedemos a calcular los valores de  $K_n$  y  $R_n$ , considerando que se debe cumplir que  $\phi P_n \geq P_u$

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} \quad K_n = \frac{P_u}{\phi f'_c A_g} \quad K_n = \frac{1800000}{0.65(28)(120000)} = 0.824$$

$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} \quad R_n = \frac{P_u e}{\phi f'_c A_g h} \quad R_n = \frac{1800000(111.11)}{0.65(28)(120000)(400)} = 0.229$$

4. Para obtener la cuantía de diseño, los valores calculados para  $K_n$  y  $R_n$  se grafican sobre el diagrama de interacción, y su punto de intersección nos dirá cual es la cuantía requerida, que para el presente caso resulta superior al 5%, superando a la máxima admisible por la Norma [2] (3%). Esto obliga a redimensionar la sección transversal de la columna.
5. Redefinimos la sección transversal en  $h = 450 \text{ mm}$  y  $b = 350 \text{ mm}$ , retornando al paso 1. Con los mismos materiales, manteniendo el diámetro del refuerzo, la relación de recubrimiento resulta  $\gamma = 332/450 = 0.738$ , por lo que se debe trabajar con los diagramas de interacción R4 – 60.7 y R4 – 60.8[18]

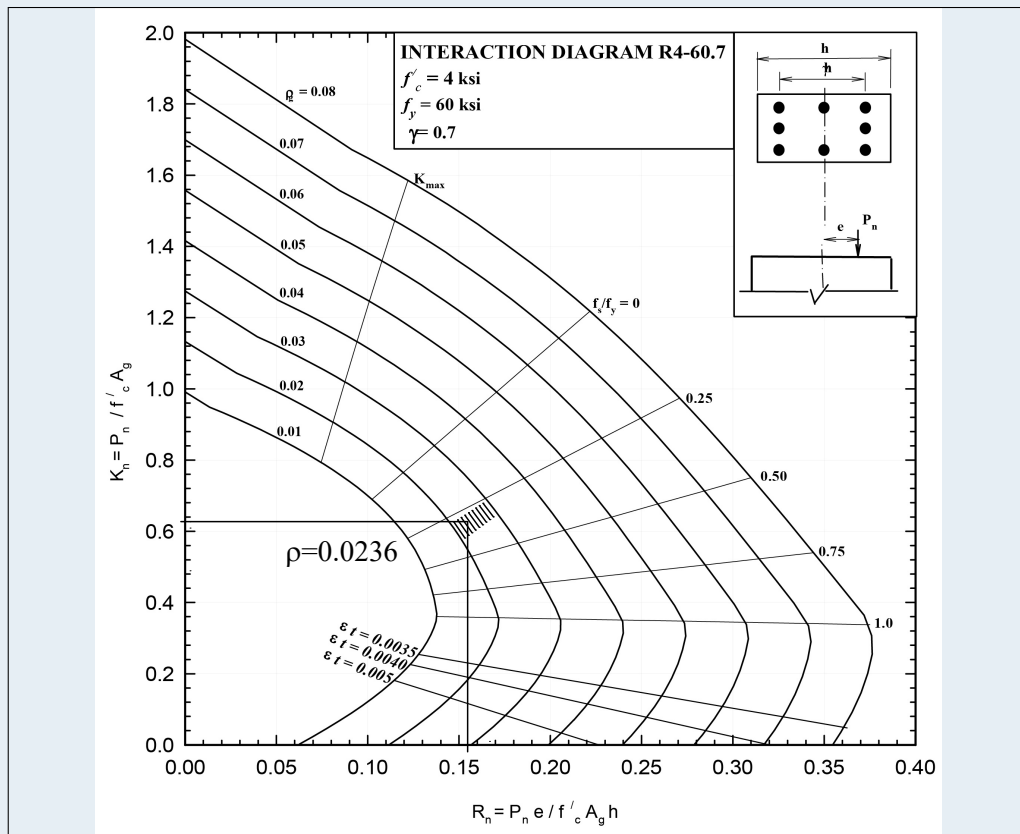


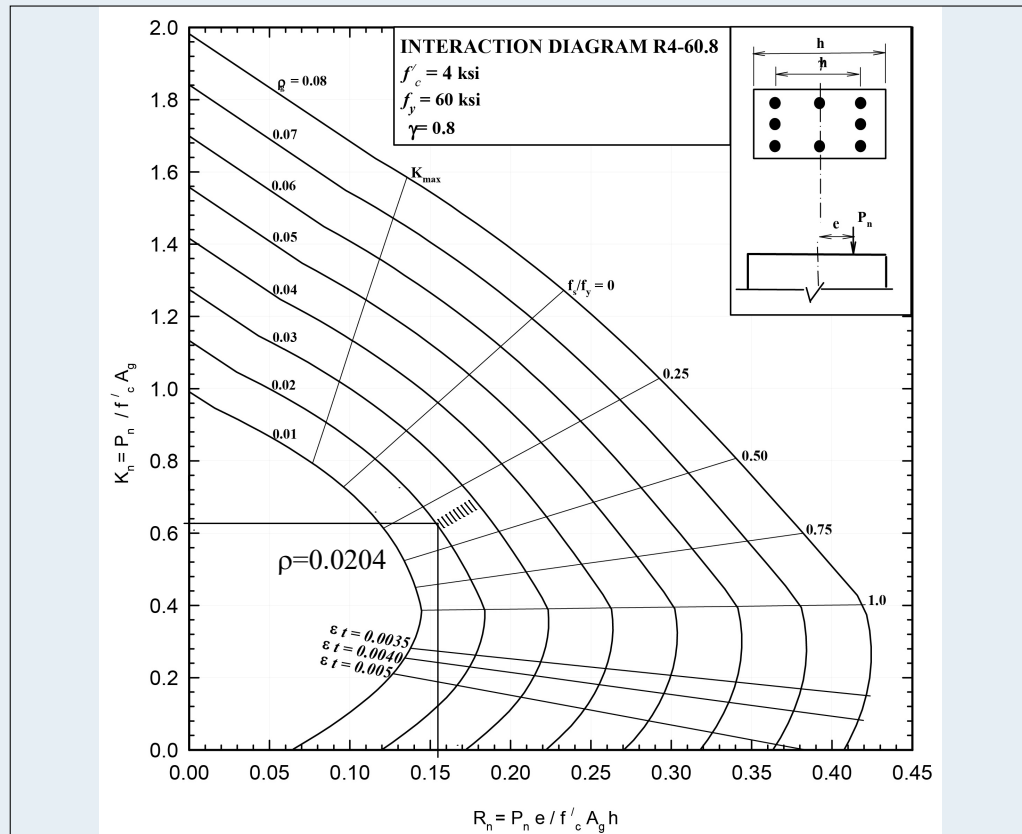
6. Repetimos el paso 3 para calcular  $P_u$  y  $M_u$

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} \quad K_n = \frac{P_u}{\phi f'_c A_g} \quad K_n = \frac{1800000}{0.65(28)(157500)} = 0.628$$

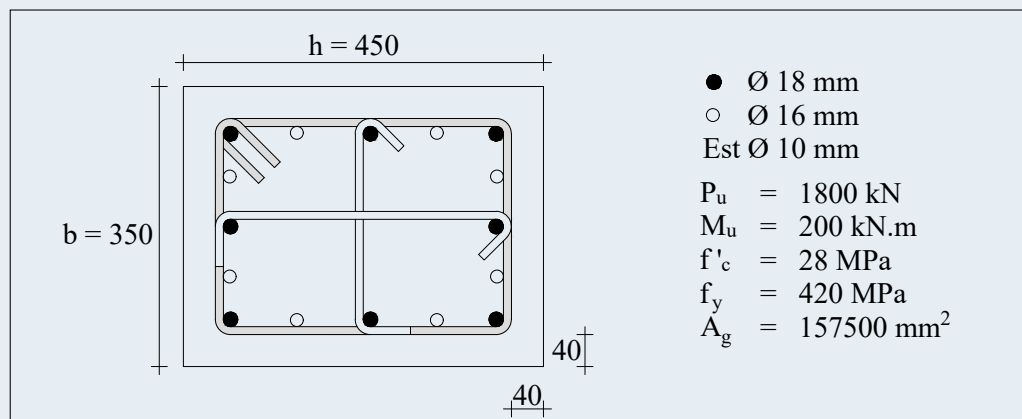
$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} \quad R_n = \frac{P_u e}{\phi f'_c A_g h} \quad R_n = \frac{1800000(111.11)}{0.65(28)(157500)(450)} = 0.155$$

7. Procedemos a trazar los valores de  $K_n$  y  $R_n$  sobre los correspondientes diagramas de interacción. Para el diagrama R4 – 60.7[18] resulta una cuantía  $\rho = 0.0236$  (2.36%), mientras que para el diagrama R4 – 60.8[18] resulta una cuantía  $\rho = 0.0204$  (2.04%). Mediante interpolación, para  $\gamma = 0.738$ , obtenemos la cuantía definitiva  $\rho = 0.02238$
8. Una vez calculada la cuantía, se procede a calcular el área de acero de refuerzo  $A_{st} = \rho b h = 0.00238(350)(450) = 3524.85 \text{ mm}^2$ , lo que se puede lograr con  $8\phi 18 + 8\phi 16$ , representando un área definitiva de refuerzo de  $A_{st} = 3644.27 \text{ mm}^2$





9. El diseño definitivo de la columna se muestra en la siguiente figura, controlando que se cumplan con las condiciones de funcionamiento.



#### 5.0.4. Flexocompresión biaxial

Las cargas verticales que afectan a una columna siempre estarán aplicadas con cierta excentricidad respecto del centroide de la sección transversal de la columna. Esta excentricidad se deriva de factores como la geometría excéntrica de los elementos estructurales que afectan la columna, la distribución heterogénea de los materiales constitutivos del concreto, o algún defecto constructivo que haga variar el diseño planificado. Esta situación provoca que la columna esté sometida a esfuerzos biaxiales, por lo que en principio, toda columna debería revisarse

para efectos biaxiales, especialmente en las columnas de esquina y otras que están expuestas a momentos que ocurren simultáneamente en dos direcciones. Estas columnas deben diseñarse para flexión biaxial y carga axial.

Para diseño de columnas a flexocompresión biaxial, el Reglamento [7], hasta la edición de 2011 (R10.3.6 y R10.3.7) recomendaba el "*Método de las Cargas Recíprocas*" y el "*Método de Contorno de Cargas*" presentado por el profesor Boris Bresler en 1960 [30], y lo expuesto por Parme [31] en su publicación de 1966. A partir de la edición 2014, el Reglamento [8] (R6.2.6) nos remite al estudio realizado por Furlong et al.[32] publicado en 2004.

De entre los métodos de diseño existentes, el ACI recomienda como satisfactorio el "*Método de las Cargas Recíprocas*" del profesor Bresler. Un cálculo simple y algo conservador para este método se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{nx}} + \frac{1}{P_{ny}} - \frac{1}{P_o} \quad (5.6)$$

Donde:

$P_n$  = resistencia nominal a cargas axiales para una excentricidad dada a lo largo de ambos ejes.

$P_{nx}$  = resistencia nominal a cargas axiales para excentricidad dada a lo largo del eje x.

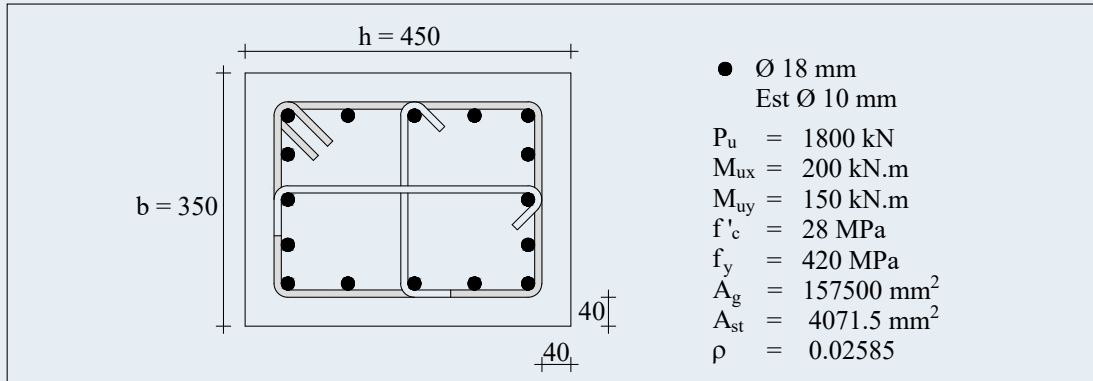
$P_{ny}$  = resistencia nominal a cargas axiales para excentricidad dada a lo largo del eje y.

$P_o$  = resistencia nominal a cargas axiales para excentricidad cero.

En las ediciones del reglamento posteriores al 2011, el ACI nos remite a la investigación realizada por el profesor Richard W. Furlong en 2004[32], donde se revisa varios métodos, entre ellos el Método de las Cargas Recíprocas, considerando que la sección es adecuada si  $P_n$  obtenida a partir de la Ecuación 5.6 es mayor de  $P_u/\phi$ .

### **Ejemplo 5.5 Evaluación de una columna sometida a flexocompresión biaxial.**

En la siguiente figura se presenta una columna de sección rectangular armada con 16 barras de 18 mm de diámetro, la misma que debe ser evaluada mediante el uso de los Diagramas de Interacción del ACI para soportar una carga axial  $P_u = 1800 \text{ kN}$ , y momentos flectores  $M_{ux} = 200 \text{ kN.m}$ , y  $M_{uy} = 150 \text{ kN.m}$ .



**Solución:** Conocidas las dimensiones de la columna, las cuales se establecieron en el predimensionamiento de la estructura, se escoge el posible diámetro del acero de refuerzo, que para el presente caso es de 18 mm, desarrollando a continuación los siguientes pasos:

1. Escoger el Diagrama de Interacción apropiado, para lo cual necesitamos conocer  $f'_c = 28/7 = 4 \text{ ksi}$ ,  $f_y = 420/7 = 60 \text{ ksi}$ , y  $\gamma = 332/450 = 0.738$ , lo que nos dice que debemos escoger los diagrama de interacción R4 – 60.7[18] y R4 – 60.8[18]
2. La excentricidad a considerarse debe cumplir que  $e \geq e_{min}$ , donde  $e_{min} = 15 + 0.03h \text{ mm}$ , que para el presente caso resulta  $e_{min} = 27 \text{ mm}$ , por lo que se trabajará con la excentricidades reales que resultan  $e_x = M_{ux}/P_u = 111.11 \text{ mm}$ , y  $e_y = M_{uy}/P_u = 83.33 \text{ mm}$
3. Interceptando la línea de pendiente  $e/h$  con la curva de cuantía, para los correspondientes diagramas de interacción, se puede calcular los valores de  $K_n$  para los correspondientes ejes de flexión. Para el presente caso tenemos:  $e_x/h = 111.11/450 = 0.247$ , y  $e_y/b = 83.33/350 = 0.238$
4. Una vez graficadas las líneas de pendiente  $e/h$ , como se puede verificar en los diagramas siguientes, para  $e_x/h = 0.247$  se obtiene  $K_{n0.7} = 0.644$  y  $K_{n0.8} = 0.674$ , lo que interpolando para  $\gamma = 0.738$  resulta un valor de  $K_{nx} = 0.6554$ . Para  $e_y/b = 0.238$  se obtiene  $K_{n0.7} = 0.660$  y  $K_{n0.8} = 0.686$ , lo que interpolando para  $\gamma = 0.738$  resulta un valor de  $K_{ny} = 0.6699$
5. A partir de  $K_n = P_n/(f'_c A_g)$  obtenemos obtenemos:

$$P_{nx} = 0.6554(28)(157500) = 2890314 \text{ N} = 2890.31 \text{ kN}$$

$$P_{ny} = 0.6699(28)(157500) = 2954259 \text{ N} = 2954.26 \text{ kN}$$

6. Para complementar la ecuación de cargas recíprocas necesitamos calcular  $P_o$  a partir de

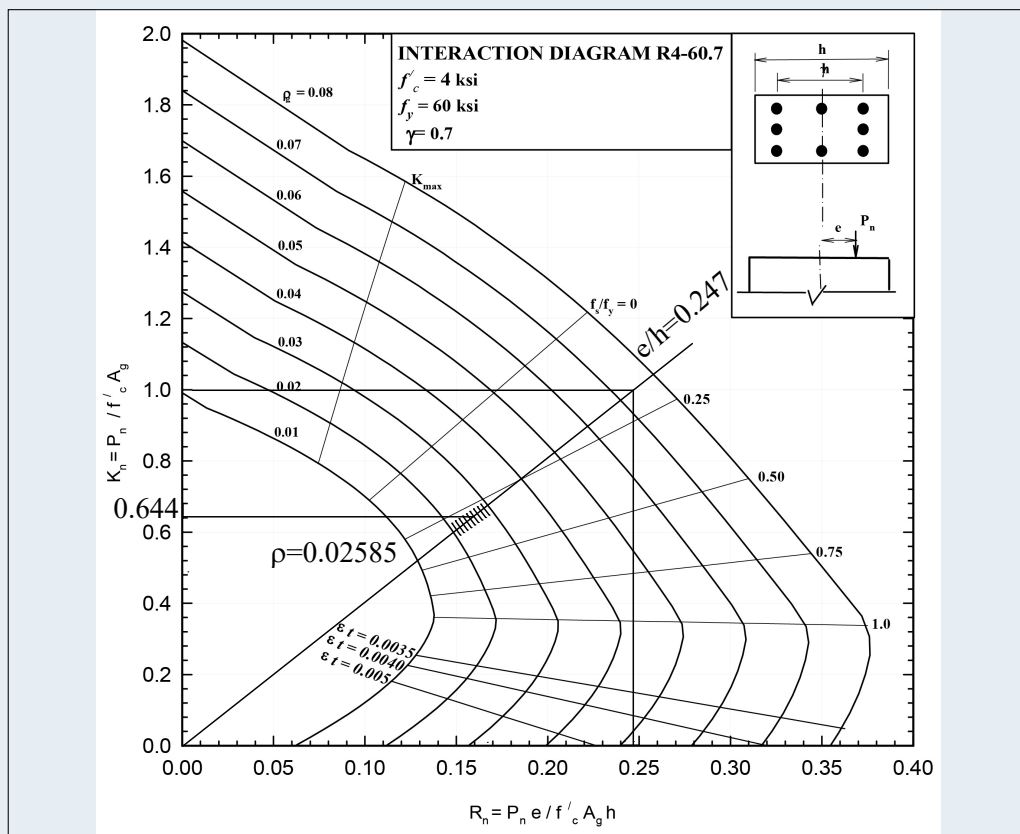
$$P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$$

$$P_o = 0.85(28)(157500 - 4071.5) + 420(4071.5) = 5361628 \text{ N} = 5361.63 \text{ kN}$$

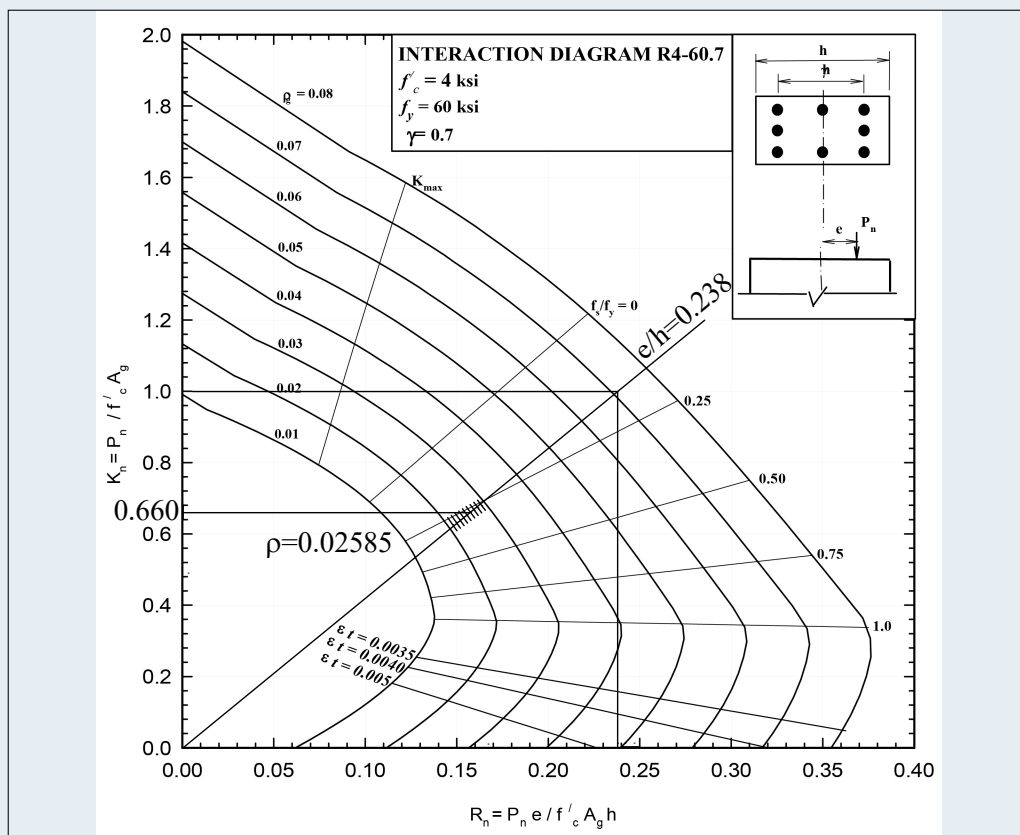
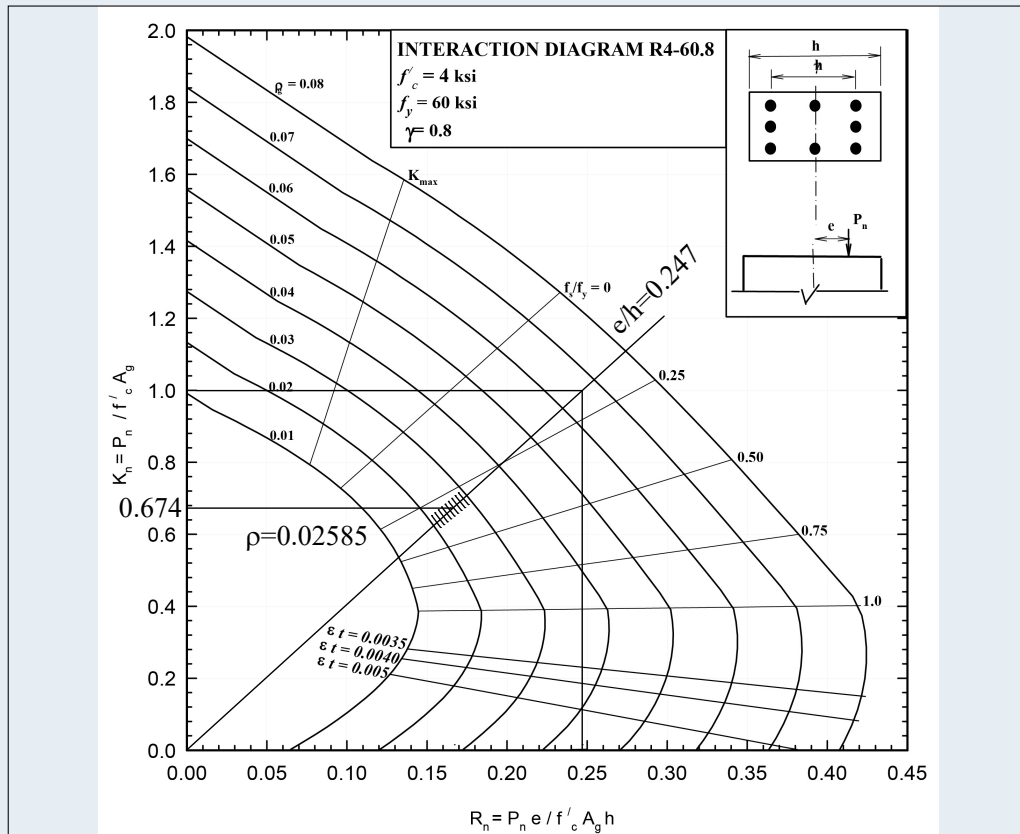
7. Con los valores calculados de  $P_{nx}$ ,  $P_{ny}$ , y  $P_o$ , aplicamos la Ecuación 5.6, de lo que resulta un valor de  $P_n = 2008.16kN$
8. A partir de  $\phi P_n \geq P_u$  encontramos que

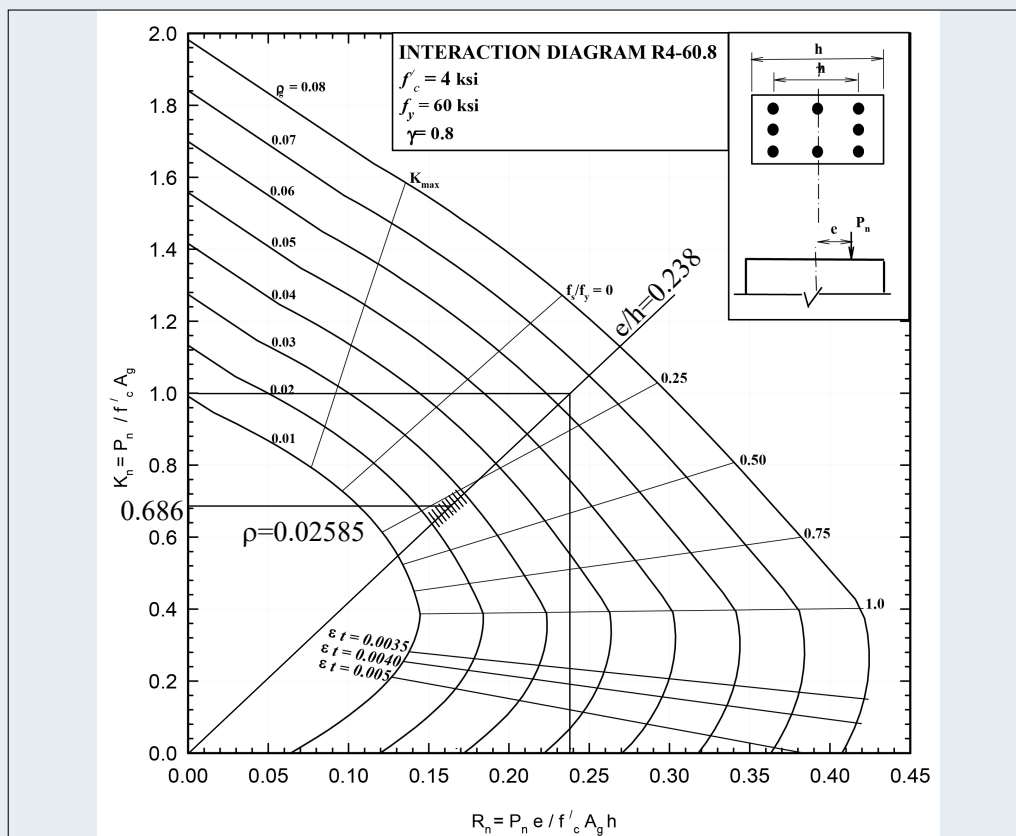
$$P_u = 0.65(2008.16) = 1305.30kN$$

que resulta menor a la carga axial requerida  $P_u = 1800kN$ , por lo que se concluye que la columna propuesta no soporta los esfuerzos requeridos y debería limitarse su uso, o proceder con el rediseño.









### **Ejemplo** 5.6 *Diseño de una columna sometida a flexocompresión biaxial.*

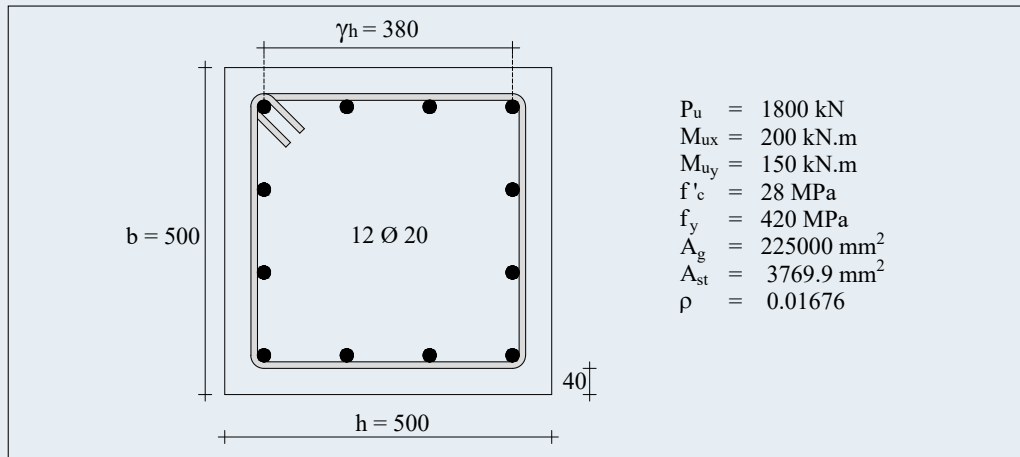
Se debe diseñar una columna de hormigón armado, de sección rectangular, para que soporte una carga axial  $P_u = 1800 \text{ kN}$ , y momentos flectores  $M_{ux} = 200 \text{ kN.m}$ , y  $M_{uy} = 150 \text{ kN.m}$ , utilizando concreto con una resistencia de  $f'_c = 28 \text{ MPa}$  y acero de refuerzo con límite de fluencia de  $f_y = 420 \text{ MPa}$ .

#### **Solución:**

1. Procedemos con el predimensionamiento de la sección transversal de la columna. Considerando que la excentricidad de aplicación de la carga es mayor que la excentricidad mínima especificada por el Reglamento, para el predimensionamiento utilizamos

$$A_g = \frac{P_n}{(0.2 \sim 0.5)f'_c} = \frac{(1800/0.65)10^3}{0.4(28)} = 247253 \text{ mm}^2$$

por lo que se ensayará con una sección transversal de  $500 \times 500 = 250000 \text{ mm}^2$ , aplicando una cuantía de 1.5%, lo que se puede lograr con  $12\phi 20$ , como se muestran a continuación



2. Considerando  $\gamma = 380/500 = 0.76$ , se debe trabajar con los diagramas de interacción R4 – 60.7 y R4 – 60.8.
3. Verificamos que las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$  sean mayores o iguales que  $e_{min}$ , que para el presente caso resulta  $e_{min} = 15 + 0.03(500) = 30 \text{ mm}$ , verificándose la condición, puesto que  $e_x = 111.11 \text{ mm}$ , y  $e_y = 83.33 \text{ mm}$ , por lo que se puede trabajar para el diseño directamente con los valores de  $M_{ux}$  y  $M_{uy}$ , en caso contrario se debe utilizar la excentricidad mínima

4. Para la utilización de los diagramas de interacción del ACI, obtenemos las relaciones  $e/h$  e interceptamos con la línea de cuantía. A partir de ese punto leemos  $R_n$  en el diagrama, y de su fórmula, despejando, encontramos  $P_n$  para la correspondiente excentricidad.

Para  $M_{ux}$  tenemos:  $e_x/h = 0.222$ , y para  $M_{uy}$  tenemos:  $e_y/h = 0.167$ . Estos valores se grafican en los diagramas

5. Una vez graficadas las relaciones  $e_x/h$  y  $e_y/h$  e interceptadas con la línea de cuantía, leemos  $R_n$  en los dos diagramas de interacción. Para  $e_x/h$  obtenemos valores de 0.138 y 0.142, lo que una vez interpolado tenemos  $R_{nx} = 0.1404$ . Para  $e_y/h$  obtenemos valores de 0.121 y 0.123, lo que una vez interpolado tenemos  $R_{ny} = 0.1222$ .

6. Reemplazando los valores de  $R_{nx}$  y  $R_{ny}$  dentro de la fórmula de  $R_n$  tenemos:

$$R_{nx} = \frac{P_{nx}e_x}{f'_c A_g h} = 0.1404$$

$$R_{ny} = \frac{P_{ny}e_y}{f'_c A_g h} = 0.1222$$

$$P_{nx} = \frac{(0.1404)(28 \text{ N/mm}^2)(225000 \text{ mm}^2)(500 \text{ mm})}{111.11 \text{ mm}} = 3980.38 \text{ kN}$$

$$P_{ny} = \frac{(0.1222)(28 \text{ N/mm}^2)(225000 \text{ mm}^2)(500 \text{ mm})}{83.33 \text{ mm}} = 4619.34 \text{ kN}$$

7. Calculamos la capacidad por carga axial  $P_o$

$$P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y$$

$$P_o = 0.85 (28 \text{ N/mm}^2) (225000 \text{ mm}^2 - 3769.9 \text{ mm}^2) + 3769.9 \text{ mm}^2 (420 \text{ N/mm}^2)$$

$$P_o = 6848.63 \text{ kN}$$

8. Con los valores previamente calculados podemos aplicar la fórmula de carga recíproca para encontrar  $P_{ni} = 3108.50 \text{ kN}$

$$\frac{1}{P_{ni}} = \frac{1}{P_{nx}} + \frac{1}{P_{ny}} - \frac{1}{P_o}$$

$$\frac{1}{P_{ni}} = \frac{1}{3980.38} + \frac{1}{4619.34} - \frac{1}{6848.63}$$

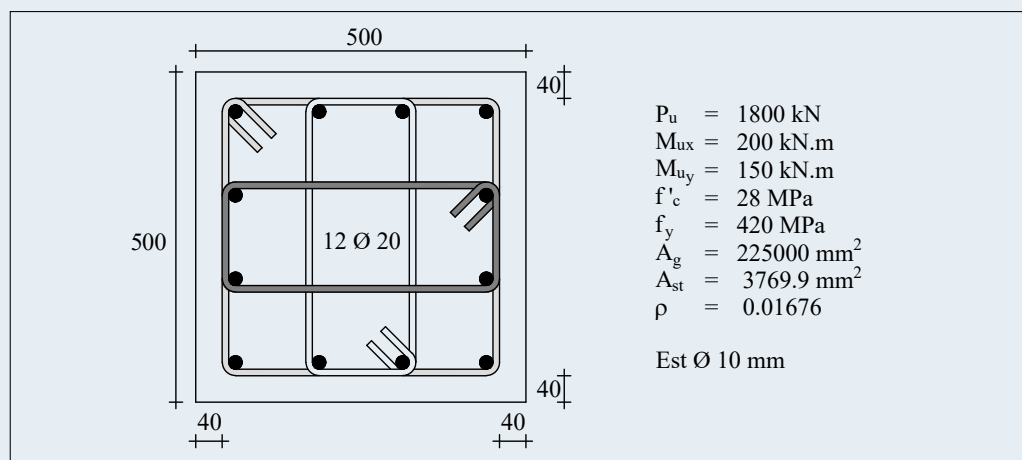
9. Puesto que el diseño debe satisfacer  $\phi P_n \geq P_u$ , y considerando  $\phi = 0.65$ , tenemos

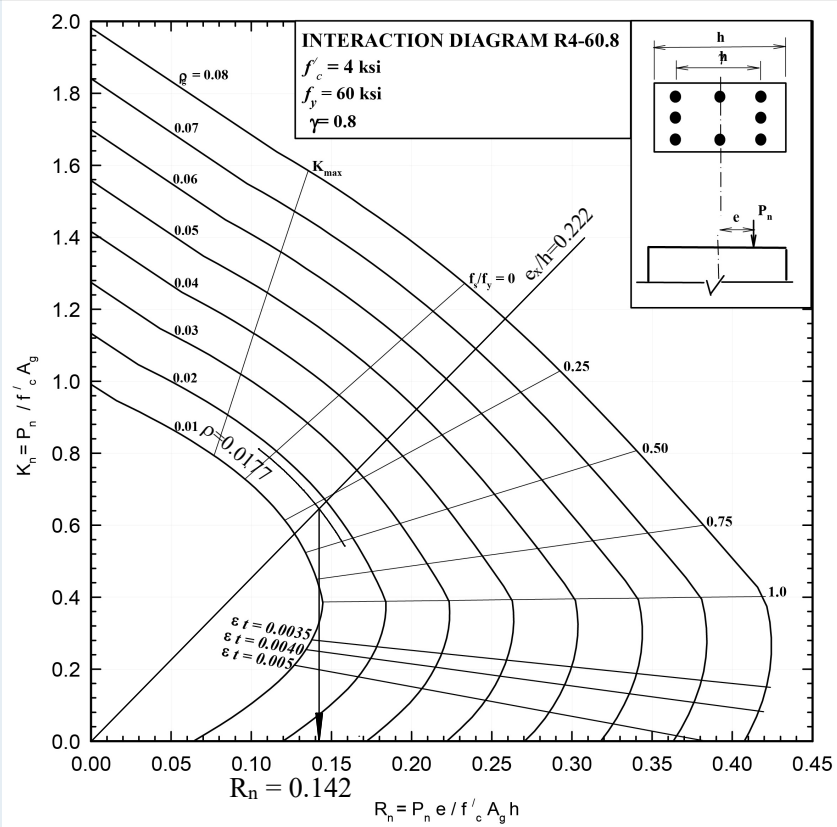
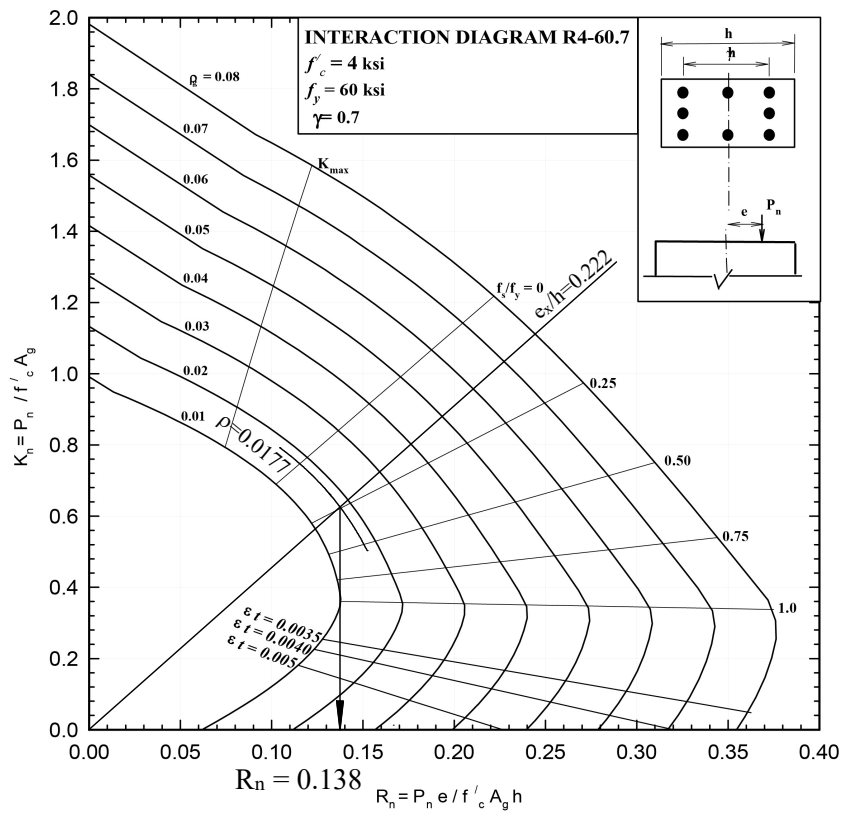
$$P_n = 0.65 (3108.50 \text{ kN}) = 2020.53 \text{ kN} > P_u$$

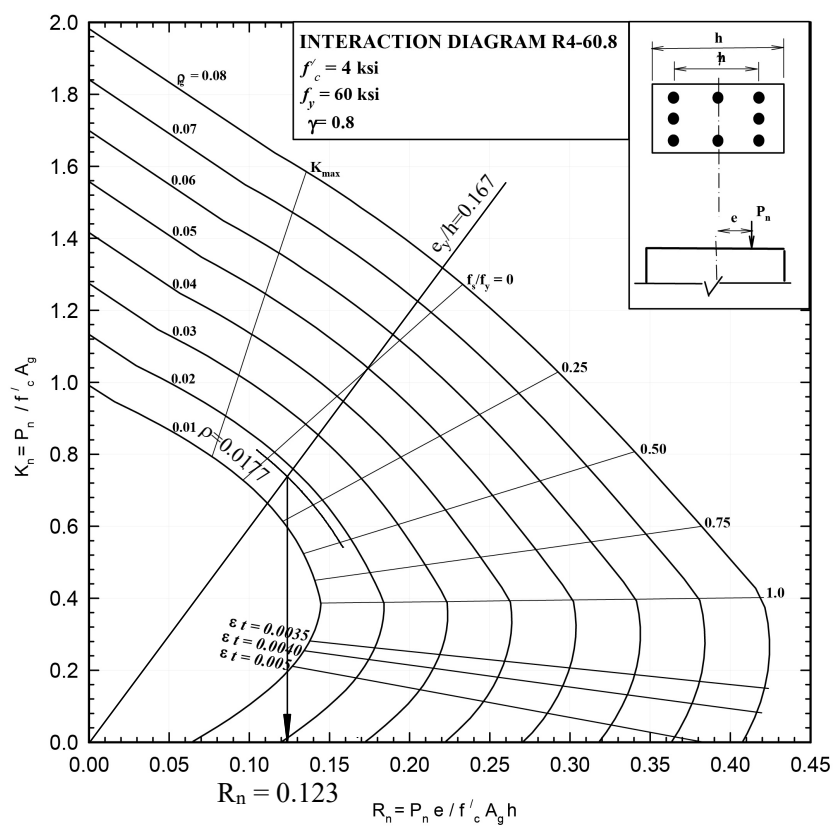
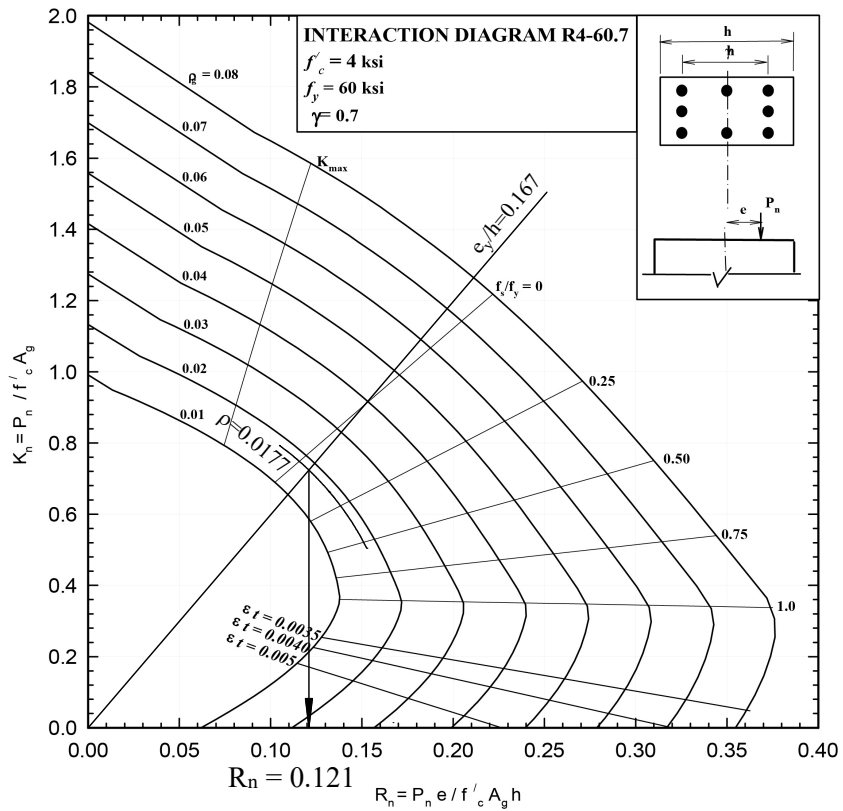
superando al esfuerzo requerido  $P_u = 1800 \text{ kN}$ , por lo cual el diseño podría considerarse como apropiado.

10. La capacidad de la columna diseñada supera en un 12.3% a la capacidad requerida, y considerando que se está trabajando con una cuantía superior a la mínima reglamentaria, se podría trabajar en la optimización de la sección, hasta quedar en un rango de capacidad no superior al 5% de la capacidad requerida.

11. Por reglamento, la distancia entre barras no apoyadas lateralmente no debe superar los 350mm, que en el presente caso no se cumple. Para ajustar el diseño a la norma, debe colocarse estribos adicionales, resultando el diseño definitivo como se muestra en la figura.









## Capítulo 6

# DISEÑO DE LOSAS

Las losas de hormigón armado, para efectos de análisis, pueden ser consideradas como placas indeformables que distribuyen las cargas que soportan de manera uniforme sobre toda su superficie. Así por ejemplo, si el peso derivado de la suma de todas las paredes de un nivel en un edificio es de  $200 \text{ kN}$ , y la losa de ese mismo nivel tiene una superficie de  $100 \text{ m}^2$ , la carga muerta con la que contribuyen las paredes será de  $200/100 = 2 \text{ kN/m}^2$ , independientemente de la distribución de las paredes.

Las losas se deberán diseñar en dos direcciones, excepto aquellas cuya relación de lado largo a lado corto sea similar o mayor de 2, en cuyo caso se deberán diseñar en una dirección.

Se diseña losa en una dirección si:

$$\frac{\text{lado largo}}{\text{lado corto}} \gtrsim 2 \quad (6.1)$$

### 6.1. LOSAS EN UNA DIRECCIÓN

El diseño de losas en una dirección se lo realiza siguiendo los lineamientos utilizados en el diseño de vigas, verificando los esfuerzos de flexión y corte. Generalmente se diseña la losa con un espesor tal que permita que todo el esfuerzo por corte sea absorbido por el concreto sin que sea necesario utilizar acero de refuerzo por corte. Con el propósito de evitar daños permanentes por deflexiones, el reglamento recomienda un espesor de losa mínimo  $h$  acorde a lo establecido en la Tabla 2.2.

#### 6.1.1. Losa maciza en dirección

Independientemente de las dimensiones de la losa, o de su relación de lado largo a lado corto, si una losa está apoyada solo en dos de sus lados, la misma deberá diseñarse en la dirección perpendicular a los lados apoyados, como se ilustra en la Figura 6.1.



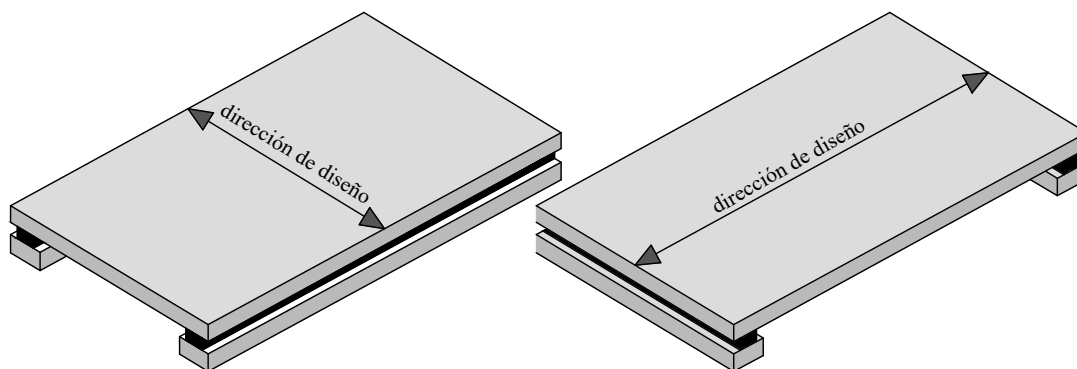


Fig. 6.1: Losas armadas en una dirección. En el caso de losas apoyadas solo en dos bordes, la dirección de diseño es siempre perpendicular a los apoyos.

### 6.1.2. Franja representativa de diseño para losas en una dirección

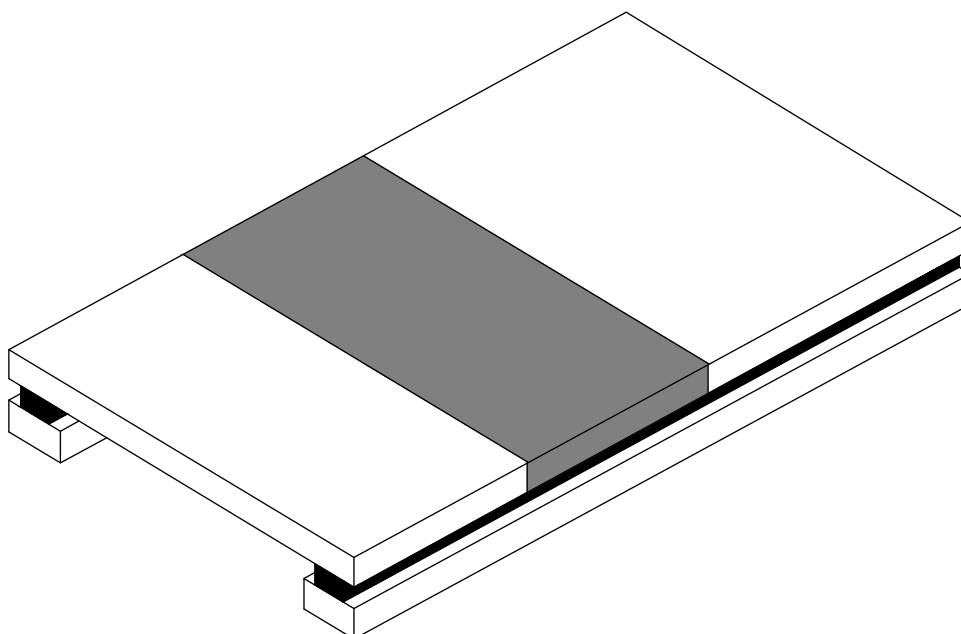


Fig. 6.2: Franja representativa de diseño para losa armada en una dirección

Debido a su tamaño, en el ejemplo 6.1, la losa se diseña como un todo, lo que en la práctica, cuando se trata de losas mucho más grandes, lo recomendable es tomar una franja representativa de diseño, sobre la cual se realiza todo el análisis, cuyos resultados se aplican a toda la losa, siempre y cuando se mantenga regularidad en la geometría. En la figura 6.2 se representa una losa de cuatro metros de largo por dos metros de ancho apoyada en sus lados largos. En este caso la losa se debe diseñar armada en una dirección, en sentido perpendicular a los lados apoyados, para lo cual se escogerá una franja representativa de 1 metro de ancho. Una vez diseñada la franja representativa, los resultados se reproducirán para toda la extensión de la losa. Si esta misma losa de 4x2 estuviera apoyada en los cuatro lados, el diseño se realizaría de igual manera en una dirección, perpendicular a los lados largos de la losa, y por el contrario si la losa está

poyada solo en los lados cortos, se diseña en la dirección perpendicular a los apoyos.

### 6.1.3. Sistema de viguetas en una dirección

El sistema consiste de viguetas espaciadas regularmente, con una losa colocada en la parte superior que actúa en una dirección, y puede utilizar material de alivianamiento que conforman los espacios entre viguetas, por lo que comunmente se las llama losas alivianadas, o nervadas. Este sistema de losas es mas bien de uso común en la conformación de pisos y techos, donde se requiera losas armadas en una dirección debido a la estructuración de la obra.

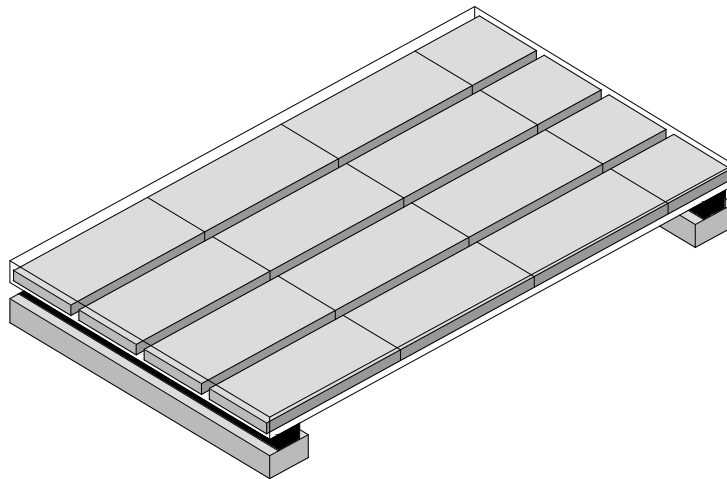


Fig. 6.3: Sistema de viguetas en una dirección

Las losas diseñadas acorde a este sistema deben cumplir con las siguientes características geométricas <sup>1</sup>:

1. El ancho de las nervaduras no debe ser menor de 100 mm en cualquier ubicación en toda su altura.
2. La altura total de las nervaduras, excluyendo el espesor de la losa, no debe ser mayor de 3.5 veces su ancho mínimo.
3. El espaciamiento libre entre las nervaduras no debe exceder de 750 mm.
4. Se permite tomar  $V_c$  como 1.1 veces los valores calculados en 3.3.1.
5. Para la integridad estructural, al menos una barra de la parte inferior en cada nervadura debe ser continua, y debe anclarse para desarrollar al menos  $1.25f_y$  en la cara de los apoyos.
6. La losa debe tener refuerzo perpendicular a las viguetas que cumpla lo requerido por flexión, pero no menor al refuerzo por retracción y temperatura que se requiera conforme 2.3.6, y considerando las concentraciones de carga en caso de que las haya.

---

<sup>1</sup>Tomado del ACI 318-25 [3], numeral 9.8

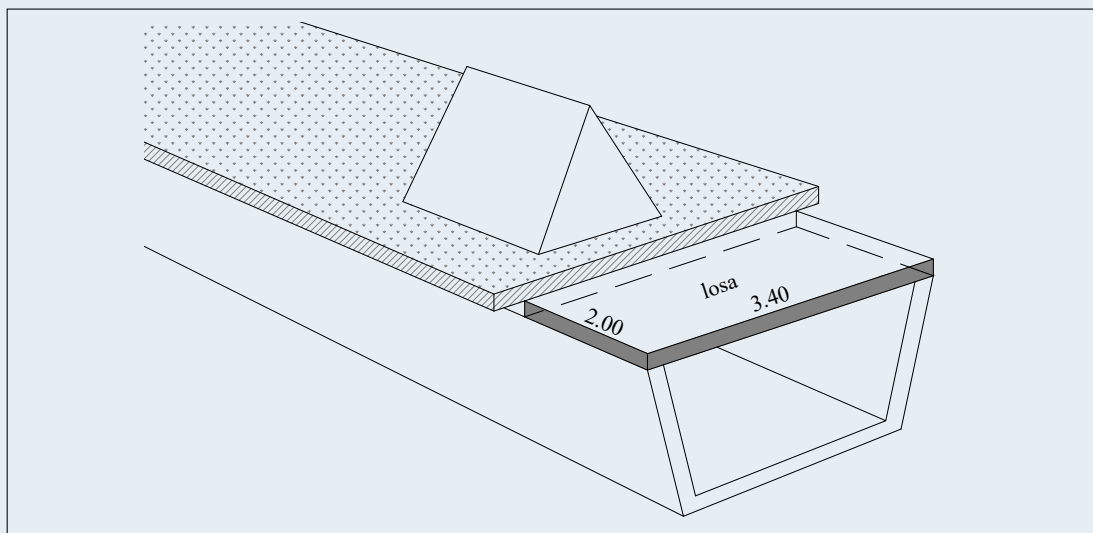
7. Las losas nervadas en una dirección que no cumplan con las condiciones previas, deben diseñarse como losas y vigas.

Cuando en la construcción del sistema se utilicen aligeramientos permanentes, el espesor de la losa sobre los aligeramientos no debe ser menor de  $1/12$  de la distancia libre entre viguetas, ni menor que  $40\text{ mm}$ . La resistencia a compresión de los aligeramientos deben cumplir con al menos el  $f'_c$  del concreto de las viguetas.

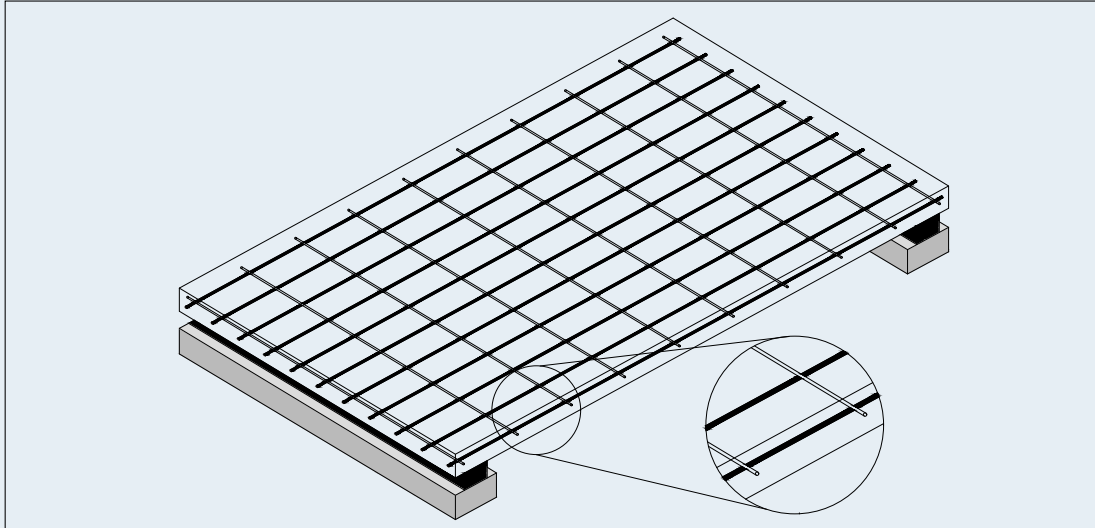
Al igual que sucede con las vigas, las viguetas podrían fallar por deflexión, por lo que se recurre al Tabla 2.5 para el prediseño de su altura; en caso contrario se debe calcular deflexiones.

### **Ejemplo** 6.1 *Diseño de losa maciza en una dirección*

Con la finalidad de evitar accidentes, se ha decidido proveer con una cubierta movable a un canal de drenaje que atraviesa un área recreacional. Para un manejo apropiado, las placas macizas de hormigón armado tendrán una dimensión de  $3.40\text{ m}$  de largo por  $2.00\text{ m}$  de ancho, y deberán diseñarse para que resistan las cargas que provocan una capa de suelo de  $30\text{ cm}$  de espesor sembrada con pasto, y la posible sobrecarga derivadas del posicionamiento de tiendas de campaña de uso recreacional. Se utilizará hormigón de peso normal con una resistencia a la compresión de  $28\text{ MPa}$  y acero con límite de fluencia de  $420\text{ MPa}$ .



**Solución:** La figura muestra el modelo de la losa a diseñarse, la misma que está apoyada en sus lados cortos, por lo que debe diseñarse en una dirección, reforzada en dirección perpendicular a sus lados cortos, con refuerzo por retracción y temperatura colocado de manera perpendicular al acero de refuerzo principal por flexión. En la resolución del problema se utilizan los datos mostrados en la tabla de datos del ejercicio.

**Tabla de datos:** Ejemplo 6.1

|                                                             |                      |
|-------------------------------------------------------------|----------------------|
| Ancho de la losa, $a$                                       | 2.00 m               |
| Largo de la losa, $b$                                       | 3.40 m               |
| Resistencia del concreto a compresión a los 28 días, $f'_c$ | 28 MPa               |
| Límite de fluencia del acero, $f_y$                         | 420 MPa              |
| Peso unitario del suelo, $\gamma_s$                         | 18 kN/m <sup>3</sup> |
| Peso unitario del concreto, $w_c$                           | 24 kN/m <sup>3</sup> |

Recurriendo a la tabla 2.2, con la finalidad de evitar deflexiones, obtenemos un espesor mínimo inicial de  $h = \ell/20 = 0.17$  m, el mismo que deberá verificarse en el diseño.

**1. Evaluación de cargas:** en la evaluación de cargas se considera las cargas que afectan la losa, que en este caso son: el peso propio del elemento, el peso del suelo de 30 cm de espesor, y la sobrecarga debido a la ubicación de tiendas de campaña. Puesto que el análisis se realiza siguiendo los mismos lineamientos utilizados en el diseño de vigas, obtendremos las cargas por metro lineal de losa.

$$\text{Peso propio de la losa} = 2.00(0.17)(24) = 8.16 \text{ kN/m}$$

$$\text{Peso del suelo} = 2.00(0.30)(18) = 10.80 \text{ kN/m}$$

$$\text{Total carga muerta} = 8.16 + 10.80 = 18.96 \text{ kN/m}$$

$$\text{Total carga viva} = 2.00(4.80) = 9.60 \text{ kN/m}$$

**Mayoración de cargas:**

$$U = 1.2(18.96) + 1.6(9.60) = 38.11 \text{ kN/m}$$

**2. Evaluación de esfuerzos:** Con la carga mayorada encontramos los siguientes esfuerzos:

$$M_u = \frac{U\ell^2}{8} = \frac{38.11(3.40)^2}{8} = 55.07 \text{ kN.m}$$

$$V_u = \frac{U\ell}{2} = \frac{38.11(3.40)}{2} = 64.79 \text{ kN}$$

**3. Revisión por cortante:** En losas, es preferible contar con un peralte suficiente que pueda soportar los esfuerzos cortantes, que si bien es posible reforzar por cortante, resulta más económico y práctico que el cortante sea absorbido por el concreto. En este caso, asumiendo que el acero de refuerzo pueda resultar de 16 mm de diámetro, y considerando 20 mm de recubrimiento, el peralte efectivo resulta,  $d = 142 \text{ mm}$ , con lo que el cortante nominal que absorbe el concreto, de acuerdo a la sección 3.3 resulta:

$$V_c = 0.75 \left( 0.17\sqrt{28}(2,000)(142) \right) = 191,605.31 \text{ N}$$

que es considerablemente mayor que el cortante requerido, por lo que se mantiene el espesor asumido de la losa, sin que sea necesario reforzar por cortante, lo que se corrobora mediante la aplicación de la ecuación 3.18.

$$V_u \leq \phi \left( V_c + 0.66\sqrt{f'_c}b_wd \right)$$

$$64,790 \text{ N} \leq 0.75 \left( 191,605.31 + 0.66\sqrt{28}(2,000)(142) \right) = 887,583.42 \text{ N}$$

**4. Diseño por flexión:** Como requisito de resistencia se estableció que  $\phi M_n \geq M_u$ , por lo que:

$$M_n = \frac{M_u}{\phi} = \frac{55.07}{0.9} = 61.19 \text{ kN.m}$$

De la sección 3.2, donde se establecieron las ecuaciones correspondientes al diseño por flexión, obtenemos:

De la ecuación 3.15

$$R = \frac{M_n}{bd^2} = \frac{61.19(10)^6}{2,000(142)^2} = 1.517 \text{ N/mm}^2$$

que reemplazando en la ecuación 3.14 tenemos:

$$1.517 = \rho(420) \left( 1 - 0.59\rho \frac{420}{28} \right)$$

y resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene:

$$\rho = 0.00374$$

que es mayor que el  $\rho_{min}$ , y menor que el  $\rho_{max}$ , por lo que se adopta como cuantía definitiva. Recordando que  $\rho = A_s/bd$ , podemos obtener la cantidad de acero de refuerzo requerida:

$$A_s = \rho bd = 0.00374(2,000)(142) = 1,062.16 \text{ mm}^2$$

si adoptamos  $\phi$  de 12 mm como acero de refuerzo, menor que el diámetro adoptado inicialmente, vamos a necesitar 10 barras, lo que da un total de  $1130.9 \text{ mm}^2$ , que supera a la cantidad calculada, por lo que la losa se reforzará con 10 barras de 12 mm distribuidas en todo lo ancho de la losa. Considerando el recubrimiento lateral total de  $2(20) + 12 = 52 \text{ mm}$ , resulta refuerzo de 12 mm cada 616.44 mm, lo que en la práctica lo dejamos en  $\phi 12 \text{ mm}$  cada 21.6 cm.

**6. Acero por retracción y temperatura:** De acuerdo al reglamento, se debe incorporar refuerzo por retracción y temperatura en una cantidad de

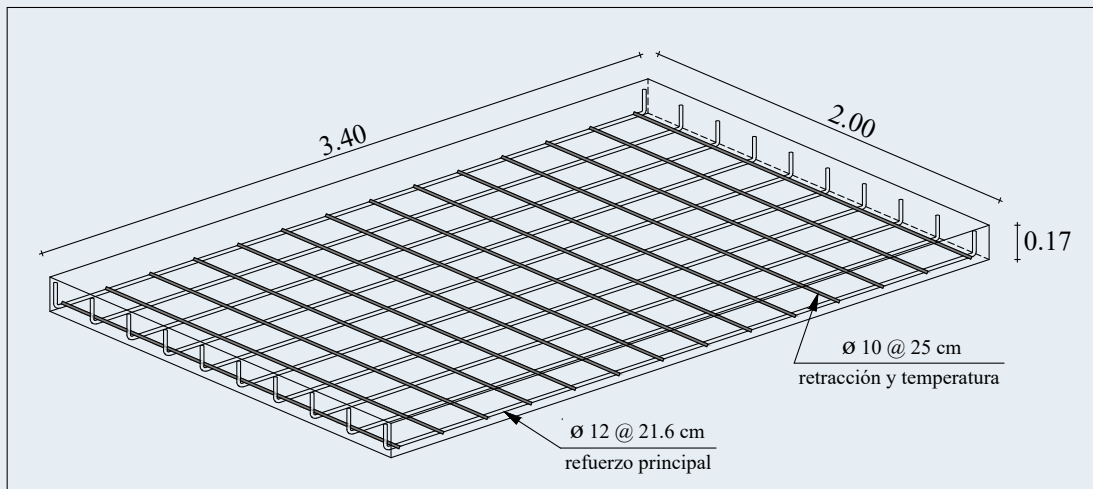
$$A_{rt} = 0.0018b_w h = 0.0018(1,000)(170) = 306 \text{ mm}^2$$

lo que se puede cubrir con 4 barras de 10 mm cada metro, es decir, una barra de 10 mm cada 25 cm, como se detalla en la siguiente figura.

**7. Integridad estructural:** Como se menciona en la sección 2.3.9, para losas en una dirección con apoyos discontinuos, el refuerzo debe anclarse en la cara del apoyo, sustituyendo  $f_y$  en la ecuación 2.52 por  $1.25f_y$

$$\ell_{dh} = \left( \frac{1.25f_y \Psi_e \Psi_s \Psi_{cc} \Psi_r}{21\lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b = \left( \frac{1.25(420)(1)(1)(1)(1)}{21(1)\sqrt{28}} \right) (12) = 57 \text{ mm}$$

pero sin ser menor de  $8d_b = 8(12) = 96 \text{ mm}$  o  $150 \text{ mm}$ , por lo que se debe implementar gancho de  $150 \text{ mm}$  en los extremos del refuerzo principal.



## 6.2. DISEÑO DE ESCALERAS

Cuando ocurre un sismo, un incendio, o cualquier otro evento que ponga en peligro la vida de las personas que habitan o usen una estructura, la escalera es la única ruta de escape para ponerse a salvo. En este contexto, es indispensable que la escalera, a más de servirnos para trasladarnos de un nivel a otro, dentro de una estructura, esta debe prestar condiciones estructurales, sin dejar de lado las condiciones arquitectónicas o de servicio.

### 6.2.1. Diseño arquitectónico de una escalera

Arquitectónicamente, una escalera de hormigón armado puede tener principalmente una forma de *I*, *L*, *U*, o conformar una espiral o cualquier otra forma que requiera el proyecto arquitectónico. Cualquiera sea su forma, toda escalera debe estar libre de obstáculos en su recorrido y sus accesos deben permanecer despejados en todo momento.

Es indispensable remarcar que trasladarse sobre una escalera debe ser una acción cómoda, no forzada, lo que implica que el ancho debe ser apropiado acorde a las necesidades, y los peldaños deben tener el tamaño apropiado para no producir cansancio al usuario. La normativa para escaleras[24], recomienda un ancho mínimo entre pasamanos de  $1200 \text{ mm}$ , aunque esto se debe decidir de acuerdo a la necesidad, manteniendo los criterios de comodidad de paso y circulación.

En cuanto al tamaño del escalón, la profundidad mínima para la huella debe ser  $280 \text{ mm}$ , y la contrahuella debe tener una altura máxima de  $180 \text{ mm}$  en escaleras de acceso al público. Para una relación óptima de huella-contrahuella, y paso cómodo, de acuerdo al módulo de ascensión cómoda de la figura 6.5, la norma establece que el recorrido de huella y contrahuella debe

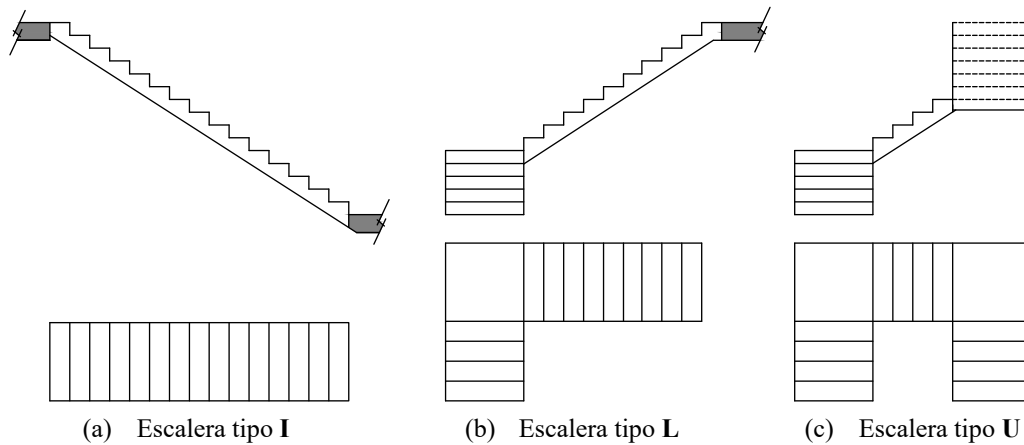


Fig. 6.4: Tipos de escaleras de hormigón armado

$$600 \text{ mm} \leq 2 \text{ contrahuellas} + 1 \text{ huella} \leq 660 \text{ mm}$$

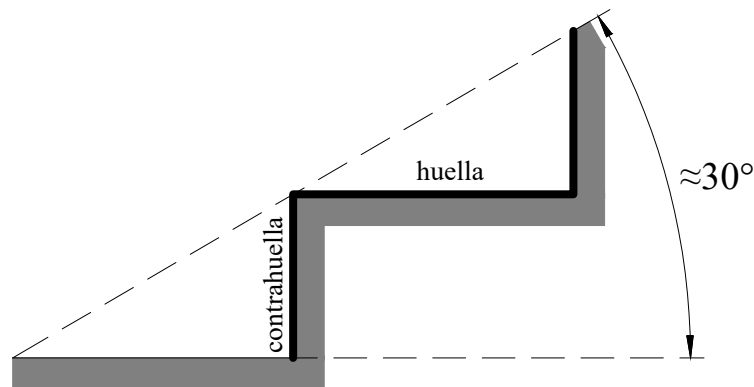


Fig. 6.5: Módulo de ascensión cómoda

guardar la relación 6.2.

$$600 \text{ mm} \leq 2a + b \leq 660 \text{ mm} \quad (6.2)$$

donde:

$a$  es el tamaño de la contrahuella dado en  $mm$ ;

$b$  es el tamaño de la huella dado en  $mm$

De acuerdo a la norma NTE INEN 2249, la relación huella-contrahuella debe estar entre  $600 \text{ mm}$  y  $660 \text{ mm}$ , sin limitar el ángulo que las mismas forman. A este respecto, Blondel recomienda que el ángulo se aproxime a  $30^\circ$ , limitando la relación huella-contrahuella de  $600 \text{ mm}$  a  $650 \text{ mm}$ .

En las escaleras es también indispensable conservar una altura mínima de paso, la cual se establece en  $2000 \text{ mm}$ , como se lo muestra en la figura 6.6. Siguiendo lo recomendado por la



normativa, finalmente, el tamaño del peldaño debe ser tal que la suma de todas las contrahuellas sea igual a la altura de entrepiso.

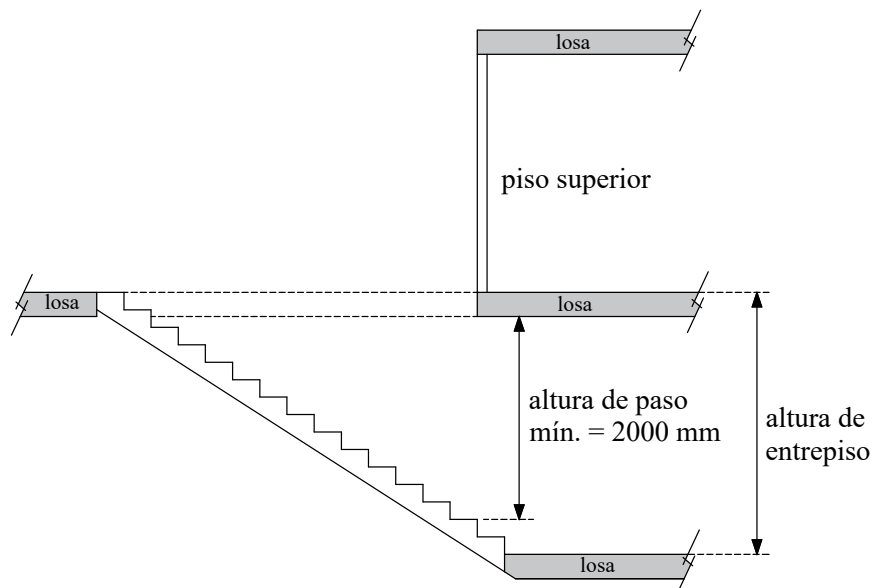


Fig. 6.6: Altura de paso mínima recomendada

Es necesario anotar que las dimensiones recomendadas se consideran a superficie de acabado, por lo que en el diseño estructural se dimensionará de acuerdo a las especificaciones establecidas para cada proyecto en particular. Las dimensiones de las escaleras deben relacionarse con la normativa correspondiente a la señalización de accesibilidad[22] y la normativa de accesibilidad a edificios[23].

### 6.2.2. Diseño estructural de la escalera

Una escalera de hormigón armado puede considerarse compuesta de dos partes: una losa inclinada reforzada en dirección, con refuerzos arreglados de manera perpendicular a los apoyos (revisar criterios de losas armadas en una sola dirección), y una serie de peldaños de hormigón simple dispuestos a lo largo de la losa que facilitan el acceso entre desniveles.

Con los criterios establecidos en la sección previa y con los respectivos planos de detalle, el diseñador deberá evaluar las cargas que afectan la escalera. Respecto a las cargas vivas, el reglamento (NEC-SE-CG)[15] establece  $2 \text{ kN/m}^2$  para escaleras de uso residencial unifamiliar y bifamiliar, y  $4.8 \text{ kN/m}^2$  para rutas de escape y salidas de emergencia, lo que el diseñador deberá tomar en consideración.

Para evaluar las cargas muertas el diseñador deberá considerar no solo el elemento estructural, sino también los acabados a utilizarse tanto en el cielo raso, como en el recubrimiento de los peldaños.

Durante el proceso de diseño se deberá escoger la forma de apoyo más conveniente, de tal manera que los tramos de la escalera sean lo más corto posible, reduciendo con esto el espesor de la rampa que conforma la escalera.

### **Ejemplo** 6.2 *Diseño de una escalera tipo I*

Se plantea el diseño de una escalera tipo I que cubre una altura de entrepiso de 2.80 m, ubicada en la parte interna de una casa de dos pisos de uso unifamiliar, para lo cual se utilizará hormigón con una resistencia a la compresión de  $f'_c = 28 \text{ MPa}$ , y acero con un límite de fluencia de  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . Para el recubrimiento inferior se utilizará mortero de arena cemento con espesor de 1.5 cm y peso unitario de  $\gamma_{ri} = 20 \text{ kN/m}^3$ , y para el recubrimiento superior se utilizará granito de 2.0 cm de espesor y peso unitario de  $\gamma_{rs} = 28 \text{ kN/m}^3$ , adherido con mortero de arena cemento de 1.5 cm de espesor. Considerar hormigón armado de peso normal de  $\omega_c = 24 \text{ kN/m}^3$ .

**Solución:** Del anunciado se extraen los datos resumidos en la siguiente tabla.

**Tabla de datos:** Ejemplo 6.2

|                                                             |                      |
|-------------------------------------------------------------|----------------------|
| Altura de entrepiso, $H$                                    | 2.80 m               |
| Resistencia del concreto a compresión a los 28 días, $f'_c$ | 28 MPa               |
| Límite de fluencia del acero, $f_y$                         | 420 MPa              |
| Espesor del recubrimiento inferior, $e_{ri}$                | 1.5 cm               |
| Peso unitario del mortero de arena cemento, $\gamma_m$      | 20 kN/m <sup>3</sup> |
| Espesor del recubrimiento superior, $e_{rs}$                | 1.5 cm               |
| Espesor del recubrimiento de granito, $e_g$                 | 2.0 cm               |
| Peso unitario granito, $\gamma_g$                           | 28 kN/m <sup>3</sup> |
| Peso unitario del hormigón armado, $w_c$                    | 24 kN/m <sup>3</sup> |

Conocida la altura de entrepiso, se procede a calcular el tamaño del peldaño, considerando que debe cumplirse que con la relación establecida en la ecuación 6.2. Esto se hace mediante tanteo, hasta obtener las dimensiones con una precisión de medio centímetro (el diseñador debe mantener en mente que su diseño debe ser construido, por lo tanto se requiere dimensiones que en la práctica se puedan utilizar de manera sencilla). A continuación se presenta un ejemplo del tanteo realizado. Se escoge la contrahuella con precisión de 5 mm, hasta obtener un número de peldaños preciso (no se puede construir medios peldaños), con esa contrahuella se escoge la huella, de tal manera que se cumpla

con la expresión 6.2. En este ejemplo se escoge una contrahuella de 175 mm que nos da 16 peldaños para una altura de  $H = 2800$  mm, y una huella de 300 mm, lo que nos da un ángulo de inclinación de  $30.26^\circ$  garantizando un paso cómodo.

| $H$<br>mm | Contrahuella<br>mm | peldaños<br># | huella<br>mm | $600 \leq 2a + b \leq 660$<br>mm | $\angle$ |
|-----------|--------------------|---------------|--------------|----------------------------------|----------|
| 2800      | 160                | 17.50         | x            | x                                | x        |
| 2800      | 165                | 16.97         | x            | x                                | x        |
| 2800      | 170                | 16.47         | x            | x                                | x        |
| 2800      | 175                | 16.00         | 280          | 630                              | 32.01    |
| 2800      | 175                | 16.00         | 290          | 640                              | 31.11    |
| 2800      | 175                | 16.00         | 300          | 650                              | 30.36    |
| 2800      | 180                | 15.56         | x            | x                                | x        |
| 2800      | 180                | 15.14         | x            | x                                | x        |

Definidas las dimensiones del peldaño, y aplicando el teorema de Pitágoras, la longitud inclinada que cubre la escalera resulta  $\ell_i = 5.56$  m. De acuerdo a la Tabla 2.2, para losas macizas armadas en una dirección y empotradas en sus extremos, se establece un espesor de losa  $h = \ell/28 = 5.56 \text{ m}/28 = 0.20$  m, y considerando un ancho mínimo de 1.2 m de acuerdo a la normativa, se tiene la geometría completa, como se muestra más adelante, con la que se procede al cálculo de volúmenes y cargas (Por claridad del ejemplo, en el diseño y cálculo de la escalera no se incluye los pasamanos).

Como se mencionó previamente, el cuerpo principal de la escalera es una losa maciza inclinada, por lo que para su análisis se considera su longitud inclinada.

**Cálculo de carga viva por metro lineal de losa (CV):** Se debe considerar que la carga viva reglamentaria se extiende sobre una superficie horizontal. En el caso de una escalera que se extiende de forma inclinada, la carga viva aplicada a la proyección horizontal de 4.80 m debe ser re proyectada para la longitud inclinada de 5.56 m, por lo que para su cálculo se considera la proyección horizontal de la escalera; en este caso 4.80 m. De acuerdo a la normativa, para uso residencial unifamiliar, corresponde una carga viva de  $2 \text{ kN/m}^2$ , lo que re proyectada para la longitud inclinada resulta:

$$CV = [4.80(1.20)(2.0)]/5.56 = 2.07 \text{ kN/m}$$

**Cálculo de carga muerta por metro lineal de losa (CM):** A continuación se detalla el peso de cada uno de los elementos que conforman las cargas muertas.

$$\text{Peso de rampa} = 5.56(1.20)(0.20)(24.00) = 32.03 \text{ kN}$$

$$\text{Peldaños} = 16[0.175(0.30/2)(1.20)(24.00)] = 12.10 \text{ kN}$$

$$\text{Rec. inferior} = 5.56(1.20)(0.015)(20.00) = 2.00 \text{ kN}$$

$$\text{Rec. superior} = 16[(0.175 + 0.30)(1.2)](0.015)(20.00) = 2.74 \text{ kN}$$

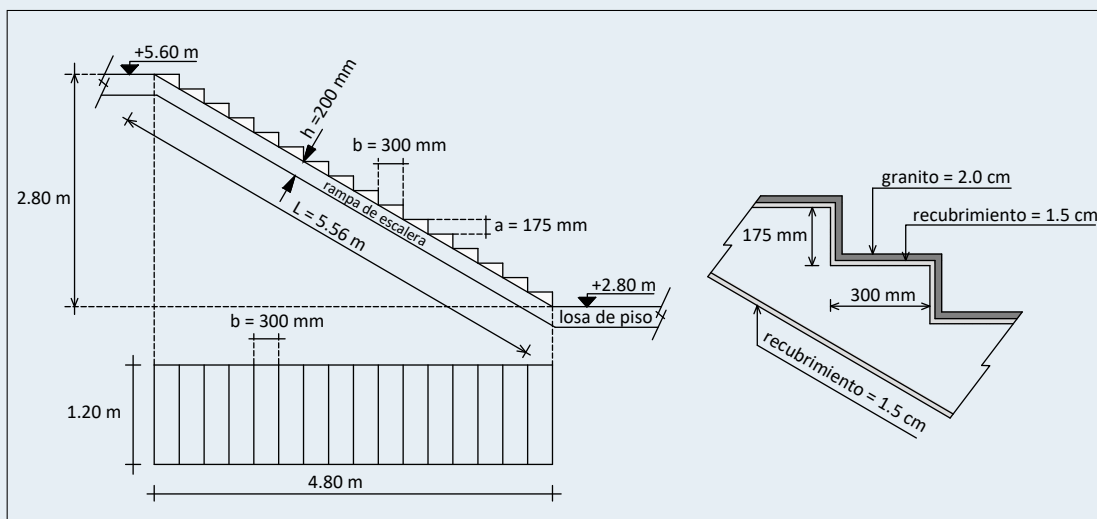
$$\text{Granito} = 16[(0.175 + 0.30)(1.2)](0.02)(28.00) = 5.11 \text{ kN}$$

$$CM = (32.03 + 12.10 + 2.00 + 2.74 + 5.11)/5.56 = 9.71 \text{ kN/m}$$

Es importante destacar en este caso, debido a que los peldaños son colados al mismo tiempo que la losa, el peso del concreto utilizado en la evaluación de cargas es el mismo que el utilizado para la losa.

#### Mayoración de cargas:

$$U = 1.2(CM) + 1.6(CV) = 1.2(9.71) + 1.6(2.07) = 14.96 \text{ kN/m}$$



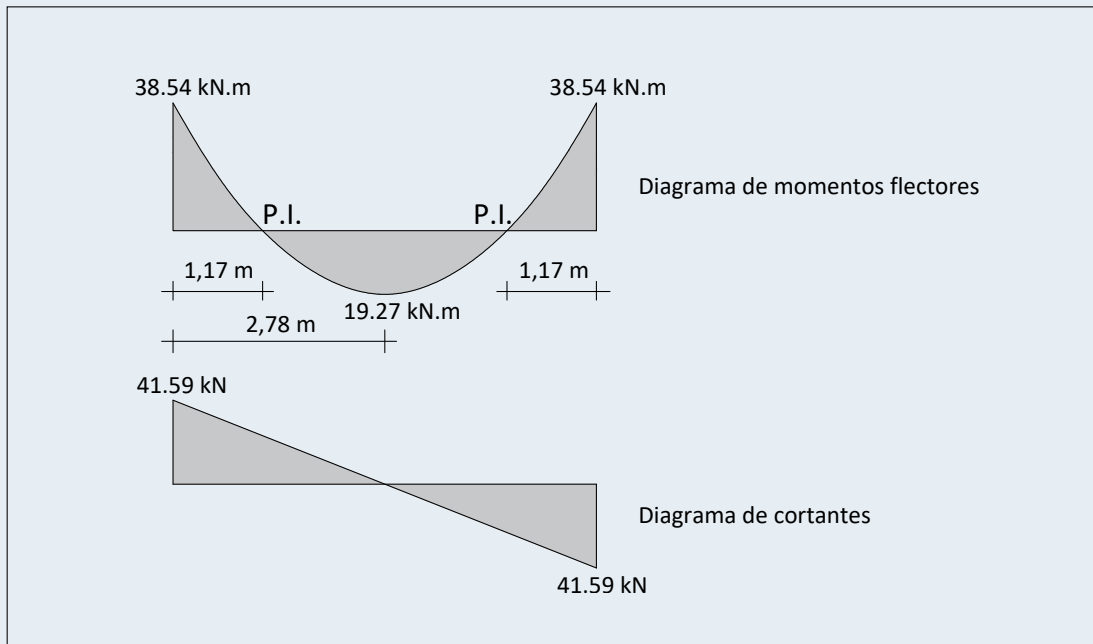
#### Cálculo de esfuerzos:

Los esfuerzos que se presentan corresponden a una franja de losa de 1.20 m de ancho, por 5.56 m de longitud, empotrada en sus extremos cortos, y con carga repartida de manera uniforme, lo que se representa en la figura siguiente.

$$M_{emp} = \frac{U\ell^2}{12} = \frac{14.96(5.56)^2}{12} = 38.54 \text{ kN.m}$$

$$M_{max} = \frac{U\ell^2}{24} = \frac{14.96(5.56)^2}{24} = 19.27 \text{ kN.m}$$

$$V_{max} = \frac{U\ell}{2} = \frac{14.96(5.56)}{2} = 41.59 \text{ kN}$$



### **Cálculo del acero de refuerzo:**

Considerando la protección mínima para losas de 20 mm, y asumiendo que se tendrá acero de refuerzo de  $\phi = 12$  mm, resulta un peralte efectivo  $d = 200 \text{ mm} - 20 \text{ mm} - 6 \text{ mm} = 174 \text{ mm}$ , con lo que se procede a diseñar.

Conociendo la geometría definitiva y los esfuerzos generados por las cargas de servicio, se debe ahora calcular el elemento por flexión y corte. Considerando el relativamente bajo espesor de la losa, el factor de falla sería el esfuerzo cortante, por lo que se procede a revisar en primera instancia para el cortante crítico.

De acuerdo al reglamento, el cortante crítico se puede calcular a la distancia  $d$  a partir de la cara del apoyo, por lo que se adopta la nomenclatura  $V_d$  para no confundirlo con el cortante último máximo  $V_u$  que se calcula en los extremos del elemento. Este cortante crítico debe compararse con el cortante que pueden absorber los elementos sometidos tan solo a cortante y flexión trabajando en una dirección,  $V_c$ , el cual se determina mediante la Ecuación 3.19, con lo que se tiene que:

$$V_c = 0.17(1.0)\sqrt{28}(1200)(174) = 187827N = 187.83 \text{ kN}$$

*Por brevedad del ejercicio, en este caso no revisamos el cortante con el cálculo más detallado.*

*Del diagrama de cortantes se obtiene el cortante crítico  $V_d = 39.56 \text{ kN}$ .*

*Adicionalmente, para el caso del cortante en una dirección, el Reglamento [3] establece que la sección transversal del elemento debe cumplir con la Ecuación 3.18, de la que se tiene que:*

$$V_u \leq \phi(V_c + 0.66\sqrt{f'_c}b_wd)$$

$$V_d \leq 0.75 \left( 187827 + 0.66\sqrt{28}(1200)(174) \right) = 687779N = 687.78 \text{ kN}$$

*Como efectivamente se verifica que  $V_d = 39.56 \text{ kN}$  es menor que  $687.78 \text{ kN}$ , no es necesario reforzar por cortante, y se acepta el diseño.*

#### **Cálculo del acero por flexión:**

*Como se vio previamente, el momento máximo positivo al centro del claro es de  $M_u = 19.27 \text{ kN.m}$ , y el momento máximo negativo en los apoyos es de  $M_u = 38.54 \text{ kN.m}$ . Con estos valores, y considerando lo expresado en las ecuaciones 3.14 y 3.16, tenemos:*

*Para  $M_u = 38.54 \text{ kN.m}$ , a partir de ecuación 3.16*

$$R = \frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{38.54(10)^6}{0.9(1200)(174)^2} = 1.18 \text{ N/mm}^2$$

*este valor reemplazo en la ecuación 3.14, y resolviendo la ecuación cuadrática resultante, obtenemos:*

$$\rho = 0.00288$$

*Para  $M_u = 19.27 \text{ kN.m}$ , a partir de ecuación 3.16*

$$R = \frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{19.27(10)^6}{0.9(1200)(174)^2} = 0.59 \text{ N/mm}^2$$

este valor reemplazo en la ecuación 3.14, y resolviendo la ecuación cuadrática resultante, obtenemos:

$$\rho = 0.00142$$

#### **Cálculo y selección del acero de refuerzo:**

Una vez calculada la cuantía de acero requerida, esta se debe verificar contra el rango de cuantía permitida por el Reglamento, no debiendo ser menor a la mínima, ni mayor a la máxima reglamentaria. En este ejercicio, las cuantías calculadas resultan menor que la mínima, por lo que se considera la cuantía mínima para el cálculo del acero de refuerzo, lo que se puede lograr con  $7\phi 12$  mm que equivalen a  $791.7 \text{ mm}^2$ , como se verifica en la siguiente tabla.

| Sección | $M_u$<br>(kN.m) | $M_n$<br>(kN.m) | $b$<br>(mm) | $d$<br>(mm) | $R$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $\rho_{def}$ | $A_s$<br>(mm <sup>2</sup> ) |
|---------|-----------------|-----------------|-------------|-------------|-----------------------------|--------------|-----------------------------|
| Empot.  | 38.54           | 42.82           | 1200        | 174         | 1.18                        | 0.00333      | 695                         |
| Centro  | 19.27           | 21.41           | 1200        | 174         | 0.59                        | 0.00333      | 695                         |

Con el acero principal calculado, resta calcular el acero por retracción y temperatura, que de acuerdo a lo indicado en la sección 2.3.6 corresponde a 0.0018 de la sección bruta, que para nuestro caso, para 1 metro de longitud de escalera corresponde a:

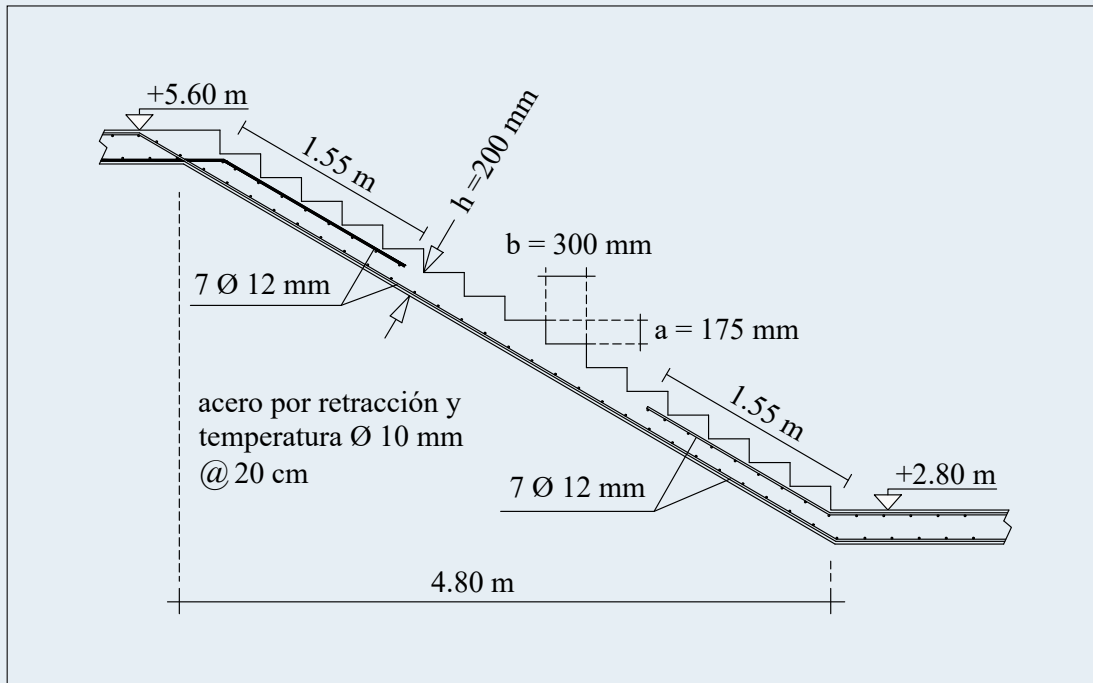
$$A_{rt} = 0.0018b_w h = 0.0018(1000)(200) = 360 \text{ mm}^2$$

lo que se completa con  $5\phi 10$  mm ( $392.5 \text{ mm}^2$ ), o lo que equivalen a decir  $1\phi 10$  mm cada 20 cm.

El armado final de la escalera se observa a continuación, donde se ha implementado el cálculo de la longitud de desarrollo y anclaje de acuerdo a lo referido en la sección 2.3.7. Para el corte del acero para momento negativo, se respeta la distancia hasta los puntos de inflexión (P.I.) calculadas en el análisis de esfuerzos.

$$\ell_d = \left( \frac{f_y \Psi_t \Psi_e \Psi_g}{2.1 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b = \left( \frac{420(1.0)(1.0)(1.0)}{2.1(1.0)\sqrt{28}} \right) (12) = 454 \text{ mm}$$

$$\ell_a = \text{Max}(d; 12d_b; \ell_n/16) = \text{Max}(174; 12(12); 5560/16) = 347.5 \text{ mm}$$



## 6.3. LOSAS EN DOS DIRECCIONES

Con el fin evitar daños permanentes debido a deflexiones, para losas macizas en dos direcciones el reglamento establece espesores mínimos en Tablas 2.3 y 2.4.

Para el diseño de losas en dos direcciones se recomienda tres métodos: Sistema Reticular de Viguetas, Método de Diseño Directo, y Método del Marco equivalente.

### 6.3.1. Sistema reticular de viguetas en dos direcciones

Este sistema consiste de viguetas espaciadas regularmente de forma reticular, con una losa colocada en la parte superior, diseñadas para resistir esfuerzos en dos direcciones ortogonales.

Las losas diseñadas por este sistema deben cumplir con las siguientes características geométricas<sup>2</sup>:

1. El ancho de las nervaduras no debe ser menor de 100 mm en cualquier ubicación en toda su altura.

<sup>2</sup>Tomado del ACI 318-25 [3], numeral 8.8



2. La altura total de las nervaduras, excluyendo el espesor de la losa, no debe ser mayor de 3.5 veces su ancho mínimo.
3. El espaciamiento libre entre las nervaduras no debe exceder de 750 mm.
4. Se permite tomar  $V_c$  como 1.1 veces los valores calculados en 3.3.1.
5. Para la integridad estructural, al menos una barra de la parte inferior en cada nervadura debe ser continua, y debe anclarse para desarrollar al menos  $1.25f_y$  en la cara de los apoyos.
6. El área perpendicular a las viguetas debe cumplir la resistencia requerida por flexión, considerando las concentraciones de carga y debe ser al menos igual al refuerzo para retracción y temperatura requerido en 2.3.6.
7. La construcción de sistemas reticulares en dos direcciones que no cumplan con lo previsto en esta sección, deben diseñarse como losas y vigas.

Cuando en la construcción del sistema se utilicen aligeramientos permanentes, el espesor de la losa sobre los aligeramientos no debe ser menor de  $1/12$  de la distancia libre entre viguetas, ni menor que 40 mm. La resistencia a compresión de los aligeramientos deben cumplir con al menos el  $f'_c$  del concreto de las viguetas.

Al igual que sucede con las vigas, las viguetas podrían fallar por deflexión, por lo que se recurre al Tabla 2.5 para el prediseño de su altura; en caso contrario se debe calcular deflexiones.

#### ACI respecto al Método de Diseño Directo

Las ediciones del Reglamento de 1971 hasta 2014 contienen como métodos de diseño para losas sometidas a cargas gravitacionales al Método de Diseño Directo, y al Método del Pórtico Equivalente. El Comité 318 retira estos métodos de la edición del Reglamento 2019 por considerar que están muy bien fundamentados y disponibles en libros de texto, y que son tan solo dos de los métodos actualmente disponibles para el diseño de losas, a la vez sin desaconsejar su uso.

### 6.3.2. Método de Diseño Directo

El método de diseño directo permite la distribución de momentos en las diferentes secciones de una losa, y en las vigas si las hubiera, cumpliendo con los criterios de seguridad y funcionamiento. Para esto el reglamento[8] especifica el porcentaje correspondiente que se debe asignar a cada sección de losa. Tres pasos fundamentales contempla el método:

1. Determinación del momento estático mayorado total,

2. Distribución del momento estático mayorado total a las secciones de momentos positivos y negativos, y
3. Distribución de los momentos mayorados positivos y negativos a las franjas de losas.

### Limitaciones del Método de Diseño Directo

Puesto que el método de diseño directo es aproximado, para su aplicación se debe verificar previamente las siguientes limitaciones<sup>3</sup>.

1. Debe existir un mínimo de tres vanos continuos en cada dirección.
2. Las longitudes de luces contiguas medidas centro a centro de los apoyos en cada dirección no deben diferir en más de un tercio de la luz mayor.
3. Los paneles de las losas deben ser rectangulares, con una relación entre la luz mayor y menor, medidas centro a centro de los apoyos del panel, no mayor de 2.
4. Las columnas pueden estar desalineadas hasta un 10 por ciento de la luz (medido en la dirección del desalineamiento) con respecto a cualquier eje que pase por el centro de columnas sucesivas.
5. Todas las cargas deben ser únicamente gravitacionales y estar uniformemente distribuidas en todo el panel.
6. La carga viva no mayorada no debe exceder de dos veces la carga muerta no mayorada.
7. Para un panel con vigas entre los apoyos en todos los lados, debe satisfacerse la siguiente ecuación para las dos direcciones perpendiculares.

$$0.2 \leq \frac{\alpha_{f1} \ell_2^2}{\alpha_{f2} \ell_1^2} \leq 5.0 \quad (6.3)$$

donde  $\alpha_{f1}$  y  $\alpha_{f2}$  se calculan de acuerdo con:

$$\alpha_f = \frac{E_{cb} I_b}{E_{cs} I_s} \quad (6.4)$$

### Momento estático mayorado total del vano

El momento estático mayorado total,  $M_o$ , para un vano debe determinarse en una franja de losa limitada lateralmente por el eje central de los paneles adyacentes al eje que une los apoyos de la franja.

---

<sup>3</sup>Las limitaciones del Método de Diseño Directo se toman textualmente del ACI 318-14 [8]

La suma absoluta del momento positivo y el promedio de los momentos negativos, en cada dirección, no debe ser menor que:

$$M_o = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8} \quad (6.5)$$

donde:

1.  $\ell_n$  es la luz libre en dirección del análisis, medida de cara a cara de los apoyos (columnas, capiteles, ábacos, cartelas o muros), y que no debe ser menor que  $0.65\ell_1$
2.  $\ell_1$  es el tamaño del paño medido de eje a eje en la dirección del análisis
3.  $\ell_2$  es el ancho de la franja de losa medido de eje a eje, perpendicular a la dirección del análisis. Cuando se considere el vano adyacente paralelo a un borde, la distancia del borde al eje central del panel debe sustituir a  $\ell_2$ .

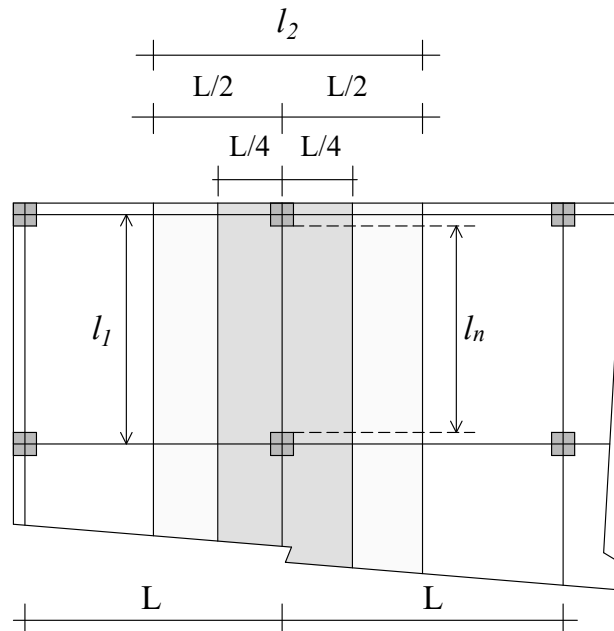


Fig. 6.7: Franja de losa

### Distribución del momento estático total mayorado

En un vano interior, se asigna 65% del momento estático mayorado total al momento negativo, y 35% al momento positivo. En un vano final, el momento estático mayorado total se distribuye de acuerdo a la tabla 6.1:

La sección crítica para  $M_u$  negativo se localiza en la cara de los apoyos rectangulares. En el caso de vanos contiguos se escogerá el mayor de los dos momentos negativos interiores entre vanos adyacentes. Los bordes de losa o vigas de borde se deben diseñar para resistir por torsión parte de los momentos exteriores negativos  $M_u$  que le corresponda.

Tabla 6.1: Coeficientes de distribución en un vano final (Tabla 8.10.4.2 [8])

| Momento                   | Borde exterior no restringido | Losas con vigas entre todos los apoyos | Losas sin vigas entre apoyos interiores, sin viga de borde | Losas si vigas entre apoyos interiores, con viga de borde | Borde exterior totalmente restringido |
|---------------------------|-------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| Momento negativo interior | 0.75                          | 0.70                                   | 0.70                                                       | 0.70                                                      | 0.65                                  |
| Momento positivo          | 0.63                          | 0.57                                   | 0.52                                                       | 0.50                                                      | 0.35                                  |
| Momento negativo exterior | 0                             | 0.16                                   | 0.26                                                       | 0.30                                                      | 0.65                                  |

### Momentos mayorados en las franjas de columnas

Los momentos mayorados totales calculados para la franja de losa se deben distribuir, en la fracción que corresponda, en las franjas de columnas de acuerdo con lo señalado en el reglamento. De ser necesario debe interpolarse linealmente entre los valores encontrados.

Al momento negativo interior  $M_u$  se le asignan las fracciones señaladas en la tabla 6.2.

Tabla 6.2: Fracción del momento negativo interior  $M_u$  en una franja de columna (Tabla 8.10.5.1 [8])

| $\left(\frac{\alpha_f \ell_2}{\ell_1}\right)$ | $\ell_2/\ell_1$ |      |      |
|-----------------------------------------------|-----------------|------|------|
|                                               | 0.50            | 1.00 | 2.00 |
| 0.75                                          | 0.70            | 0.75 | 0.75 |
| $\geq 1.0$                                    | 0.90            | 0.75 | 0.45 |

Al momento negativo exterior  $M_u$  se le asignan las fracciones señaladas en la tabla 6.3, donde  $\beta_t$  se calcula usando la ecuación 6.6, y el valor de  $C$  se calcula usando la ecuación 6.7.

$$\beta_t = \frac{E_{cb}C}{2E_{cs}I_s} \quad (6.6)$$

$$C = \Sigma \left( 1 - 0.63 \frac{x}{y} \right) \frac{x^3 y}{3} \quad (6.7)$$

Tabla 6.3: Fracción del momento negativo exterior  $M_u$  en una franja de columna (Tabla 8.10.5.2 [8])

| $\left(\frac{\alpha_{f1} \ell_2}{\ell_1}\right)$ | $\beta_t$  | $\ell_2/\ell_1$ |      |      |
|--------------------------------------------------|------------|-----------------|------|------|
|                                                  |            | 0.50            | 1.00 | 2.00 |
| 0                                                | 0          | 1.00            | 1.00 | 1.00 |
|                                                  | $\geq 2.5$ | 0.75            | 0.75 | 0.75 |
| $\geq 1.0$                                       | 0          | 1.00            | 1.00 | 1.00 |
|                                                  | $\geq 2.5$ | 0.90            | 0.75 | 0.45 |

Para secciones de forma de  $T$  o  $L$ , el valor de  $C$  se calcula dividiendo la figura en sectores rectangulares menores, donde:

$E_{cb}$  Módulo de elasticidad del concreto de la viga

$E_{cs}$  Módulo de elasticidad del concreto de la losa

$I_s$  Momento de inercia de la losa

$x$  Dimensión menor del sector de la sección analizada

$y$  Dimensión mayor del sector de la sección analizada

Al momento positivo  $M_u$  se le asignan las fracciones señaladas en la tabla 6.4.

| $\left(\frac{\alpha_{f1} \ell_2}{\ell_1}\right)$ | $\ell_2/\ell_1$ |      |      |
|--------------------------------------------------|-----------------|------|------|
|                                                  | 0.50            | 1.00 | 2.00 |
| 0                                                | 0.60            | 0.60 | 0.60 |
| $\geq 1.0$                                       | 0.90            | 0.75 | 0.45 |

Tabla 6.4: Fracción del momento positivo  $M_u$  en una franja de columna (Tabla 8.10.5.5 [8])

”Para las losas con vigas entre los apoyos, la porción de la losa localizada en la franja de columnas debe ser diseñada para resistir la porción de los momentos de la franja de columna que no sean resistidos por las vigas.[8]”

### Momentos mayorados en vigas

A las vigas entre los apoyos se les debe asignar una porción del momento de la franja de columna  $M_u$  de acuerdo a la tabla 6.5, y de ser necesario los valores asignados deben interpolarse entre los consignados en la tabla.

Tabla 6.5: Fracción del momento  $M_u$  de una franja de columna asignable a las vigas (Tabla 8.10.7.1 [8])

| $\left( \frac{\alpha_{f1} \ell_2}{\ell_1} \right)$ | Coeficiente de distribución |
|----------------------------------------------------|-----------------------------|
| 0                                                  | 0                           |
| $\geq 1.0$                                         | 0.85                        |

Ademas de los momentos calculados usando la tabla 6.5, las vigas se deben diseñar para resistir los momentos causados por su peso propio y todas las cargas aplicadas directamente sobre ellas.

### **Momentos mayorados en las franjas centrales**

”La fracción de los momentos mayorados positivo y negativo no resistida por las franjas de columnas debe asignarse proporcionalmente a cada mitad de las franjas centrales correspondientes.

Cada franja central debe ser diseñada para resistir la suma de los momentos asignados a sus dos mitades de franja central.

Una franja central adyacente y paralela a un borde apoyado en un muro, debe ser diseñada para resistir el doble del momento asignado a la mitad de la franja central correspondiente al primer eje de apoyos interiores.”

### **6.3.3. Método del Pórtico Equivalente**

Pocas veces se puede tener una losa que cumpla con las limitaciones del Método de Diseño Directo. En esos casos, el reglamento recomienda el método del pórtico equivalente, para lo cual se debe realizar el correspondiente análisis estructural, considerando todos los elementos pertenecientes al pórtico en análisis.

Para su aplicación, siguiendo las mismas consideraciones geométricas observadas en el Método de Diseño Directo, se trazan franjas de losa a lo largo de los ejes de columnas, como se muestra en la Figura 6.7. Las franjas de losas de todos los niveles, agregadas en un solo pórtico, corresponden al pórtico equivalente.



## Capítulo 7

# DISEÑO DE CIMENTACIÓN

Una vez realizado el análisis y diseño de la superestructura, los esfuerzos y cargas a los que los elementos están sometidos se deben transmitir al suelo de implantación mediante la cimentación de la estructura, o subestructura. La cimentación debe ser capaz de soportar todas las cargas y esfuerzos, de tal manera que brinde estabilidad a la estructura ante posibles hundimientos, deslizamientos o volcamientos. De acuerdo a la NEC [19] las cimentaciones se clasifican en profundas cuando  $D_f/B > 4$ , y superficiales cuando  $D_f/B \leq 4$ , donde  $D_f$  es la profundidad de desplante, y  $B$  es el ancho de la cimentación.

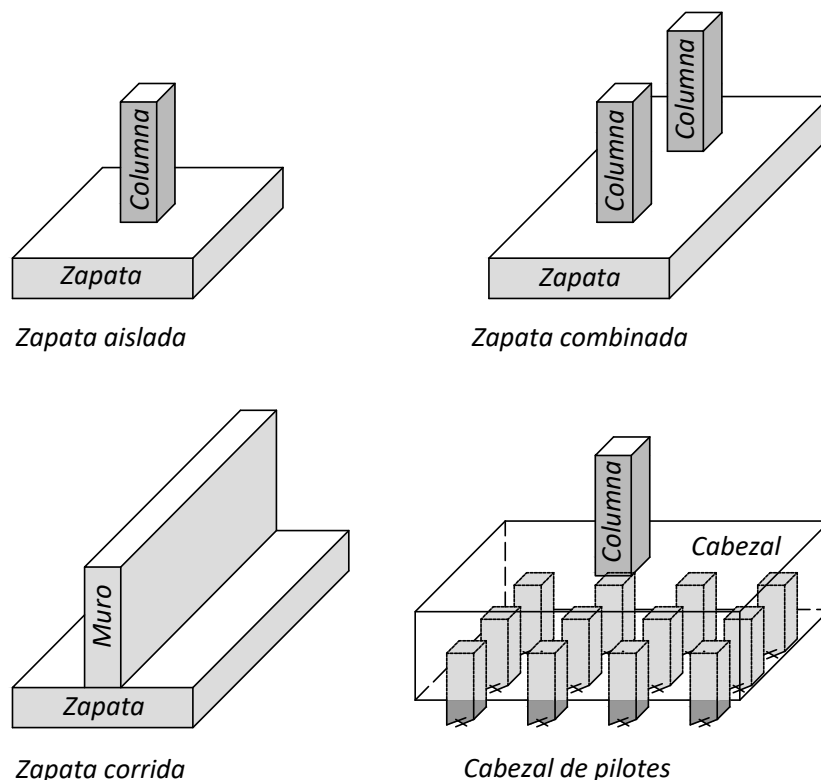


Fig. 7.1: Tipos de zapatas

En función principalmente del peso de la superestructura y de las condiciones del suelo



de implantación, el ingeniero decidirá el diseño de una cimentación superficial o profunda. Como cimentaciones profundas podemos considerar a los pilotes aislados o grupos de pilotes, y las pilas, cuyo objetivo es transmitir las cargas a estratos de suelos profundos con la capacidad portante adecuada, debido a que las capas superficiales del suelo no proveen el soporte necesario para diseñar cimentaciones superficiales.

Este texto no trata en detalle el estudio completo de todos los tipos de cimentaciones posibles, sino del diseño estructural de algunas cimentaciones superficiales en relación con el objetivo del documento, basándonos para esto en lo que señala el Reglamento [3]. Para un estudio detallado del diseño de cimentaciones el lector puede consultar libros de texto como los indicados en las referencias [25] y [26]. Ante lo dicho, cabe indicar sin embargo, que los ejemplos expuestos a continuación siguen un lineamiento general de diseño que puede emplearse en cualquier tipo de cimentación.

Es necesario también anotar, que el libro se centra en el diseño del elemento estructural, por lo que no se analizará los fenómenos de asentamiento, deslizamiento, volcamiento o volteo, asuntos que están fuera del ámbito del diseño del hormigón armado.

El proceso de diseño de zapatas puede resumir en cuatro pasos:

1. Determinación de las características del suelo: perfil del suelo, nivel freático, tipo de suelo, estabilidad de taludes, permafrost, peso unitario del suelo, capacidad portante, predicción de asentamientos, licuación de suelo.
2. Análisis de la estructura del edificio, cálculo de cargas.
3. Selección del tipo de cimentación de acuerdo a las condiciones locales.
4. Diseño y detalle de la cimentación, de acuerdo al Reglamento[3].

En cuanto a las cimentaciones sobre pilotes, a diferencia de las cimentaciones superficiales donde la columna transmite su carga directamente al suelo de implantación mediante la zapata, cuando se trata de cabezales, la columna transmite su carga a los pilotes, por lo que el diseño de estos elementos y su capacidad de carga es fundamental.

La capacidad de carga del pilote se denomina resistencia admisible,  $R_a$ , y esta puede ser afectada negativamente si la distancia entre pilotes que pertenecen a un grupo no es la apropiada, debido a que los esfuerzos que los pilotes transmiten al suelo se pueden traslapar. Para evitar esa disminución de capacidad de carga de los pilotes cuando actúan en grupo, en la práctica se utiliza una distancia mínima medida centro a centro de pilotes,  $s$ , que debe ser por lo menos  $2.5D$ , aunque se recomienda que sea de 3 a  $3.5D$ , donde  $D$  es el diámetro del pilote[26]. Cuando se trabaja con grupo de pilotes, se recomienda que la distribución de los mismos siga el esquema mostrado en la figura 7.2 para los diferentes grupos de pilotes [25].

### Factor de efecto de tamaño en zapatas

En lo que concierne al factor de efectos de tamaño,  $\lambda_s$ , considerado para el análisis por corte, en lo que concierne al diseño de cimentaciones superficiales de hormigón armado, el reglamento [3], asumiendo un comportamiento rígido de los miembros superficiales menciona en el numeral 13.2.6.2, que

- a) Para esfuerzo cortante en una dirección,  $V_c$  debe ser tomado como:

$$V_c = 2\lambda\sqrt{f'_c}b_wd$$

- b) Para esfuerzo cortante en dos direcciones, el factor de efecto de tamaño,  $\lambda_s$ , especificado en 22.6, debe ser tomado como 1.0.

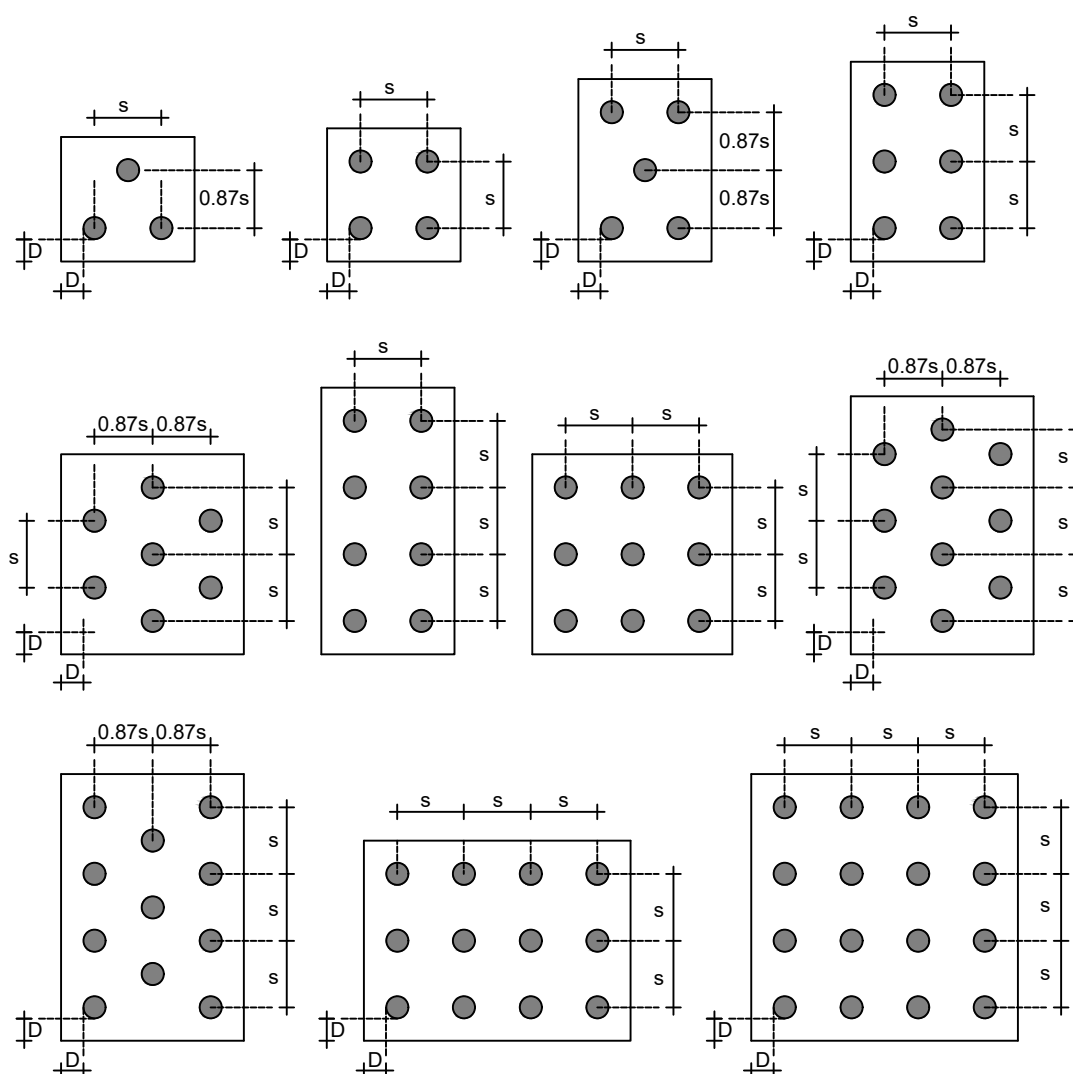


Fig. 7.2: Distribución recomendada para grupo de pilotes de diámetro  $D$ , donde la distancia mínima a ejes de pilotes es  $s \geq 2.5D$ , recomendado 3 a  $3.5D$ .

## 7.1. ZAPATAS AISLADAS

La zapata aislada se usa para soportar la carga de una sola columna. Estos tipos de zapatas son las más comúnmente usadas cuando las cargas son ligeras y las columnas no se encuentran tan cerca unas de otras, como sucede en la construcciones de cimentaciones para viviendas, por ejemplo. Cuando se cuenta con un suelo de cimentación muy resistente, la zapata aislada podría ser también una opción para cimentar las columnas de un edificio.

### **Ejemplo** 7.1 *Diseño de una zapata aislada de borde*

Diseñar una zapata para una columna de borde de 300 mm x 600 mm, que soporta una carga muerta  $D = 200$  kN, una carga viva de  $L = 500$  kN, y un momento flector de  $M = 280$  MNmm. La zapata debe cimentarse a una profundidad de desplante  $D_f$  de 2.0 m, en la que la resistencia admisible del terreno  $q_a$  es de 250 kN/m<sup>2</sup>. Para la construcción de la zapata se usará hormigón de peso normal con una resistencia a la compresión cilíndrica a los 28 días,  $f'_c$ , de 28 MPa, y acero con límite de fluencia,  $f_y$ , de 420 MPa.

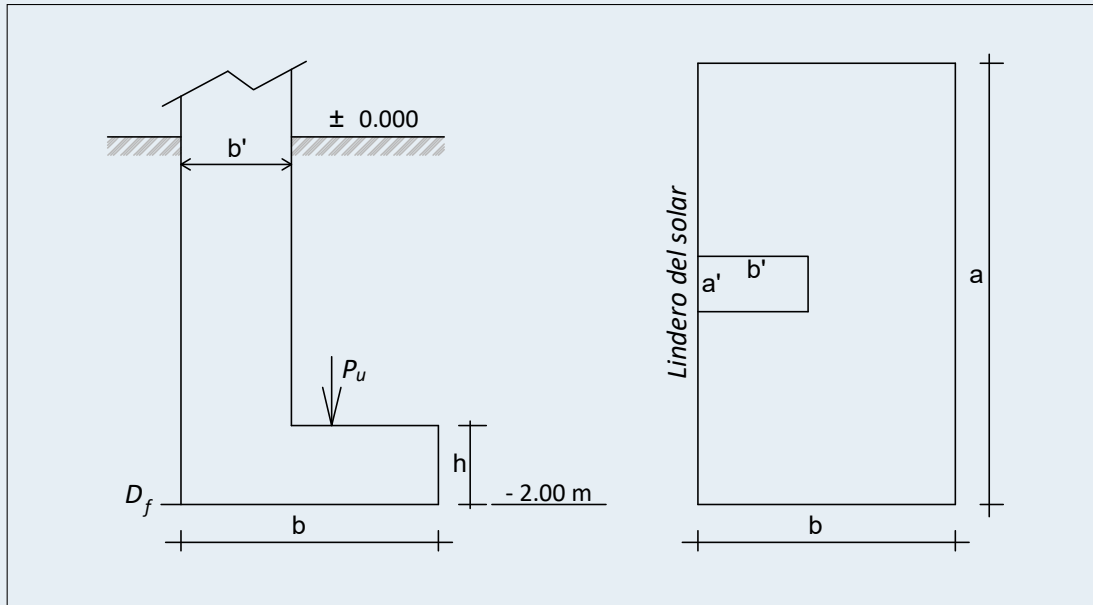
**Nota:** La carga admisible del terreno se calcula a partir de los datos obtenidos en el estudio de suelos, y no constan en este documento.

**Tabla de datos:** Ejemplo 7.1

|                                                               |                       |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Carga muerta, $D =$                                           | 200 kN                |
| Carga viva, $L =$                                             | 500 kN                |
| Momento flector, $M =$                                        | 280 kN.m              |
| Carga admisible del terreno, $q_a =$                          | 250 kN/m <sup>2</sup> |
| Resistencia del concreto a compresión a los 28 días, $f'_c =$ | 28 MPa                |
| Límite de fluencia del acero, $f_y =$                         | 420 MPa               |
| Profundidad de desplante, $D_f =$                             | 2.00 m                |
| Dimensión de la columna en dirección del eje y, $a' =$        | 300 mm                |
| Dimensión de la columna en dirección del eje x, $b' =$        | 600 mm                |
| Peso del hormigón armado, $w_c =$                             | 24 kN/m <sup>3</sup>  |
| Peso del suelo, $\gamma_s =$                                  | 18 kN/m <sup>3</sup>  |

**Solución:**

El enunciado plantea el diseño de una zapata aislada para soportar una columna de borde (lindero lateral o posterior del terreno disponible con situación de vecindad), por lo que se deberá considerar la excentricidad con la que la columna transfiere la carga respecto al centroide de la zapata, como se ilustra en la figura siguiente.



**1. Área de la zapata:** La primera tarea en el diseño de una zapata es el dimensionamiento del área de implantación, la misma que debe ser lo suficientemente adecuada para transmitir la carga al suelo de implantación, sin que la zapata o el suelo fallen.

Puesto que no conocemos el área de implantación, no podemos tener la certeza del peso de la zapata, pero podemos obtener el peso promedio entre el suelo y el hormigón, que resulta  $\gamma_p = (24 + 18)/2 = 21 \text{ kN/m}^3$ , con lo que se puede determinar el valor de la resistencia efectiva del terreno,  $q_e$ .

$$q_e = q_a - h(\gamma_p) = 250 - 2.0(21) = 208 \text{ kN/m}^2$$

por lo que el área requerida de la zapata resulta:

$$A_{req} = \frac{D + L}{q_e} = \frac{200 + 500}{208} = 3.37 \text{ m}^2$$

Para que los esfuerzos sobre el terreno sean uniformes, es necesario que el baricentro geométrico de la zapata coincida con el baricentro de cargas. Como además de las

cargas de las columnas, la zapata soporta un momento flector, se debe considerar la excentricidad, que con respecto al baricentro de la columna es:

$$e = \frac{M}{P} = \frac{280 \text{ kN.m}}{200 \text{ kN} + 500 \text{ kN}} = 0.4 \text{ m} = 400 \text{ mm}$$

Situando el baricentro de cargas a un excentricidad  $e = 400 \text{ mm}$  del baricentro de la columna, resulta que el baricentro de cargas estará a  $700 \text{ mm}$  del borde de la columna. Para conseguir que el baricentro geométrico de la zapata coincida con el baricentro de cargas, el ancho de la zapata  $b$  debe ser:

$$\text{ancho} = b = 2(700) = 1400 = 1.4 \text{ m}$$

el largo  $a$  de la zapata es:

$$\text{largo} = a = \frac{A_{req}}{b} = \frac{3.37}{1.4} = 2.40 \text{ m}$$

por lo que el área real de la zapata es  $= 1.4(2.40) = 3.36 \text{ m}^2$

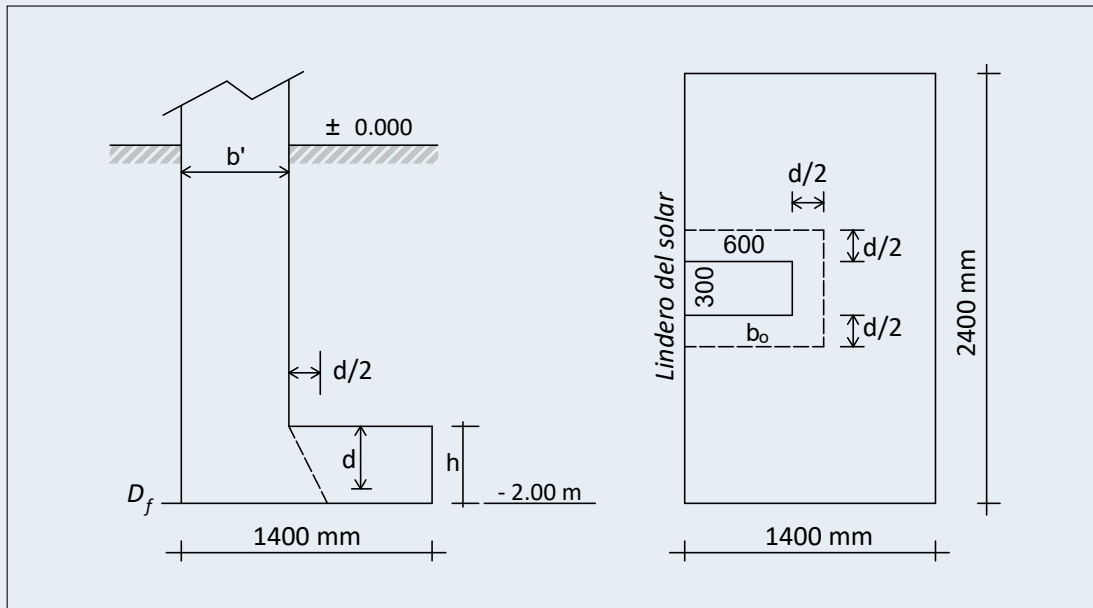
**2. Determinación del peralte:** El peralte es determinante en el cálculo del cortante resistente de la zapata. Para esto necesitamos calcular inicialmente la resistencia última del terreno ( $q_u$ ), para lo cual se utilizan las cargas mayoradas, de lo que resulta

$$q_u = \frac{1.2(200) + 1.6(500)}{3.36} = 309.52 \text{ kN/m}^2$$

Por lo general el esfuerzo por corte es lo que determina el diseño de la zapata (debido a que son áreas relativamente pequeñas, la flexión es un esfuerzo subordinado), por lo que se verifica en primera instancia los esfuerzos por corte en una y dos direcciones (punzonamiento), para lo que se necesita escoger el peralte adecuado.

Como punto de partida se asume un peralte  $d = 350 \text{ mm}$

**3. Comprobación del cortante en dos direcciones (punzonamiento):** La sección crítica para el cortante en dos direcciones se localiza a una distancia  $d/2$  medida a partir de la cara de la columna, como se visualiza en la figura siguiente, determinando un perímetro crítico  $b_o$ .



En el presente caso, por tratarse de una columna de borde, el perímetro crítica  $b_o$  solo consta de tres lados, ya que el borde libre no desarrolla resistencia:

$$b_o = 2 \left( 600 + \frac{350}{2} \right) + \left( 300 + 2 \left( \frac{350}{2} \right) \right) = 2200 \text{ mm}$$

de lo que resulta un área crítica  $A_o$ :

$$A_o = 775(650) = 503750 \text{ mm}^2 = 0.5 \text{ m}^2$$

La fuerza que origina el punzonamiento es:

$$V_{u(p)} = (A_{zapata} - A_o)q_u = (3.36 - 0.50)(309.52) = 885.23 \text{ kN}$$

Debe verificarse que  $\phi V_c > V_{u(p)}$ , en caso contrario debe reforzarse para cortante por punzonamiento.  $V_c$  resulta de multiplicar el esfuerzo en dos direcciones proporcionado del concreto  $v_c$ , por el área de la sección crítica  $b_o d$ . Para esto el Reglamento[3], permite calcular  $v_c$  mediante las ecuaciones de la tabla 3.1, para cuyo cálculo se debe encontrar en primer lugar  $\lambda_s$ ,  $\beta$ , y  $\alpha_s$ , recordando que  $\lambda = 1.0$  para concreto de peso normal, y puesto que de acuerdo al reglamento[6] el factor de efectos de tamaño se puede despreciar para el cálculo de cimentaciones,  $\lambda_s = 1.0$ .

La relación del lado largo al lado corto de la sección transversal de la columna es  $\beta = 600/300 = 2$ , y tratándose de columna de borde tenemos  $\alpha_s = 30$ , por lo que el cálculo de  $V_c$  resulta:

$$V_c = 0.33\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}b_o d$$

$$V_c = 0.33(1.0)(1.0)\sqrt{28}(2200)(350) = 1344571N = 1344.57 \text{ kN}$$

$$V_c = 0.17\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}b_o d$$

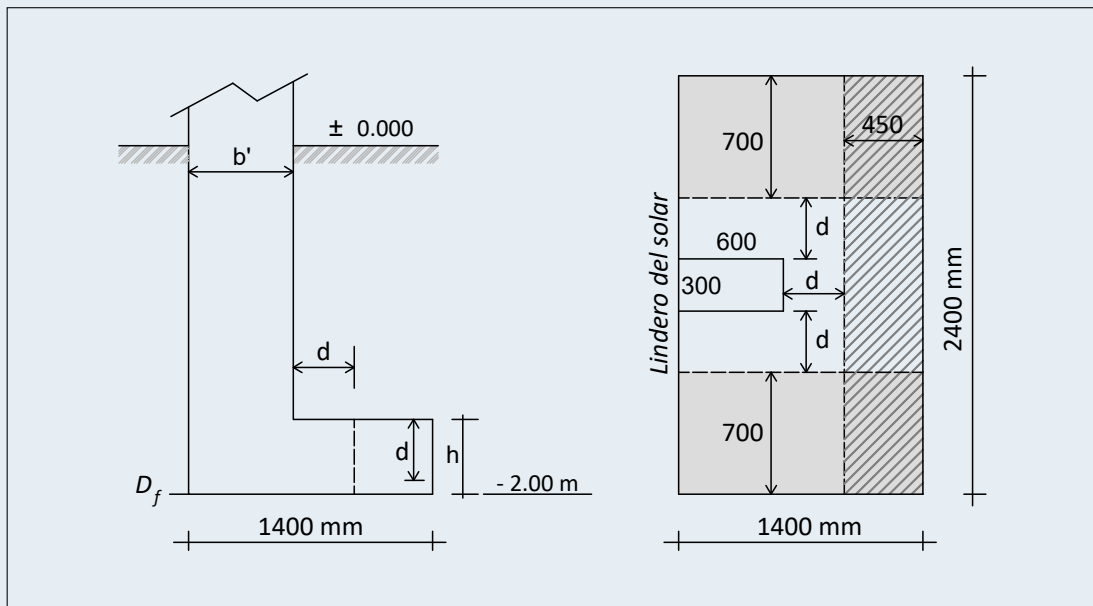
$$V_c = 0.17\left(1 + \frac{2}{2}\right)(1.0)(1.0)\sqrt{28}(2200)(350) = 1385315N = 1385.32 \text{ kN}$$

$$V_c = 0.083\left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_o}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}b_o d$$

$$V_c = 0.083\left(2 + \frac{30(350)}{2200}\right)(1.0)(1.0)\sqrt{28}(2200)(350) = 2290400N = 2290.40 \text{ kN}$$

Se toma el menor valor calculado, por lo que  $\phi V_c = 0.75(1344.57) = 1008.43 > V_{u(p)}$ , por lo que no será necesario reforzar por cortante en dos direcciones.

**4. Comprobación del cortante en una dirección:** La sección crítica por cortante en una dirección se produce a una distancia  $d$  medida a partir de la cara de la columna, y debe verificarse tanto en la dirección del eje de las  $x$ , como en la dirección del eje de las  $y$ , como se detalla a continuación.



*Debe verificarse que  $\phi V_c > V_{u(c)}$  tanto en la dirección del eje de las  $x$ , como en la dirección en el eje de las  $y$ , de lo contrario deberá reforzarse por cortante. Para el cálculo del cortante que resiste el concreto en una dirección, el Reglamento[3] provee con la ecuación 3.19, a menos que se calcule de forma más detalla mediante el uso de las ecuaciones 3.20 a 3.22.*

*El cortante último requerido  $V_{u(c)}$  se lo obtiene multiplicando el área de corte por la resistencia última del terreno.*

#### **Cortante en sentido $y$**

$$V_{u(c)y} = (\text{área de corte})q_u = (0.45(2.40))(309.52) = 334.28 \text{ kN}$$

$$V_c = 0.17\lambda\sqrt{f'_c}b_wd = 0.17(1.0)\sqrt{28}(2400)(350) = 755626\text{N} = 755.63 \text{ kN}$$

$$\phi V_c = 0.75(755.63) = 566.72\text{kN} > V_{u(c)y}$$

*$\therefore$  no se necesita reforzar*

#### **Cortante en sentido $x$**

$$V_{u(c)x} = (\text{área de corte})q_u = (0.70(1.40))(309.52) = 303.33 \text{ kN}$$

$$V_c = 0.17\lambda\sqrt{f'_c}b_wd = 0.17(1.0)\sqrt{28}(1400)(350) = 440782\text{N} = 440.78 \text{ kN}$$

$$\phi V_c = 0.75(440.78) = 330.59\text{kN} > V_{u(c)x}$$

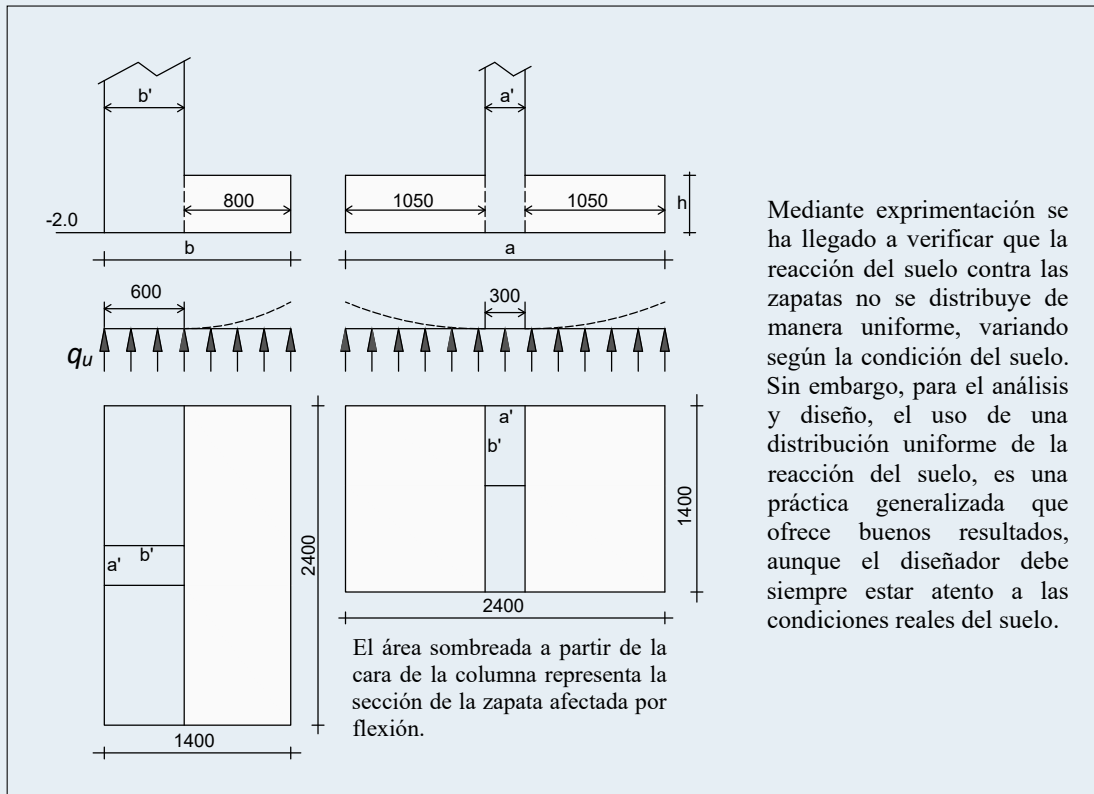
*$\therefore$  no se necesita reforzar*

*Con estos resultados se verifica que el peralte asumido inicialmente es suficiente para resistir los esfuerzos cortantes en una y dos direcciones, por lo que se puede continuar con el diseño.*

*Si  $V_u$  resulta mayor que  $\phi V_c$ , se debe reforzar por cortante, o redimensionar la zapata de tal manera que se cumpla con  $\phi V_c > V_{u(c)}$  (resulta más económico incrementar el peralte, que colocar acero de refuerzo).*

**5. Diseño por flexión:***Para el diseño por flexión se considera las franjas de zapatas afectadas por la resistencia última del terreno  $q_u$  ubicadas a partir de la cara de la columna, como se detalla en la figura siguiente, realizándose el análisis en las dos direcciones ortogonales.*





### Análisis en dirección $b$

En este sentido, la resistencia última del terreno,  $q_u$  afecta a lo largo de  $a = 2400$  mm provocando una reacción  $U = q_u(a) = 309.52(2.40) = 742.85$  kN/m con un brazo de palanca es 800 mm, ocasionando una sección crítica a lo largo de  $a'$ .

$$M_b = \frac{U\ell^2}{2} = \frac{742.85(0.80)^2}{2} = 237.71 \text{ kN.m} = 237.71 \text{ MNmm}$$

### Análisis en dirección $a$

En este sentido,  $q_u$  afecta a lo largo de  $b = 1400$  mm provocando una reacción  $U = q_u(b) = 309.52(1.40) = 433.33$  kN/m, en ambos lados de la columna, con un brazo de palanca es 1050 mm, ocasionando una sección crítica a lo largo de  $b'$ .

$$M_a = \frac{U\ell^2}{2} = \frac{433.33(1.05)^2}{2} = 238.87 \text{ kN.m} = 238.87 \text{ MNmm}$$

Con estos valores de momentos calculamos el acero de refuerzo para cada sentido, para lo cual utilizamos las ecuaciones ya trabajadas en la sección 3.2.

$$M_n = Rbd^2$$

$$R = \frac{M_n}{bd^2}$$

$$R = \rho f_y \left( 1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

$$\left( 0.59 \frac{f_y^2}{f'_c} \right) \rho^2 - f_y \rho + R = 0$$

| <i>Sentido</i> | $M_u$<br>(kN.m) | $M_n$<br>(kN.m) | $b$<br>(mm) | $d$<br>(mm) | $R$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $\rho_{def}$ | $A_s$<br>(mm <sup>2</sup> ) |
|----------------|-----------------|-----------------|-------------|-------------|-----------------------------|--------------|-----------------------------|
| <i>b</i>       | 237.71          | 264.12          | 2400        | 350         | 0.8984                      | 0.00333      | 2797                        |
| <i>a</i>       | 238.87          | 265.41          | 1400        | 350         | 1.5476                      | 0.00381      | 1867                        |

Los 2797 mm<sup>2</sup> de refuerzo calculado para el sentido *b* se distribuyen en dirección perpendicular al lado de 2400 mm, y los 1867 mm<sup>2</sup> se distribuyen en dirección perpendicular al lado de 1400 mm.

**6. Distribución del refuerzo:** El acero de refuerzo debe distribuirse considerando los espaciamientos y recubrimientos reglamentarios.

#### **Análisis en dirección *b***

La armadura en el sentido del lado menor *b* de la zapata se la divide en dos partes. La primera en una franja central de ancho igual al lado menor de la zapata de 1400 mm, donde se coloca armadura en una cantidad de  $\gamma_s A_s$ , en la que:

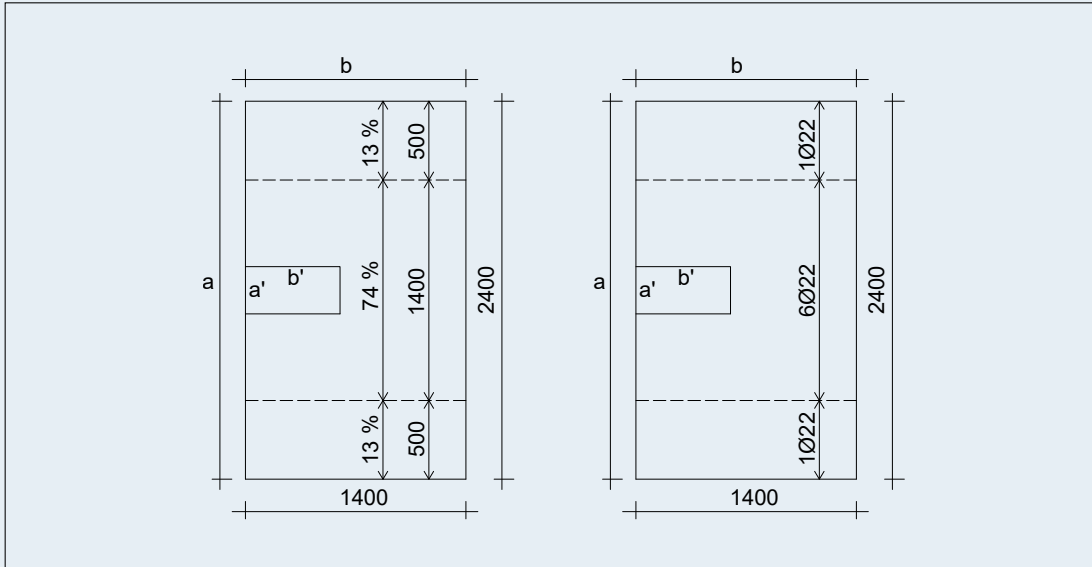
$$\gamma_s = \frac{2}{\beta + 1}$$

$$\beta = \frac{\text{Lado mayor de la zapata}}{\text{Lado menor de la zapata}}$$

En nuestro caso resulta,  $\beta = 2.4/1.4 = 1.71$ , y  $\gamma_s = 2/(1.71 + 1) = 0.74$

Esto significa que en la franja central debe ir el 74% de la sección de acero calculada para

este sentido, y el 26% restante debe distribuirse en las dos franjas laterales restantes. Por lo tanto, en la franja central se colocará  $2797(0.74) = 2070 \text{ mm}^2$  de refuerzo, lo que se puede completar con  $11\phi 16 = 2212 \text{ mm}^2$ , y en las franjas laterales se colocará  $2797(0.26) = 727 \text{ mm}^2$ , lo que se puede completar con  $4\phi 16 = 804 \text{ mm}^2$ , como se refleja en la figura siguiente.



#### **Análisis en sentido a**

En este sentido, el refuerzo calculado de  $1867 \text{ mm}^2$  se distribuye de manera uniforme, lo que se puede completar con  $10\phi 16 = 2011 \text{ mm}^2$ .

**7. Verificación de la altura de la zapata:** Considerando que la armadura de refuerzo en el sentido corto de la zapata debe ir en la parte inferior, y considerando el peralte efectivo  $d = 350 \text{ mm}$  y un recubrimiento mínimo de  $75 \text{ mm}$ , se calcula la altura total de la zapata, de lo que resulta:

$$h = 350 + \frac{16}{2} + 16 + 75 = 449 \simeq 450 \text{ mm}$$

lo que adicionalmente garantiza que tengamos por lo menos  $150 \text{ mm}$  de concreto libre sobre la barra superior, como lo requiere el Reglamento [3]

**8. Verificación de la longitud de desarrollo:** Se verifica la longitud de desarrollo requerida de acuerdo a lo establecido en la sección 2.3.7, en lo que debe considerarse que  $\Psi_t = 1.0$ ,

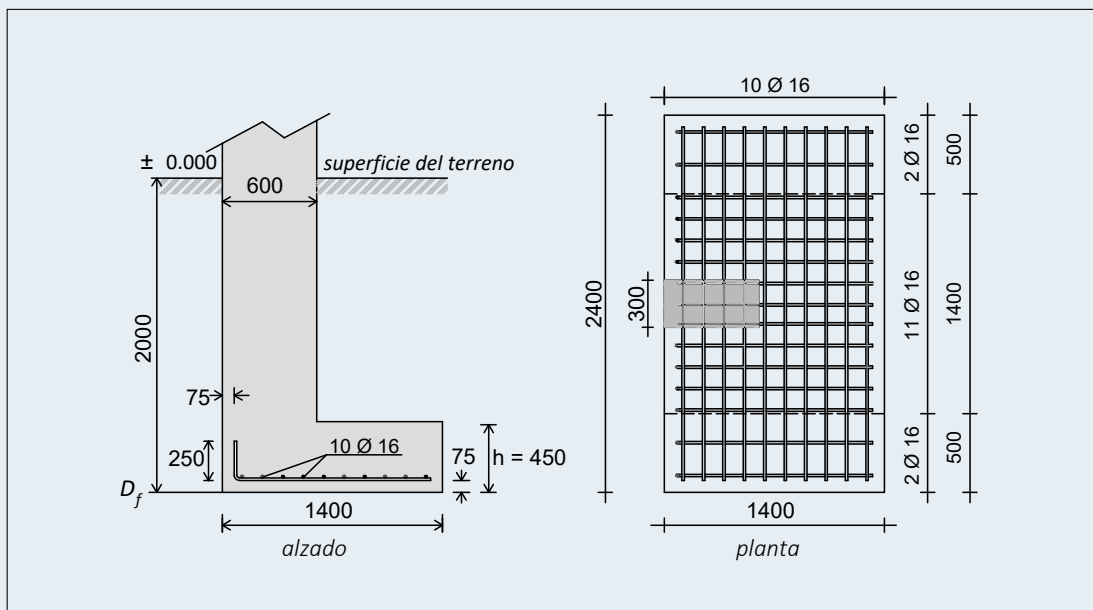
$\Psi_e = 1.0$ ,  $\Psi_g = 1.0$ , y  $\lambda = 1.0$ , por lo que en nuestro caso resulta:

$$\ell_d = \left( \frac{f_y \Psi_t \Psi_e \Psi_g}{2.1 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b = \left( \frac{420(1.0)(1.0)(1.0)}{2.1(1.0)\sqrt{28}} \right) (16) = 605 \text{ mm}$$

Esta longitud de desarrollo se puede obtener fácilmente en el sentido largo de la zapata, puesto que a partir de la cara de la columna, después de restar lo requerido por recubrimiento, se dispone de 975 mm en ambos lados. En el sentido corto de la zapata solo se obtiene el espacio necesario hacia el lado derecho de la cara de la columna, donde ya restado el recubrimiento se cuenta con 725 mm, mientras que hacia el lado izquierdo se cuenta solo con 525 mm, lo cual no es suficiente para albergar la longitud de desarrollo requerida. En este caso es necesario la prolongación del acero mediante el uso de un gancho de 90° de acuerdo a lo establecido en la tabla 2.11, lo que en nuestro caso resulta:

$$\frac{6d_b}{2} + 12d_b = \frac{6(16)}{2} + 12(16) = 240 \simeq 250 \text{ mm}$$

A continuación se detalla el armado de la zapata



**9. Verificación por aplastamiento:** El aplastamiento se verifica considerando lo establecido en la sección 3.6, donde se establece que  $\phi B_n \geq B_u$ , siendo  $B_u$  la carga mayorada de aplastamiento:

$$B_u = 1.2D + 1.6L$$

La resistencia por aplastamiento,  $B_n$ , debe ser la menor de la calculada con las siguientes

dos expresiones:

$$B_n = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} (0.85 f'_c A_1)$$

$$B_n = \sqrt{\frac{(1700)(1300)}{(300)(600)}} [0.85(28)(300)(600)] = 15010990N = 15011 \text{ kN}$$

$$B_n = 2 (0.85 f'_c A_1)$$

$$B_n = 2 (0.85(28)(300)(600)) = 8568000N = 8568 \text{ kN}$$

$$\therefore B_n = 8568 \text{ kN}$$

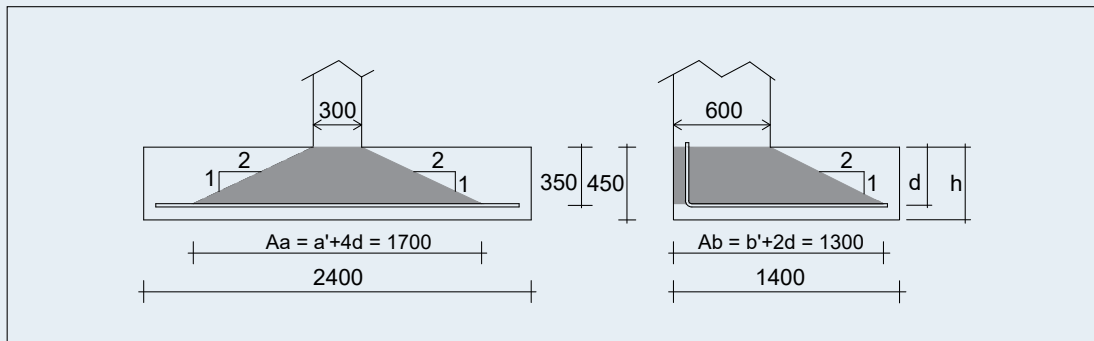
y el esfuerzo por aplastamiento demandado es:

$$B_u = 1.2(200) + 1.6(500) = 1040 \text{ kN}$$

de donde se obtiene que

$$\phi B_n = 0.65(8568) = 5569 \text{ kN} > B_u$$

$\therefore$  no es necesario reforzar por aplastamiento.



En cuanto al acero mínimo requerido que atraviesa la interfaz columna zapata, esta resulta  $A_s = 0.005 [600(300)] = 900 \text{ mm}^2$ , lo que se puede obtener con  $4\phi 18 = 1018 \text{ mm}^2$ , lo que con facilidad se logra extendiendo el acero longitudinal de la columna dentro de la zapata, no siendo necesario colocar acero adicional.

### **Ejemplo 7.2** Diseño de una zapata aislada interior.

Diseñar una zapata aislada para soportar una columna interior de sección cuadrada de  $450 \times 450 \text{ mm}^2$ , armada con  $8\phi 25$ . La columna soporta cargas de servicio de  $L = 780 \text{ kN}$ ,

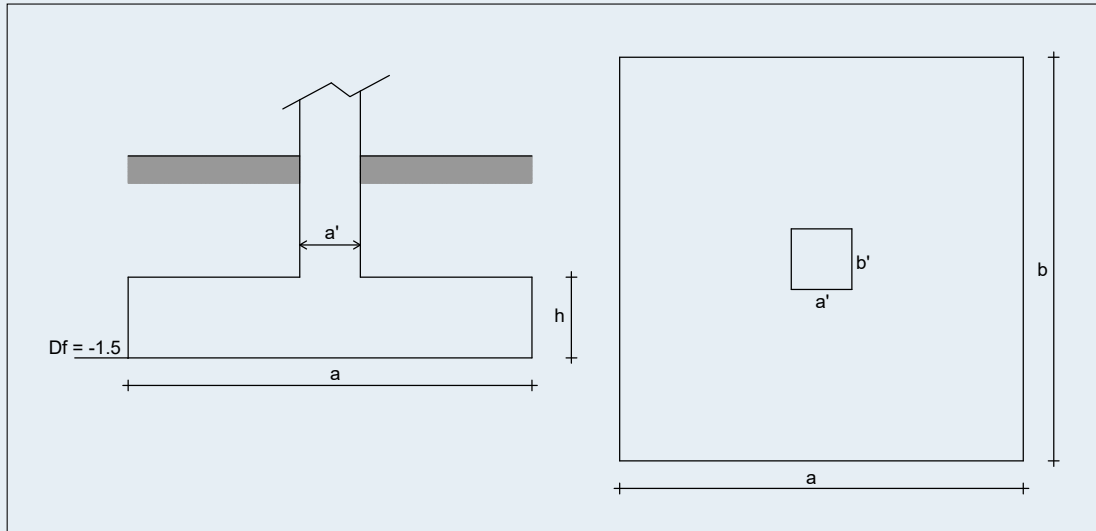
y  $D = 1000 \text{ kN}$ , sobre un terreno con una capacidad admisible de  $q_a = 240 \text{ kN/m}^2$ . La columna se construye con hormigón de 28 MPa de resistencia a la compresión, mientras que la zapata se construye con hormigón de 21 MPa. En los dos casos es hormigón de peso normal y se utilizará acero de refuerzo de 420 MPa de resistencia a la fluencia. Se observa adicionalmente que el peso del suelo es de  $16 \text{ kN/m}^3$ .

**Tabla de datos:** Ejemplo 7.2

|                                                        |                       |
|--------------------------------------------------------|-----------------------|
| Carga muerta, $D =$                                    | 1000 kN               |
| Carga viva, $L =$                                      | 780 kN                |
| Carga admisible del terreno, $q_a =$                   | 240 kN/m <sup>2</sup> |
| Resistencia del concreto de columna, $f'_c =$          | 28 MPa                |
| Resistencia del concreto de zapata, $f'_c =$           | 21 MPa                |
| Límite de fluencia del acero, $f_y =$                  | 420 MPa               |
| Profundidad de desplante, $D_f =$                      | 1.50 m                |
| Dimensión de la columna en dirección del eje y, $a' =$ | 450 mm                |
| Dimensión de la columna en dirección del eje x, $b' =$ | 450 mm                |
| Peso del hormigón armado, $w_c =$                      | 24 kN/m <sup>3</sup>  |
| Peso del suelo, $\gamma_s =$                           | 16 kN/m <sup>3</sup>  |

**Solución:**

El enunciado plantea el diseño de una zapata aislada interior que debe soportar una columna de sección cuadrada con cargas concéntricas, cuya profundidad de desplante se ubica a 1.5 m de profundidad.



**1. Área de la zapata:** Se estima que las cargas están aplicadas de manera concéntrica, por lo que diseñaremos una zapata de sección cuadrada. Para el cálculo del área de zapata requerida se necesita evaluar a partir de capacidad efectiva del suelo,  $q_e$ , la cual lo obtenemos a partir de:

$$q_e = q_a - h(\omega_c) - (D_f - h)(\gamma_s)$$

y puesto que no conocemos la altura de la zapata, podemos estimar un valor, que para este ejemplo consideramos  $h = 600 \text{ mm}$ , por lo que la capacidad efectiva resulta:

$$q_e = 240 - 0.60(24) - (1.50 - 0.60)(16) = 211.20 \text{ kN/m}^2$$

lo que nos conlleva a obtener un área de cimentación de:

$$A_{req} = \frac{D + L}{q_e} = \frac{1000 + 7800}{211.20} = 8.43 \text{ m}^2$$

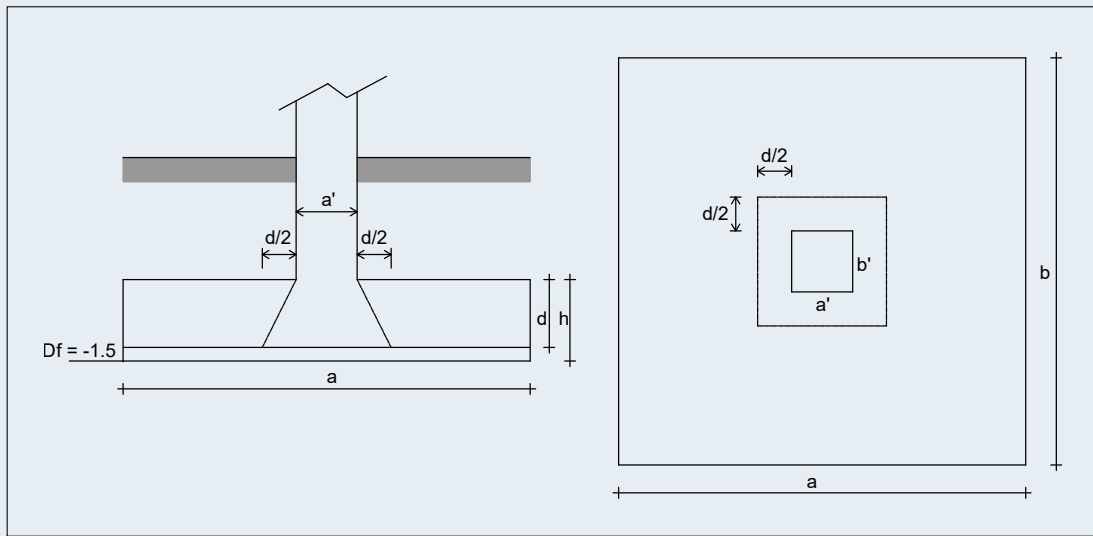
Escogiendo un área de cimentación cuadrada, el lado de la zapata resultaría de  $2.9 \text{ m}$ , lo que para casos prácticos lo redondeamos a  $3.0 \text{ m}$ , teniendo un área real de cimentación de  $A_c = 9.00 \text{ m}^2$ , con lo que obtenemos la reacción última del suelo a partir de

$$q_u = \frac{1.2D + 1.6L}{A_c} = \frac{1.2(1000) + 1.6(780)}{9.00} = 272 \text{ kN/m}^2$$

Determinadas las dimensiones de la zapata se procede a su comprobación a partir principalmente del cortante por punzonamiento.

**2. Comprobación del cortante en dos direcciones (punzonamiento):** La sección crítica para el cortante en dos direcciones se localiza a una distancia  $d/2$  medida a partir de la

cara de la columna, como se visualiza en la figura siguiente, determinando un perímetro crítico  $b_o$ , y un área crítica  $A_o$ .



Habiendo asumido  $h = 600$  mm, asumiendo que el acero de refuerzo tendrá 25 mm de diámetro y considerando el recubrimiento mínimo reglamentaria de 75 mm, tenemos un peralte efectivo de:

$$d = h - r - \phi = 600 - 75 - 25 = 500 \text{ mm}$$

$$b_o = 4 \left( 450 + 2 \frac{500}{2} \right) = 4(950) = 3800 \text{ mm}$$

$$A_o = (0.95)(0.95) = 0.90 \text{ m}^2$$

La fuerza que origina el punzonamiento es:

$$V_{u(p)} = q_u (A_{zapata} - A_o) = 272(9.00 - 0.90) = 2203.20 \text{ kN}$$

Debe verificarse que  $\phi V_c > V_{u(p)}$ , en caso contrario debe reforzarse para cortante por punzonamiento. Esta verificación la realizamos mediante las ecuaciones de la tabla 3.1, para cuyo cálculo consideramos  $\lambda_s = 1$ ,  $\beta = 450/450 = 1$ , y tratándose de columna interior tenemos  $\alpha_s = 40$ , por lo que el cálculo de  $V_c$  resulta:

$$V_c = 0.33 \lambda_s \lambda \sqrt{f'_c} b_o d$$

$$V_c = 0.33(1.0)(1.0)\sqrt{21}(3800)(500) = 2873275 \text{ N}$$

$$V_c = 0.17 \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) \lambda_s \lambda \sqrt{f'_c} b_o d$$



$$V_c = 0.17 \left( 1 + \frac{2}{1} \right) (1.0)(1.0)\sqrt{21}(3800)(500) = 4440516 \text{ N}$$

$$V_c = 0.083 \left( 2 + \frac{\alpha_s d}{b_o} \right) \lambda_s \lambda \sqrt{f'_c} b_o d$$

$$V_c = 0.083 \left( 2 + \frac{40(500)}{3800} \right) (1.0)(1.0)\sqrt{21}(3800)(500) = 5248882 \text{ N}$$

de lo que resulta

$$V_c = 2873275 \text{ N} = 2873.28 \text{ kN}$$

$$\text{Por lo que } \phi V_c = 0.75(2873.28) = 2154.96 < V_{u(p)}$$

Lo que significa que bajo las condiciones actuales la zapata no soporta el cortante por punzonamiento, por lo que debe rediseñarse o reforzarse contra punzonamiento.

En estos casos se puede recurrir a soluciones tales como mejorar la resistencia del concreto, reforzar contra punzonamiento, o redimensionar, siendo la tercera opción la más aconsejada. Ensayamos incrementando la altura de la zapata en 50 mm, por lo que en este caso tenemos  $h = 650 \text{ mm}$ , con lo que volvemos a revisar el cortante en dos direcciones regresando al paso previo.

$$d = h - r - \phi = 650 - 75 - 25 = 550 \text{ mm}$$

$$b_o = 4 \left( 450 + 2 \frac{550}{2} \right) = 4000 \text{ mm}$$

$$A_o = (1.0)(1.0) = 1.0 \text{ m}^2$$

La fuerza que origina el punzonamiento es:

$$V_{u(p)} = q_u (A_{zapata} - A_o) = 272(9.0 - 1.0) = 2176.0 \text{ kN}$$

y el cortante que resiste el concreto resulta:

$$V_c = 0.33(1.0)(1.0)\sqrt{21}(4000)(550) = 3326950 \text{ N}$$

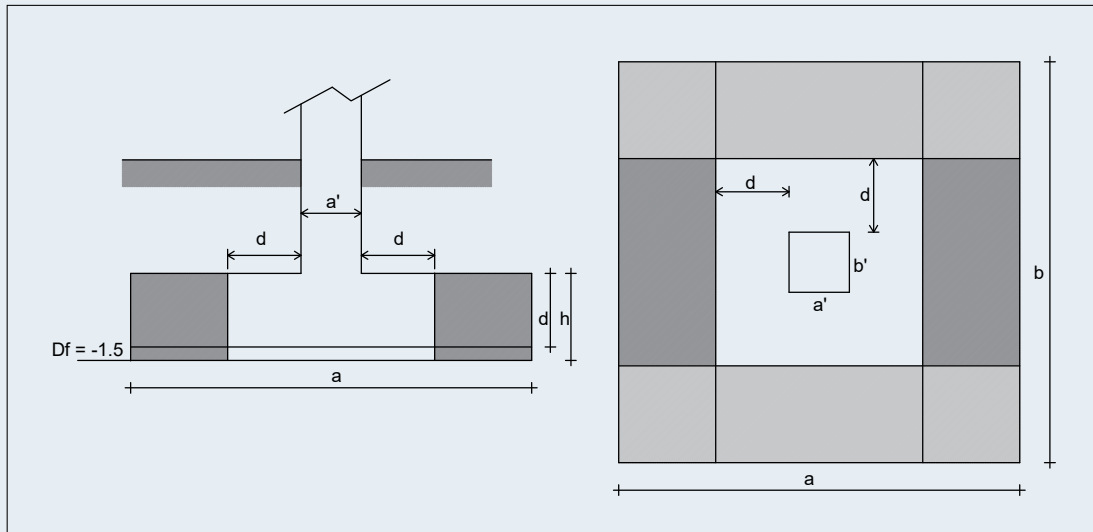
$$V_c = 0.17 \left( 1 + \frac{2}{1} \right) (1.0)(1.0)\sqrt{21}(4000)(550) = 5141650 \text{ N}$$

$$V_c = 0.083 \left( 2 + \frac{40(550)}{4000} \right) (1.0)(1.0)\sqrt{21}(4000)(550) = 6275837 \text{ N}$$

$$\text{Por lo que } \phi V_c = 0.75(3326.95 \text{ kN}) = 2495.21 \text{ kN} > V_{u(p)}$$

Por lo que se acepta el diseño y se puede continuar con el diseño.

**3. Comprobación del cortante en una dirección:** La sección crítica por cortante en una dirección se produce a una distancia  $d$  medida a partir de la cara de la columna, y puesto que en este caso se cuenta con un área de cimentación cuadrada que soporta una columna de sección cuadrada, el área de cortante es simétrica, por lo que se revisamos un solo lado de la zapata. El área que aporta al cortante está representado con una zona sombrada en la figura siguiente.



Debe verificarse que  $\phi V_c > V_{u(c)}$ , para lo cual el Reglamento[3] provee con la ecuación 3.19, a menos que se calcule de forma más detallada mediante el uso de las ecuaciones 3.20 a 3.22.

El cortante último requerido  $V_{u(c)}$  se lo obtiene multiplicando el área de corte por la resistencia última del terreno.

#### **Cortante en una dirección**

El área que aporta para cortante tiene un largo de 3.0 m por una ancho de:

$$\text{ancho} = [3.0 - 0.45 - 2(0.55)]/2 = 0.725 \text{ m}$$

$$\text{área de cortante} = 3.00(0.725) = 2.18 \text{ m}^2$$

$$V_{u(c)} = q_u(\text{área de cortante}) = 272(2.18) = 592.96 \text{ kN}$$

$$V_c = 0.17\lambda\sqrt{f'_c}b_wd = 0.17(1.0)\sqrt{21}(3000)(725) = 1694407 \text{ N} = 1694.41 \text{ kN}$$

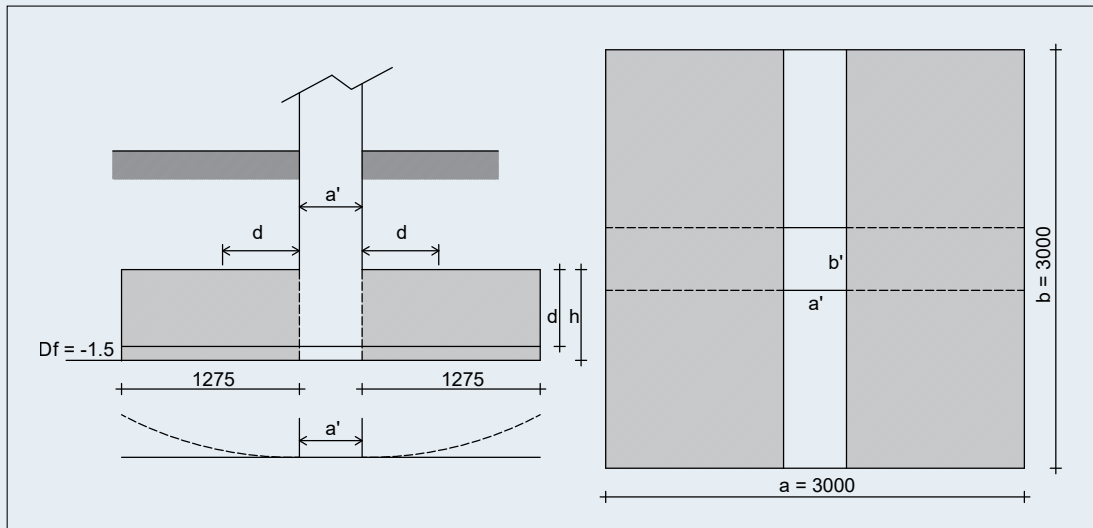
$$\phi V_c = 0.75(1694.41) = 1270.81 \text{ kN} > V_{u(c)}$$

∴ no se necesita reforzar por cortante

Con estos resultados se verifica que el peralte asumido inicialmente es suficiente para resistir los esfuerzos cortantes en una y dos direcciones, por lo que se puede continuar con el diseño.

Debe anotarse que si  $\phi V_c$  resulta menor que  $V_u$ , se debe reforzar por cortante, o redimensionar la zapata de tal manera que se cumpla con  $\phi V_c > V_{u(c)}$  (resulta más económico incrementar el peralte, que colocar acero de refuerzo).

**4. Diseño por flexión:** Para el diseño por flexión se considera las franjas de zapatas afectadas por la resistencia última del terreno  $q_u$  ubicadas a partir de la cara de la columna, como se detalla en la figura siguiente. Debido a la simetría se verifica en una sola dirección.



**Análisis en una dirección:**

Por flexión,  $q_u$  afecta a lo largo de 3.00 m provocando una reacción  $U = q_u(b) = 272(3.0) = 816 \text{ kN/m}$  con un brazo de palanca es 1275 mm, ocasionando una sección crítica que coincide con las aristas de la columna.

$$M_b = \frac{U\ell^2}{2} = \frac{816(1.275)^2}{2} = 663.26 \text{ kN.m}$$

Con este valor de momento calculamos el acero de refuerzo para cada sentido, para lo cual utilizamos las ecuaciones ya trabajadas en la sección 3.2.

$$M_n = Rbd^2$$

$$R = \frac{M_n}{bd^2}$$

$$R = \rho f_y \left( 1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

$$\left( 0.59 \frac{f_y^2}{f'_c} \right) \rho^2 - f_y \rho + R = 0$$

| Sentido  | $M_u$<br>(kN.m) | $M_n$<br>(kN.m) | $b$<br>(mm) | $d$<br>(mm) | $R$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $\rho_{def}$ | $A_s$<br>(mm <sup>2</sup> ) |
|----------|-----------------|-----------------|-------------|-------------|-----------------------------|--------------|-----------------------------|
| <i>a</i> | 663.26          | 736.96          | 3000        | 550         | 0.8121                      | 0.00333      | 5495                        |
| <i>b</i> | 663.26          | 736.96          | 3000        | 550         | 0.8121                      | 0.00333      | 5495                        |

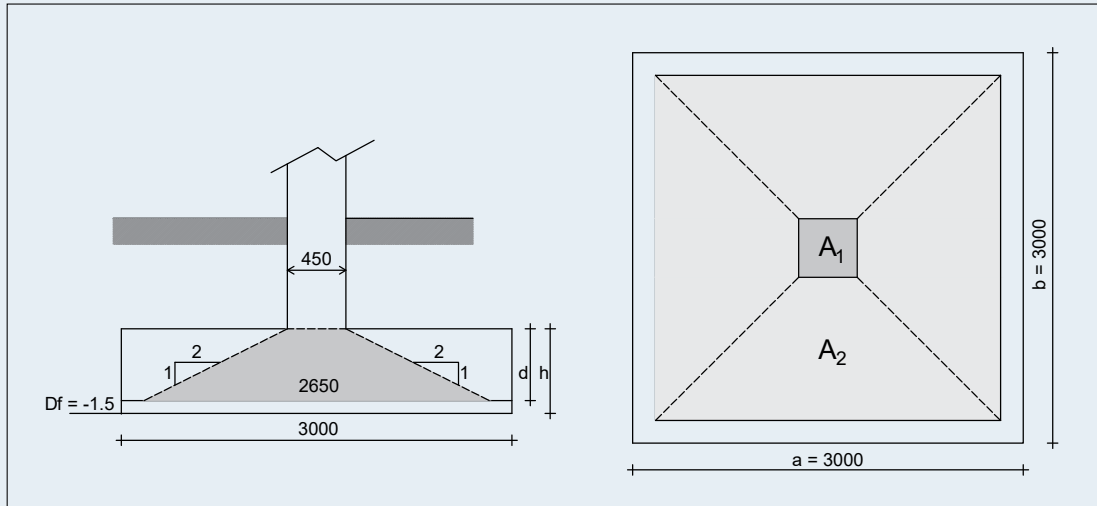
En los cálculos previos, la cuantía resultó  $0.00198 < \rho_{min}$ , por lo que se adoptó 0.00333, resultando un área de refuerzo de 5495 mm<sup>2</sup>, que considerando acero de refuerzo de 25 mm de diámetro lo podemos obtener con 12 barras. Esta cantidad de refuerzo se debe colocar en los dos sentidos del área de cimentación.

**5. Verificación de la longitud de desarrollo:** Se verifica la longitud de desarrollo requerida de acuerdo a lo establecido en la sección 2.3.7, en lo que debe considerarse que  $\Psi_t = 1.0$ ,  $\Psi_e = 1.0$ ,  $\Psi_g = 1.0$ , y  $\lambda = 1.0$ , que en nuestro caso resulta:

$$\ell_d = \left( \frac{f_y \Psi_t \Psi_e \Psi_g}{1.7 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b = \left( \frac{420(1.0)(1.0)(1.0)}{1.7(1.0)\sqrt{21}} \right) (25) = 1348 \text{ mm}$$

Considerando el recubrimiento reglamentario, el espacio disponible para albergar la longitud de desarrollo a partir de la arista de la columna es de  $3000 - 1275 - 75 = 1650$  mm, lo cual supera los 1348 mm requeridos por reglamento, por lo que no será necesario implementar ganchos en el acero de refuerzo.

**6. Verificación por aplastamiento:** El aplastamiento se verifica considerando lo establecido en la sección 3.6, de donde se obtiene que  $\phi B_n \geq B_u$ , siendo  $B_u$  la carga mayorada por aplastamiento. Las áreas afectadas por aplastamiento se muestran en la figura siguiente, obteniéndose  $A_2$  a partir de una pendiente de 2:1, a partir de la cara de la columna.



La resistencia por aplastamiento debe ser la menor de:

$$B_n = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} (0.85 f'_c A_1)$$

$$B_n = \sqrt{\frac{(2650)(2650)}{(450)(450)}} (0.85(21)(450)(450)) = 21286125 N = 21286 \text{ kN}$$

$$B_n = 2(0.85 f'_c A_1)$$

$$B_n = 2(0.85(21)(450)(450)) = 7229250 N = 7229 \text{ kN}$$

$$\therefore B_n = 7229 \text{ kN}$$

y el esfuerzo por aplastamiento demandado es:

$$B_u = 1.2(1000) + 1.6(780) = 2448 \text{ kN}$$

de donde se obtiene que

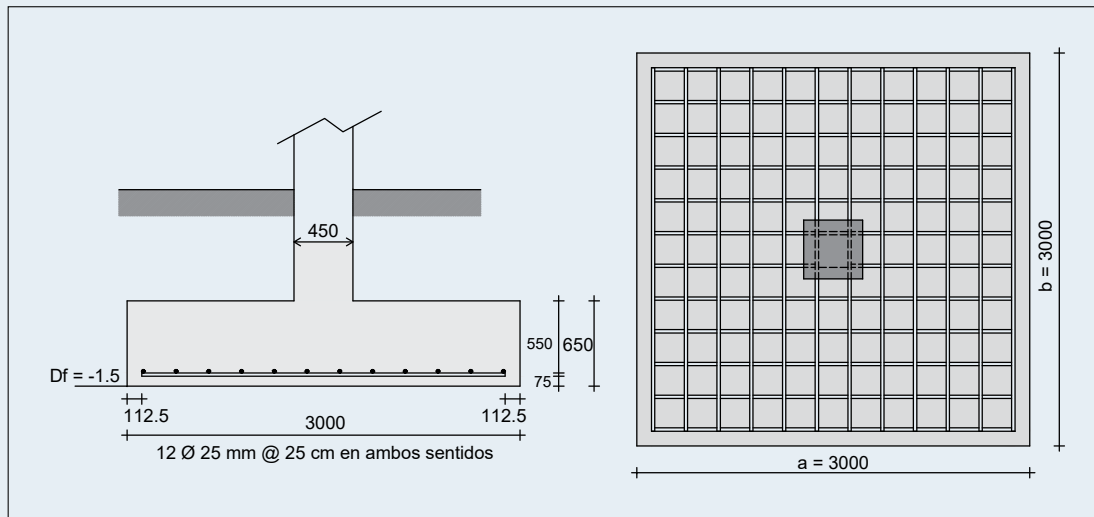
$$\phi B_n = 0.65(7229) = 4699 \text{ kN} > B_u$$

$\therefore$  no es necesario reforzar por aplastamiento.

En cuanto al acero mínimo requerido que atraviesa la interfaz columna zapata, esta resulta  $A_s = 0.005(450(450)) = 1013 \text{ mm}^2$ , lo que se puede obtener con cuatro barras de  $18 \text{ mm} = 1018 \text{ mm}^2$ , lo que se logra con facilidad extendiendo el acero longitudinal de la columna dentro de la zapata, no siendo necesario colocar acero adicional.

**7. Distribución del refuerzo:** El acero de refuerzo debe distribuirse considerando los espaciamientos y recubrimientos reglamentarios. En sección previa se calculó que se necesitan 12 barras de 25 mm en cada sentido, las cuales deben distribuirse en todo

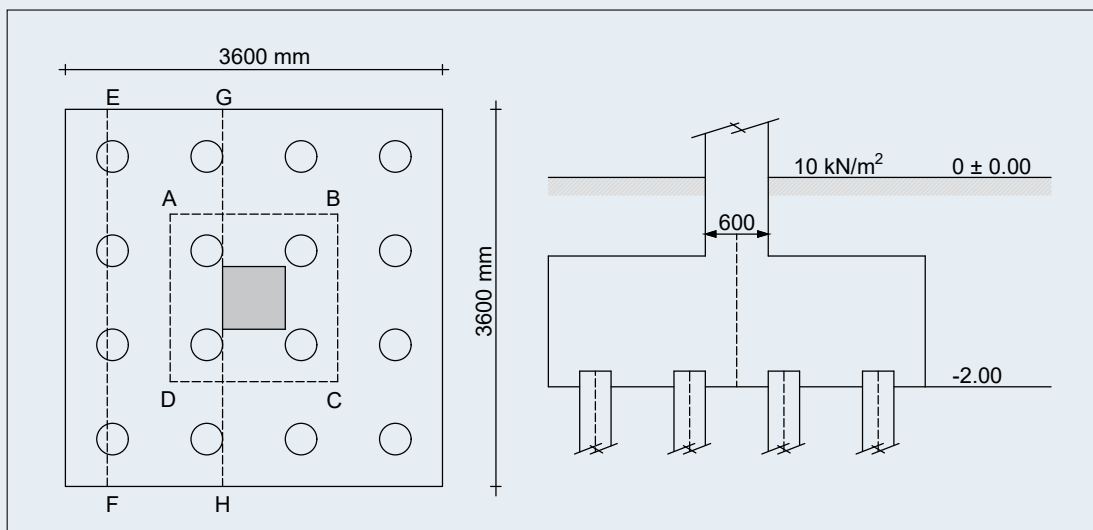
lo ancho de la zapata. Considerando lo mínimo reglamentario, el ancho disponible es  $3000 - 2(75) - 25 = 2825$  mm, por lo que las barras se deberán colocar cada 256.8 mm. En la práctica, se los planos se debe escribir dimensiones practicables en obra, por lo que en lugar de escribir 256 mm de separación entre barras, se escribirá que la separación es cada 25 cm, dejando el recubrimiento adecuado, como se ilustra a continuación.



## 7.2. CABEZALES PARA PILOTES

### **Ejemplo** 7.3 *Diseño de cabzal para zapata aislada interior*

La figura siguiente muestra una columna de 600 x 600 mm que debe transmitir una carga muerta de 6000 kN y una carga viva de 2500 kN hacia el suelo de implantación. La cimentación se realizará sobre pilotes de 300 mm de diámetro que pueden desarrollar una resistencia admisible de  $R_a = 600$  kN cada uno. La zapata (o cabzal) de coronación de los pilotes se asentará a una profundidad de desplante de 2.00 m, y se construirá usando hormigón de peso normal con una resistencia a la compresión cilíndrica de 30 MPa y acero con límite de fluencia de 420 MPa. Considerar que el relleno tiene un peso específico de  $18$  kN/m<sup>3</sup>. Se debe considerar que en la cota  $\pm 0.00$  actúa una sobrecarga uniformemente repartida de  $10$  kN/m<sup>2</sup>. Diseñar la zapata de coronación o cabzal con los datos especificados.



A continuación se presenta los datos de trabajo, los mismos que son parte del estudio geotécnico y de las especificaciones técnicas del proyecto.

**Tabla de datos: Ejemplo 7.3**

|                                                               |                      |
|---------------------------------------------------------------|----------------------|
| Carga muerta, $D =$                                           | 6000 kN              |
| Carga viva, $L =$                                             | 2500 kN              |
| Resistencia admisible del pilote, $R_a =$                     | 600 kN               |
| Resistencia del concreto a compresión a los 28 días, $f'_c =$ | 30 MPa               |
| Límite de fluencia del acero, $f_y =$                         | 420 MPa              |
| Profundidad de desplante, $D_f =$                             | 2.00 m               |
| Dimensión de la columna en dirección del eje y, $a' =$        | 600 mm               |
| Dimensión de la columna en dirección del eje x, $b' =$        | 600 mm               |
| Peso del hormigón armado, $w_c =$                             | 24 kN/m <sup>3</sup> |
| Peso del suelo, $\gamma_s =$                                  | 18 kN/m <sup>3</sup> |

**Solución:**

A diferencia de las zapatas directamente cimentadas sobre el suelo, en el caso de cabezales la carga que transmite la columna debe ser soportada por los pilotes, que como se menciona en el enunciado soportan 600 kN cada pilote. En cuanto al número de pilotes, de acuerdo a las recomendaciones, se considera una separación de 3 veces el diámetro del pilote, es decir 900 mm de separación para pilotes de 300 mm de diámetro. Esto

significa, que sobre cada pilote corresponderá un área de cabzal de  $0.9(0.9) \text{ m}^2$ .

**1. Resistencia de pilote:** La resistencia efectiva del pilote se la obtiene restando de la resistencia admisible,  $R_a$ , la carga del terreno, el cabzal y cualquier sobrecarga

$$R_e = R_a - W$$

donde:

$R_e$  = resistencia efectiva del pilote

$R_a$  = resistencia admisible del pilote

$W$  = carga del terreno + zapata + sobrecarga

Puesto que no se conoce la altura de la zapata, se puede tomar el peso promedio de  $21 \text{ kN/m}^3$  entre el suelo y el concreto de la zapata, por lo que  $W$  resulta:

$$W = (0.9(0.9)(2.0)) (21) + (0.9(0.9)) (10) = 42.12 \text{ kN}$$

$$R_e = 600 - 42.12 = 557.88 \approx 557 \text{ kN}$$

y el número de pilotes,  $n$ , que se requiere será:

$$n = \frac{D + L}{R_e} = \frac{6000 + 2500}{557} = 15.26 \approx 16 \text{ pilotes}$$

Puesto que se cuenta con un área de cimentación cuadrada, los 16 pilotes requeridos se distribuyen en 4 filas de 4 pilotes cada una, como se muestra en la figura previa, y considerando que la distancia desde el borde del último pilote hasta el borde del cabzal debe ser por lo menos un diámetro de pilote, el cabzal resulta de 3600 mm por lado.

**2. Resistencia última del pilote:** Una vez conocida la resistencia efectiva del pilote, ya se puede calcular la resistencia última del pilote,  $R_u$ , la cual se obtiene multiplicando la resistencia efectiva por el factor de carga ponderado  $FCP$ .

$$R_u = R_e (FCP)$$

donde:

$$FCP = \frac{1.2D + 1.6L}{D + L} = \frac{1.2(6000) + 1.6(2500)}{6000 + 2500} = 1.318$$

por lo que la resistencia última resulta

$$R_u = 557(1.318) = 734 \text{ kN}$$



Conocida  $R_u$ , previo al análisis por flexión, es necesario verificar que no se produzcan en las secciones críticas esfuerzos cortantes mayores a los admisibles.

**3. Cortante en dos direcciones:** El cortante en dos direcciones o cortante por punzonamiento se produce en una distancia  $d/2$  a partir de la cara del apoyo, lo que se representa por el recuadro formado por los puntos A-B-C-D en la figura inicial. Asumiendo un peralte efectivo,  $d = 1100 \text{ mm}$ , la sección crítica abarcará solo 4 pilotes, por lo que el esfuerzo cortante será producido por los restantes 12 pilotes, lo que nos da una reacción de:

$$R = 12(734) = 8808 \text{ kN}$$

La fuerza cortante que pueda resistir el hormigón en el perímetro crítico  $b_o = 6800 \text{ mm}$  se verifica de acuerdo con lo expuesto en la sección 3.4.

En cuanto al factor de efectos de tamaño se adopta,  $\lambda_s = 1.0$ , puesto que el mismo reglamento menciona que se debe desestimar en el análisis de cimentaciones. La relación del lado largo al lado corto de la sección transversal de la columna es  $\beta = 600/600 = 1.0$ , y tratándose de columna de interior tenemos  $\alpha_s = 40$ , por lo que el cálculo de  $V_c$  resulta:

$$V_c = 0.33\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}b_o d$$

$$V_c = 0.33(1.0)(1.0)\sqrt{30}(6800)(1100) = 13519984 \text{ N}$$

$$V_c = 0.17\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}b_o d$$

$$V_c = 0.17\left(1 + \frac{2}{1}\right)(1.0)(1.0)\sqrt{30}(6800)(1100) = 20894520 \text{ N}$$

$$V_c = 0.083\left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_o}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}b_o d$$

$$V_c = 0.083\left(2 + \frac{40(1100)}{6800}\right)(1.0)(1.0)\sqrt{30}(6800)(1100) = 44006221 \text{ N}$$

$\therefore$

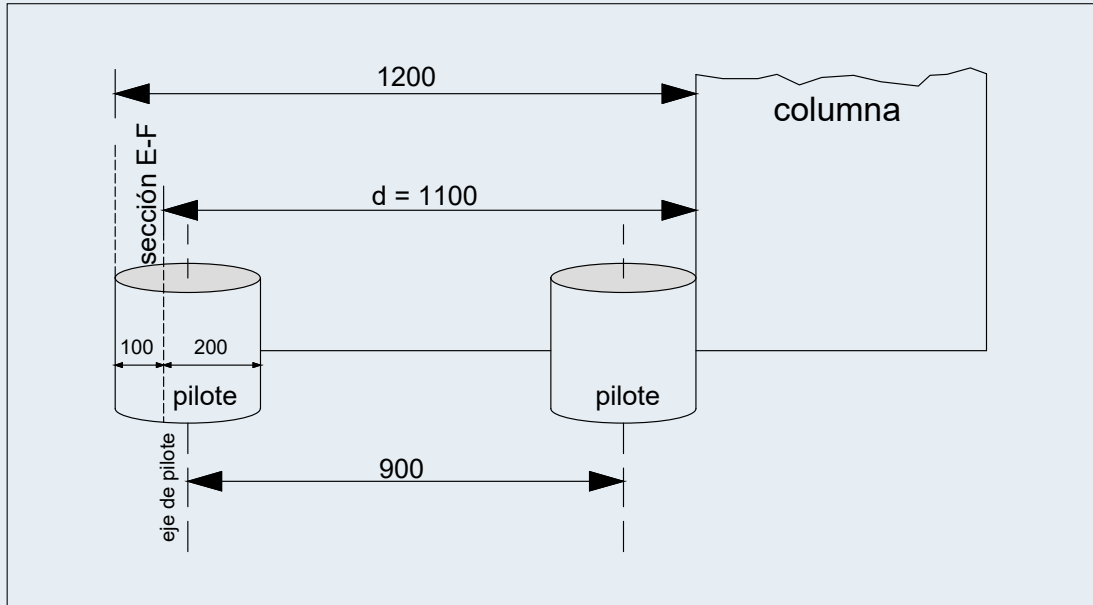
$$\phi V_c = 0.75(13519984) = 10139988 \text{ N} = 10140 \text{ kN}$$

lo que resulta superior a  $R = 8808 \text{ kN}$ , por lo que se acepta el peralte asumido y se continua con el proceso.

**4. Cortante en una dirección:** El cortante en una dirección se verifica a una distancia  $d$  a partir de la cara de la columna, lo que se grafica con la línea entre los puntos E-F en

la figura presentada en primera instancia.

La sección E-F por cortante en una dirección dista 1100 mm de la cara de la columna, afectando a la primera hilera de pilotes en un tercio de su dimensión, como se muestra en el siguiente gráfico, por lo que deberá tomarse en cuenta la reacción proporcional correspondiente.



Considerando la reacción última del pilote,  $R_u = 734 \text{ kN}$ , la reacción del pilote para un tercio de su capacidad sería:

$$\frac{R_u}{300} = \frac{R_p}{100}$$

por lo que resulta que cada pilote ofrece una reacción de  $R_p = 244.67 \text{ kN}$ , y considerando que se afectan 4 pilotes, el cortante en una dirección es:

$$V_u = 4(244.67) = 978.68 \text{ kN}$$

El cortante resistente en una dirección de acuerdo a la sección 3.3, lo calculamos con:

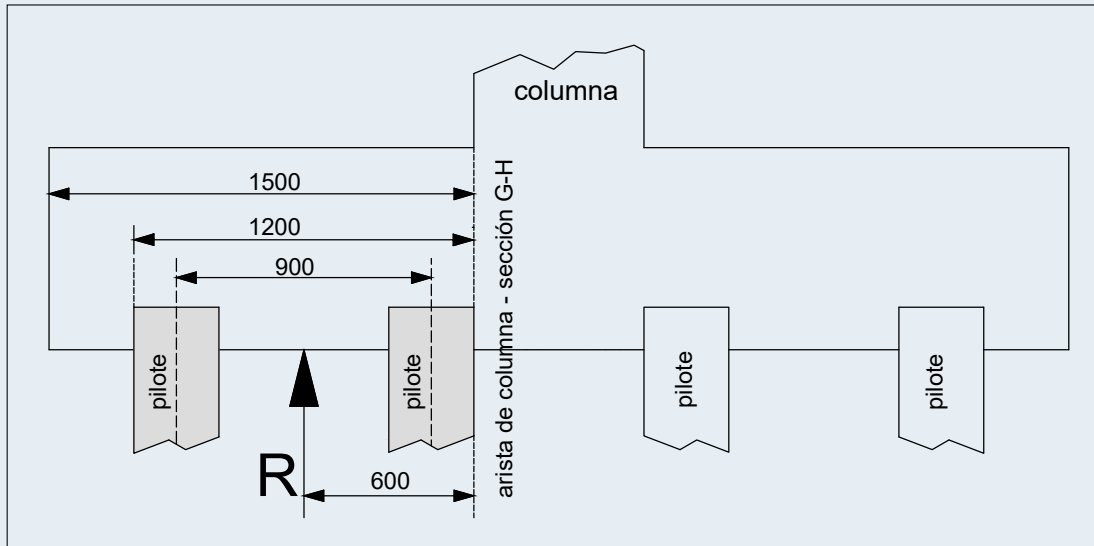
$$\phi V_c = \phi \left( 0.17 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \right)$$

$$\phi V_c = 0.75 \left( 0.17 (1.0) \sqrt{30} (3600) (1100) \right) = 2765451 \text{ N} = 2765.45 \text{ kN} > V_u$$

$\therefore$  el concreto resiste muy bien el cortante y no es necesario reforzar por cortante en una dirección.

**5. Diseño por flexión:** Tratándose de un cabezal de sección cuadrada, los esfuerzos se

presentan de forma simétrica, por lo que se analiza un solo lado del cabezal. En la zapata, la sección crítica por flexión, G-H, se localiza en la cara de la columna, como se muestra en el gráfico inicial, y la reacción que provoca la flexión la proporcionan 8 pilotes con su baricentro ubicado a 600 mm de la cara de la columna, como se detalla a continuación.



Bajo estos términos, la reacción resulta:

$$R = 8(R_u) = 8(734) = 5872 \text{ kN}$$

y el momento flector último es:

$$M_u = R(0.60) = 5782(0.60) = 3523.20 \text{ kN.m}$$

Con este valor de momento último calculamos el acero de refuerzo por flexión, el cual es válido para los cuatro lados de la columna, para lo cual utilizamos las ecuaciones ya conocidas para obtener los resultados que se observan en la tabla adjunta.

$$M_n = Rbd^2$$

$$R = \frac{M_n}{bd^2}$$

$$\rho_{min} = \frac{1.4}{f_y} \geq \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} = 0.00333$$

$$R = \rho f_y \left( 1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

$$\left(0.59 \frac{f_y^2}{f_c'}\right) \rho^2 - f_y \rho + R = 0$$

| $M_u$<br>(kN.m) | $M_n$<br>(kN.m) | $b$<br>(mm) | $d$<br>(mm) | $R$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $\rho$  | $\rho_{def}$ | $A_s$<br>(mm <sup>2</sup> ) |
|-----------------|-----------------|-------------|-------------|-----------------------------|---------|--------------|-----------------------------|
| 3523.20         | 3914.67         | 3600        | 1100        | 0.8987                      | 0.00218 | 0.00333      | 13186.8                     |

La sección calculada se la puede cubrir con 17 barras de 32 mm, lo que nos da como resultado un área total de 13671.4 mm<sup>2</sup>, que se pueden distribuir cada 213 mm, aunque también podría cubrirse el área requerida con 22 barras de 28 mm o 27 barras de 25 mm.

**6. Longitud de desarrollo:** Es necesario verificar que el acero de refuerzo desarrolle los esfuerzos requeridos, por lo que se procede a la revisión de la longitud de desarrollo de acuerdo a lo establecido a la sección 2.3.7.

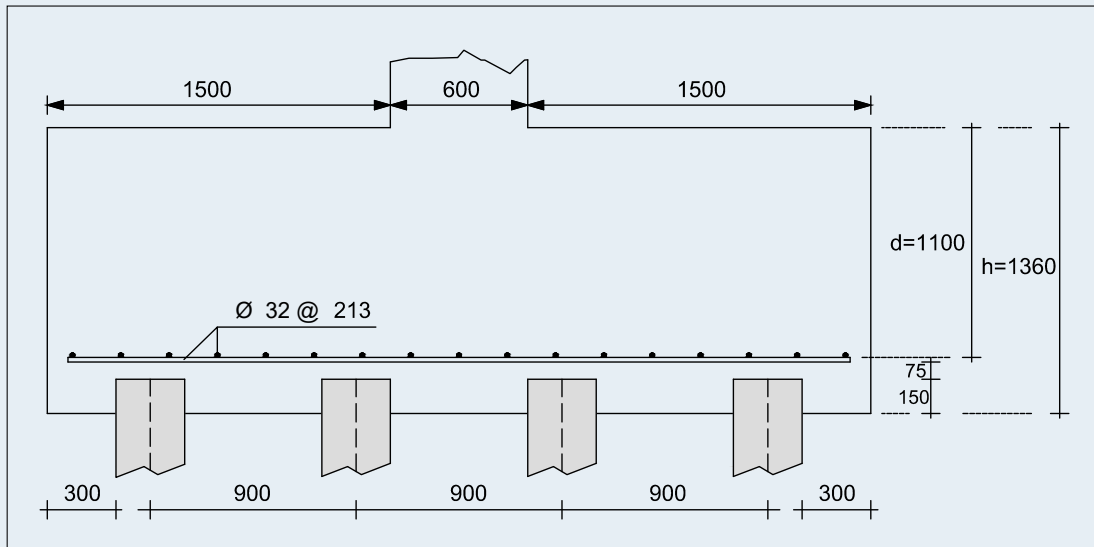
Para el cálculo de la longitud de desarrollo se aplica la ecuación 2.50.

$$\ell_d = \left( \frac{f_y}{1.1\lambda\sqrt{f_c'}} \frac{\Psi_t \Psi_e \Psi_s \Psi_g}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)} \right) d_b$$

Donde el término de confinamiento  $(c_b + K_{tr})/d_b$  no debe exceder 2.5,  $K_{tr}$  se puede tomar igual a cero como una simplificación de diseño, y  $c_b = 75 + 32/2 = 91 \text{ mm} < 213/2$  considerando que debe ser la menor de: (a) la distancia medida del centro de una barra o alambre a la superficie más cercana del concreto, o (b) la mitad de la separación centro a centro de las barras o alambres que se desarrollan. Revisando la tabla 2.9 la ecuación resulta:

$$\ell_d = \left( \frac{f_y}{1.1\lambda\sqrt{f_c'}} \frac{1.0}{(2.5)} \right) d_b = \left( \frac{420}{1.1(1.0)\sqrt{30}} \frac{1.0}{(2.5)} \right) (32) = 892 \text{ mm}$$

Considerando los 3600 mm del tamaño de la zapata, restando el tamaño de la columna y un recubrimiento de 75 mm, el espacio disponible resulta de 1425 mm, lo cual es mayor que el espacio requerido, por lo que la barra se puede desarrollar sin ningún problema. Esto es válido en los dos sentidos de la zapata, detallándose la distribución de los refuerzos como a continuación se puede apreciar.



*Es importante recalcar algunos requerimientos mínimos que deben revisarse, como los 150 mm que por lo menos debe el pilote estar embebido en el concreto, y el recubrimiento mínimo de 75 mm para estructuras que están en contacto permanente con el suelo. En estos detalles el diseñador también deberá recurrir a la experiencia y tomar las debidas precauciones. En concordancia con el objetivo del texto, no se revisa el asentamiento de pilotes, para lo cual el lector puede acudir a las referencias especializadas [25] y [26].*

## Capítulo 8

# DISEÑO DE MUROS

Los muros son estructuras cuyo propósito de construcción es evitar que un proyecto puede ser destruido debido al empuje o deslizamiento de un material, por lo que deben ser diseñados para soportar cargas verticales con o sin excentricidad, a soportar cargas horizontales, y a resistir fuerzas cortantes.

Los muros pueden ser clasificados como:

- Muros de gravedad (mampostería, concreto ciclópeo, tierra reforzada, gaviones)
- Muros en voladizo (con o sin contrafuertes)
- Tablestacas
- Pantallas atirantadas
- Muros anclados
- Estructuras y excavaciones entibadas

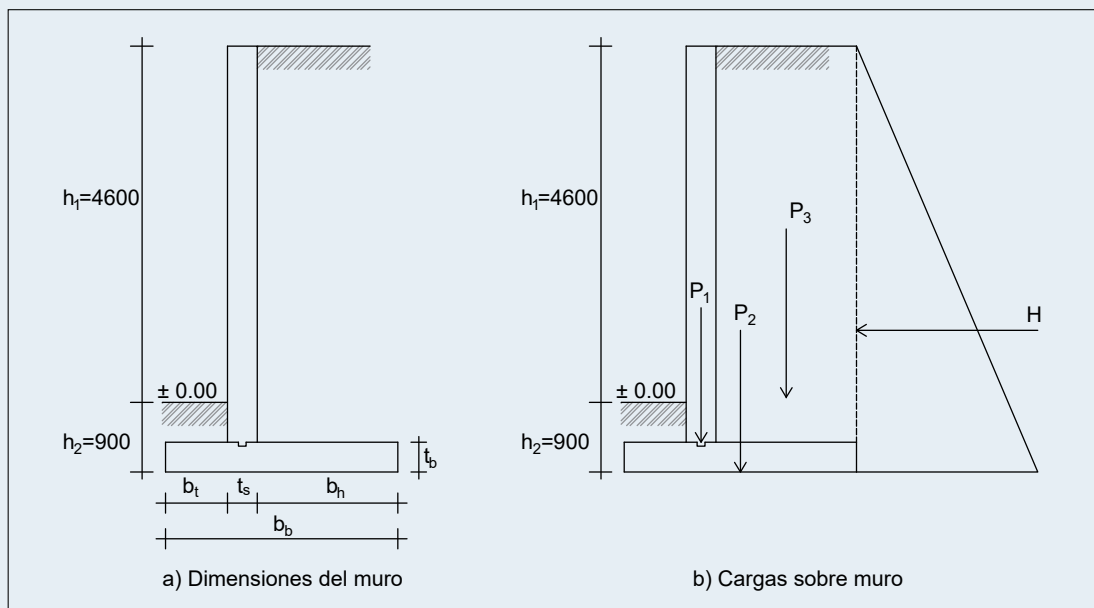
Los muros deben diseñarse de tal manera que cumplan con los siguientes factores de seguridad:

1. Falla por deslizamiento,  $FS \geq 1.5$
2. Falla por volcamiento,  $FS \geq 2.0$
3. Falla por carga,  $FS \geq 3.0$

De acuerdo a los objetivos planteados para el desarrollo de este trabajo, nos limitaremos a desarrollar un ejemplo de muro en voladizo, sin profundizar en el estudio de este tipo de estructuras, para lo cual el usuario deberá acudir a libros de texto especializados.

### Ejemplo 8.1 Diseño de muro en voladizo

Se debe diseñar un muro de contención para retener un banco de suelo de 4600 mm de altura sobre el nivel normal del suelo. El muro se debe construir con hormigón de peso normal, que satisfaga los requisitos de durabilidad y esfuerzos. Asumir que el muro no está sujeto a otro tipo de carga, y que la línea de congelamiento está a 3.00 metros por debajo de la superficie.



Del reporte geotécnico se desprende que existe una presión lateral equivalente de  $P = 4.6 \text{ kN/m}^3$ , contando además de la siguiente información:

**Tabla de datos: Ejemplo 8.1**

|                                                               |                      |
|---------------------------------------------------------------|----------------------|
| Peso del suelo, $\gamma_s =$                                  | $17 \text{ kN/m}^3$  |
| Peso del concreto, $\omega_c =$                               | $24 \text{ kN/m}^3$  |
| Ángulo de fricción interna del suelo, $\phi =$                | $35^\circ$           |
| Coeficiente de fricción entre concreto y suelo, $\mu =$       | $0.5$                |
| Presión admisible del suelo, $q_a =$                          | $145 \text{ kN/m}^2$ |
| Resistencia del concreto a compresión a los 28 días, $f'_c =$ | $31 \text{ MPa}$     |
| Límite de fluencia del acero, $f_y =$                         | $420 \text{ MPa}$    |

#### Solución:

A más de la información derivada del estudio geotécnico, la única información con la

que se cuenta es la altura del relleno a ser contenido, por lo que se deberá iniciar con el predimensionamiento de la estructura. Para esto contamos con fórmulas empíricas que permiten un dimensionamiento aproximado que debe verificarse con el correspondiente cálculo. Contamos con las siguientes relaciones:

- Espesor del muro,  $t_s = (0.07 \text{ a } 0.12)h \geq 200 - 250 \text{ mm}$
- Espesor de la base,  $t_b = (0.07 \text{ a } 0.10)h \geq 300 \text{ mm}$
- Largo total de la base,  $b_b = b_t + t_s + b_h \simeq (0.4 \text{ a } 0.7)h$
- Largo total del dedo,  $b_t = b_b/4 \text{ a } b_b/3$
- Largo del talón,  $b_h = b_b - b_t - t_s$

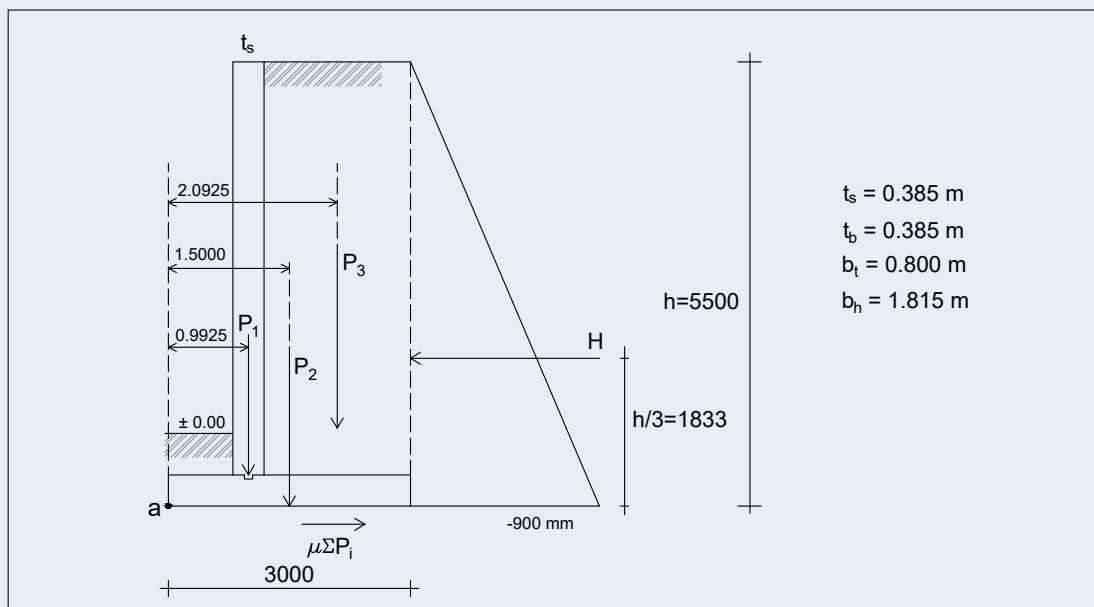
Donde la altura total del muro es,  $h = h_1 + h_2$

**1. Predimensionamiento:** Para presente caso el predimensionamiento resulta:

- $h = 4600 + 900 = 5500 \text{ mm} = 5.5 \text{ m}$
- $t_s = 0.07(5500) = 385 \text{ mm} > 250 \text{ mm}$
- $t_b = 0.07(5500) = 385 \text{ mm} > 300 \text{ mm}$
- $b_b = 0.55(5500) = 3025 \text{ mm} \simeq 3.0 \text{ m}$
- $b_t = 3000/4 = 750 \text{ mm}$ ; se asume 800 mm
- $b_h = 3000 - 800 - 385 = 1845 \text{ mm}$

Una vez dimensionado, antes de proceder con el diseño estructural del elemento, verificamos que con estas dimensiones no falle por volcamiento o deslizamiento. Para este análisis de momentos y cortantes se considera la continuidad del muro, por lo tanto, se analiza solo un metro de longitud para los efectos máximos de carga, como se muestra en el diagrama adjunto.





## 2. Cargas verticales

Las cargas verticales que afectan a la estructura son: el peso propio del muro, la zapata, y el suelo sobre el talón de la zapata. El suelo sobre el dedo de la zapata no se considera, puesto que podría ser sujeto de erosión. Las cargas verticales resultantes son las siguientes:

- Peso del muro,  $P_1 = \omega_c(t_s)(h - t_b) = 24(0.385)(5.5 - 0.385) = 47.26$  kN
- Peso de la base,  $P_2 = \omega_c(t_b)(b) = 24(0.385)(3.0) = 27.72$  kN
- Peso del suelo,  $P_3 = \gamma_s(b_h)(h - t_b) = 17(1.815)(5.5 - 0.385) = 157.82$  kN

De lo cual obtenemos:  $\Sigma P_i = 47.26 + 27.72 + 157.82 = 232.80$  kN/m (por metro de ancho de muro)

## 3. Momentos - análisis por volcamiento

El peso propio del muro, y del suelo sobre el talón, actúan en contra del momento de volcamiento provocado por el empuje  $H$ . Haciendo momentos con respecto al extremo del dedo de la zapata, en el punto "a", obtenemos:

- Muro,  $M_1 = P_1(b_t + t_s/2) = 47.26(0.8 + 0.385/2) = 46.91$  kN.m
- Base,  $M_2 = P_2(b_b/2) = 27.72(3.0/2) = 41.58$  kN.m
- Suelo,  $M_3 = P_3(b_b - b_h/2) = 157.82(3.0 - 1.815/2) = 330.24$  kN.m

De lo cual obtenemos:  $\Sigma M_R = 46.91 + 41.58 + 330.24 = 418.73$  kN.m

*El suelo retenido detrás del muro ejerce una fuerza lateral  $H$  sobre el muro:*

$$H = C_a \gamma_s h^2 / 2$$

*donde*

$$C_a = \frac{1 - \text{Sen } \phi}{1 + \text{Sen } \phi} = \frac{1 - \text{Sen } 35}{1 + \text{Sen } 35} = 0.271$$

*por lo tanto*

$$H = (0.271)(17)(5.5)^2 / 2 = 69.68 \text{ kN}$$

*Esta fuerza provoca en el muro un momento de volcamiento  $M_v$*

$$M_v = H \left( \frac{h}{3} \right) = 69.68 \left( \frac{5.5}{3} \right) = 127.75 \text{ kN.m}$$

*Haciendo sumatoria de momentos, obtenemos*

$$\Delta M = \Sigma M_R - M_v = 418.73 - 127.75 = 290.98 \text{ kN.m}$$

*por lo tanto, el muro no fallará por volcamiento.*

#### **4. Presión del suelo - análisis por deslizamiento**

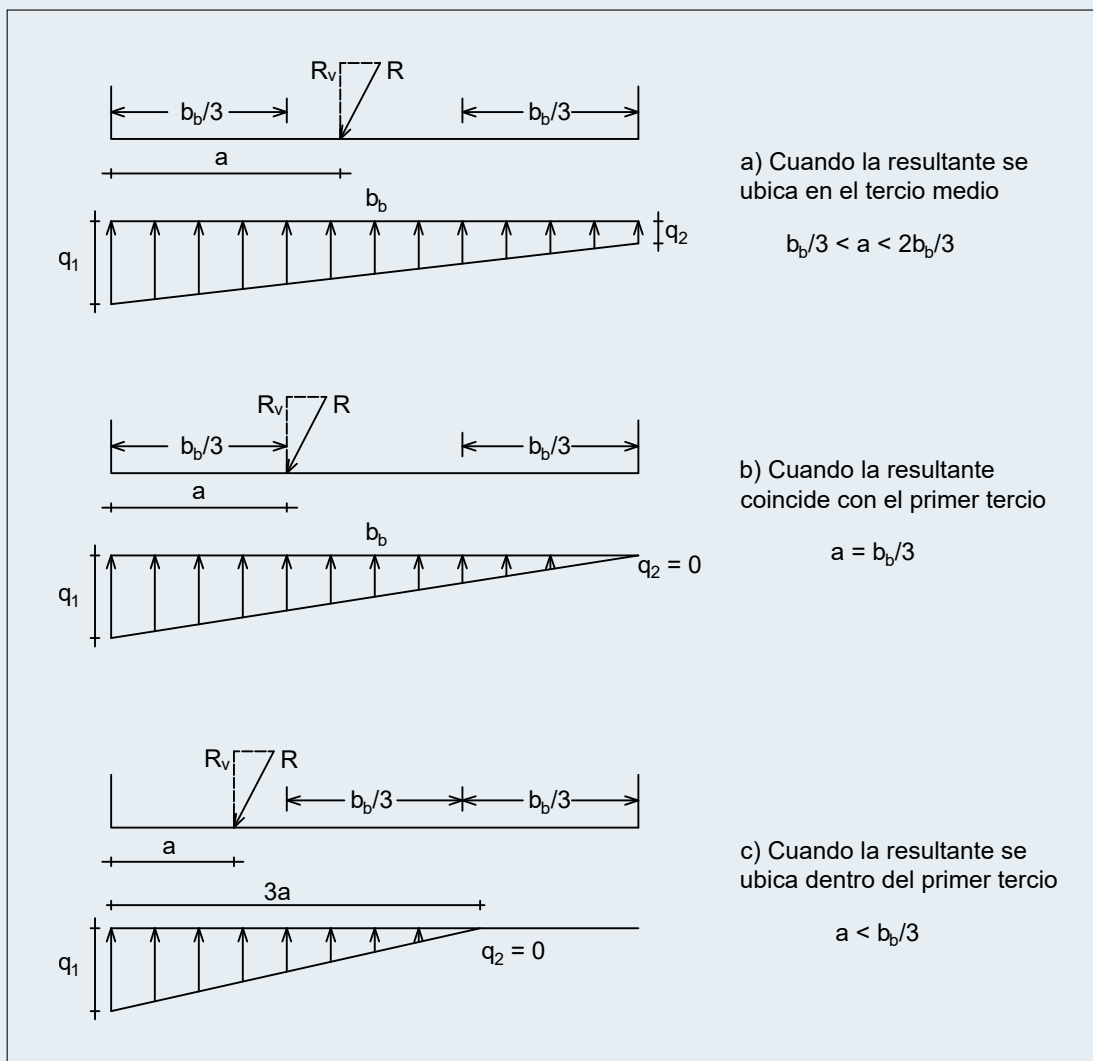
*Con la finalidad de verificar si el muro no será levantado por la presión del suelo, la base del muro es chequeada con las fuerzas no factoradas. Para calcular la presión del suelo, se determina la posición de la resultante vertical. La distancia de aplicación de la resultante con respecto al punto  $a$  establecido en el extremo de la base es:*

$$a = \frac{\Delta M}{\Sigma P_i} = \frac{290.98}{232.8} = 1.25 \text{ m}$$

*La excentricidad de aplicación de la resultante con respecto al centroide de la base resulta:*

$$e = \frac{3.0}{2} - 1.25 = 0.25 \text{ m}$$

*Dependiendo del punto de aplicación de la resultante, la reacción del suelo se evalúa de acuerdo a la siguiente recomendación:*



- a) Cuando la resultante se ubica en el tercio medio,

$$q_1 = (4b_b - 6a) \frac{R_v}{b_b^2}; \quad q_2 = (6a - 2b_b) \frac{R_v}{b_b^2}$$

- b) Cuando la resultante coincide con el primer tercio,

$$q_1 = \frac{2R_v}{b_b}; \quad q_2 = 0$$

- c) Cuando la resultante se ubica dentro del primer tercio,

$$q_1 = \frac{2R_v}{3a}; \quad q_2 = 0$$

En nuestro caso la resultante se ubica dentro del tercio medio, por lo tanto

$$q_1 = (4b_b - 6a) \frac{\Sigma P_i}{b_b^2} = (4(3.0) - 6(1.25)) \frac{232.8}{3.0^2} = 116.4 < q_a = 145 \text{ kN/m}^2$$

$$q_2 = (6a - 2b_b) \frac{\Sigma P_i}{b_b^2} = (6(1.25) - 2(3.0)) \frac{232.8}{3.0^2} = 38.8 > 0$$

### 5. Requerimientos de estabilidad

La estabilidad la verificamos mediante la comprobación de los factores de seguridad para cada caso.

Por volcamiento,

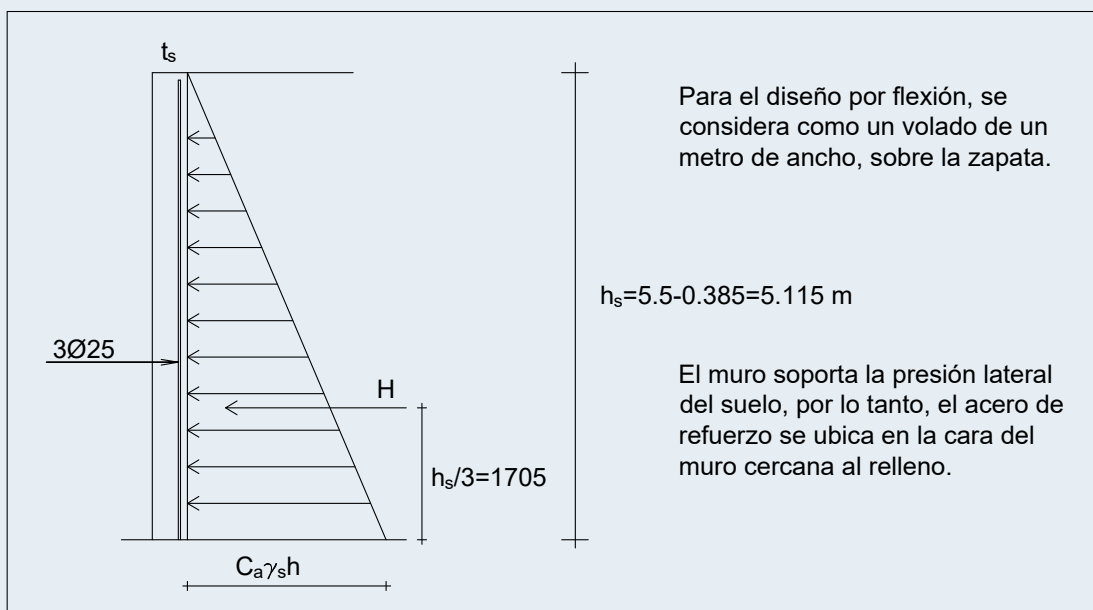
$$FS = \frac{\Sigma M_R}{\Sigma M_V} = \frac{418.73}{127.75} = 3.28 > 2.0$$

Por deslizamiento,

$$FS = \frac{\mu \Sigma P}{\Sigma H} = \frac{0.5(232.8)}{69.68} = 1.67 > 1.5$$

Para las dimensiones preliminares, y calculados los factores de seguridad, se verifica que no se levantará, no se volcará, y no se deslizará, por lo que se acepta el dimensionamiento. En el caso de no cumplirse con alguno de los factores de seguridad, se deberá rediseñar la estructura.

### 6. Diseño del cuerpo



Una vez que se verifica que el prediseño satisface los factores de seguridad, se procede con el diseño definitivo de la estructura, empezando con el cuerpo. Teniendo en cuenta que el muro soporta la presión lateral causada por el relleno, el acero de refuerzo que resulte del cálculo se deberá instalar en la cara del muro cercana al relleno. Asumiendo que el elemento estará controlado por tensión, se considera  $\phi = 0.9$  (Para  $\epsilon_t \geq 0.0051$ ).

Asumiendo refuerzo de 25 mm, y puesto que el elemento estará en contacto permanente con el suelo, tendremos un recubrimiento de 75 mm, y por lo tanto  $d = 385 - 75 - 25/2 = 297.5$  mm

### Mayoración de cargas

Cuando solo actúa la presión lateral, consideramos  $U = 1.6H$

$$H_u = 1.6 \left( C_a \gamma_s \frac{h^2}{2} \right) = 1.6 \left( 0.271(17) \frac{5.115^2}{2} \right) = 96.43 \text{ kN}$$

Lo que produce un momento

$$M_u = H_u \left( \frac{h_s}{3} \right) = 96.43 \left( \frac{5.115}{3} \right) = 164.41 \text{ kN.m}$$

### Diseño por flexión

Para  $f'_c = 31 \text{ MPa}$

$$\beta_1 = 0.85 - 0.05 \frac{f'_c - 28}{7} = 0.85 - 0.05 \frac{31 - 28}{7} = 0.83$$

$$\rho_{min} = \frac{1.4}{f_y} \geq \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} = 0.00333$$

$$\rho_{max} = 0.5\rho_b = 0.5 \left( 0.51\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \right) = 0.01562$$

$$M_n = Rbd^2$$

$$R = \frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{164.41(10^6)}{0.9(1000)(297.5)^2} = 2.064 \text{ N/mm}^2$$

y puesto que

$$R = \rho f_y \left( 1 - 0.59\rho \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

tenemos

$$2.064 = \rho(420) \left( 1 - 0.59\rho \frac{420}{31} \right)$$

y resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene:

$$\rho_{min} < \rho = 0.00512 < \rho_{max}$$

de lo que resulta una sección de acero de refuerzo de

$$A_s = \rho b d = 0.00512(1000)(297.5) = 1523.2 \text{ mm}^2$$

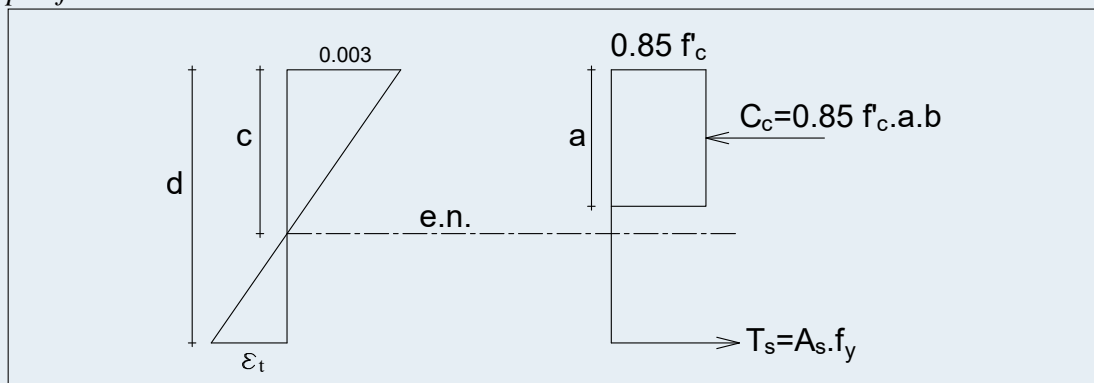
lo que se puede cubrir con 3  $\phi$  de 28 mm, resultando un área de refuerzo de  $A_s = 1847 \text{ mm}^2$ .

Se requiere adicionalmente un área de acero de refuerzo mínimo de

$$A_{s,min} = 0.002 b h = 0.002(1000)(385) = 770 \text{ mm}^2$$

lo que repartido en las dos caras del muro, corresponde  $770/2 = 385 \text{ mm}^2$  en cada cara, lo que se cubre con 2  $\phi 16$ .

Una vez calculado el acero de refuerzo, se procede a verificar si la sección está controlada por flexión.



Del diagrama de esfuerzo-deformación obtenemos:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{1847(420)}{0.85(31)(1000)} = 29.44 \text{ mm}$$

y haciendo

$$\frac{0.003}{c} = \frac{0.003 + \epsilon_t}{d}$$

de lo cual resulta

$$\epsilon_t = \frac{0.003 d}{c} - 0.003 = \frac{0.003(297.5)}{29.44/0.83} - 0.003 = 0.022 > 0.005$$

por lo tanto, la sección está controlada por flexión, y se acepta el diseño

**Diseño por corte**

El cortante crítico se verifica a la distancia  $d$ , a partir de la cara del apoyo, en este caso se ubica a la distancia  $d$  a partir de la base del muro. En el presente caso, por brevedad del ejercicio, verificamos el cortante máximo que se produce en la base del muro, el cual es equivalente a  $V_u = H_u = 96.43 \text{ kN}$ .

El cortante que resiste el elemento es

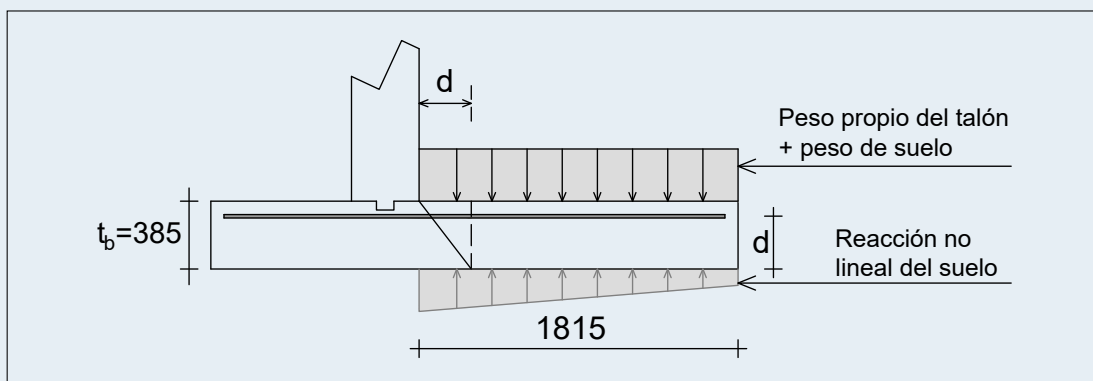
$$V_c = 0.17\lambda\sqrt{f'_c}b_wd = 0.17(1.0)\sqrt{31}(1000)(297.5) = 281590 \text{ N}$$

Debe cumplirse que  $\phi V_c > V_u$  para que el elemento resista el cortante sin necesidad de refuerzo por corte, como efectivamente se verifica

$$\phi V_c = 0.75(281590) = 211192 \text{ N} > V_u = 96430 \text{ N}$$

### 7. Diseño del talón

**Cortante.** El talón está afectado por su peso propio y el suelo sobre el mismo, pero adicionalmente está afectado por la reacción del suelo bajo el elemento. Sin embargo, debido a la dificultad de cálculo de una reacción no lineal, la reacción del suelo no se incluye en el análisis.



Asumiendo refuerzo  $\phi = 25 \text{ mm}$ , resulta  $d = 385 - 75 - 25/2 = 297.5 \text{ mm}$

$$V_c = 0.17\lambda\sqrt{f'_c}b_wd = 0.17(1.0)\sqrt{31}(1000)(297.5) = 281590 \text{ N}$$

De lo cual resulta

$$\phi V_c = 0.75(281590) = 211192 \text{ N}$$

El cortante último ( $V_u$ ) al que está sometido el elemento proviene del peso del elemento, mayorado por el factor de 1.2, y del peso del terreno, mayorado con un factor de 1.6

$$V_u = 1.2(24(1.815)(0.385))(1.0) + 1.6(17(1.815)(5.115))(1.0) = 272.64 \text{ kN}$$

Mediante interpolación obtenemos el cortante crítico ubicado a una distancia  $d$  a partir del apoyo, el mismo que resulta mayor que  $\phi V_c$ , lo que significa que el elemento por sí solo no soporta el cortante requerido

$$V_{u,d} = 227.95 \text{ kN} > \phi V_c = 211.19 \text{ kN}$$

En estas condiciones, el elemento debe reforzarse por cortante, o rediseñarse, que es lo más recomendable. En este caso, con la finalidad de incrementar el cortante resistente, incrementamos el espesor del talón mediante un factor de 1.1, por lo que resulta  $t_b = 385(1.1) = 423.5 \text{ mm}$

$$\frac{V_u}{\phi V_c} = \frac{227.95}{211.19} = 1.1$$

Asumo  $t_b = 500 \text{ mm}$ , por lo que  $d = 500 - 75 - 25/2 = 412.5 \text{ mm}$ , y se vuelve a calcular

$$\phi V_c = 0.75 \left( 0.17 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \right) = 0.75 \left( 0.17 (1.0) \sqrt{31} (1000) (412.5) \right) = 292829 \text{ N}$$

Puesto que el espesor del talón se incremento, sin cambiar la profundidad de desplante, la altura del relleno también cambia, afectando la cantidad de suelo estimada para el cálculo del cortante requerido

$$V_u = 1.2 (24(1.815(0.5))(1.0)) + 1.6 (17(1.815(5.0))(1.0)) = 272.98 \text{ kN}$$

y el cortante crítico a la distancia  $d$  a partir de la cara del apoyo resulta inferior a  $\phi V_c$ , por lo tanto se acepta el diseño

$$V_{u,d} = 210.94 \text{ kN} > \phi V_c = 292.93 \text{ kN}$$

**Nota.** Al cambiar el espesor de la zapata, sin haber cambiado la profundidad desplante, afecta la altura del muro, por lo que se debería revisar el cálculo previo. Sin embargo, por brevedad del ejercicio, y puesto que el cambio realizado le afecta de manera positiva, se omite la revisión.

**Flexión.** En el caso del talón de la zapata, el esfuerzo mayor proviene del relleno, lo que hace que el elemento actúe como una losa en volado, debiendo ubicarse el refuerzo por flexión en la parte superior del elemento. Procedemos a calcular el momento último, con lo cual obtenemos el índice de flexión, a partir del cual calculamos la cuantía requerida para calcular el acero de refuerzo

$$M_u = 1.2 \left( 24(0.5) \frac{1.815^2}{2} \right) + 1.6 \left( 17(5.0) \frac{1.815^2}{2} \right) = 247.73 \text{ kN.m}$$



$$R = \frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{247.73(10^6)}{0.9(1000)(412.5)^2} = 1.6177 \text{ N/mm}^2$$

$$1.6177 = \rho(420) \left( 1 - 0.59\rho \frac{420}{31} \right)$$

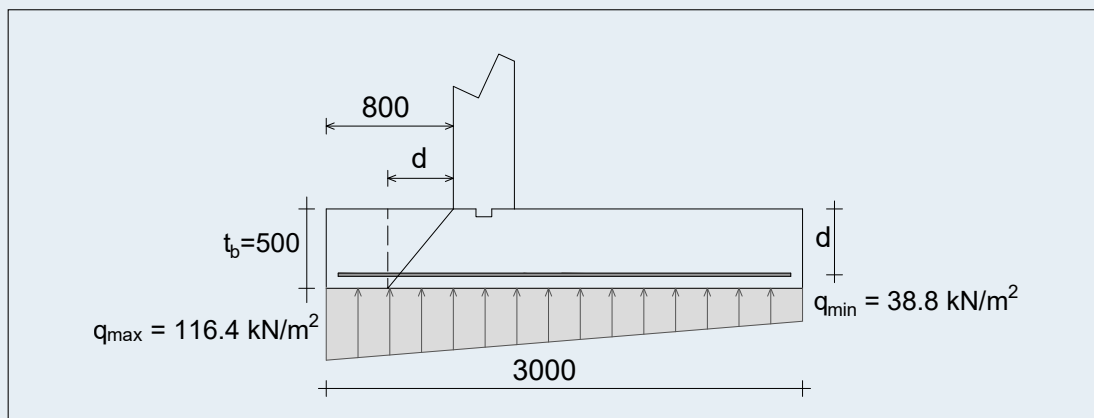
$$\rho_{min} < \rho = 0.00398 < \rho_{max}$$

$$A_s = \rho b d = 0.00398(1000)(412.5) = 1642 \text{ mm}^2$$

lo que se puede cubrir con 3  $\phi$  de 28 mm, lo que da un área de  $A_s = 1847 \text{ mm}^2$

### 8. Diseño del dedo

En el caso del dedo de la zapata, no se considera el esfuerzo que pueda causar el relleno, puesto que el mismo es susceptible de erosión. Por esta razón los esfuerzos a considerarse serán los causados por el peso propio del elemento y la reacción del suelo de cimentación. En comparación con el comportamiento del talón, el dedo también actúa como una losa en voladizo, pero al contrario de lo que sucede con el talón, el dedo es afectado por la reacción del suelo, por lo que el refuerzo por flexión debe ubicarse en la cara inferior del elemento.



### Análisis por cortante

Como se estableció en párrafos previos, la reacción del suelo presenta una reacción distribuida desde  $q_{min}$  hasta  $q_{max}$

$$q_{max} = (4b_b - 6a) \frac{\Sigma P_i}{b_b^2} = (4(3.0) - 6(1.25)) \frac{232.8}{3.0^2} = 116.4 \text{ kN/m}^2$$

$$q_{min} = (6a - 2b_b) \frac{\Sigma P_i}{b_b^2} = (6(1.25) - 2(3.0)) \frac{232.8}{3.0^2} = 38.8 \text{ kN/m}^2$$

*El cortante que resiste el elemento es*

$$\phi V_c = 0.75 \left( 0.17(1.0)\sqrt{31}(1000)(412.5) \right) = 292830 \text{ N}$$

*Basados en las las reacciones ( $q_{max}$ ,  $q_{min}$ ), mediante interpolación encontramos la reacción del suelo en la sección de cortante crítico, a la distancia  $d = 412.5 \text{ mm}$  a partir de la cara del apoyo, la misma que resulta*

$$q_d = \frac{(2.2 + 0.4125)(116.4 - 38.8)}{3.0} + 38.8 = 106.38 \text{ kN/m}^2$$

*y el cortante para la sección crítica a la distancia  $d$  a partir de la cara del muro resulta*

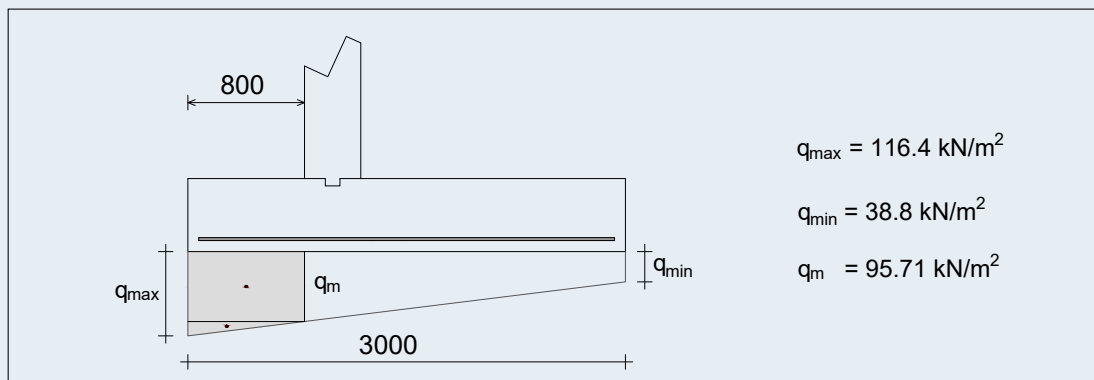
$$V_d = 1.6 \left( \frac{116.4 + 106.38}{2} (0.8 - 0.4125) \right) - 0.9 (24(0.5)(0.8 - 0.4125)) = 64.87 \text{ kN}$$

*Como se cumple que  $V_d = 64.87 \text{ kN} < \phi V_c = 292.83 \text{ kN}$ , no se necesita reforzar por cortante*

### **Análisis por Flexión**

*En la figura se muestra sombreada el área de presión de suelo que actúa sobre el dedo de la zapata, produciendo esfuerzo de flexión, el mismo que resulta*

$$M_1 = 95.71 \frac{0.8^2}{2} + (116.4 - 95.71) \frac{2(0.8)^2}{3} = 39.46 \text{ kN.m}$$



*y el momento producido por el concreto corresponde a*

$$M_2 = 24.0(0.5) \frac{0.8^2}{2} = 3.84 \text{ kN.m}$$

*para producir un momento mayorado*

$$M_u = 1.6(39.46) - 0.9(3.84) = 59.68 \text{ kN.m}$$

La presión del suelo se da en sentido contrario al peso de la zapata, por lo que los momentos producidos se restan. Con este momento último podemos obtener el índice de flexión para calcular la cuantía de acero requerida, y finalmente determinar la sección de acero de refuerzo.

$$R = \frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{59.68(10^6)}{0.9(1000)(412.5)^2} = 0.3897 \text{ N/mm}^2$$

$$0.3897 = \rho(420) \left( 1 - 0.59\rho \frac{420}{31} \right)$$

$$\rho = 0.00093 < \rho_{min}$$

$$A_s = \rho b d = 0.00333(1000)(412.5) = 1374 \text{ mm}^2$$

lo que se puede cubrir con 3  $\phi$  de 25 mm, dando un área de  $A_s = 1472 \text{ mm}^2$

Una vez obtenido el acero de refuerzo, puesto que en el diseño se utiliza  $\phi = 0.90$ , se debe verificar que el elemento esté controlado por tensión.

### **Requisitos de funcionamiento**

Para que la estructura funcione adecuadamente debemos cumplir con lo recomendado por la norma.

En el muro se requiere acero transversal mínimo por una cuantía de  $\rho_t = 0.0020$  para refuerzo  $\phi \leq 16$ , o  $\rho_t = 0.0025$  para  $\phi > 16$ . Usando  $\phi = 16$  obtenemos

$$A_{s,t} = 0.0020(1000)(385) = 770 \text{ mm}^2$$

lo que se cubre con  $4\phi 16 = 804 \text{ mm}^2$ , que se distribuye en las dos caras del muro

En la zapata se requiere acero por retracción y temperatura con una cuantía de  $\rho = 0.0018$

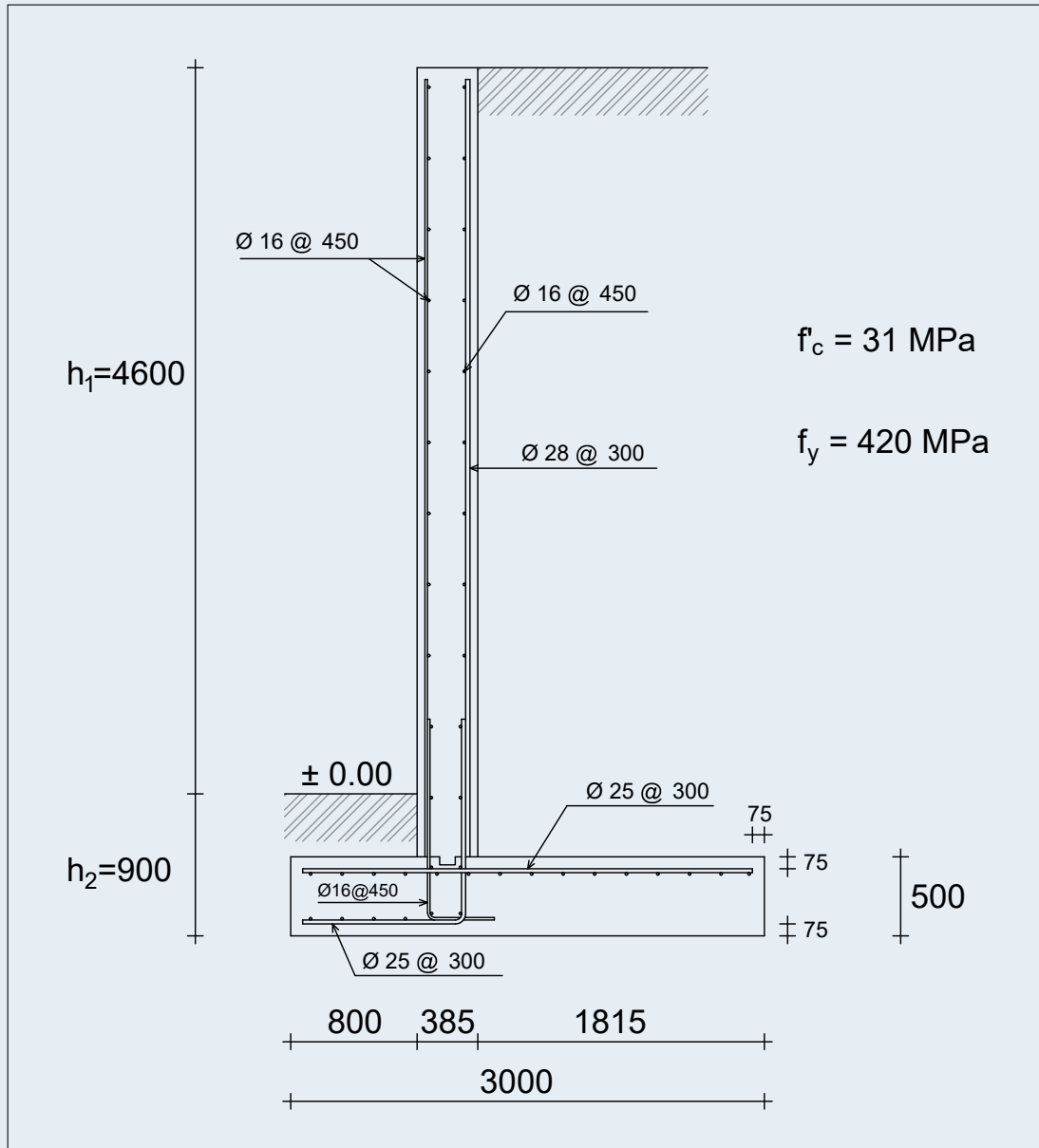
$$A_{s,t} = 0.0018(3000)(500) = 2700 \text{ mm}^2$$

lo que se cubre con  $14\phi 16 = 2814 \text{ mm}^2$ .

En la zapata, el acero del talón se extiende hacia el dedo, después de la sección crítica, y el acero del dedo se extiende dentro del muro, verificando la longitud de desarrollo correspondiente, de acuerdo a lo establecido en la sección 2.3.7. Debe verificarse además la extensión de los empalmes.

Especial atención merece la conexión muro-cimentación. Debido a las dimensiones de la

estructura, es usual que el colado del hormigón de la zapata se haga por separado al del muro, por lo que se debe disponer acero de refuerzo que sirva para la conexión posterior. Esto se lo hace por medio de espigos (dowels) o pernos de anclaje.





# Capítulo 9

## ANEXOS

### 9.1. Anexo A: Acero de refuerzo

Dependiendo de la composición del acero, su densidad puede variar entre unos 7750 y 8050  $kg/m^3$ , aceptándose 7850  $kg/m^3$  para el acero estructural utilizado como refuerzo para el hormigón armado. Para obtener el peso de una varilla de acero de construcción deberíamos multiplicar su volumen por el peso específico del acero, el cual para la densidad aceptada correspondería a 76.982  $kN/m^3$  ( $7850kg/m^3[9.80665m/s^2]$ ), por lo que tratándose de una varilla de 10 mm de diámetro, esta pesaría 0.00605  $kN/m$ , y no 0.00617 como se reporta en el Tabla 9.1. Sin embargo, considerando las incertidumbres con las que se tiene que tratar en el diseño de elementos de hormigón armado, en el cálculo utilizamos un peso específico de 78.5  $kN/m^3$ , tal como lo especifica la NEC [15], lo cual va en favor de la seguridad del diseño.

### 9.2. Anexo B: Cargas y sobrecargas

En más de una ocasión edificios en pleno uso han tenido que ser intervenidos en sus estructuras, mediante reforzamiento de vigas y losas para evitar excesivas deflexiones y encharcamientos en las cubiertas, implementando columnas donde no estaban planificadas para impedir que un volado siga ganando en deformación, implementando muros de contención y corte, reforzando cimentaciones para impedir asentamientos diferenciales, o simplemente dejando de construir las etapas restantes en vista del evidente asentamiento del edificio. Varias son las situaciones que podrían provocar que una estructura falle, y aunque podría ocurrir a consecuencia del mal uso de la estructura, la incorrecta evaluación de cargas también podría causar la falla estructural.

Una de las actividades más importantes, sino la más importante, durante el proceso de diseño es la correcta evaluación de las cargas que afectan al proyecto. Omisiones y errores de estimación podrían derivar en el colapso de una estructura, en trágicas ocasiones provocando la pérdida de vidas humanas, sobretodo ante la ocurrencia de un evento sísmico. Para las cargas de referencia el diseñador debe acudir a la NEC-SE-CG [15] y a la ASCE/SEI 7-16 [27], y aunque las referencias presentan algunas estimaciones, el diseñador debe en cada proyecto específico realizar las evaluaciones que sean necesarias, para las diferentes condiciones a las que pueda

Tabla 9.1: Propiedades de varillas comerciales para refuerzo estructural, con peso específico  $\gamma_s = 78.5 \text{ kN/m}^3$ , y límite de fluencia  $f_y = 420 \text{ MPa}$

| Diámetro (mm) | Sección (mm <sup>2</sup> ) | Peso (kgf/m) | Peso (kN/m) |
|---------------|----------------------------|--------------|-------------|
| 6             | 28.3                       | 0.222        | 0.00222     |
| 8             | 50.3                       | 0.395        | 0.00395     |
| 10            | 78.5                       | 0.617        | 0.00617     |
| 12            | 113.1                      | 0.888        | 0.00888     |
| 14            | 153.9                      | 1.208        | 0.01208     |
| 16            | 201.1                      | 1.578        | 0.01578     |
| 18            | 254.5                      | 1.998        | 0.01998     |
| 20            | 314.2                      | 2.466        | 0.02466     |
| 22            | 380.1                      | 2.984        | 0.02984     |
| 25            | 490.9                      | 3.853        | 0.03853     |
| 28            | 615.8                      | 4.834        | 0.04834     |
| 32            | 804.2                      | 6.313        | 0.06313     |
| 36            | 1017.9                     | 7.990        | 0.07990     |
| 40            | 1256.6                     | 9.865        | 0.09674     |

estar sometido el proyecto durante sus diferentes etapas de construcción y servicio.

Aunque se pueda pensar que las cargas más importantes a considerar para el diseño son aquellas que puedan ocurrir durante el uso de la estructura, durante la etapa de construcción podrían ocurrir cargas aun mucho más importantes. Así por ejemplo, las cargas de diseño en un edificio corresponden a las cargas muertas derivadas de todos los elementos estructurales y no estructurales fijos en el edificio, y las cargas vivas dependerán del uso y están determinadas por la norma. Sin embargo, durante la construcción frecuentemente es necesario el uso de montacargas y grúas que se apoyan directamente sobre la estructura en construcción, las cuales a más del peso transmiten vibraciones a la estructura que podrían causar daños irreparables, peor aun si consideramos que durante la etapa constructiva algunos elementos todavía no han alcanzado la capacidad de diseño.

No está por demás insistir en una correcta evaluación de cargas, que sin exagerar, se debe considerar las condiciones más desfavorables de acuerdo al tipo de uso de la estructura, condiciones ambientales y situación geográfica; de esto dependerá la seguridad y vida útil de la estructura.

## 9.3. Anexo C: Tolerancias admisibles

Cuando diseñamos, las dimensiones de los elementos son estimadas con una precisión en el orden de los 5 mm, lo que luego se plasma en planos y especificaciones técnicas. Una vez en el proceso constructivo, esa precisión se puede perder debido a causas tales como la falta de pericia del obrero, omisiones de funcionamiento, o cambios no reportados en el dimensionamiento de los elementos. Ante esto, es necesario considerar ciertas tolerancias a la hora de construir.

La información que se presenta en esta sección corresponde a la establecida por el ACI en las Especificaciones para tolerancias para concreto y materiales de construcción[17]. Con propósitos didácticos, en este texto solo se presentan unos pocos ítems que representan los usos más frecuentes en construcción de edificios. El lector deberá revisar la referencia para información detallada sobre los elementos que no se mencionan.

### 9.3.1. Fabricación y ensamblaje del refuerzo

Las tolerancias especificadas en la figura (hay que preparar la figura) ?? corresponden a los refuerzos desde los 10 hasta los 36 mm.

### 9.3.2. Localización del refuerzo

#### Ubicación del refuerzo dentro del elemento

- $\pm 6$  mm, cuando la profundidad o espesor del miembro es  $\geq 100$  mm
- $\pm 10$  mm, cuando la profundidad o espesor del miembro es  $> 100$  mm, pero  $\leq 300$  mm
- $\pm 13$  mm, cuando la profundidad o espesor del miembro es  $> 300$  mm

#### Recubrimiento, medido de forma perpendicular a la superficie del concreto

- $- 10$  mm, cuando la profundidad o espesor del miembro es  $\leq 300$  mm
- $- 13$  mm, cuando la profundidad o espesor del miembro es  $> 300$  mm
- La reducción del recubrimiento no debe exceder de  $1/3$  de la especificada

## 9.4. Anexo D: Momentos, cortantes y puntos de inflexión

Tanto para el análisis, como para el diseño de elementos de hormigón armado, es necesario conocer los esfuerzos a los que el elemento en cuestión está sometido. Existen métodos bien establecidos para encontrar los momentos flectores y fuerzas cortantes en un elemento, tales como el Método de Integración [28], el Método de Macaulay, el Método de Áreas de momentos, el Método de la Viga Conjugada, y el Método de Castigliano. En este texto no se profundiza en los métodos de análisis que permiten obtener las fórmulas requeridas, sino que se presentan



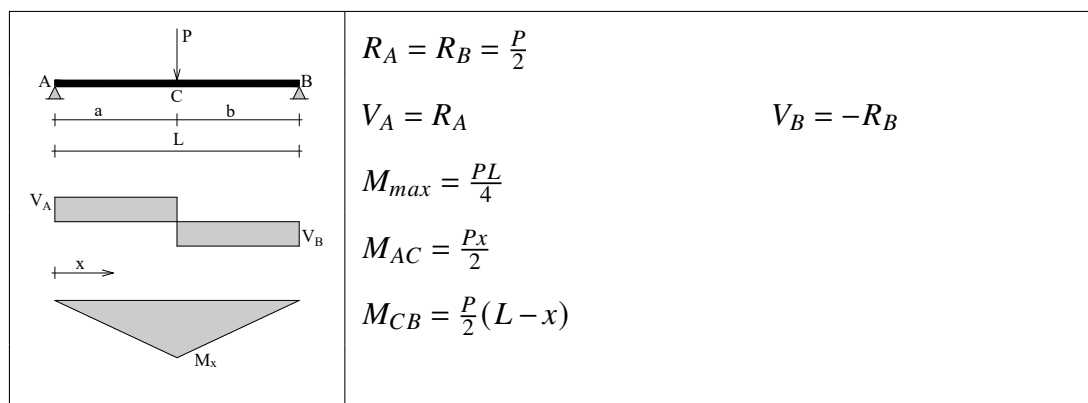
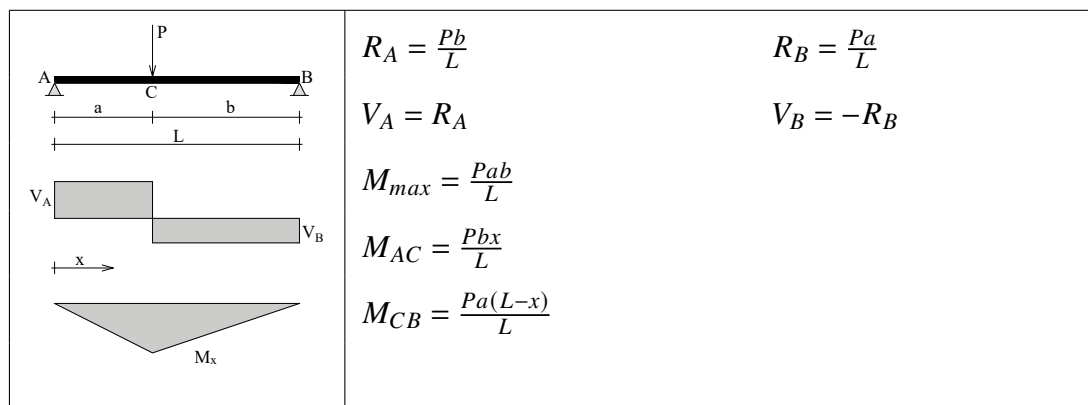
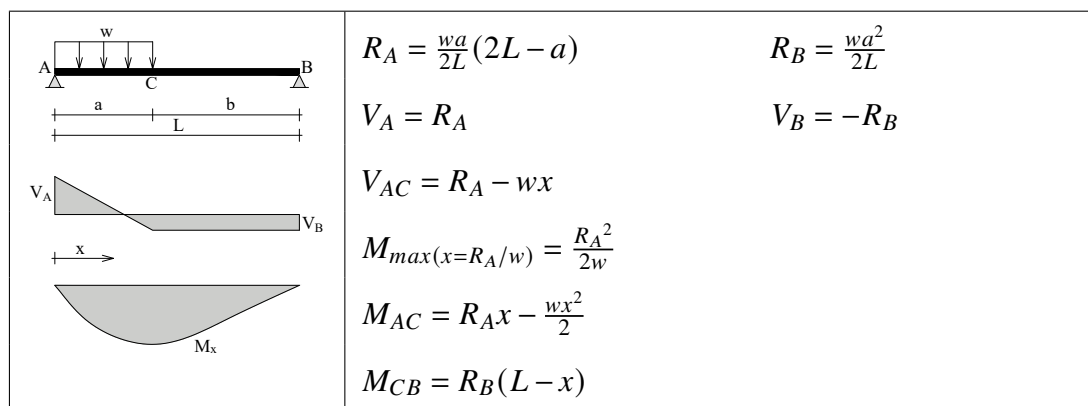
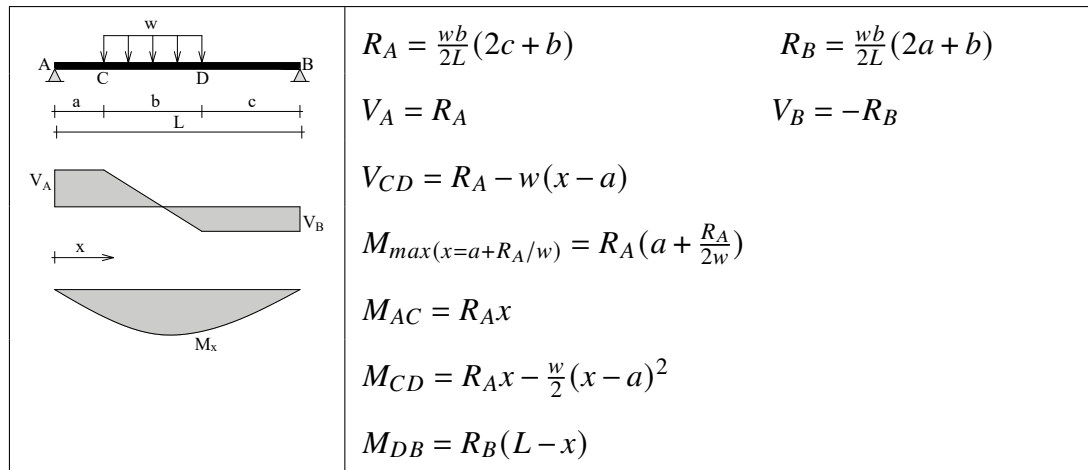
algunos resultados de uso práctico recogidos de libros de texto, manuales y reglamentos, tales como los publicados por el ACI[18], el AISC, o AHMSA[29] .

En el formulario presentado a continuación se utiliza la siguiente nomenclatura:

- $w$  es la carga repartida por unidad de longitud
- $P$  es la carga puntual aplicada

### 9.4.1. Vigas simplemente apoyadas

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $R_A = R_B = \frac{wL}{2}$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{AB} = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$ $M_{max} = \frac{wL^2}{8}$ $M_{AB} = \frac{wx}{2}(L - x)$                                                                                                                                                                       |
|  | $R_A = \frac{wL}{6} \qquad R_B = \frac{wL}{3}$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{AB} = \frac{w}{6L}(L^2 - 3x^2)$ $M_{max(x=\frac{L}{\sqrt{3}})} = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$ $M_{AB} = \frac{wx}{6L}(L^2 - x^2)$                                                                                                                     |
|  | $R_A = R_B = \frac{wL}{4}$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{AC} = \frac{w}{4L}(L^2 - 4x^2)$ $V_{CB} = \frac{w(L-x)^2}{L} - \frac{wL}{4}$ $M_{max(x=L/2)} = \frac{wL^2}{12}$ $M_{AC} = \frac{wL}{4}\left(x - \frac{4x^3}{3L^2}\right)$ $M_{CB} = \frac{wL}{4}\left(-\frac{L}{3} + 3x - \frac{4x^2}{L} + \frac{4x^3}{3L^2}\right)$ |



|  |                                                                                                                              |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $R_A = R_B = P$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{AC} = -V_{DB} = P$ $M_{AC} = Px$ $M_{CD} = M_{max} = Pa$ $M_{DB} = P(L-x)$ |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### 9.4.2. Vigas biempotradas

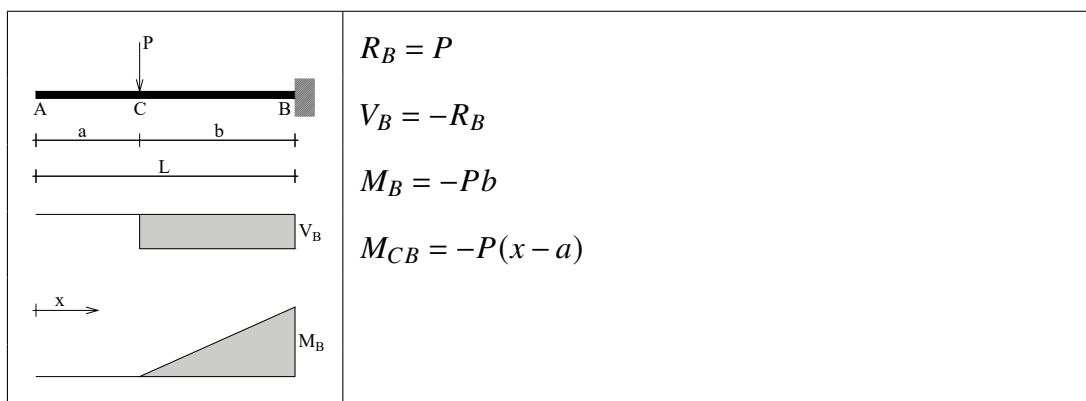
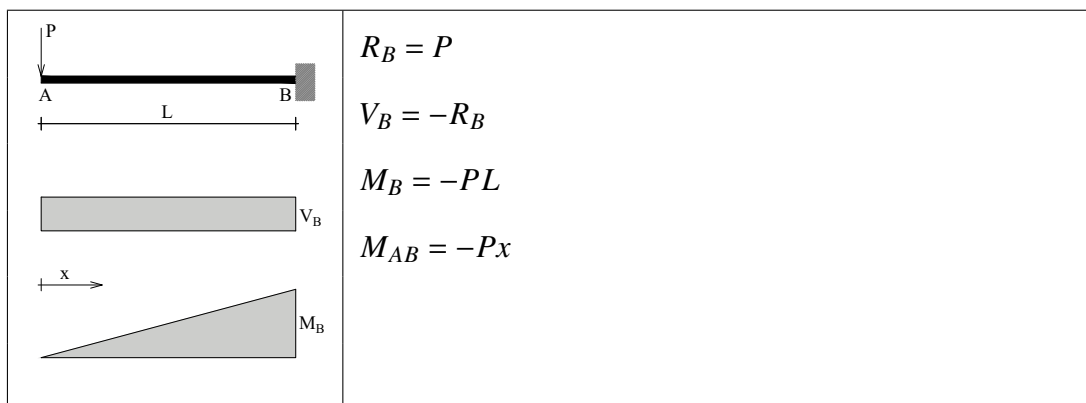
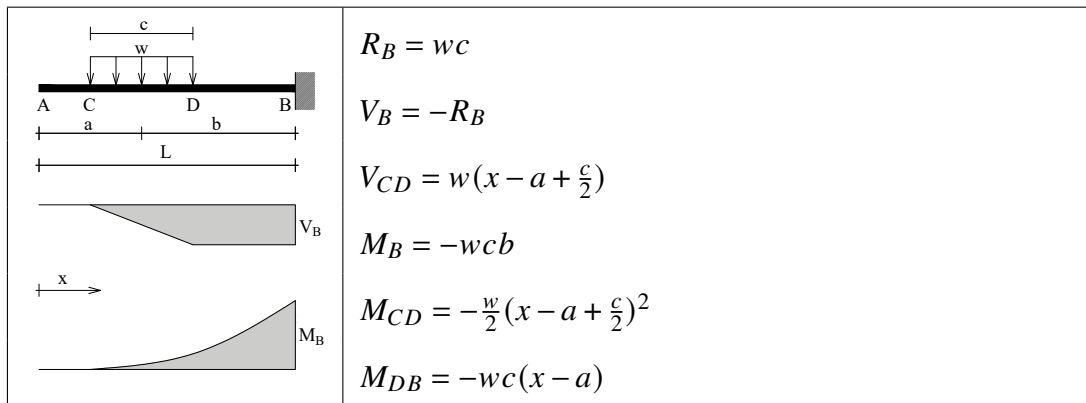
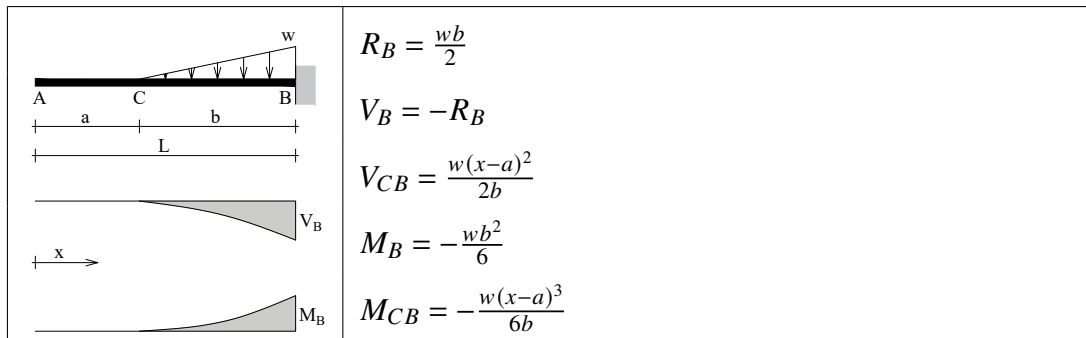
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $R_A = R_B = \frac{wL}{2}$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{AB} = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$ $M_A = M_B = -\frac{wL^2}{12}$ $M_{max(centro)} = \frac{wL^2}{24}$ $M_{AB} = \frac{w}{12}(6Lx - L^2 - 6x^2)$                                                                                                  |
|  | $R_A = \frac{3wL}{20} \qquad R_B = \frac{7wL}{20}$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{AB} = \frac{3wL}{20} - \frac{wx^2}{2L}$ $M_A = -\frac{wL^2}{30}$ $M_B = -\frac{wL^2}{20}$ $M_{AB} = \frac{3wLx}{20} - \frac{wL^2}{30} - \frac{wx^3}{6L}$                                                                   |
|  | $R_A = R_B = \frac{wL}{4}$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{AC} = wL\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{L^2}\right)$ $V_{CB} = -R_B + \frac{w(L-x)^2}{2b}$ $M_A = M_B = -\frac{5wL^2}{96} \qquad M_{max} = \frac{wL^2}{32}$ $M_{AC} = R_Ax + M_A - \frac{wx^3}{3L}$ $M_{CB} = R_B(L-x) + M_B - \frac{w(L-x)^3}{3L}$ |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $R_A = R_B = \frac{w}{2}(L - a)$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{AC} = R_A - \frac{wx^2}{2a} \qquad V_{CD} = \frac{w(L-2x)}{2}$ $V_{DB} = -R_A + \frac{w(L-x)^2}{2a}$ $M_A = M_B = -\frac{wL(L+b)}{96}\left(5 - \frac{b^2}{L^2}\right)$ $M_{AC} = R_A x + M_A - \frac{wx^3}{6a}$ $M_{CD} = R_A x + M_A + \frac{w}{6}(-3x^2 + 3ax - a^2)$                                                                                                           |
|  | $R_A = \frac{wbc}{L} - \frac{M_A - M_B}{L} \qquad R_B = \frac{wac}{L} + \frac{M_A - M_B}{L}$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{CD} = R_A - w\left(x - a + \frac{c}{2}\right)$ $M_A = -\frac{wc^3}{12L^2}\left(L - 3b + \frac{12ab^2}{c^2}\right)$ $M_B = -\frac{wc^3}{12L^2}\left(L - 3a + \frac{12a^2b}{c^2}\right)$ $M_{AC} = M_A + R_A x \qquad M_{DB} = M_B + R_B(L - x)$ $M_{CD} = M_A + R_A x - \frac{w}{2}\left(x - a + \frac{c}{2}\right)^2$ |
|  | $R_A = \frac{wa}{2L}(L + b) - \frac{M_A - M_B}{L}$ $R_B = \frac{wa^2}{2L} + \frac{M_A - M_B}{L}$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $V_{AC} = R_A - wx \qquad V_{CB} = R_A - wa$ $M_A = -\frac{wa^2}{12L^2}(6L^2 - 8La + 3a^2)$ $M_B = -\frac{wa^3}{3L}\left(1 - \frac{3a}{4L}\right)$ $M_{AC} = M_A + R_A x - \frac{wx^2}{2}$ $M_{CB} = M_B + R_B(L - x)$                                                                                                |
|  | $R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(L + 2a) \qquad R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(L + 2b)$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $M_A = -\frac{Pab^2}{L^2} \qquad M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$ $M_C = \frac{2Pa^2b^2}{L^3}$ $M_{AC} = \frac{Pb^2}{L^3}(Lx + 2ax - aL)$ $M_{CB} = \frac{Pa^2}{L^3}(Lb + L^2 - Lx - 2bx)$                                                                                                                                                             |

|  |                                                                                                                                                                                                                              |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $R_A = R_B = \frac{P}{2}$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $M_A = M_B = -\frac{PL}{8}$ $M_{max} = \frac{PL}{8}$ $M_{AC} = \frac{PL}{8} \left( \frac{4x}{L} - 1 \right)$ $M_{CB} = \frac{PL}{8} \left( 3 - \frac{4x}{L} \right)$ |
|  | $R_A = R_B = P$ $V_A = R_A \qquad V_B = -R_B$ $M_A = M_B = -\frac{Pa}{L}(L - a)$ $M_{AC} = \frac{P}{L}(L(x - a) + a^2)$ $M_{CD} = \frac{Pa^2}{L}$ $M_{DB} = \frac{P}{L}(L(L - x - a) + a^2)$                                 |

### 9.4.3. Vigas en voladizo

|  |                                                                                                                  |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $R_B = wL$ $V_B = -R_B$ $V_{AB} = wx$ $M_B = -\frac{wL^2}{2}$ $M_{AB} = -\frac{wx^2}{2}$                         |
|  | $R_B = \frac{wL}{2}$ $V_B = -R_B$ $V_{AB} = \frac{wx^2}{2L}$ $M_B = -\frac{wL^2}{6}$ $M_{AB} = -\frac{wx^3}{6L}$ |



## 9.5. Anexo E: Diagramas de Interacción del ACI

### Autorización de reimpresión de Diagramas de Interacción del ACI

Los diagramas de interacción adimensionales que se presentan en este documento se reproducen bajo autorización del *American Concrete Institute*, tomados de la publicación: *ACI REINFORCED CONCRETE DESIGN HANDBOOK-A Companion to ACI 318-19*, ACI MNL-17(21)-VOLUME 3 [18]

Los Diagramas de Interacción que se presentan corresponden a columnas de sección rectangular con refuerzo en las cuatro caras. Puesto que los diagramas son adimensionales, es responsabilidad del usuario verificar la coherencia de las unidades usadas en su aplicación. Para facilitar el uso de los diagramas en el Sistema Internacional de unidades, se puede considerar una transformación aproximada de  $1\text{ ksi} = 7\text{ MPa}$

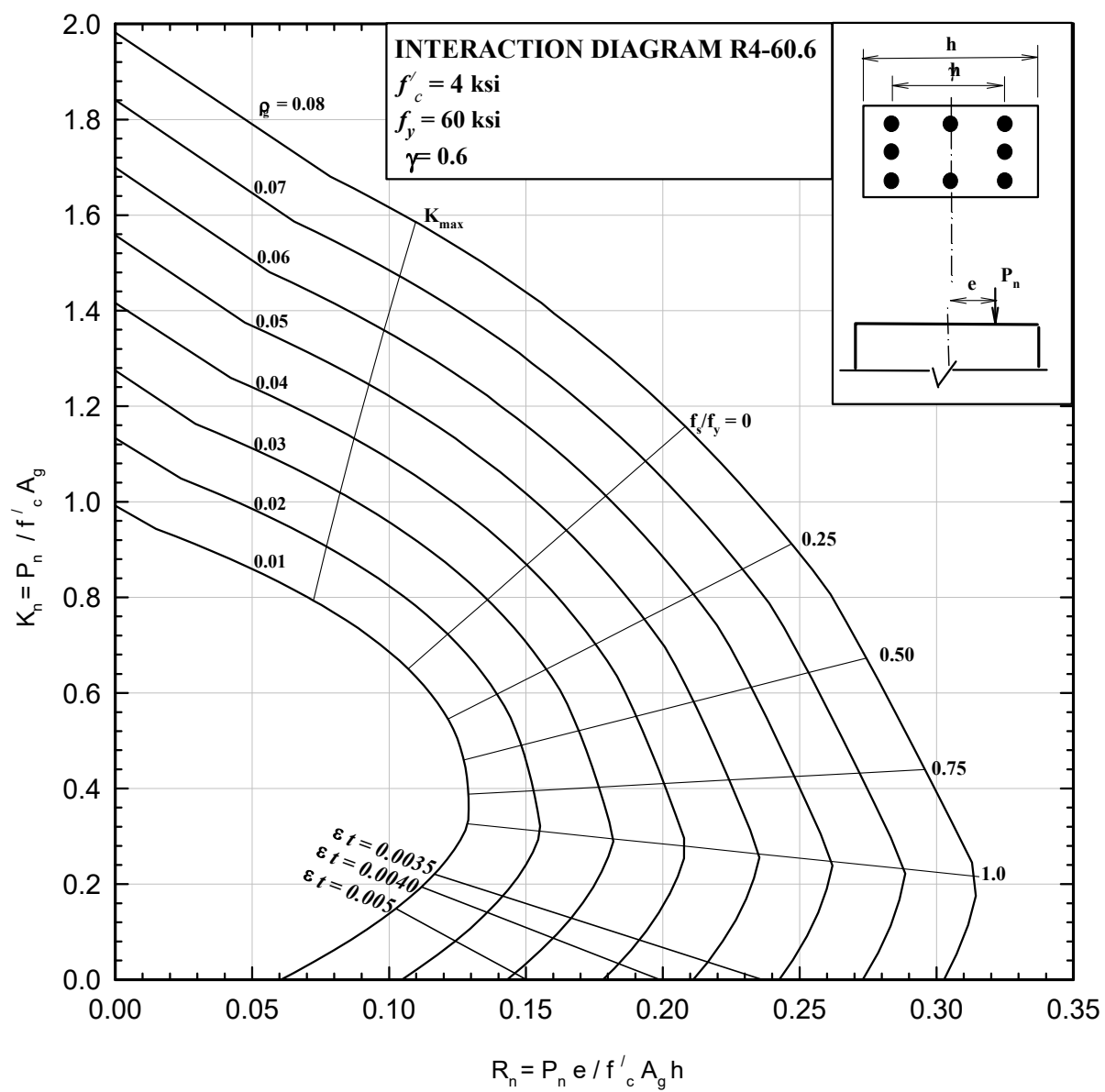
En los diagramas de interacción se destaca  $K_n$  en el eje de las ordenadas, y  $R_n$  en el eje de las abscisas, donde:

$$K_n = \frac{P_n}{f'_c A_g} \quad (9.1)$$

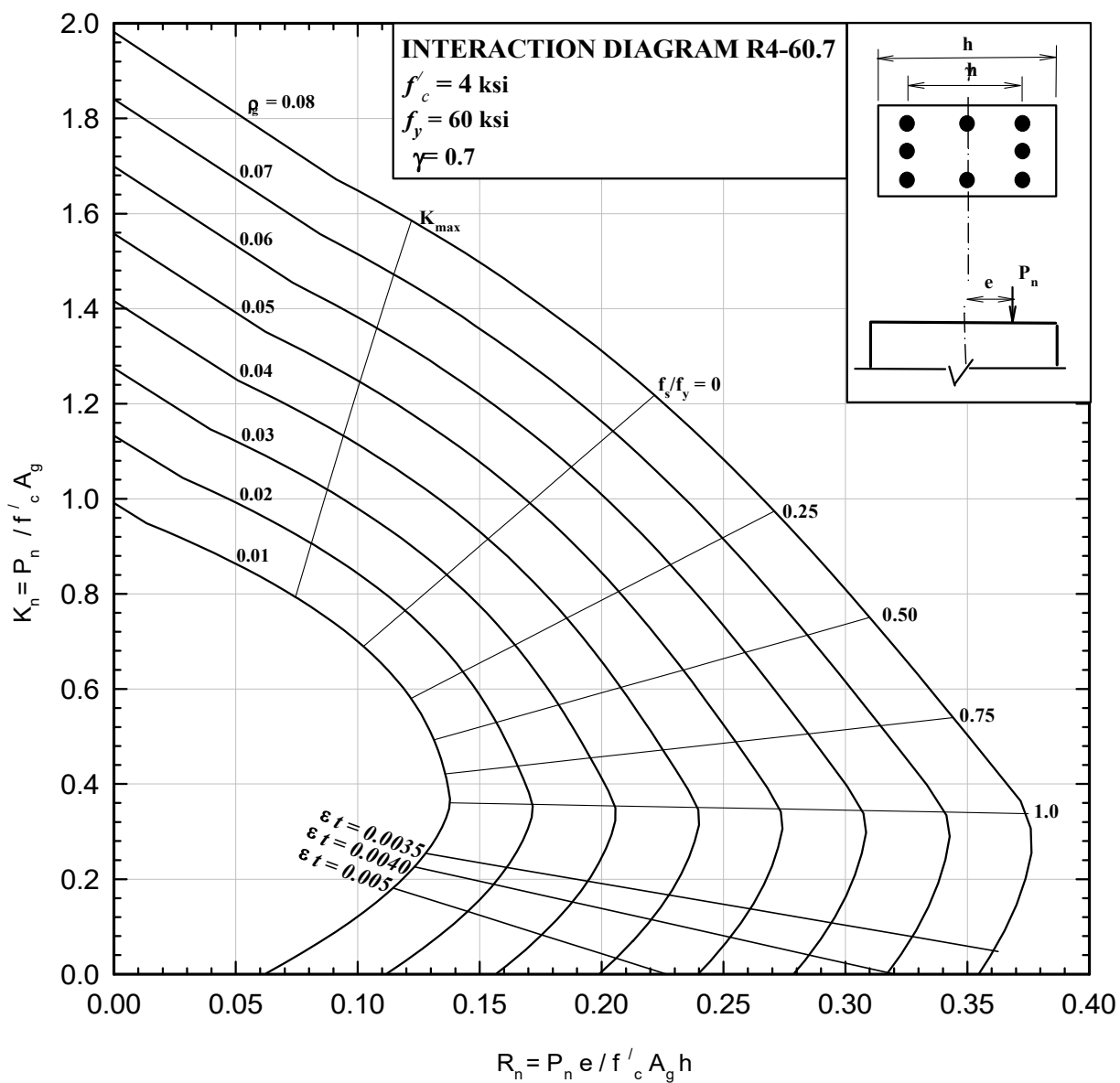
$$R_n = \frac{P_n e}{f'_c A_g h} \quad (9.2)$$

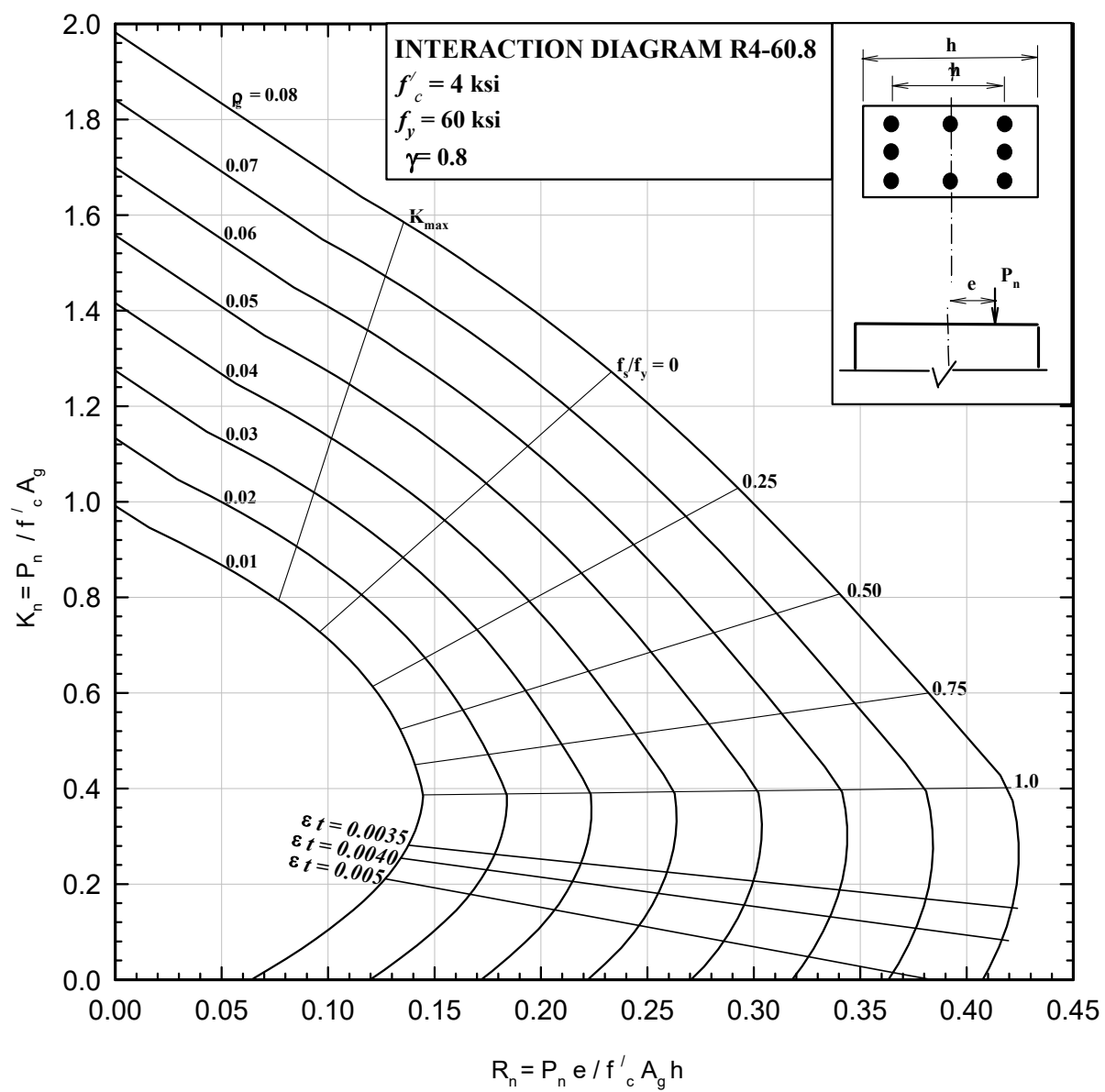
En las que:

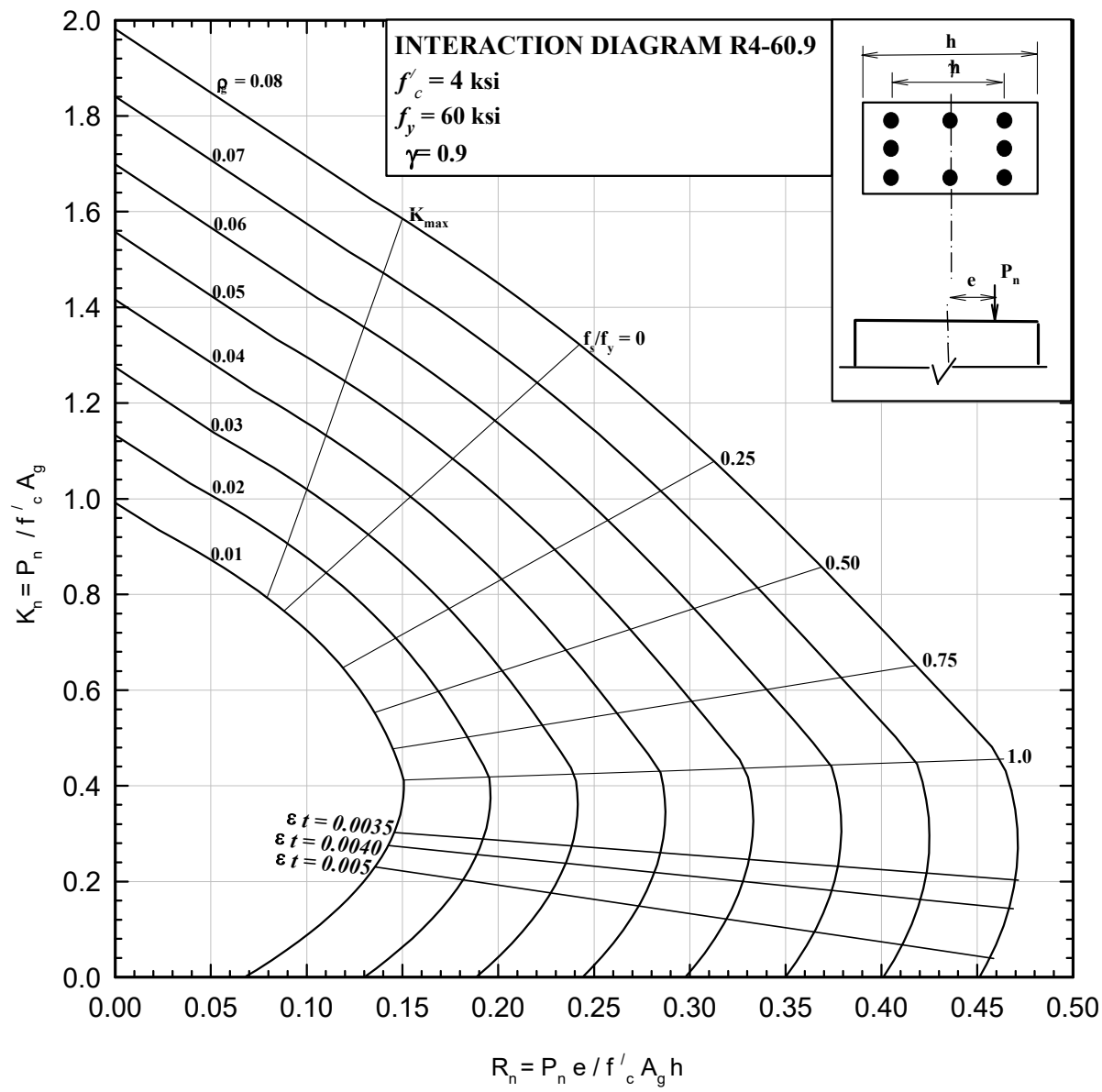
|        |                                                   |
|--------|---------------------------------------------------|
| $P_n$  | Carga axial nominal                               |
| $f'_c$ | Resistencia a compresión del hormigón             |
| $A_g$  | Área gruesa de la columna; $A_g = bh$             |
| $e$    | Excentricidad de carga; $e = M_u / P_u$           |
| $h$    | Dimensión de la columna en dirección del análisis |













**Requestor's Name:** Jose Zarate

**ACI member #:** N/A

**Company/Affiliation:** Universidad Tecnica De Machala

**Country:** Ecuador

**Address:** Avenida Panamerica, Km 5 1/2 via Machala-Pasaje

**State:** El Oro

**City:** Machala

**Zip code:** 07

**Phone number:** [REDACTED]

**E-mail Address:** [jzarate@utmachala.edu.ec](mailto:jzarate@utmachala.edu.ec)

March 27, 2025

**Subject:** Use of ACI Copyrighted Material

Your request to:

☒ Use information/figures/tables indicated below. Please credit American Concrete Institute, author(s) and publication.

☐ Reprint the information described in the quantity indicated. Please add a note to the reprint similar to: *Authorized reprint from (publication) (issue/volume/year as appropriate.)*

☐ Payment of Right-to-Reprint fee of (\$0 per Table/Figure/Section, \$0 total) is required.

Permission is granted to reference and reprint *INTERACTION DIAGRAMS R4-60.6, R4-60.7, R4-60.8, R4-60.9* from *ACI REINFORCED CONCRETE DESIGN HANDBOOK-A Companion to ACI 318-19, ACI MNL-17(21)-VOLUME 3*

Signed: **Ryan Jay** \_\_\_\_\_ Date: **27 March 2025**

Ryan Jay  
Manager/Graphic Designer, Publishing Services  
[Ryan.Jay@Concrete.org](mailto:Ryan.Jay@Concrete.org)



# Referencia Bibliográfica

- [1] Mattock, A. H.; Kriz, L. B.; and Hognestad, E. Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design. ACI Journal, Proceedings V. 57, No. 8, Feb. 1961, pp. 875-928.
- [2] Ministerio de Desarrollo Urbano y Vivienda del Ecuador. Norma Ecuatoriana de la Construcción - Estructuras de Hormigón Armado. (NEC-SE-HM). 2015.
- [3] Comité ACI 318. Building Code for Structural Concrete—Code Requirements and Commentary (ACI CODE-318-25). American Concrete Institute, 2025.
- [4] Comité ACI MNL-17(21). ACI Reinforced Concrete Design Handbook, A Companion to ACI 318-19 - Volume 1: Member Design. American Concrete Institute, 2021.
- [5] Ministerio de Desarrollo Urbano y Vivienda del Ecuador. Viviendas de hasta 2 pisos con luces de hasta 5 m. (NEC-SE-VIVIENDA). 2015.
- [6] Comité ACI 318. Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-19). American Concrete Institute, 2019.
- [7] Comité ACI 318. Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-11). American Concrete Institute, 2011.
- [8] Comité ACI 318. Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-14). American Concrete Institute, 2014.
- [9] Comité ACI 212. Report on Chemical Admixtures for Concrete. American Concrete Institute, 2016.
- [10] Steven H. Kosmatha; Michelle L. Wilson. Design and Control of Concrete Mixtures. 15th ed. Portland Cement Association. 500 New Jersey Avenue NW, 7th Floor, Washington, DC 20001-2066. 2011.
- [11] American Society for Testing and Materials. Standard Specification for Portland Cement - ASTM C 150. 2007.
- [12] NTE INEN 151:210. Cemento Hidráulico. Definición de Términos. 1ra ed. Instituto Ecuatoriano de Normalización, 2010.
- [13] NTE INEN 152:2012. Cemento Portland. Requisitos. 1ra ed. Instituto Ecuatoriano de Normalización, 2012.

- [14] Comité ACI E-701. Aggregates for Concrete. American Concrete Institute, 2016.
- [15] Ministerio de Desarrollo Urbano y Vivienda del Ecuador. Norma Ecuatoriana de la Construcción - Cargas (No Sísmicas). (NEC-SE-CG). 2015.
- [16] David Darwin; Charles W. Dolan; Arthur H. Nilson. Design of Concrete Structures. 15th ed. McGraw-Hill Education. 2Penn Plaza, New York, NY. 2016.
- [17] Comité ACI 117. Specification for Tolerances for Concrete Construction and Materials (ACI 117M-10) and Commentary. American Concrete Institute, 2010.
- [18] Comité ACI MNL-17(21). ACI Reinforced Concrete Design Handbook, A Companion to ACI 318-19 - Volume 3: Design Aids. American Concrete Institute, 2021.
- [19] Ministerio de Desarrollo Urbano y Vivienda del Ecuador. Norma Ecuatoriana de la Construcción - Geotécnia y Cimentaciones. (NEC-SE-GC). 2015.
- [20] Comité ACI MNL-17(21). ACI Reinforced Concrete Design Handbook, A Companion to ACI 318-19 - Volume 2: Special topics. American Concrete Institute, 2021.
- [21] Comité ACI E-701. Cementitious Materials for Concrete. American Concrete Institute, 2013.
- [22] NTE INEN 2239. Accesibilidad de las personas al medio físico. Señalización. Instituto Ecuatoriano de Normalización, 2016.
- [23] NTE INEN 2244. Accesibilidad de las personas al medio físico. Edificios. Bordillos y pasamanos. Instituto Ecuatoriano de Normalización, 2016.
- [24] NTE INEN 2249. Accesibilidad de las personas al medio físico. Circulaciones verticales. Escaleras. Requisitos. Instituto Ecuatoriano de Normalización, 2016.
- [25] Joseph E. Bowles. Foundation Analysis and Design. 5th ed. The McGraw-Hill Companies, New York. 1977.
- [26] Braja M. Das. Principles of Foundation Engineering. 8th ed. CENGAGE Learning, 20 Channel Center Street, Boston, MA 02210 USA. 2016.
- [27] American Society of Civil Engineers/Structural Engineering Institute. Minimum Design Loads and Associated Criteria for Building and Other Structures. 1801 Alexander Bell Drive, Reston, Virginia, 20191-4382, USA. 2017.
- [28] Aslam Kassimali. Structural Analysis. 6th ed. CENGAGE Learning, 20 Channel Center Street, Boston, MA 02210 USA. 2020.
- [29] Altos Hornos de México. Manual de Diseño para la Construcción con Acero. 2013.
- [30] Bresler, Boris. Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending. ACI JOURNAL, Proceedings V. 57, No. 5, pp. 481-490. 1960

- [31] Parme, A. L.; Nives, J. M.; y Gouwens, A. Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending. *ACI Journal, Proceedings* V. 63, No. 9, pp. 911-923. 1966
- [32] Furlong, R. W.; Hsu, C.-T. T.; and Mirza, S. A. Analysis and Design of Concrete Columns for Biaxial Bending—Overview. *ACI Structural Journal*, V. 101, No. 3. 2004
- [33] ASTM.C 39/C 39 M. Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens. 2006



ISBN: 978-9942-53-074-5



**Compás**  
capacitación e investigación