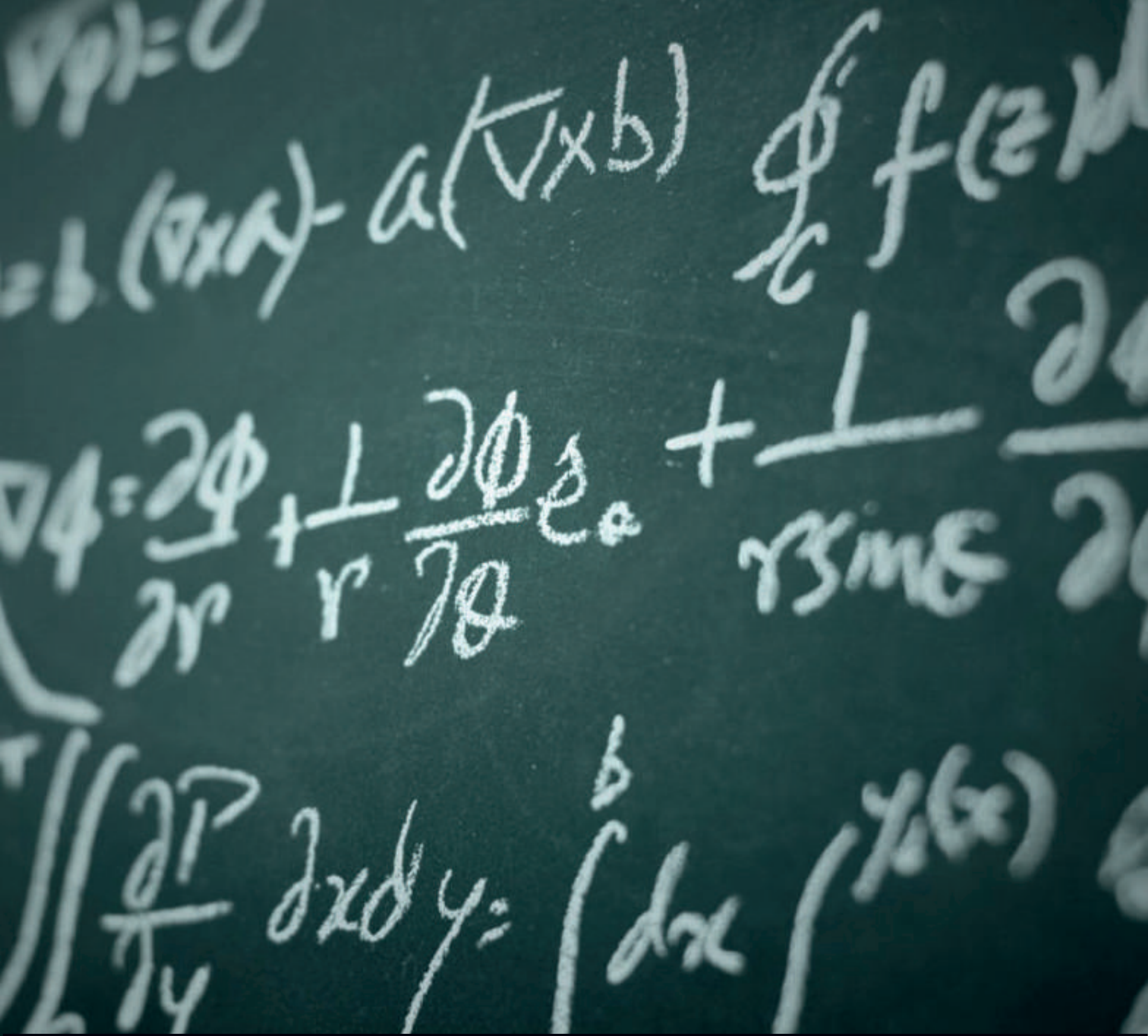


Límites y Continuidad de una función Real

NORMA BARRENO L.
JORGE CACHUPUT G.
JUAN MARTÍNEZ N.
MARCELO ROMÁN V.

Límites y Continuidad de una función Real

Autores:

NORMA BARRENO L.
JORGE CACHUPUT G.
JUAN MARTÍNEZ N.
MARCELO ROMÁN V.

Límites y Continuidad de una función Real

Autores:
NORMA BARRENO L.
JORGE CACHUPUT G.
JUAN MARTÍNEZ N.
MARCELO ROMÁN V.

compÁs

Primera edición: agosto 2018

ISBN: 978-9942-33-037-6

Diseño de portada y diagramación:
Equipo Editorial Grupo Compás

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos
con base en la normativa del editorial

Cita.
BARRENO, N, CACHUPUT, J, MARTÍNEZ, J, ROMÁN, M (2018) Límites y Continuidad de una función Real, Editorial Grupo Compás, Guayaquil Ecuador, 101 pag

Índice general

Prólogo

El presente texto sobre ***Límites y Continuidad de una Función Real de variable real*** nace como la necesidad de implementar una metodología didáctica basada en la utilización del software matemático como un recurso didáctico, que permita al estudiante analizar, interpretar y concluir sobre el estudio de funciones en términos de su comportamiento alrededor de un punto; así como, en los puntos próximos a « él ». La teoría sobre límites y continuidad de una función real es indispensable conocer, puesto que es la base sobre la cuál se desarrollan los conceptos y definiciones del Cálculo Diferencial e Integral y posteriormente el análisis funcional.

Se presenta una compilación del material teórico de diferentes autores los mismos que son citados en la bibliografía, para el desarrollo del texto se utilizó software matemático Matlab, así como el software libre Geogebra y Maxima los mismos que sonn utilizados en función de la adaptabilidad didáctica del tema que se estudia en los últimos años de educación secundaria y primeros niveles de las carreras universitarias.

CAPÍTULO 1

Capítulo 1

Límite de una Función Real

1.1. Introducción

Los conceptos sobre ***Límites y Continuidad de una función real*** representan la piedra angular sobre la que se edificará el estudio del análisis matemático; pues estos conceptos básicos permiten analizar las formas y características de una función real, de su análisis se formaliza definiciones importantes como la derivada e integral de una función, las mismas que tienen importancia trascendental en el estudio de optimización de funciones aplicadas al cálculo de velocidades y aceleraciones en el campo de la física, cálculo de costos marginales en economía y otros.

En matemática, el límite es un concepto que describe la tendencia de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a un determinado valor, en particular en el análisis real este concepto se utiliza para definir la convergencia, continuidad, derivación e integración de funciones.

1.2. Noción intuitiva de límite de una función

El concepto de límite está ligado a conceptos como aproximación, proximidad, cercanía, tendencia, vecindad, entre otros; es decir, es un concepto amplio que necesita ser puntualizado para el desarrollo de los apuntes que presentamos en este texto.

A continuación realizaremos el estudio del comportamiento de algunas funciones reales en torno a un punto, de dicho análisis deduciremos y formalizaremos la definición de límite de una función real en torno a un punto.

Para esto, en primera instancia vamos a considerar como límite a la aproximación del comportamiento de las imágenes de una función con respecto a un valor real.

1.3. Límite de una función en un punto

El concepto de límite está muy relacionado con el de proximidad y tendencia de una serie de valores, de manera informal, diremos que $L \in \mathbb{R}$ es el ***límite*** de una función $f(x)$ en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si $f(x)$ tiende o se aproxima cada vez más a L, a medida que x se aproxima a x_0, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Si lo que nos interesa es la tendencia de $f(x)$ cuando nos aproximamos al punto x_0 sólo por un lado, hablamos de ***límites laterales***. Diremos que L es el ***límite por la izquierda*** de una función $f(x)$ en un punto x_0, si $f(x)$ tiende o se aproxima cada vez más a L, a medida que x se aproxima a x_0 por la izquierda, es decir con valores $x < x_0$, y se denota por

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Del mismo modo, diremos que L es el ***límite por la derecha*** de una función $f(x)$ en un punto x_0, si $f(x)$ tiende o se aproxima cada vez más a L, a medida que x se aproxima a x_0 por la derecha, es decir con valores $x > x_0$, y se denota por

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Por supuesto, para que exista el límite global de la función $f(x)$ en el punto x_0, debe existir tanto el límite por la izquierda, como el límite por la derecha, y ser iguales, es decir

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Ejemplo 1

Consideremos la función $f(x) = 0{,}3x^2$ y veamos que sucede cuando $x \in D_f$ se acerca al valor de 3; es decir $x \to 3$.

En éste ejemplo, vamos a analizar y visualizar el comportamiento de las imágenes de la función $f(x)$ cuando el valor de x se aproxime al valor de 3, tanto ***por la izquierda*** (valores menores de 3) y ***por la derecha*** (valores mayores de 3) que, en algunos textos de cálculo infinitesimal se los suele denominar aproximaciones por defecto y por exceso respectivamente.

Aproximación por izquierda

x	$f(x) = 0{,}3x^2$
2,80	2,352
2,85	2,437
2,90	2,523
2,95	2,611
3,00	2,700

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 3^-} 0{,}3x^2 = 2{,}7$$

Aproximación por derecha

x	$f(x) = 0{,}3x^2$
3,20	3,072
3,15	2,977
3,10	2,883
3,05	2,791
3,00	2,700

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 3^+} 0{,}3x^2 = 2{,}7$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 3} 0{,}3x^2 = 2{,}7$$

Apoyados por la gráfica de la función, así como la tabla de valores de $y = f(x)$ podemos concluir que las imágenes de la función se aproximan al valor 2.7, ya sea que x se aproxime a 3 por la izquierda o por la derecha.

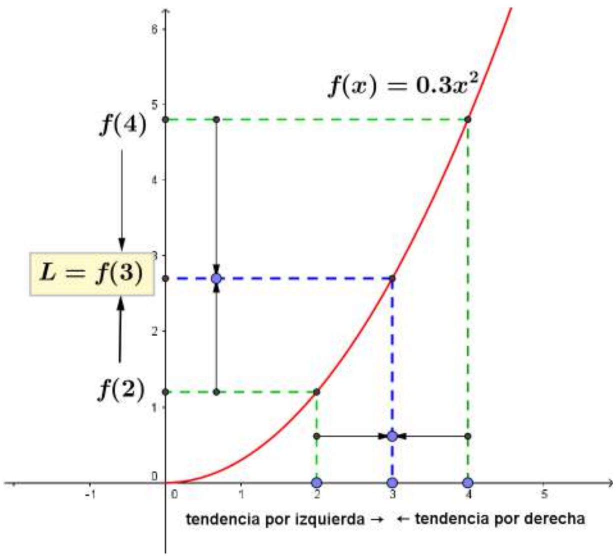
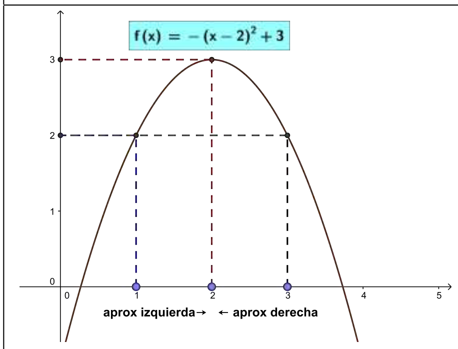


Figura 1.1: Límite cuando x tiende a 3

Ejemplo 2

Consideremos la función $f(x) = -(x-2)^2 + 3$ y veamos que sucede cuando $x \in D_f$ se acerca al valor de 2; es decir $x \to 2$.

Función cuadrática	Valores de la función alrededor de $x = 2$
	see table below

x	f(x)
1,90	2,9900
1,92	2,9936
1,94	2,9964
1,96	2,9984
1,98	2,9996
2,00	3,0000
2,02	2,9996
2,04	2,9984
2,06	2,9964
2,08	2,9936
2,10	2,9900

Como análisis de este ejemplo se puede observar que a medida que los valores de x se aproximan a 2 por la izquierda y por la derecha, los valores de las imágenes se aproximan al valor de 3.

Resumen de noción de límite

Entonces, partiendo de la introducción realizada tenemos que el estudio de límites de una función real está dado en términos del comportamiento de sus imágenes a medida que el valor de la variable x de una función $f(x)$ tiende a un valor x_0, es decir, debemos dar contestación a la siguiente interrogante.

¿A dónde se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0?

Nota 1

Es importante tener presente que, para el análisis de las funciones reales, los diferentes valores que toma la variable independiente en nuestro caso x deben pertenecer al dominio de la función (D_f), y el valor x_0 puede como no puede pertenecer al dominio de la función.

Por el momento, sin definir formalmente el límite de una función y en el contexto de que límite lo vamos a tomar como sinónimo de aproximación vamos a adoptar las siguientes consideraciones:

- Decimos que x ***tiende*** a un valor x_0, y lo escribimos $x \to x_0$, si se pueden tomar valores de x tan próximos a x_0 como se quiera, no necesariamente llegando a tomar el valor de x_0.

- Si la aproximación es por defecto (con valores menores que x_0) se dice que x tiende a x_0 por la izquierda, y se escribe $x \to x_0^-$, ya que el análisis esta en términos de las imágenes adoptamos la siguiente nomenclatura para representar este análisis,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

- Si la aproximación es por exceso (con valores mayores que x_0) se dice que x tiende a x_0 por la derecha, y se escribe $x \to x_0^+$, de manera similar adoptamos la nomenclatura,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Ahora consideremos otros ejemplos en los que visualicemos el comportamiento de las imágenes de la función cuando realizamos una aproximación con respecto a un punto.

En el siguiente ejemplo analicemos el comportamiento de la función alrededor de un punto que no pertenece al dominio de la misma.

Ejemplo 3

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y analicemos el comportamiento de las imágenes alrededor de $x = -1$.

de la tabla de valores podemos observar el comportamiento de las imágenes $f(x)$ a medida que x tiende a -1.

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-1{,}13$	8,692
$-1{,}12$	9,333
$-1{,}11$	10,091
$-1{,}00$	No existe

$\Downarrow$

No existe $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1}$

Por la derecha

x	$f(x)$
$-0{,}97$	$-32{,}333$
$-0{,}98$	$-49{,}000$
$-0{,}99$	$-99{,}000$
$-1{,}00$	No existe

$\Downarrow$

No existe $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1}$

$\Downarrow$

No existe $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x}{x+1}$

Como podemos evidenciar en la tabla de valores de la función y de la gráfica que acontinuación se presenta; se determina que a medida que los valores se aproximan a -1 por la izquierda sus imágenes tienden a crecer, en tanto que sí nos aproximamos a -1 por la derecha las imágenes tienden a decrecer. Este hecho nos presenta una novedad con respecto a los ejemplos anteriores, en el sentido de que las imágenes **no** se aproximaban a un mismo valor mientras los valores de las x se aproximaban a un x_0 dado.

Presentamos la gráfica de la función para un mejor análisis.

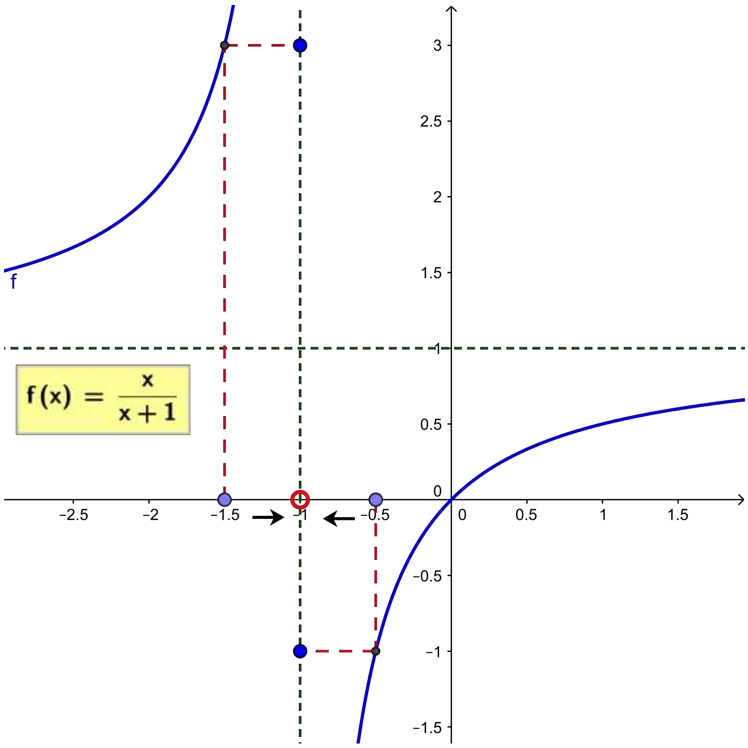


Figura 1.2: Análisis de las imágenes de $f(x)$ alrededor de $x = -1$

Ahora análicemos funciones cuando $x \to x_0$ los valores de $f(x)$ crecen o decrecen infinitamente y entonces no existe el límite. Ante éste se suele decir que la función *diverge* y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo 4

Veamos la tendencia de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ cuando $x \to 0$.

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	100
$-0{,}01$	10000
$-0{,}001$	1000000

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Por la derecha

x	$f(x)$
0,1	100
0,01	10000
0,001	1000000

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Ahora analicemos el comportamiento de las imágenes de la función alrededor del valor de $x = 0$.

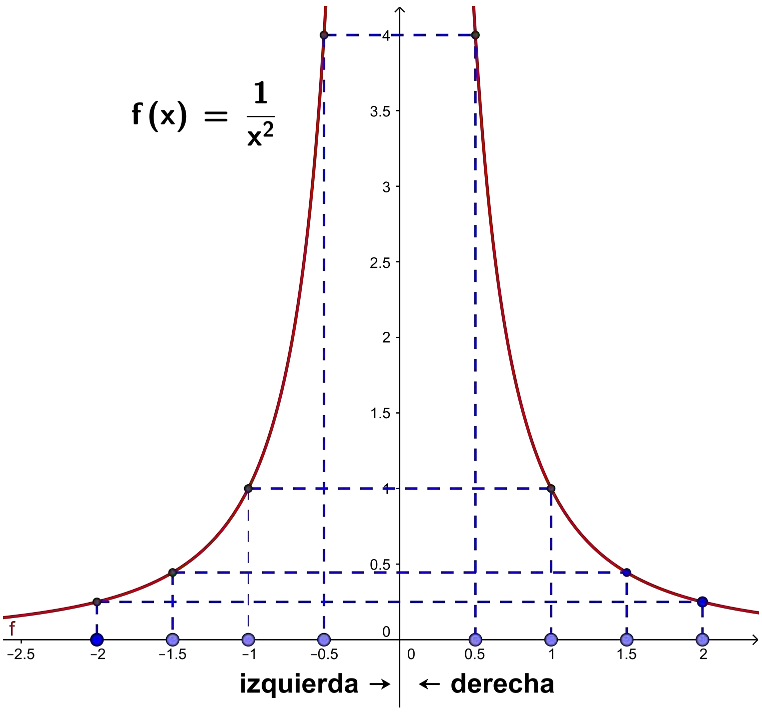


Figura 1.3: Función

Podemos observar que el comportamiento de las imágenes crecen a medida que los valores se aproximan a 0 por la izquierda como por la derecha, pero este comportamiento no garantiza que tengamos la existencia del límite de la función alrededor de $x = 0$.

1.4. Topología en $\mathbb{R}$

Definición 1.

Sea $\delta \wedge x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall \delta > 0$ se llama VENCIDAD o ***ENTORNO*** de centro x_0 y radio $\delta > 0$ al conjunto $V_\delta(x_0)$ tal que $V_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}/|x - x_0| < \delta\}$

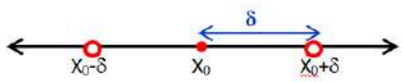


Figura 1.4: Entorno de centro x_0 y radio δ

Si al entorno $V_\delta(x_0)$ no se le considera el centro x_0. Entonces se denomina ***entorno reducido*** de centro x_0 y radio $\delta > 0$ y se denota con $V'_\delta(x_0)$ al conjunto

$$V'_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}/0 < |x - x_0| < \delta\}$$

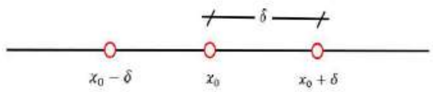


Figura 1.5: Entorno sin centro x_0 y radio δ

Definición 2.

Se llama ***Entorno por la izquierda*** de centro x_0 y radio $\delta > 0$ al conjunto $V_\delta^-(x_0)$ dado por $V_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R}/x_0 - \delta < x < x_0\}$

Definición 3.

Se llama ***Entorno por la derecha*** de centro x_0 y radio $\delta > 0$ al conjunto $V_\delta^+(x_0)$ dado por $V_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R}/x_0 < x < x_0 + \delta\}$

Definición 4.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. El punto x_0 se denomina punto de acumulación para el conjunto A si y sólo si, todo intervalo abierto de centro x_0 contiene por lo menos un elemento $x \neq x_0$ del conjunto A

Ejemplo 5

Consideremos el intervalo $A =]1, 5[$ sobre la recta numérica como un conjunto de puntos, analicemos los siguientes puntos con la finalidad de verificar si representan o no un punto de acumulación para el conjunto A.

- $x_0 = 2$ si es un punto es de acumulación para A debido a qué cualquier entorno de centro $x_0 = 2$ y radio δ interseca al intervalo A.
- $x_0 = 5$ si es un punto es de acumulación para A debido a qué cualquier entorno de centro $x_0 = 5$ y radio δ interseca al intervalo A.
- $x_0 = 7$ no es un punto es de acumulación para A debido a qué cualquier entorno de centro $x_0 = 7$ y radio δ no interseca al intervalo A.

Recordemos que $\delta \to 0$, es decir se trata de un valor infinitesimal.

Nos ayudamos de la siguiente gráfica para visualizar lo mencionado.

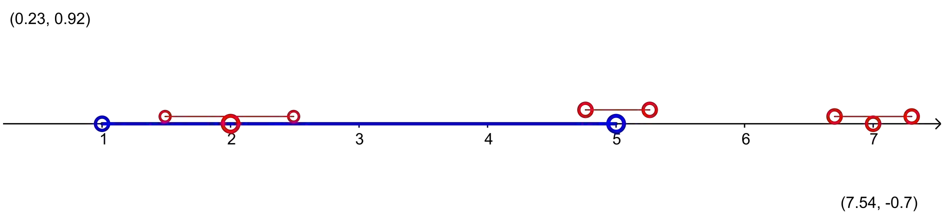


Figura 1.6: Puntos de acumulación.

Definición 5.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real. Se dice que $f(x)$ es una FUNCIÓN ACOTADA, si $\exists M > 0$, tal que $|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in A$.

Nota: En el trancurso del texto nos referiremos al dominio de la función con D_f

1.5. Definición Límite de una Función Real

Definición 6.

Sea $f : A \to B$ una función real con $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos, x_0 un punto de acumulación de A. Se dice que $f(x)$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a x_0 y se denota con $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / \forall x \in A \quad \text{con } x \neq x_0 \text{ se cumple } |x - x_0| \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Interpretación Geométrica de la definición del límite de una función real.

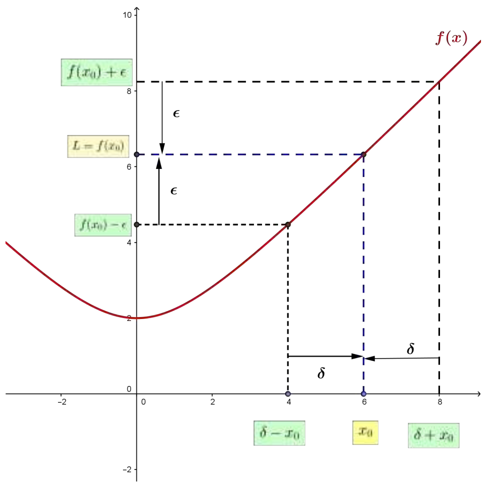


Figura 1.7: Definición de Límite

1.5.1. Metodología para determinar el $\delta - \epsilon$

Considerando la definición de límite, que indica

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / \forall x \in A \quad \text{con } x \neq x_0 \text{ se cumple } |x - x_0| \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

es decir que, para cualquier ϵ se debe determinar su δ correspondiente, entonces es necesario que determinemos una metodología que nos permita encontrar el δ que verifique la definición de límite.

Se sugiere considerar los siguientes pasos en dependencia del tipo de función que se esta cálculando.

1. Partimos de $|f(x) - L|$ para lograr tener una expresión de la forma $|g(x)||x - x_0|$

2. Procedemos acotar la función $|g(x)|$ con algún $M > 0$ con la condición de que $M \in 0 < |x - x_0| < \delta_1$, donde δ_1 se elige como:

   - Si la función es polinomica se escoge como un valor muy pequeño,
   - Si la función tiene asintotas, entonces $\delta_1 < |x - a|$, siendo δ_1 la distancia menor con respecto a todas las asintotas.

3. Realizando los pasos anteriores llegamos a

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| \leq |g(x)||x - x_0| < M|x - x_0| < \epsilon$$

   de donde $\delta = min\left\{\delta_1, \dfrac{\epsilon}{M}\right\}$.
   Por lo tanto, se ha conseguido el δ que permite cumplir con la defnción de límite de una función real.

Ejemplos sobre la verificación de límites por definición

A continuación presentamos algunos ejemplos para verificar el límite de una función real mediante su definición, cuyo objetivo es revisar los diferentes métodos para su desarrollo.
Demostrar los siguientes límites aplicando la definición de límite de una función real.

> ***Ejemplo 6***
>
> Probar $\lim\limits_{x \to -1} 3x^2 + x - 1 = 1$

Desarrollo

Se identifica los elementos x_0, $f(x)$ y L para poder aplicar en la definición de límite de una función en un punto.

Entonces, $\lim\limits_{x \to \underbrace{-1}_{x_0}} \underbrace{3x^2 + x - 1}_{f(x)} = \underbrace{1}_{L}$

Ahora utilizando la definición tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |(3x^2 + x - 1) - 1| < \varepsilon \\ &= |3x^2 + x - 2| < \varepsilon \\ &= |3x - 2||x + 1| < \varepsilon \qquad (*) \end{aligned}$$

Se procede acotar el término $|3x - 2|$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} |x + 1| < \tfrac{1}{2} \longrightarrow \delta_1 & \quad \text{por propiedad de valor absoluto se tiene} \\ -\frac{1}{2} < x + 1 < \frac{1}{2} & \quad \text{se resta 1} \\ -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} & \quad \text{se multiplica por 3} \\ -\frac{9}{2} < 3x < -\frac{3}{2} & \quad \text{se resta 2} \\ -\frac{13}{2} < 3x - 2 < -\frac{7}{2} & \quad \text{se multiplica por -1} \\ \frac{7}{2} < -3x + 2 < \frac{13}{2} & \quad \text{por propiedad de valor absoluto se tiene} \\ |-1||3x - 2| < \frac{13}{2} & \\ \therefore \qquad |3x - 2| < \frac{13}{2} & \qquad (**) \end{aligned}$$

Se reemplaza (**) en (*) y se tiene

$|3x - 2||x + 1| < \frac{13}{2}|x + 1| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x + 1| < \frac{2\varepsilon}{13} \longrightarrow \delta_2$ luego

$\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} = min\{\frac{1}{2}, \frac{2\varepsilon}{13}\}$

Ejemplo 7

Probar que $\lim\limits_{x\to 1} x^2 + 5x + 4 = 10$

Desarrollo

Entonces, $\lim\limits_{x\to \underbrace{1}_{x_0}} \underbrace{x^2 + 5x + 4}_{f(x)} = \underbrace{10}_{L}$

Ahora utilizando la definición tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |x^2 + 5x + 4 - 10| < \varepsilon \\ &= |(x+6)(x-1)| < \varepsilon \\ &= |x+6||x-1| < \varepsilon \qquad (*) \end{aligned}$$

Se procede acotar el término $|x+6|$, entonces tenemos:

$$\begin{array}{lll} |x-1| < 1 \longrightarrow \delta_1 & & \text{por propiedad de valor absoluto se tiene} \\ -1 < x - 1 < 1 & & \text{se suma 7} \\ 6 < x + 6 < 8 & & \\ \therefore \quad |x+6| < 8 & & (**) \end{array}$$

Se reemplaza (**) en (*) y se tiene

$|x+6||x-1| < 8|x-1| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{8} \longrightarrow \delta_2$ luego

$\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$

Se concluye que $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$

Con lo que se ha comprobado la existencia del δ a partir de un ε dado.

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 1} x^2 + 5x + 4 = 10$$

Ejemplo 8

Verificar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = 3$

Desarrollo

Por definición de límite $\lim\limits_{x\to \underbrace{1}_{x_0}} \underbrace{\dfrac{x^3-1}{x-1}}_{f(x)} = \underbrace{3}_{L}$

$$\begin{aligned}
|f(x) - L| &= \left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < \varepsilon \\
&= \left|\frac{x^3-3x+2}{x-1}\right| < \varepsilon \\
&= |x+2||x-1| < \varepsilon \qquad (*)
\end{aligned}$$

Procedemos acotar $|x+2|$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
|x-1| < 1 &\longrightarrow \delta_1 \quad \text{por propiedad de valor absoluto se tiene} \\
-1 < x-1 < 1 & \qquad \text{se suma 3} \\
2 < x+2 < 4 & \\
\therefore \quad |x+2| < 4 & \qquad (**)
\end{aligned}$$

Se reemplaza (**) en (*) y se tiene

$|x+2||x-1| < 4|x-1| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \longrightarrow \delta_2$ luego

$\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} = min\{1, \frac{\varepsilon}{4}\}$

Se concluye que $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

Con lo que se ha comprobado la existencia del δ a partir de un ε dado.

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$$

Ejemplo 9

Probar que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1+x}{2-x} = -4$

Desarrollo

Por definición de límite,

$$\begin{aligned}
|f(x) - L| &= \left|\frac{1+x}{2-x} + 4\right| < \varepsilon && \text{sumando} \\
&= \left|\frac{-3x+9}{2-x}\right| < \varepsilon && \text{por propiedades del módulo} \\
&= 3\Big|x-3\Big|\left|\frac{1}{x-2}\right| < \varepsilon && (*)
\end{aligned}$$

Se acota $\left|\dfrac{1}{x-2}\right|$ considerando que $\delta = \frac{1}{2}\Big|x_0 - a\Big|$ donde a es la asíntota vertical de $\dfrac{1}{x-2}$.
Entonces $\delta_1 = \frac{1}{2}\Big|3-2\Big| = \frac{1}{2}$.
Luego

$$\begin{aligned}
|x-3| < \frac{1}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2} < x - 2 < -\frac{1}{2} \\
&\Rightarrow 1 < \frac{1}{x-2} < 2 \\
&\Rightarrow \left|\frac{1}{x-2}\right| < 2 && (**)
\end{aligned}$$

Se reemplazando (**) en (*) y se tiene

$$\begin{aligned}
3\Big|x-3\Big|\left|\frac{1}{x-2}\right| < \varepsilon &\Rightarrow 3(2)|x-3| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{6} \longrightarrow \delta_2
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \delta = min\{\delta_1, \delta_2\} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$$

De donde, dado un ε se encontró un δ que permite cumplir la definición de límite de una función.

Ejemplo 10

Probar que $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x+12}=4$

Desarrollo

Por definición se tiene

$\left|f(x)-L\right| = \left|\sqrt{x+12}-4\right| < \varepsilon$

racionalizando tenemos

$\left|\left(\sqrt{x+12}-4\right)\left(\dfrac{\sqrt{x+12}+4}{\sqrt{x+12}+4}\right)\right| = \dfrac{|x-4|}{|\sqrt{x+12}+4|} < \varepsilon \qquad (*)$

luego

$$
\begin{aligned}
|x-4| &< 1 \longrightarrow \delta_1 && \text{por propiedad de valor absoluto se tiene}\\
-1 < x-4 &< 1 && \text{se suma 16}\\
15 < x+12 &< 17 && \text{se aplica raíz cuadrada}\\
\sqrt{15} < \sqrt{x+12} &< \sqrt{17} && \text{se suma 4}\\
\sqrt{15}+4 < \sqrt{x+12}+4 &< \sqrt{17}+4 && \text{se invierte la desigualdad}\\
\frac{1}{\sqrt{17}+4} < \frac{1}{\sqrt{x+12}+4} &< \frac{1}{\sqrt{15}+4} && \text{por propiedades}\\
\left|\frac{1}{\sqrt{x+12}+4}\right| &< \frac{1}{\sqrt{15}+4} && (**)
\end{aligned}
$$

Se reemplaza (**) en (*) y se tiene

$\dfrac{|x-4|}{|\sqrt{x+12}+4|} < \dfrac{1}{\sqrt{15}+4}|x-4| < \varepsilon$ con $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{15}+4}$

Como $\delta = min\{\delta_1,\delta_2\}$, es decir, $\delta = min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{15}+4}\right\}$ se concluye que $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{15}+4}$

Con lo que se ha comprobado la existencia del δ a partir de un ε dado.

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 4}\sqrt{x+12}=4$$

Ejemplo 11

Probar que $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt{x-2} = 2$

Desarrollo

Para resolver éste ejercicio aplicamos un procedimiento alternativo que permita comprobar el límite dado, entonces

Por definición se tiene:

$\left|f(x) - L\right| = \left|\sqrt{x-2} - 2\right| < \varepsilon$

Luego

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{x-2} - 2\right| &< \varepsilon && \text{por propiedades} \\
-\varepsilon < \sqrt{x-2} - 2 &< \varepsilon && \text{se suma 2 y se eleva al cuadrado} \\
\left(-\varepsilon + 2\right)^2 < \left(\sqrt{x-2}\right)^2 &< \left(\varepsilon + 2\right)^2 && \text{resolviendo el binomio} \\
\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 4 < x - 6 &< \varepsilon^2 + 4\varepsilon + 4 && \text{simplificando} \\
\varepsilon^2 - 4\varepsilon < x - 6 &< \varepsilon^2 + 4\varepsilon && \text{de donde} \\
|x - 6| &< \varepsilon^2 + 4\varepsilon \\
\therefore \qquad \delta &= \varepsilon^2 + 4\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad \lim_{x \to 6} \sqrt{x-2} = 2$$

Ejemplo 12

Probar que $\lim\limits_{x\to 3} x^3 = 27$

Desarrollo

Por definición se tiene $\lim\limits_{x\to \underbrace{3}_{x_0}} \underbrace{x^3}_{f(x)} = \underbrace{27}_{L}$

Entonces

$$\begin{aligned} \Big|f(x) - L\Big| &= \Big|x^3 - 27\Big| < \varepsilon \\ &= \Big|(x-3)(x^2+3x+9)\Big| < \varepsilon \\ &= \Big|x-3\Big|\Big|x^2+3x+9\Big| < \varepsilon \qquad (*) \end{aligned}$$

A partir del término $\Big|x-3\Big|$ se procede acotar $\Big|x^2+3x+9\Big|$, de donde:

$$\begin{aligned} |x-3| < 1 \longrightarrow \delta_1 & \quad \text{por propiedad de valor absoluto se tiene} \\ -1 < x-3 < 1 & \quad \text{se suma 3} \\ 2 < x < 4 & \quad (**) \end{aligned}$$

De la desigualdad (**) se tiene las siguientes desigualdades:

$4 < x^2 < 16$ (1), se elevó al cuadrado la desigualdad (**), y

$6 < 3x < 12$ (2), se multiplicó por 3 a la desigualdad (**)

sumando (1) y (2) se tiene

$$\begin{aligned} 10 < x^2 + 3x < 28 & \quad \text{ahora, sumando 9} \\ 19 < x^2 + 3x + 9 < 37 & \quad \text{por propiedades del módulo} \\ \therefore \quad |x^2+3x+9| < 37 & \quad (***) \end{aligned}$$

Se reemplaza (***) en (*) y se tiene $|x-3||x^2+3x+9| < 37|x-3| < \varepsilon$ de donde $\left|x-3\right| < \dfrac{\varepsilon}{37}$ siendo $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{37}$.
Como $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, es decir, $\delta = min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{37}\right\}$ se concluye que $\delta = \dfrac{\varepsilon}{37}$
Con lo que se ha comprobado la existencia del δ a partir de un ε dado.

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 3} x^3 = 27$$

Ejemplo 13

Probar que $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{3x+1}{x+5} = \frac{-5}{3}$

Desarrollo

Por definición de límite,

$$\begin{aligned} \left|f(x)-L\right| &= \left|\frac{3x+1}{x+5}+\frac{5}{3}\right| < \varepsilon && \text{sumando se tiene} \\ &= \left|\frac{14(x+2)}{3(x+5)}\right| < \varepsilon && \text{por propiedades del módulo} \\ &= \frac{14}{3}\left|\frac{1}{x+5}\right|\left|x+2\right| < \varepsilon && (*) \end{aligned}$$

Se acota el término $\left|\dfrac{1}{x+5}\right|$ considerando que $\delta = \frac{1}{2}\left|x_0 - a\right|$ donde a es la asíntota vertical de $\left|\dfrac{1}{x+5}\right|$.
Entonces $\delta_1 = \frac{3}{2}$.

Luego

$$\begin{aligned} |x+2| &< \frac{3}{2} && \text{por propiedades, se tiene} \\ -\frac{3}{2} < x+2 &< \frac{3}{2} && \text{sumando 3} \\ \frac{3}{2} < x+5 &< \frac{9}{2} && \text{invirtiendo la desigualdad} \\ \frac{2}{9} < \frac{1}{x+5} &< \frac{2}{3} && \text{por propiedades del módulo} \\ \left|\frac{1}{x+5}\right| &< \frac{2}{3} && (**) \end{aligned}$$

Se reemplazando (**) en (*) y se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{14}{3}\left|\frac{1}{x+5}\right||x+2| < \left(\frac{14}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)|x+2| &< \varepsilon \\
\Rightarrow \qquad |x+2| &< \frac{9\varepsilon}{28} \\
\therefore \qquad |x+2| &< \tfrac{9\varepsilon}{28} \longrightarrow \delta_2
\end{aligned}$$

Como $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, es decir, $\delta = min\left\{\frac{3}{2}, \frac{9\varepsilon}{28}\right\}$ se concluye que $\delta = \frac{9\varepsilon}{28}$
Con lo que se ha comprobado la existencia del δ a partir de un ε dado.

$$\therefore \qquad \lim_{x\to -2} \frac{3x+1}{x+5} = \frac{-5}{3}$$

1.5.2. Ejercicios Propuestos

Mediante la definicion de limite. Demostrar que :

1. $\lim\limits_{x\to 2} 3x^2 - x - 2 = 8$

2. $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 + 2x = 5$

3. $\lim\limits_{x\to 2} 4x^2 + x - 4 = 10$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} ax^2 + bx + c = ax_0^2 + bx_0 + c$

5. $\lim\limits_{x\to 5} x^3 + x^2 - 2x = 140$

6. $\lim\limits_{x\to 2} 3x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = -39$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{3x^3 + 11x^2 + x - 5} = \dfrac{1}{32}$

8. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x^2 + 16} = \dfrac{1}{25}$

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|2 - x|}{3x - 1} = \dfrac{1}{2}$

10. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x + 1} = 2$

11. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 11}}{3} = \dfrac{1}{3}$

12. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{-2x} = \sqrt{2}$

13. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{-2}$

14. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}, a > 0$

15. $\lim\limits_{x \to 0{,}5} x^2[|x + 2|] = 0{,}5$

16. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{3}$

17. $\lim\limits_{x \to 1} 3 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 1$

18. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x^2 + 1}{2x + 1} = -5$

19. $\lim\limits_{x \to 1/3} \sqrt[3]{x^2 + \dfrac{8}{9}} = 1$

20. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{-4x - 3}}{x + 2} = -3$

1.6. Existencia y Unicidad del límite de una función real

Proposición 1

Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| \leqslant \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$

Demostración

Por reducción al absurdo, supongamos que $x \neq 0$, entonces $|x| > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
Si consideramos $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2} > 0 \qquad (*)$
Por hipótesis $|x| \leqslant \varepsilon \qquad (**)$.

Entonces considerando (*) y (**) se tiene
$|x| \leqslant \dfrac{|x|}{2} \Rightarrow 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$ que resulta ser una contradicción, por lo tanto $x = 0$.

Teorema 7 (Unicidad del Límite).

Si existe el límite de una función real, entonces éste es único, es decir:

$$Si \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \qquad y \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2 \qquad entonces \qquad L_1 = L_2$$

Demostración

Por la proposicion 1 es suficiente probar que:

$|L_1 - L_2| < \varepsilon$ de donde $L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$

En efecto para $\varepsilon > 0$, consideremos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$; para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, en forma similar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$, para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta_2 > 0$, tal que $0 < |x - x_0| < \delta_2$, entonces $|f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ además se tiene:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leqslant |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

es decir $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ para $0 < |x - x_0| < \delta = min\Big\{\delta_1, \delta_2\Big\}$
Por lo tanto se tiene $\varepsilon > 0$ para $0 < |x - x_0| < \delta$

Se tiene $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ y esto implica $L_1 - L_2 = 0$ de acuerdo a la proposicion 1 por lo tanto: $L_1 = L_2$.

Teorema 8.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales tal que $f(x) < g(x) \qquad \forall x \in D_{(f\cap g)}$.

Si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = M \qquad entonces \qquad L < M.$$

es decir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Demostración

Por reducción al absurdo.

Supongamos que $L > M$ entonces $L - M > 0$

Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \quad y \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, para un $\varepsilon = \dfrac{L-M}{2}$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que:

$$\begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta_1 \\ \\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - L| < \varepsilon \\ \\ |g(x) - M| < \varepsilon \end{cases} \qquad \text{de donde se tiene}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \\ \\ -\varepsilon < g(x) + M < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \\ \\ M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon \qquad \ldots (1) \end{cases}$$

Ahora tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ y si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces se cumple simultáneamente (1) y como $f(x) \leq \delta$, se tiene:

$M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon = L - \varepsilon < f(x)$, entonces $g(x) < f(x)$ y esto es debido a la suposicion $L > M$ por lo tanto debe cumplirse $L \leq M$

Teorema 9.

Si $\lim\limits_{x\to\ x_0} f(x) = L$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ con $x \neq x_0$ se tiene $|f(x)| < k$ para algún $k \in \mathbb{R}^+$

Demostración

Por hipótesis $\lim\limits_{x\to\ x_0} f(x) = L$, Para un $\varepsilon = 1 \qquad \exists\delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f$ se cumple $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon = 1$

Ahora $|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L|$

sea $k = |f(x) - L| + |L|$ entonces se cumple $|f(x)| < k$ por todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

1.6.1. Propiedades sobre los Límites de Funciones Reales

Sean f y g dos funciones reales tal que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = M \qquad con \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Entonces se cumple

1. $\lim\limits_{x\to\, x_0} k = k$
2. $\lim\limits_{x\to\, x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x\to\, x_0} f(x) = kL$
3. $\lim\limits_{x\to\, x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = \lim\limits_{x\to\, x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\, x_0} f(x) = L \pm M$
4. $\lim\limits_{x\to\, x_0} \big[f(x) * g(x)\big] = \lim\limits_{x\to\, x_0} f(x) * \lim\limits_{x\to\, x_0} f(x) = L * M$
5. $\lim\limits_{x\to\, x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to\, x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to\, x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ con $g(x) \neq 0$ y $M \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to\, x_0} \big(f(x)\big)^n = \big(\lim\limits_{x\to\, x_0} f(x)\big)^n = L^n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+$
7. $\lim\limits_{x\to\, x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to\, x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \qquad n$ par
8. $\lim\limits_{x\to\, x_0} \big|f(x)\big| = \big|\lim\limits_{x\to\, x_0} f(x)\big| = |L|$

1.7. Indeterminaciones y su resolución

Al calcular límites pueden aparecer las siguientes indeterminaciones:

- **Tipo cociente.**
  Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ cuando $x \to a$.

  Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$.

- **Tipo producto.**

  Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $f(x)\cdot g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $0\cdot\pm\infty$ cuando $x\to a$.

- **Tipo potencia.**

  Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 1^{∞} cuando $x\to a$.

  Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 0^0 cuando $x\to a$.

  Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo ∞^0 cuando $x\to a$.

- **Tipo diferencia.**

  Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $f(x)-g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $\infty-\infty$ cuando $x\to a$.

Formas de indeterminación

Se presenta el desarrollo de algunos ejercicios sobre el cálculo de límites aplicando las propiedades y algunas operaciones algebraicas como la factorización y la racionalización, operaciones que son necesarias para solucionar la presencia de indeterminaciones de la forma:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \infty-\infty \qquad 0*\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^{\infty}$$

Ejemplo 14

Calcular $\lim_{x\to 2} 4x^2+3x-10$

Desarrollo

$$\lim_{x\to 2} 4x^2+3x-10 = 4(2)^2+3(2)-10 = 12$$

Ejemplo 15

Calcular $\lim_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x-3}$

Desarrollo

$$\lim_{x\to 5} \frac{x+2}{x-2} \quad = \quad \frac{5+2}{5-2} = \frac{7}{3}$$

Ejemplo 16

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^3-24x-5}{x^4-5x^3-x^2+7x-10}$

Desarrollo

Si reemplazamos el valor $x = 5$ en la función, se origina una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, entonces procedemos a factorar aplicando la regla de Ruffini,

Numerador: $x^3 - 24x - 5$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -24 & -5 \\ 5 & & 5 & 25 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

Denominador: $x^4 - 5x^3 - x^2 + 7x - 10$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -5 & -1 & 7 & -10 \\ 5 & & 5 & 0 & -5 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

Sustituyendo tenemos,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 5} \frac{x^3-24x-5}{x^4-5x^3-x^2+7x-10} &= \lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x^2+5x+1)}{\cancel{(x-5)}(x^3-x+2)} && \text{simplificando } x-5 \\ &= \lim_{x\to 5} \frac{x^2+5x+1}{x^3-x+2} && \text{evaluando} \\ &= \frac{51}{122} \end{aligned}$$

El valor del límite lo podemos observar en la gráfica de la función

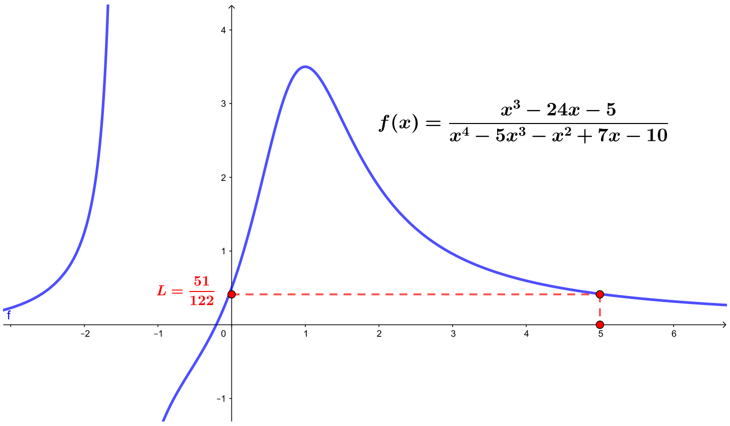


Figura 1.8: Función racional

Ejemplo 17

Calcular $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$

Desarrollo

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x} &= (x)^{\frac{1}{2}}\\ \sqrt[4]{x} &= (x)^{\frac{1}{4}}\end{aligned}\right\} 4 \text{ es el mcm de los exponentes } \Rightarrow \overbrace{x = z^4}^{\text{sustitución}}$$

Se analiza el límite según la sustitución realizada

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x} &= z^2\\ \sqrt[4]{x} &= z\end{aligned}\right\} \text{ Si } x \to 0 \text{ entonces } z \to 0$$

Sustituyendo tenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2} &= \lim_{z\to 0} \frac{z^2-4}{z-2} && \text{factorando}\\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(z-2)(z+2)}{z-2} && \text{simplificando}\\
&= \lim_{z\to 0} z+2 && \text{evaluando el límite}\\
&= 4
\end{aligned}$$

Ejemplo 18

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$

Desarrollo

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}=(x)^{\frac{1}{2}}\\ \sqrt[3]{x}=(x)^{\frac{1}{3}}\end{array}\right\}\text{6 es el mcm de los exponentes}\Rightarrow\overbrace{x=z^6}^{\text{sustitución}}$$

Se analiza el límite según la sustitución realizada

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}=z^3\\ \sqrt[3]{x}=z^2\end{array}\right\}\text{Si } x\to 1 \text{ entonces } z\to 1$$

Sustituyendo tenemos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}&=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z^3-2}{z^6-1} && \text{(*) factorando}\\ &=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^2+2z+2)}{(z-1)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)} && \text{simplificando } z-1\\ &=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+2z+2}{z^5+z^4+z^3+z^2+z+1} && \text{evaluando el límite}\\ &=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Se presenta la factorización de (*) aplicando la regla de Ruffini,

Numerador z^3+z^2-2

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 0 & -2\\ 1 & & 1 & 2 & 2\\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0\end{array}$$

Denominador z^6-1

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}$$

Ejemplo 19

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

Desarrollo

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[4]{1+x}&=(1+x)^{\frac{1}{4}}\\ \sqrt[3]{1+x}&=(1+x)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\right\}12 \text{ es el mcm de los exponentes } \Rightarrow \overbrace{x+1=z^{12}}^{\text{sustitución}}$$

Se analiza el límite según la sustitución realizada

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[4]{1+x}&=z^3\\ \sqrt[3]{1+x}&=z^4\end{aligned}\right\}\text{ Si } x\to 0 \text{ entonces } z\to 1$$

Sustituyendo tenemos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}&=\lim_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z^4-1} && \text{factorando}\\ &=\lim_{z\to 1}\frac{\cancel{(z-1)}(z^2+z+1)}{\cancel{(z-1)}(z+1)(z^2+1)} && \text{simplificando}\\ &=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z+1}{(z+1)(z^2+1)} && \text{evaluando el límite}\\ &=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Ejemplo 20

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}-2\sqrt[3]{(1+x)}+1}{x^2}$

Desarrollo

Se sustituye $\sqrt[3]{1+x}=z\Rightarrow 1+x=z^3$, es decir $x=z^3-1$

Si $x\to 0$ entonces $z\to 1$

Sustituyendo tenemos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}-2\sqrt[3]{(1+x)}+1}{x^2}&=\lim_{z\to 1}\frac{z^2-2z+1}{(z^3-1)^2} && \text{factorando}\\ &=\lim_{z\to 1}\frac{\cancel{(z-1)^2}}{\cancel{(z-1)^2}(z^2+z+1)^2} && \text{simplificando}\\ &=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z^2+z+1)^2} && \text{evaluando el límite}\\ &=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

Ejemplo 21

Calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{15+6x}-\sqrt[3]{25+x}}{x^4+2x-20}$

Desarrollo

Considerar $a^3-b^3=(a-b)(b^2+ab+b^2)$ para racionalizar el numerador, entonces se tiene

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt[3]{15+6x}-\sqrt[3]{25+x}}{x^4+2x-20}\right]\left[\frac{\sqrt[3]{(15+6x)^2}+\sqrt[3]{15+6x}.\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{(25+x)^2}}{\sqrt[3]{(15+6x)^2}+\sqrt[3]{15+6x}.\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{(25+x)^2}}\right]$$

Se factora $x^4+2x-20$ por coeficientes indeterminados

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 2 & -20 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 20 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 10 & 0 \end{array}$$

entonces $x^4+2x-20=(x-2)(x^3+2x^2+4x+10)$,

Sustituyendo tenemos,

$$= \lim_{x\to 2}\frac{15+6x-25-x}{(x-2)(x^3+2x^2+4x+10)\left[\sqrt[3]{(15+6x)^2}+\sqrt[3]{15+6x}.\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{(25+x)^2}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{5\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x^3+2x^2+4x+10)\left[\sqrt[3]{(15+6x)^2}+\sqrt[3]{15+6x}.\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{(25+x)^2}\right]}$$

$$= \frac{5}{(8+8+8+10)(9+3*3+9)}$$

$$= \frac{5}{(34)(27)}$$

$$= \frac{5}{918}$$

Ejemplo 22

Calcular $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$

Desarrollo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1} = \frac{1-2(1)+1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Al reemplazar el valor del límite en la función se ha originado una indeterminación, por lo que se tiene que levantar la misma.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \qquad \text{con } x\neq 1\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-1}{x+1}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 23

Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{6-\sqrt{x+32}}{\sqrt{x}-2}$

Desarrollo

$$\lim_{x\to 4}\frac{6-\sqrt{x+32}}{\sqrt{x}-2} = \frac{6-\sqrt{4+32}}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{0}$$

Para evitar la indeterminación es necesario aplicar racionalización

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{6-\sqrt{x+32}}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to 4}\left(\frac{6-\sqrt{x+32}}{\sqrt{x}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)\left(\frac{6+\sqrt{x+32}}{6+\sqrt{x+32}}\right)\\
&= -\lim_{x\to 4}\left(\cancel{\frac{x-4}{x-4}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+2}{6+\sqrt{x+32}}\right) \qquad \text{con } x\neq 4\\
&= -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Para comprobar el cálculo realizado se procede a utilizar el software matlab, se digitan las siguientes líneas de código:

Solución utilizando Matlab

```
>>  syms x                               %declaración de la variable x
>> f=(6 - sqrt(x + 32)) / (sqrt(x) - 2)  %definición de la función
>> L=limit(f,x,4)                        %cálculo del límite en x=4
>> L = -1/3                              %resultado
```

Ejemplo 24

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

Desarrollo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5-x}+2}{\sqrt{5-x}+2}\right)\left(\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{2-x}+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 1} \left(\frac{5-x-4}{2-x-1}\right)\left(\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}\right) \\
&= \lim_{x\to 1} \left(\cancel{\frac{1-x}{1-x}}\right)\left(\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}\right) \qquad \text{con } x \neq 1 \\
&= \frac{\sqrt{2-1}+1}{\sqrt{5-1}+2} \\
&= \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 25

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

Desarrollo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}) &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right) \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1-3}{(1-x)(x^2+x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{-(x-1)(x^2+x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1+2}{-(1^2+1+1)} \\
&= \frac{-3}{3} = -1
\end{aligned}
$$

Ejemplo 26

Calcular $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-x}$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-x} &= \lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-x}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right) \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{1}{1\left(\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1\right)} \\
&= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 27

Calcular $\lim_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8} &= \lim_{x \to 8} \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}\right)\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2}{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2}\right) \\
&= \lim_{x \to 8} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(x-8)(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2)}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2^2}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2^2}\right) \\
&= \lim_{x \to 8} \frac{\cancel{(x-8)}}{\cancel{(x-8)}(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2+\sqrt[3]{8}}+2)(\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4)} \\
&= \frac{1}{(2+2)(4+4+4)} \\
&= \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

Ejemplo 28

Calcular $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+4}}+\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+4}}*\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}+\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(\sqrt{x-2}*\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}+\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{1}{(x+2)}}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})}+\sqrt{\frac{1}{(2+2)}}\\
&= \frac{\sqrt{2-2}}{\sqrt{2+2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}+\frac{1}{2}\\
&= 0+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 29

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{2-x}-1}{x^2-1}$

Desarrollo

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{2-x}-1}{x^2-1}=\frac{\sqrt[5]{2-1}-1}{1-1}=\frac{0}{0}$

En esta ocasión, para evitar la indeterminación se procede aplicar una sustitución.

Sea $u=\sqrt[5]{2-x} \quad\Rightarrow\quad u^5=2-x.$

Por lo tanto, si $x\to 1$ entonces $u\to 1$, de donde se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{2-x}-1}{x^2-1} &= \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(2-u^5)^2-1}\\
&= \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(2-u^5-1)(2-u^5+1)}\\
&= \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(1-u^5)(3-u^5)}\\
&= \lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(1-u)}}{(3-u^5)\cancel{(1-u)}(1+u+u^2+u^3+u^4)}\\
&= \frac{-1}{(2)(5)}\\
&= \frac{-1}{10}
\end{aligned}$$

Ejemplo 30

Calcular $\lim_{x \to 8} \frac{4\sqrt[3]{x} - 8}{x - 8}$

Desarrollo

$\lim_{x \to 8} \frac{4\sqrt[3]{x} - 8}{x - 8} = \frac{4\sqrt[3]{8} - 8}{8 - 8} = \frac{0}{0}$

En esta ocasión, para evitar la indeterminación se procede aplicar una sustitución.

Sea $u = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad u^3 = x$.

Por lo tanto, si $x \to 8$ entonces $u \to 2$, de donde se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 8} \frac{4\sqrt[3]{x} - 8}{x - 8} &= \lim_{u \to 2} \frac{4u - 8}{u^3 - 8} \\
&= \lim_{u \to 2} \frac{4(u - 2)}{(u - 2)(u^2 + 2u + 4)} \\
&= \lim_{u \to 2} \frac{4}{u^2 + 2u + 4} \\
&= \frac{4}{4 + 4 + 4} \\
&= \frac{4}{12} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 31

Calcular $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x - 1} - x + \sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{3x + 10} - 4}$

Desarrollo

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x - 1} - x + \sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{3x + 10} - 4} = \frac{\sqrt{2 - 1} - 2 + \sqrt{2^2 - 3}}{\sqrt{3(2) + 10} - 4} = \frac{0}{0}$

Para el cálculo de este tipo de límites se aplica la técnica de separar en varios términos el límite a calcular, con el objetivo de poder aplicar racionalización y evitar la indeterminación.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-x+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3x+10}-4} &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1-x+2+\sqrt{x^2-3}--1}{\sqrt{3x+10}-4}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{3x+10}-4}-\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{3x+10}-4}+\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{\sqrt{3x+10}-4}\\
&= \text{ al resolver cada uno de los límites por racionalización se tiene}\\
&= \frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{16}{3}\\
&= 4
\end{aligned}
$$

Para comprobar el cálculo realizado se procede a utilizar el software matlab, se digitan las siguientes líneas de código:

Solución utilizando Matlab

```
>>  syms x                                   %declaración de la variable x
>> f=(sqrt(x-1)-x+ sqrt(x^2 -3)) / (sqrt(3*x+10) - 4)   %def función
>> L=limit(f,x,2)                           %cálculo del límite en x=2
>> L = 4                                    %resultado
```

1.7.1. Ejercicios propuestos

Resolver los siguientes límites

1. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-24}{x^2-4}$

Rpta:11

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$

Rpta:$\frac{4}{5}$

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{5x^2+3x^5-8}{7x^4-4x-3}$

Rpta:$\frac{17}{24}$

4. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^3+5x^2+3x-9}$

Rpta:$\dfrac{3}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

Rpta:$\dfrac{11}{17}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{(1+ax)^2-(a-x)^2}, \quad a>0 \quad y \quad a\neq 1$

Rpta:$\dfrac{1}{1-a^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^{2n}+1-3x^{-2n}}{3x^{2n}-5+2x^{-2n}}$

Rpta:5

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

Rpta:$\dfrac{49}{24}$

9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

Rpta:$(\dfrac{3}{2})^{10}$

10. $\lim\limits_{x\to 1} (\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

Rpta:-1

11. Hallar los valores de m para que $\lim\limits_{x\to m} \dfrac{x^2-mx+3x-3m}{x-m}=m^2-27$

Rpta:$m=5, \quad m=-4$

12. Hallar los valores de $a.a>0$,siendo $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2a^2x+ax^2}{2ax+x^2}=2a-5$

Rpta:$a=2$

13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2-1}}{ax^2+2x+b}=L\neq 0$ Calcular $a+b$

Rpta:-2

14. Si $f(x) = x - 2$y $g(x+1) = x^2 - x$ Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(fog)(x+1)}{(gof)(x+2)}$

Rpta:3

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

Rpta:$\dfrac{1}{2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

Rpta:1

17. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-14}}{x-5}$

Rpta:-1

18. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

Rpta:$-\dfrac{1}{3}$

19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}$

Rpta:$-\dfrac{3}{2}$

20. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}$

Rpta:$-\dfrac{4}{3}$

1.8. Límites laterales o unilaterales

En la presentación de la noción de límite de una función alrededor de un punto, se analizó varios casos sobre el comportamiento de las imágenes de la función $f(x)$ alrededor de x_0, concluyendo que ***existe*** el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 si y solo si sus ***límites***

laterales son iguales; es decir, si $f(x)$ tiende a un valor $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a x_0, se dice que L es el ***límite*** de $f(x)$ cuando $x \to x_0$, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a x_0 por la izquierda, entonces se dice que L es el ***límite por la izquierda*** de $f(x)$ cuando $x \to x_0^-$, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Si $f(x)$ tiende a L cuando x se aproxima a x_0 por exceso, entonces se dice que L es el ***límite por la derecha*** de $f(x)$ cuando $x \to x_0^+$, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Para que exista el límite deben existir los límites laterales y ser iguales, es decir

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Ejemplo 32

Consideremos la función $f(x) = x^2$ y veamos que pasa cuando $x \to 2$

Aproximación por defecto

x	$f(x) = x^2$
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
1,9999	3,99960001

$\Downarrow$

$\lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4$

Aproximación por exceso

x	$f(x) = x^2$
2,1	4,41
2,01	4,0401
2,001	4,004001
2,0001	4,00040001

$\Downarrow$

$\lim\limits_{x \to 2^+} x^2 = 4$

$\Downarrow$

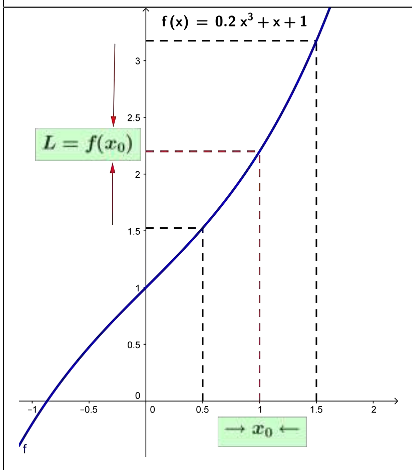
$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Se observa que los límites laterales son iguales, por lo tanto existe el límite de la función cuando x tiende a 2.

Ejemplo 33

Consideremos la función $f(x) = 0{,}2x^3 + x + 1$ y veamos que pasa cuando $x \to 1$

Como análisis de este ejemplo se puede observar que a medida que los valores de x se aproximan a 1 por la izquierda y por la derecha, los valores de las imágenes se aproximan al valor de 2.20

<table>
<tr><th>Función cúbica</th><th>Valores de la función alrededor de $x = 1$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

x	f(x)
0,5	1,53
0,6	1,64
0,7	1,77
0,8	1,90
0,9	2,05
1,0	2,20
1,1	2,37
1,2	2,55
1,3	2,74
1,4	2,95
1,5	3,18

</td></tr>
</table>

Ejemplo 34

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	-1
$-0{,}01$	-1
$-0{,}001$	-1

Por la derecha

x	$f(x)$
$0{,}1$	1
$0{,}01$	1
$0{,}001$	1

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \neq \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Ayudados con la gráfica de la función podemos analizar el comportamiento de las imágenes alrededor del valor de $x = 0$.

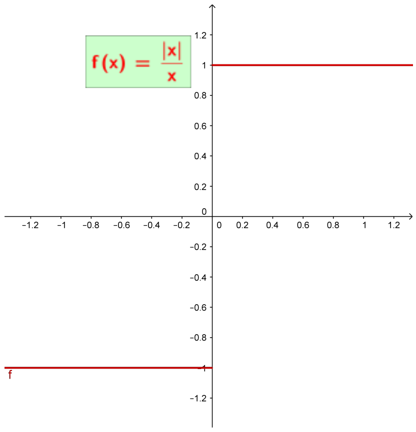


Figura 1.9: Límites laterales

Entonces, se determina que a medida que los valores se aproximan a 0 por la izquierda sus imágenes siempre son -1 en tanto que sí nos aproximamos a 0 por la derecha las imágenes siempre son 1. Por lo tanto, las aproximaciones laterales son diferentes.

Ejemplo 35

Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$

A veces, el límite de un función en un punto puede no existir porque la función oscila rápidamente al acercarnos a dicho punto.

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	$-0{,}1736$
$-0{,}01$	$-0{,}9848$
$-0{,}005$	$0{,}3420$
$-0{,}001$	$0{,}9848$
$-0{,}0005$	$0{,}3420$
$-0{,}0001$	$0{,}9848$

$\Downarrow$

No existe $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Por la derecha

x	$f(x)$
$0{,}1$	$0{,}1736$
$0{,}01$	$0{,}9848$
$0{,}005$	$-0{,}3420$
$0{,}001$	$-0{,}9848$
$0{,}0005$	$-0{,}3420$
$0{,}0001$	$-0{,}9848$

$\Downarrow$

No existe $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Los valores de $f(x)$ son oscilantes y no muestran una tendencia, como se puede evidenciar en la tabla de valores.

Ejemplo 36

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ y veamos que pasa cuando $x \to 0$

Por la izquierda

x	$f(x)$
$-0{,}1$	No exite
$-0{,}01$	No existe
$-0{,}001$	No existe

Por la derecha

x	$f(x)$
$0{,}1$	No existe
$0{,}01$	No existe
$0{,}001$	No existe

$$\underbrace{\Downarrow \quad \text{No existe } \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \Downarrow \quad \text{No existe } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{No existe } \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Al considerar la definición de límite cuando x tiende a x_0 se puede entender como una exigencia que los valores de x sean siempre mayores o menores que x_0. De este hecho, se desprende la consecuencia que a la función lo podemos analizar su comportamiento ya sea por la derecha o izquierda respectivamente.

Definición 10.

Sea $f : A \to B$ una función real con $A = D_f$, si $]x, x_0[\subset A$. Se dice que $f(x)$ tiene límite L_1 en x_0; denominado **Límite Lateral por la Izquierda** y se denota con $\lim\limits_{x\to\, x_0^-} f(x) = L_1$ si y solo si

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ si $\quad x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$

Definición 11.

Sea $f : A \to B$ una función real con $A = D_f$, si $]x_0, x[\subset A$. Se dice que $f(x)$ tiene límite L_2 en x_0; denominado **Límite Lateral por la Derecha** y se denota con $\lim\limits_{x\to\, x_0^+} f(x) = L_2$ si y solo si

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ si $\quad x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$

Por lo tanto, el límite de una función existe si y solo si, existen los límites laterales y éstos son iguales; es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L_1 \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow L_1 = L_2 \qquad \therefore \lim_{x\to x_0} f(x) = L_1.$$

Observación:

Para que exista $\lim_{x \to x_0} f(x)$ debe cumplirse la condición siguiente:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

En otras palabras, existe el límite de una función sí y solo si, existen los limites laterales y éstos son iguales.

Observación:

No existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ en los siguientes casos:

1. Cuando no existe uno de los límites laterales.
2. Cuando los límites existen y son diferentes.

Ejemplo 37

Calcular si existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ donde: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 8 - 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Solución

Aplicando el criterio $\exists \lim_{x \to 2} f(x) = L \iff \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = L$

$\lim_{x \to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4 \qquad \cdots (1)$

$\lim_{x \to 2^+} 8 - 2x = 8 - 2(2) = 4 \qquad \cdots (2)$

Al comparar (1) y (2) se tiene que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 \Longrightarrow \exists \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

En la gráfica de puede visualizar el comportamiento de las imágenes de la función cuando x tiende a 2.

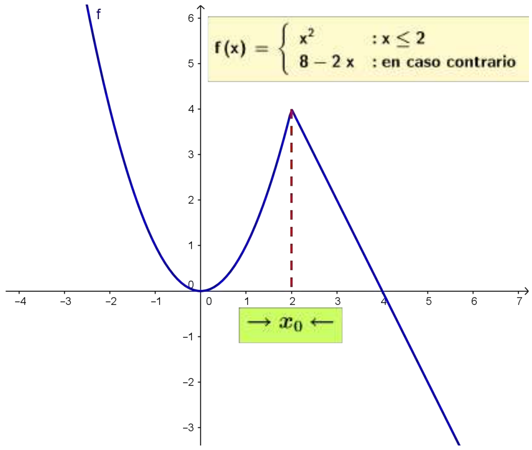


Figura 1.10: Función a trozos

Ejemplo 38

Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ donde: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ 4 - x & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$

Solución

Cuando x tiende a 1

Aplicando el criterio $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = L$

$\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1 \qquad \cdots (1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} x = 1 \qquad \cdots (2)$

Al comparar (1) y (2) se tiene que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \Longrightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

Cuando x tiende a 4

Aplicando el criterio $\exists \lim\limits_{x\to 4} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = L$

$\lim\limits_{x\to 4^-} x = 4 \qquad \cdots (1)$

$\lim\limits_{x\to 4^+} 4 - x = 4 - 4 = 0 \qquad \cdots (2)$

Al comparar (1) y (2) se tiene que:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 4} f(x)$$

Presentamos la gráfica de la función para poder visualizar el comportamiento de las imágenes de la función cuando x tiende a 1 y x tiende a 4, de tal manera de poder deducir los límites laterales en los puntos $x = 1$ y $x = 4$.

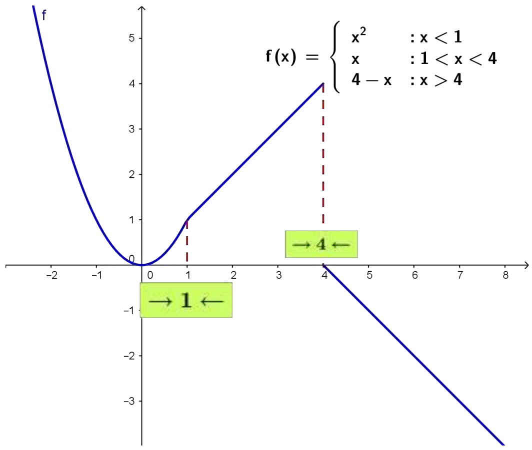


Figura 1.11: Función a trozos

Ejemplo 39

Si $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Determinar la existencia de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Desarrollo

- Límite por la izquierda cuando x tiende a 1

  $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+3 = 4$

- Límite por la derecha cuando x tiende a 1

  $\lim\limits_{x\to 1^+} x+1 = 2$

Como los límites laterales son diferentes

$$\therefore \qquad \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Utilizando el software Geogebra, visualizamos la gráfica de la función para un mejor análisis de la misma.

Ejemplo 40

Si $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$. Determinar la existencia de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Desarrollo

Utilizando el software Geogebra, visualizamos la gráfica de la función para un mejor análisis de la misma. Por definición de la función valor absoluto se tiene

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ 2-x & \text{si} \quad x-2 < 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

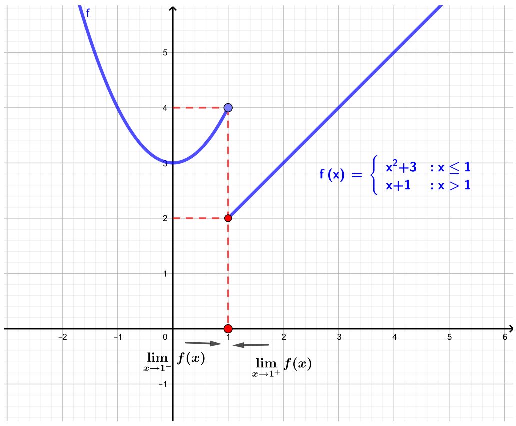


Figura 1.12: Función a trozos

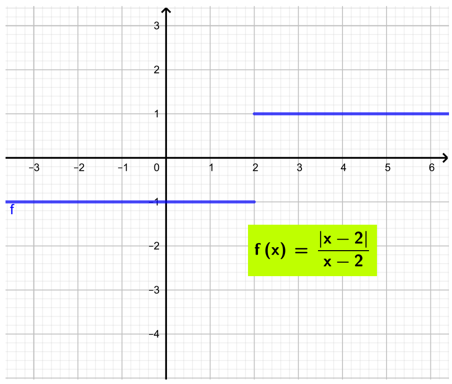


Figura 1.13: Límites laterales

Entonces

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-2}=1 & \text{si} \quad x\geq 2\\ \\ \dfrac{2-x}{x-2}=-1 & \text{si} \quad x<2\end{cases}$$

Calculando el límite, se tiene

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^{+}} 1=1 & \text{si} \quad x\geq 2\\ \\ \lim\limits_{x\to 2^{-}} (-1)=-1 & \text{si} \quad x<2\end{cases}$$

Por lo tanto, los límites laterales son diferentes; es decir,

$$\lim_{x\to 2^{-}} f(x)\neq \lim_{x\to 2^{+}} f(x)$$

$\therefore \quad \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

Ejemplo 41

Sea

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{A(x^2-4)}{x-2} & \text{si} \quad x<2 \\ Ax+B & \text{si} \quad 2\le x\le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si} \quad 3<x \end{cases}$$

Determinar los valores de A y B para que exista $\lim_{x\to 2} f(x) \quad \wedge \quad \lim_{x\to 3} f(x)$

Se cálcula los límites laterales de $f(x)$ en $x=2$

Límite por la izquierda

$\lim_{x\to 2^-} \dfrac{A(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{A\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4A$

Límite por la derecha

$\lim_{x\to 2^+} Ax+B = 2A+B$

Para que exista el límite debe cumplirse que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$,

entonces

$4A = 2A+B \qquad \Rightarrow \qquad -2A+B=0 \qquad (1)$

Se cálcula los límites laterales de $f(x)$ en $x=3$

Límite por la izquierda

$\lim_{x\to 3^-} Ax+B = 3A+B$

Límite por la derecha

$\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = 6$

Para que exista el límite debe cumplirse que $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$,

entonces

$3A+B=6 \qquad (2)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2)se tiene que

$$\begin{cases} -2A+B=0 \\ 3A+B=6 \end{cases}$$

de donde $A=\dfrac{6}{5} \quad \wedge \quad B=\dfrac{12}{5}$

La gráfica de la función la realizamos en el software Geogebra, digitando la siguiente instrucción en la línea de ingreso de datos

```
f(x) = Si(x < 2, (6 (x^2 - 4)) / (5 (x - 2)),
        Si(2 <= x <= 3, 6 / 5 x + 12 / 5,
        Si(3 < x, (x^2 - 9) / (x - 3))))
```

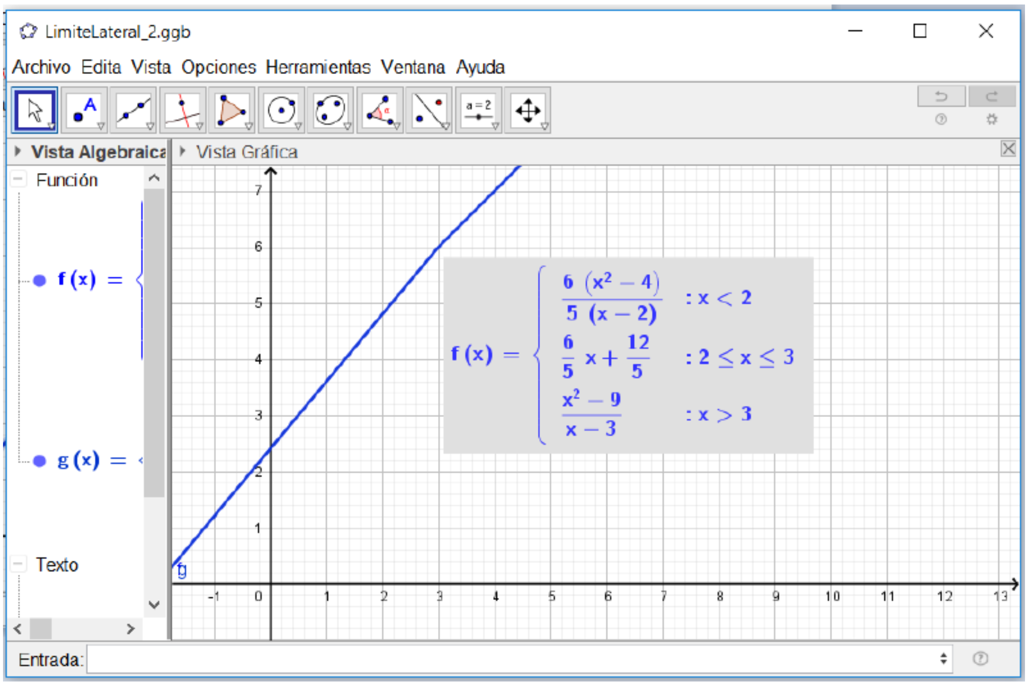
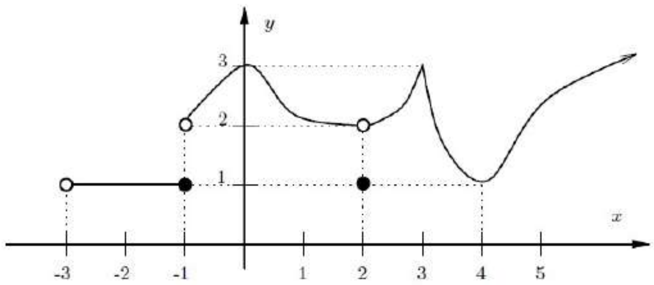


Figura 1.14: Función a trozos

1.8.1. Límites Laterales. Ejercicios propuestos

1. De la representación gráfica de las siguientes funciones, determinar los límites que se indican:



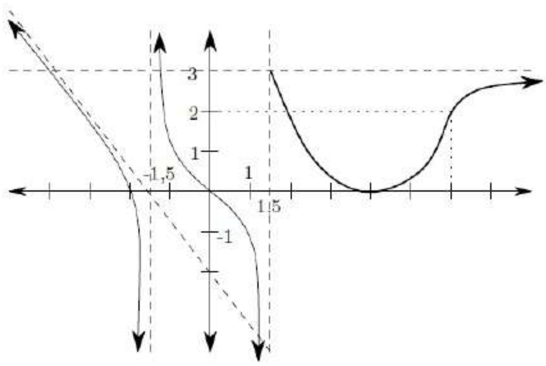
(a) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$

(b) $\lim_{x \to -1} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

(d) $f(-1)$; $f(2)$

(e) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$



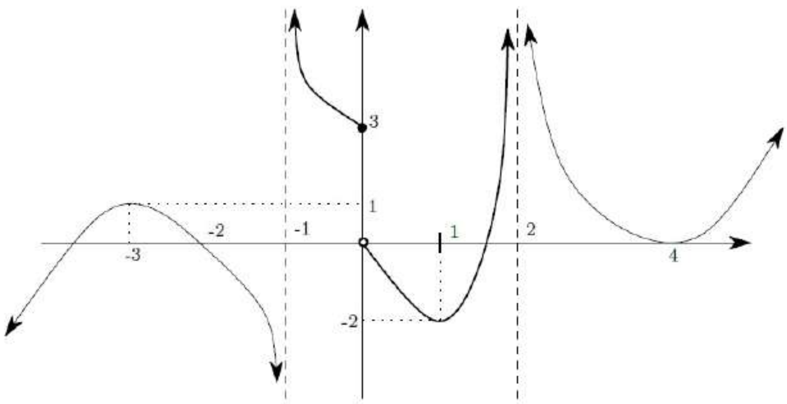
(a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x \to -3/2} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 3/2} f(x)$

(d) $f(3/2)$

(e) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$



(a) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

(b) $\lim_{x \to -3} g(x)$

(c) $\lim_{x \to -1} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 0} g(x)$

(e) $\lim_{x \to 1} g(x)$

(f) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(g) $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

2. Calcular si existe $\lim_{x \to 2} f(x)$. Donde $f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - x - 3 & \text{si } x > 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

3. Si $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 9x - 27 & \text{si } x < -3 \\ ax^2 - 2bx + 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{x^2 - 22x + 57}{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Hallar a y b de tal manera que existan los límites en $x = -3$ y $x = 3$.

4. Calcular si existe $\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 2x)[|1 - x|]$

5. Calcular si existe $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{[|x-1|] - x}{\sqrt{x^2 - [|x|]}}$

1.9. Límites al Infinito

Se debe tener presente que el comportamiento de una función no solo se lo realiza alrededor de un punto, sino que es necesario conocer el comportamiento de las imágenes de la función cuando los valores de la variable independiente x crece o decrece indefinidamente. Este tipo de análisis se los denomina ***Límites al Infinito***. Para el desarrollo de ejercicios en este tipo de límites es importante tener en cuenta las operaciones con el » ***infinito*** «, la misma que se resume en el siguiente cuadro[1].

OPERACIONES CON INFINITO		
$\infty \pm k = \infty$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(+\infty) - (+\infty) =$ Indeterminado
$\infty \cdot k = \infty \quad (\text{si } k \neq 0)$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$0 \cdot \infty =$ Indeterminado
$\frac{0}{k} = 0$	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{0}{0} =$ Indeterminado
$\frac{k}{0} = \infty$	$\frac{k}{\infty} = 0$	
$\frac{\infty}{k} = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{\infty}{\infty} =$ Indeterminado
$0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$	$0^{+\infty} = 0$	$0^0 =$ Indeterminado
$k^0 = 1$	$k^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < k < 1 \end{cases}$	$1^\infty =$ Indeterminado
	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$	$\infty^0 =$ Indeterminado

Utilizando la metodología propuesta en el presente texto, vamos analizar conceptualmente algunos ejemplos para posteriormente proceder con la formalización mediantes definiciones y teoremas.

[1] http://departamento.us.es/edan/php/asig/GRABIO/GBM/ApendiceA.pdf

Ejemplo de Límite al Infinito

Consideremos la función $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ cuya gráfica tenemos a continuación:

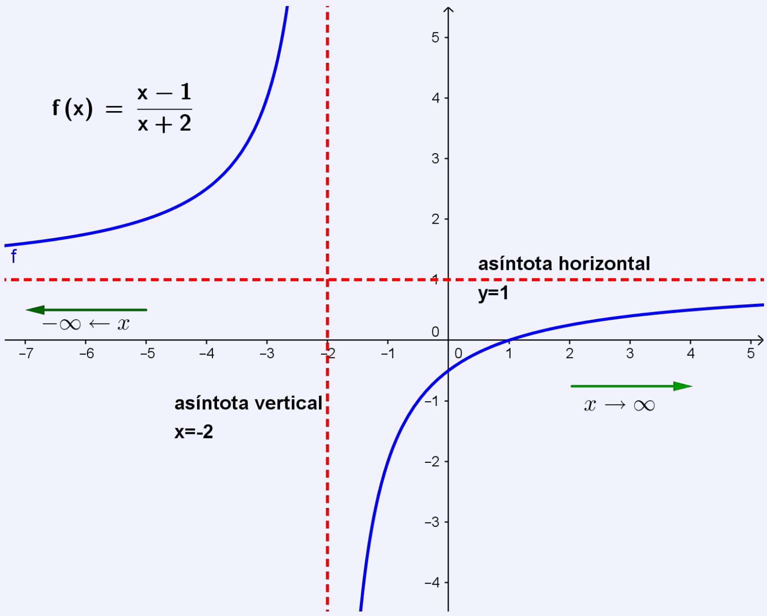


Figura 1.15: Límites al Infinito

Ahora examinando la gráfica para valores de x cada vez ***"mas grandes"*** o cada vez ***"mas pequeños"*** el valor de $f(x)$ se aproxima a 1. Por lo tanto, se puede decir que:

$$\lim_{x\to\,-\infty} f(x) = \lim_{x\to\,-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$$

y

$$\lim_{x\to\,+\infty} f(x) = \lim_{x\to\,+\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$$

A estos tipos de límites se les denomina ***Límites al Infinito***.

Como podemos evidenciar en el presente ejemplo, no existe el límite de la función $f(x)$ cuando $x = -2$, ya que se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-2^-} f(x) \neq \lim_{x\to-2^+} f(x) \qquad \therefore \quad \nexists \lim_{x\to-2} f(x).$$

Presentamos las definiciones correspondientes tomando en consideración que $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Definición 12.

Sea $f :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función real. El límite de la función $f(x)$ cuando x crece sin límite es L con $L \in \mathbb{R}$ y denotamos con

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N > 0 / si \qquad x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

.

Definición 13.

Sea $f :] - \infty, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función real. El límite de la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite es L con $L \in \mathbb{R}$ y denotamos con

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists M > 0 / si \qquad x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

.

Definición 14.

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real. El límite de la función $f(x)$ cuando $x \to \infty$ es L con $L \in \mathbb{R}$ y denotamos con

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists M > 0 / si \qquad |x| > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

.

Teorema 15.

Sea $n \in \mathbb{R}^+$. Entonces se cumple:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

1.10. Teorema de Sandwich

Teorema 16.

Consideremos tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tal que:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \neq x_0$, y
2. $\lim\limits_{x\to\, x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to\, x_0} h(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x\to\, x_0} g(x) = L$.

Demostración

Utilizando la definición de límite de una función real según Cauchy $(\varepsilon - \delta)$ se tiene

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ tq si } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \qquad (1)$$

Por hipótesis

$\lim\limits_{x\to\, x_0} f(x) \qquad \wedge \qquad \lim\limits_{x\to\, x_0} h(x) = L$

entonces $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\
\leftrightarrow\ &\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \\
\leftrightarrow\ &\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow -\varepsilon + L < f(x) < \varepsilon + L \qquad (2)
\end{aligned}$$

Ahora para $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \\
\leftrightarrow\ &\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \\
\leftrightarrow\ &\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow -\varepsilon + L < h(x) < \varepsilon + L \qquad (3)
\end{aligned}$$

Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \delta < \delta_1 \quad y \quad \delta < \delta_2$.

Por lo tanto de (2) se concluye que si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x)$ (4)

De la ecuación (3) se tiene que si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow h(x) < L + \varepsilon$ (5)

Por hipótesis se tiene $f(x) < g(x) < h(x)$ (6)

De (4), (5) y (6) se concluye que

$$\begin{aligned}
&\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \\
\therefore\ &\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \\
\leftrightarrow\ &\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon
\end{aligned}$$

esta última expresión representa el enunciado dado en la ecuación (1).

$\therefore \quad \lim_{x\to\ x_0} g(x) = L$

Generalmente, en el cálculo de límites al infinito se suele tener funciones racionales dadas por $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales, de donde se puede identificar los siguientes casos:

- Si $f(x)$ es una función propia; es decir, el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$ entonces $\lim_{x\to\ \pm\infty} f(x) = 0$
- Si $f(x)$ es una función impropia; es decir, el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$ entonces $\lim_{x\to\ \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- Si $f(x)$ es una función impropia; con el grado de $P(x)$ igual al grado de $Q(x)$ entonces $\lim_{x\to\ \pm\infty} f(x) = L$ con $L \in \mathbb{R}$

Mediante la ecuación (1.1) se puede concluir sobre el límite de una función racional cuando tienda al infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \begin{cases} \pm\infty & \text{signo de} \quad \dfrac{a_m x^{m-n}}{b_n} \\ & \qquad m > n \\ \dfrac{a_m}{b_n} & \text{si} \qquad m = n \\ 0 & \text{si} \qquad m < n \end{cases} \tag{1.1}$$

Ejercicios resueltos

Ejemplo 42

Calcular $\lim_{x\to+\infty} x^2 + 3x - 6$

Desarrollo

$\lim_{x\to+\infty} x^2 + 3x - 6 = (\infty)^2 + 3(\infty) - 6 = \infty$

A éste tipo de límites se denomina **límites infinitos** los mismos que serán analizados en la siguiente sección.

Ejemplo 43

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-5}$

Desarrollo

Para resolver el ejercicio se considera la ecuación (1.1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5x+6}{3x^2-x-5} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{3x^2} && \text{simplificar} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nota. Algunos texto de Cálculo Diferencial presentan el ssiguiente desarrollo para la resolución del ejercicio planteado, el mismo que consideramos innecesario dado la ecuación (1.1) la misma que optimiza el proceso.
Desarrollo del ejercicio planteado

Identificar término de mayor grado y dividir,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5x+6}{3x^2-x-5} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{5}{x^2}} && \text{simplificar} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{3-\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}} && \text{calcular el límite} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Solución del ejercicio en Geogebra

En la línea de ingreso de datos se ingresa la función como

```
f(x) = (x^2+5x+6)/(3x^2-x-5)
```

Luego se pide calcular el límite deseado, mediante la instrucción

Límite(<Función>, <Valor numérico>)

```
Límite(f, +\infty)
```

La gráfica de la función en Geogebra esta dada por

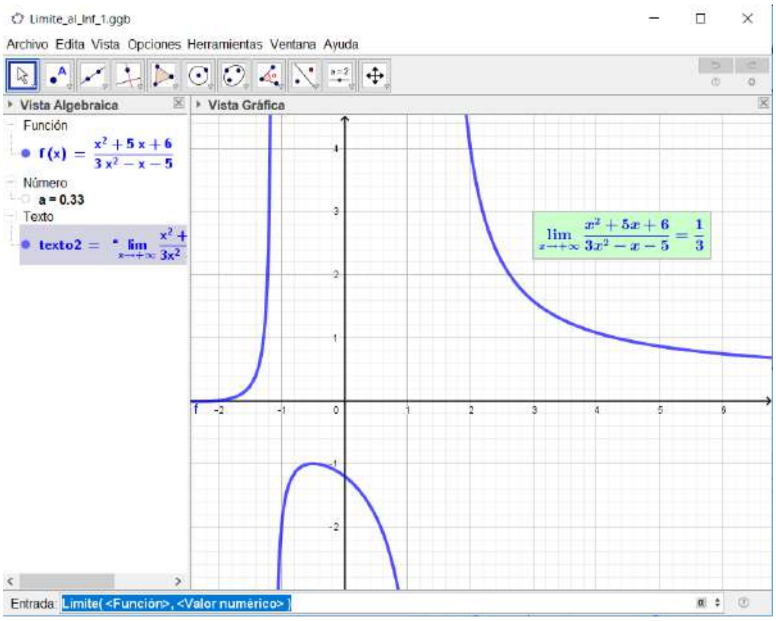


Figura 1.16: Límite al infinito

Ejemplo 44

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-6x^2+7}{-x^2+3x-5}$

Desarrollo

Por ser función racional

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-6x^2+7}{-x^2+3x-5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{-x^2} && \text{simplificar}\\
&= -\lim_{x\to+\infty} 2x && \text{calcular límite}\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio en Matlab

```
>> syms x                                % Declarar variable
>> f=(2*x^3 - 6*x^2 + 7)/(-x^2 + 3*x - 5) % definición de función
>>L=limit(f,x,+inf)                      % Cálculo del límite
>> L=-Inf                                % Resultado
>>ezplot(f,[0,35])                       % Gráfica de la función
```

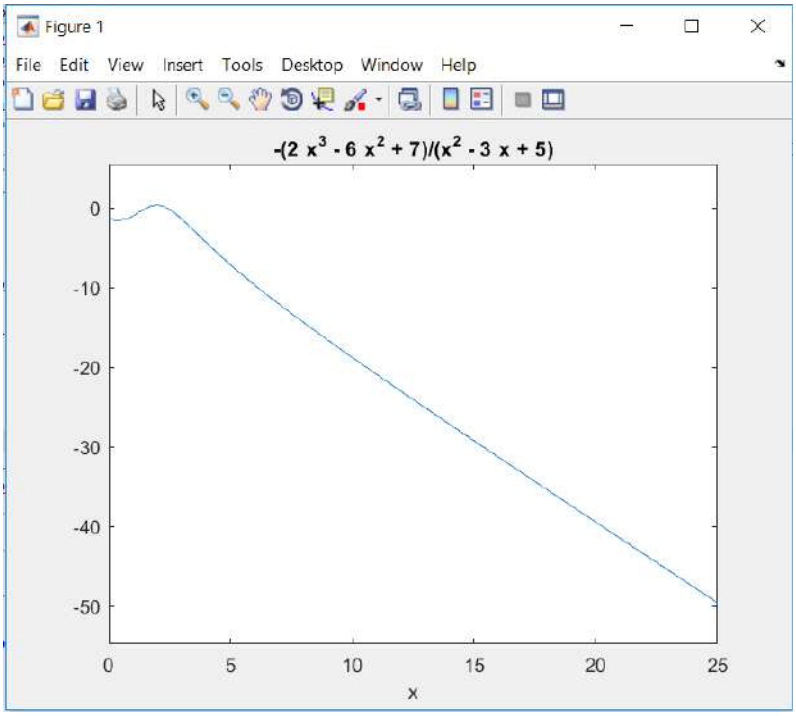


Figura 1.17: Límite al +infinito

Ejemplo 45

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+8x^3-6x^2+7}{x^5+9x^4-x^2+3x-5}$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+8x^3-6x^2+7}{x^5+9x^4-x^2+3x-5} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4}{x^5} && \text{por (1.1)}\\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x} && \text{calcular el límite}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio en Matlab

```
>> syms x                               % Declarar variable
>> f=(-x^4+8*x^3-6*x^2+7)/(x^5+9*x^4-x^2+3*x-5)  % Definición de función
>>L=limit(f,x,+inf)                     % Cálculo del límite
>> L=0                                  % Resultado
>>ezplot(f,[-10,10])                    % Gráfica de la función
```

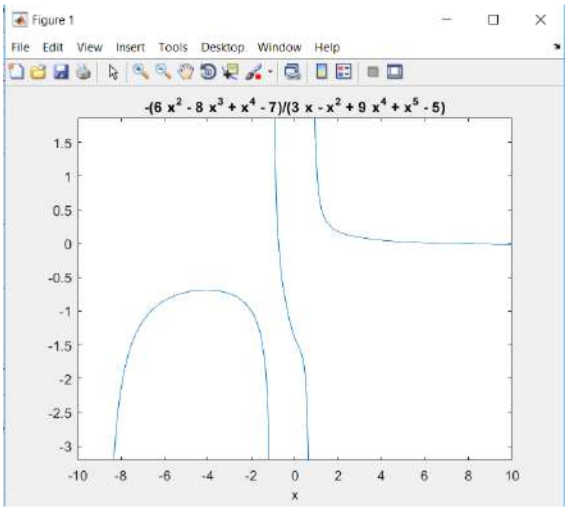


Figura 1.18: Límite al +infinito

Metodología para resolver límites al infinito

- Propender a tener una función racional,
- Determinar el término de mayor grado de la función racional,
- Dividir todos los términos por el término de mayor grado,
- Simplificar y aplicar el límite.

Ejemplo 46

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Desarrollo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \\
&= \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}
$$

Solución del ejercicio en Matlab

```
>> syms x                                      % Declarar variable
>> f=(sqrt(x+sqrt(x+sqrt(x))))/(sqrt(x+1)) % definición de función
>>L=limit(f,x,+inf)                            % Cálculo del límite
>> L=1                                         % Resultado
>>ezplot(f,[0,15])                             % Gráfica de la función
```

Ejemplo 47

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+9}$

Desarrollo

Se aplica racionalización para levantar la indeterminación

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+9} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+9}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+9}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+9}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-(x^2+9)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+9}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-9}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+9}}
\end{aligned}
$$

Identificar término de mayor grado y dividir,

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{9}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}\\
&= \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 48

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}) &= \lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})\right)\left(\frac{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}(x^3+1-(x^3-1))}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{\frac{x^3}{x^3}}}{\sqrt{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}}\\
&= \frac{2}{1+1}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Límite cuando x tiende a $-\infty$

Para calcular el límite cuando x tiende a $-\infty$ se aplica la siguiente propiedad

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \tag{1.2}$$

Ejemplo 49

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-2x+4}-x}$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-2x+4}-x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3(-x)+2}{\sqrt{(-x)^2-2(-x)+4-(-x)}} && \text{por } (1{,}2)\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}+x}
\end{aligned}$$

Se identifica término de mayor grado y se lo divide a cada término de la expresión

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}+\frac{x}{x}} && \text{se simplifica}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1} && \text{se calcula el límite}\\
&= \frac{3}{1+1}\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio en Matlab —

```
>> syms x                                  % Declarar variable
>> f=(-3*x+2)/(sqrt(x^2-2*x+4)-x)          % Definición de función
>>L=limit(f,x,+inf)                        % Cálculo del límite
>> L=3/2                                   % Resultado
>>ezplot(f,[0,15])                         % Gráfica de la función
```

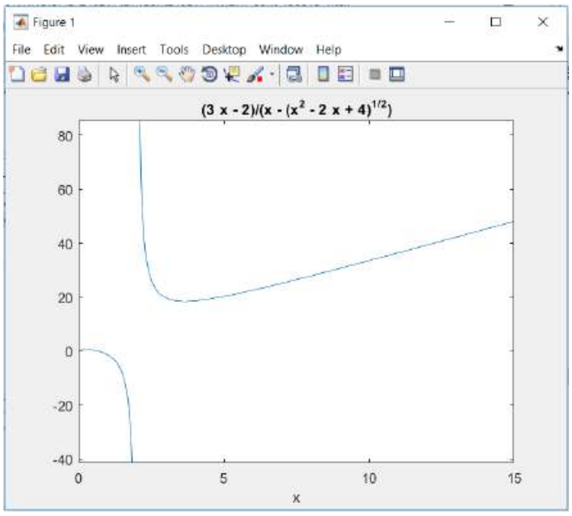


Figura 1.19: Gráfica en Matlab

Ejemplo 50

Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{5x^2-7}}{3x+4}$

Desarrollo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5x^2-7}}{3x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5(-x)^2-7}}{3(-x)+4} \qquad \text{por } (1{,}2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x^2-7}}{-3x+4}$$

Se identifica el término de mayor grado y se lo divide por cada término de la expresión

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{7}{x^2}}}{\frac{-3x}{x}+\frac{4}{x}} \qquad \text{se simplifica}$$

$$== \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5-\frac{7}{x^2}}}{-3+\frac{4}{x}} \qquad \text{se calcula el límite}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{-3}$$

Solución del ejercicio en Geogebra —

En la línea de ingreso de datos se ingresa la función como

```
f(x) = (5x^2 - 7)^(1 / 2) / (3x + 4)
```

Luego se pide calcular el límite deseado, mediante la instrucción

Límite(<Función>, <Valor numérico>)

```
Límite(f, -\infty)
```

Mediante el software Geogebra se tiene la siguiente representación

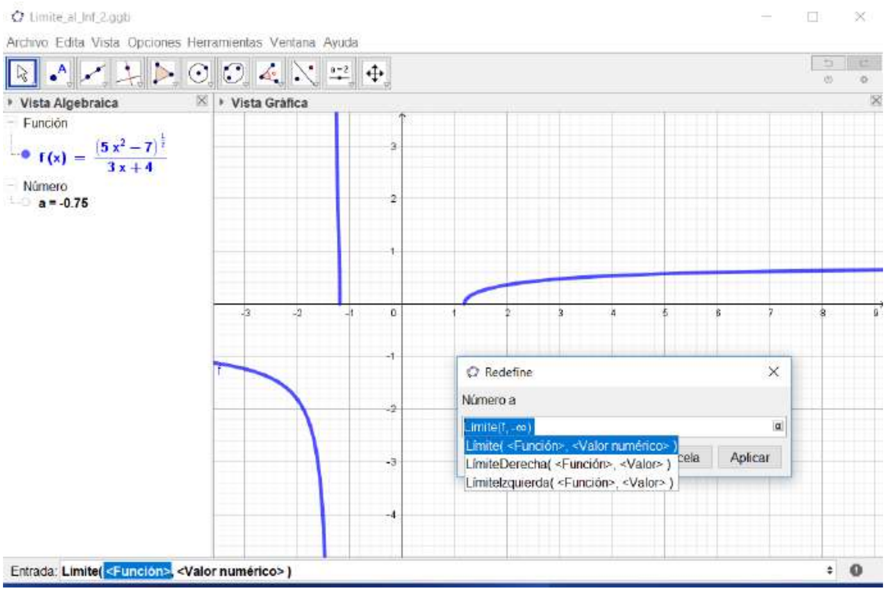


Figura 1.20: Gráfica en Geogebra

Ejemplo 51

Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{9x^2 - x + 1} + 3x$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \sqrt{9x^2 - x + 1} + 3x &= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{9(-x)^2 - (-x) + 1} + 3(-x) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{9x^2 + x + 1} - 3x \end{aligned}$$

Se racionaliza la expresión para evitar la indeterminación

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x + 1} - 3x\right)\left(\frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x}{\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x}\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x} \end{aligned}$$

Se identifica el término de mayor grado y se lo divide por cada término de la expresión

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{3x}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3} \\
&= \frac{1}{3+3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos Límites al Infinito

Calcular si existe los siguientes limites

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^{3+3x^2+2x+1}}$

   Rpta. $\dfrac{1}{4}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{-8x^3+x+2}$

   Rpta. $-\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+7x+5}{x^3+2x+1}$

   Rpta. 0

4. $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{x^3}{x^2+2}-\dfrac{x^2}{x+2})$

   Rpta. 2

5. $\lim\limits_{x\to\infty} [\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}]$

   Rpta. $\dfrac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+3}$

   Rpta. $-\sqrt{2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$

   Rpta. 1

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$

   Rpta. $\pm\dfrac{5}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x(x+a)}-x)$

   Rpta. $\dfrac{a}{2}$

10. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$

Rpta. $\dfrac{a+b}{2}$

11. $\lim_{x\to\infty} (x + \sqrt[3]{x^2 - x^3 + 1})$

Rpta. $\dfrac{1}{2}$

12. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{-x}}{\sqrt{1-4x^2}}$

Rpta. $-\dfrac{1}{2}$

13. $\lim_{x\to\infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3})$

Rpta. 0

14. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x - \sqrt{x^2+1}}$

Rpta. $-\infty$

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3+x^2}}{x}$

Rpta. 1

16. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^6 - 4x^3} - \sqrt[4]{x^{12}+2x^9})$

Rpta. $-\dfrac{5}{2}$

17. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{\dfrac{x^5-x^3}{x^2+3}} - x)$

Rpta. 0

18. $\lim_{x\to\infty} (x^2 - \sqrt[3]{x^6 - 2x^4})$

Rpta. $\dfrac{2}{3}$

19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+1} + x}{x+1}$

Rpta. 2

20. Hallar las costantes k y b que cumple $\lim_{x\to\infty} (kx + b - \dfrac{x^3+1}{x^2+1}) = 0$

Rpta. $k = 1 \quad b = 0$

1.11. Límites Infinitos

De los ejemplos analizados en el estudio sobre límites laterales se determinó que una función real ***no siempre*** tiene límite. Pero, sucede que cuando x tiende a x_0 ya sea por la izquierda o derecha, el comportamiento de las imágenes de $f(x)$ suelen tener comportamientos parecidos; es decir, crecen o decrecen al mismo tiempo.
Esta argumentación lo ilustramos con el análisis de los siguientes ejemplos.

Ejemplos de Límites Infinitos

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} + 2$ cuya gráfica es:

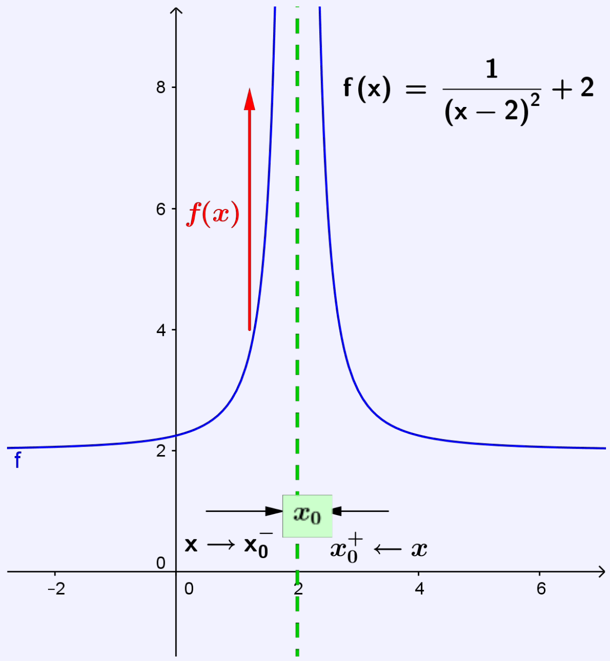


Figura 1.21: Límites Infinitos

En la gráfica de la función podemos evidenciar que cuando x se aproxima a 2, ya sea por la izquierda o por la derecha, el comportamiento de las imágenes de la función $f(x)$ tienden a crecer indefinidamente.

Cálculando los límites laterales tenemos

$$\lim_{x\to\ 0^-} f(x) = \lim_{x\to\ 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} + 2 = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to\ 0^+} f(x) = \lim_{x\to\ 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} + 2 = +\infty$$

De donde concluimos que sus límites laterales son diferentes, lo que implica que el límite cuando $x \to 2$ de $f(x)$ no existe y se denota con

$$\lim_{x\to\ 2} f(x) = +\infty$$

A éste tipo de límites se les denomina ***Límites Infinitos***.

Ejemplo de Límites Infinitos

Consideremos la función $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ cuya gráfica es:

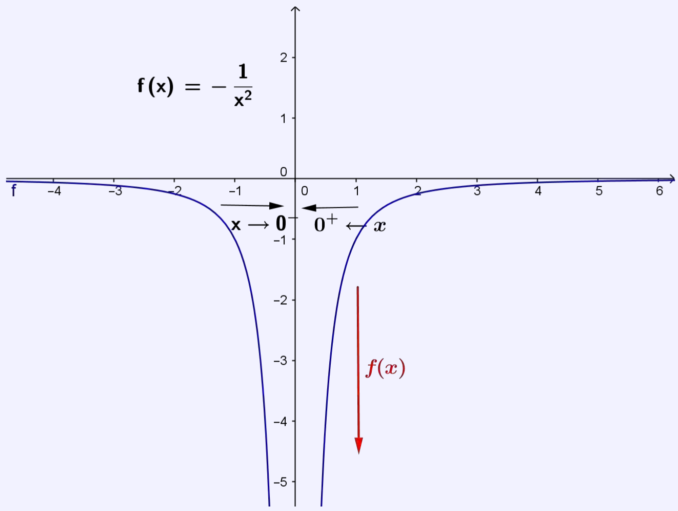


Figura 1.22: Límites Infinitos

En la gráfica de la función podemos evidenciar que cuando x se aproxima a 0, ya sea por la izquierda o por la derecha, el comportamiento de las imágenes de la función $f(x)$ tienden a decrecer indefinidamente. Calculando los límites laterales tenemos

$$\lim_{x\to\ 0^-} f(x) = \lim_{x\to\ 0^-} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

y

$$\lim_{x\to\ 0^+} f(x) = \lim_{x\to\ 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

Por lo tanto, sus límites laterales son diferentes lo que implica que su límite cuando $x \to 0$ de $f(x)$ no existe y se concluye que

$$\lim_{x\to\ 0} f(x) = -\infty$$

A éste tipos de límites se les denomina ***Límites Infinitos***.

Del análisis realizado a los ejemplos anteriores sobre límites infinitos, vamos a proceder a formalizar la parte conceptual mediante las siguientes definiciones.

Definición 17.

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real con $x_0 \notin D_f$. El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es $+\infty$ y denotamos con

$$\lim_{x\to\ x_0} f(x) = +\infty$$

ssi

$$\forall N > 0 \quad \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{R} \quad si \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > N$$

Definición 18.

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real con $x_0 \notin D_f$. El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es $-\infty$ y denotamos con

$$\lim_{x\to\ x_0} f(x) = -\infty$$

ssi

$$\forall N < 0 \quad \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{R} \quad si \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < N$$

Teorema 19.

Sea $n \in \mathbb{R}^+$. Entonces se cumple:

$$\lim_{x\to\ 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to\ 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si n es impar} \\ +\infty & \text{si n es par} \end{cases}$$

Ejemplos de Límites Infinitos

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ cuya gráfica es:

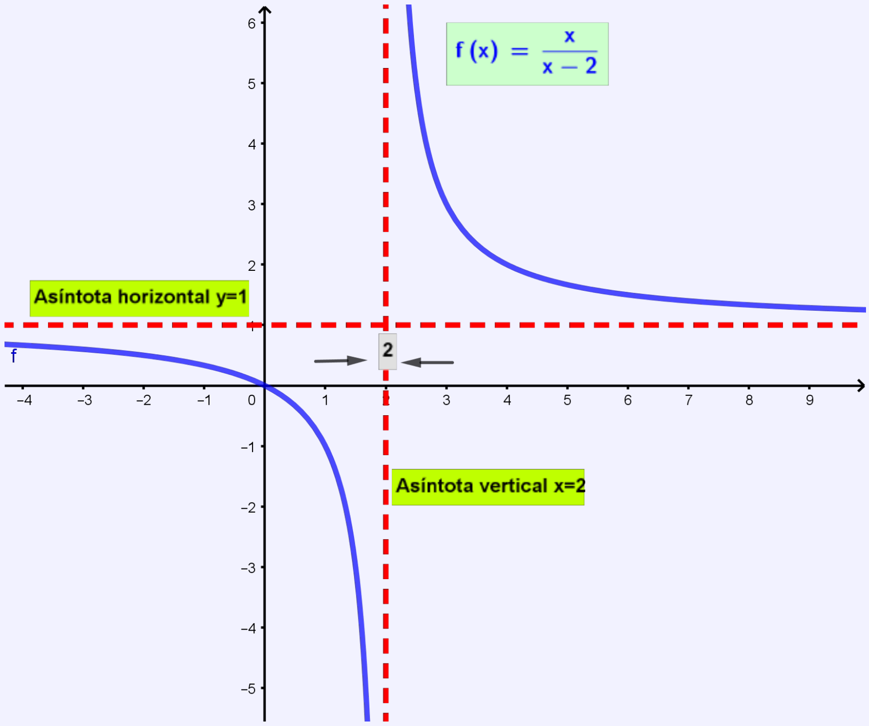


Figura 1.23: Límites Infinitos

En la gráfica de la función podemos evidenciar que los límites laterales alrededor de $x = 2$ están dados por $\lim\limits_{x\to\ 2^-} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to\ 2^+} f(x) = +\infty$. Concluyendo que no existe $\lim\limits_{x\to\ 2^-} f(x)$

Pero, si se considera uno solo de los límites laterales a éstos se los puede denominar ***Límites Infinitos***.

Ejemplo 52

Calcular $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x^2-4}$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{x+2}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Utilizando el software Geogebra se puede realizar el ejercicio con la posibilidad de analizar la gráfica de la función y verificar el resultado del límite.

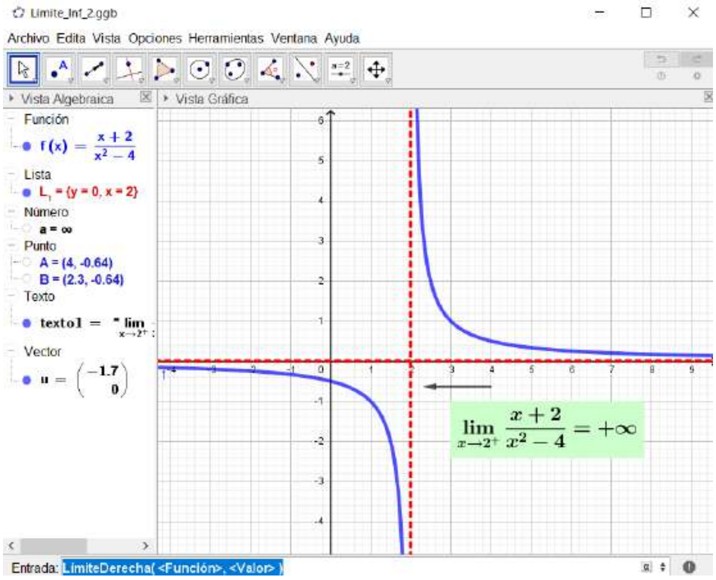


Figura 1.24: Límite infinito

En la gráfica se evidencia la línea de código que se necesita en Geogebra para el cálculo del límite.

Ejemplo 53

Calcular $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4} &= -\lim_{x \to 4^-} \frac{(\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x})}{4-x} \\
&= -\lim_{x \to 4^-} \frac{\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}} \\
&= -\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{0}} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Utilizando el software Geogebra se puede observar la gráfica de la función y verificar el resultado del límite.

Ejemplo 54

Calcular $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{[|x|]-4}{x-4}$

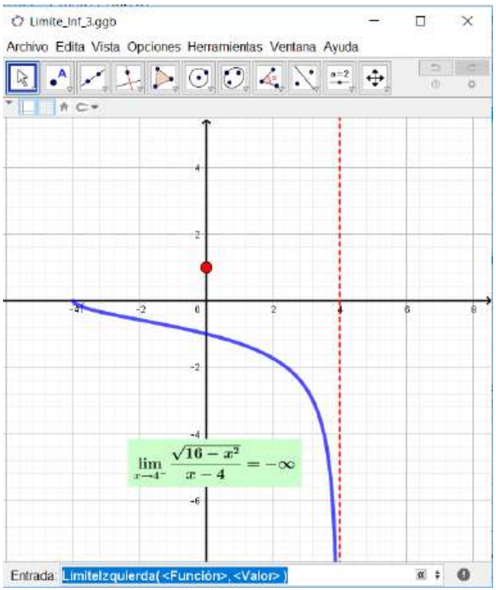


Figura 1.25: Límite infinito

Desarrollo

Como $x \to 4^-$ entonces $x\epsilon[3, 4[$ lo que implica que $[|x|] = 3$

Con este antecedente entonces el límite es evaluado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4^-} \frac{[|x|]-4}{x-4} &= \lim_{x\to 4^-} \frac{3-4}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{4-x} \\
&= \frac{1}{0} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Utilizando el software Geogebra se puede observar la gráfica de la función y verificar el resultado del límite.

1.12. Límites Trigonométricos

Las técnicas para resolver un ejercicio de límites que involucre funciones trigonométricas esta dado por aplicar el ***Límite Fundamental Trigonométrico*** dado en la ecuación (1.27): además, es necesario realizar algunas operaciones algebraicas como multiplicar y dividir por un número, factorizar, multiplicar por la conjugada o aplicar las propiedades de los límites con la finalidad de evitar las indeterminaciones que generalmente se presenta de la forma $\frac{0}{0}$.

A continuación se realiza un repaso de las principales identidades trigonométricas

1. Identidad pitagórica

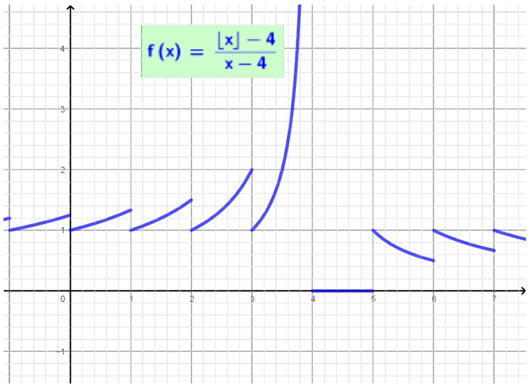


Figura 1.26: Límite de la función parte entera

- $\boxed{sen^2(x) + cos^2(x) = 1}$
- $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$
- $ctan^2(x) + 1 = csc^2(x)$

2. Suma y diferencia de ángulos

- $sen(x \pm y) = sen(x)cos(y) \pm cos(x)sen(y)$
- $cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sen(x)sen(y)$
- $tan(x \pm y) = \dfrac{tan(x) \pm tan(y)}{1 \mp tan(x)tan(y)}$

3. Ángulos dobles

- $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$
- $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$
- $tan(2x) = \dfrac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)}$

4. Ángulos mitad

- $sen\left(\frac{2}{x}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - cos(x)}{2}}$
- $cos\left(\frac{2}{x}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + cos(x)}{2}}$
- $tan\left(\frac{2}{x}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - cos(x)}{1 - cos(x)}} = \dfrac{1 - cos(x)}{sen(x)} = \dfrac{sen(x)}{1 + cos(x)}$

5. Suma de funciones

- $sen(x) + sen(y) = 2\,sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\,cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $sen(x) - sen(y) = 2\,sen\left(\frac{x-y}{2}\right)\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- $cos(x) + cos(y) = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\,cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $cos(x) - cos(y) = -2\,sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\,sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$

6. Producto de funciones

    - $sen(x) * sen(y) = \frac{1}{2}\Big[cos(x-y) - cos(x+y)\Big]$
    - $cos(x) * cos(y) = \frac{1}{2}\Big[cos(x-y) + cos(x+y)\Big]$
    - $sen(x) * cos(y) = \frac{1}{2}\Big[sen(x-y) - sen(x+y)\Big]$

7. Complemento, supemento de la función

    - $sen\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = cos(x)$
    - $cos\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = sen(x)$
    - $sen(\pi \pm x) = \mp sen(x)$
    - $cos(\pi \pm x) = -sen(x)$

8. Paridad de la función

9. Complemento, supemento de la función

    - $sen\big(-x\big) = -sen(x)$
    - $cos\big(-x\big) = cos(x)$
    - $tan\big(-x\big) = -tan(x)$

Para el cálculo de los límites trigonométricos es necesario enunciar y demostrar el ***Teorema Fundamental Trigométrico***.

Teorema 20.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1} \tag{1.3}$$

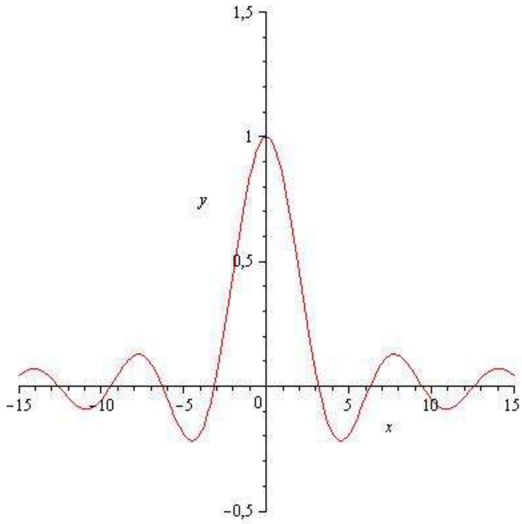


Figura 1.27: Límite Fundamental Trigonométrico

Demostración del límite fundamental trigonométrico
Para la demostración es necesario considerar la siguiente desigualdad

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

donde x es el ángulo medido en radianes tal que: $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ dado en la figura(1.28) que representa el círculo trigonométrico dado en el plano XY.

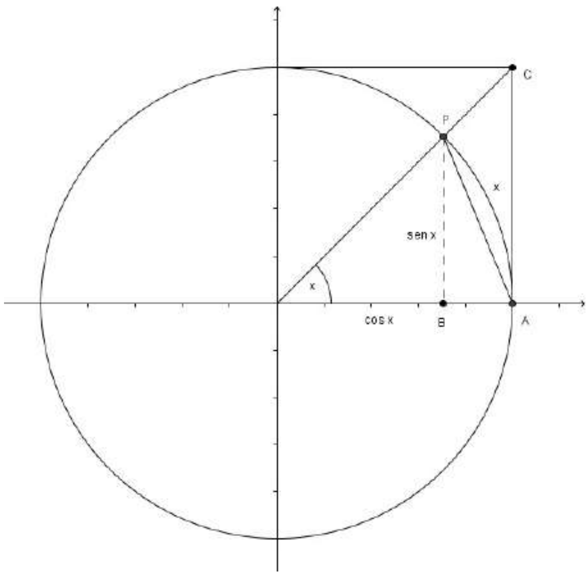


Figura 1.28: Círculo trigonométrico

Sea $0<x<\dfrac{\pi}{z}$ el arco AP, medido en radianes, donde las coordenadas de los puntos A, B y C están dados por:

$P\big(cos(x), sin(x)\big)$, $A(1,0)$, $B(cos(x),0)$ y $C(1, tan(x))$ siendo C el punto de intersección de la recta que contine el radio $\overrightarrow{OP}$ con la recta tangente a la circuferencia en A.
Del análisis del gráfico se puede deducir que

Área $\Delta\, POA$ < Área del sector circular OPA < área $\Delta\, OCA$
Donde: Área $\Delta POA = \dfrac{1}{2}(1)\sin(x) = \dfrac{\sin(x)}{2}$
Área del sector circular $OPA = \dfrac{1}{2}arco(radio)^2 = \dfrac{x}{2}$
Área $\Delta OCA = \dfrac{\tan(x)}{2}$,es decir: $\dfrac{\sin(x)}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\tan(x)}{2}$, de donde:
$\sin(x) < x < \tan(x)$ dividiendo entre $\sin(x)$ se tiene
$1 < \dfrac{x}{\sin(x)} < \dfrac{1}{\cos(x)}$ al invertir la desigualdad se tiene

$$\cos(x) < \frac{\text{sen}(x)}{x} < 1 \qquad (*)$$

Además $d(A,P) < arc\widehat{AP}$,luego $(1-\cos(x))^2 + \sin^2(x) < x^2$, de donde

$$1 - \cos(x) < \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) \qquad (**)$$

Ahora de (*) y (**) se tiene:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \qquad (***)$$

Si $x\epsilon(-\dfrac{\pi}{2}, 0)$ suponiendo que $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < -x < \dfrac{\pi}{2}$
que al reemplazar en $(***)$ se cumple:
$1 - \dfrac{(-x)^2}{2} < \cos(-x) < \dfrac{\sin(-x)}{-x} < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1$
Luego $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1$ se cumple para $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$
Como $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \dfrac{x^2}{2} = 1 \quad y \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ entonces por el teorema del Sándwich de tiene:

$$\boxed{\lim_{x\to\ 0} \frac{sin(x)}{x} = 1}$$

Consecuencia del límite notable

Sean $a, b \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$

$$\begin{array}{c|c}
\lim\limits_{x\to\ 0} \dfrac{sen(ax)}{ax} = 1 & \lim\limits_{x\to\ 0} \dfrac{tan(ax)}{ax} = 1 \\
\lim\limits_{x\to\ 0} \dfrac{sen(ax)}{x} = a & \lim\limits_{x\to\ 0} \dfrac{tan(ax)}{x} = a \\
\lim\limits_{x\to\ 0} \dfrac{sen(ax)}{sen(bx)} = \dfrac{a}{b} & \lim\limits_{x\to\ 0} \dfrac{tan(ax)}{tan(bx)} = \dfrac{a}{b}
\end{array}$$

Ejemplo 55

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x-\sin(2x)}{2x+3\sin(4x)}$

Desarrollo

Al reemplazar el valor de $x=0$ en la función se tiene
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x-\sin(2)x}{2x+3\sin(4x)} = \dfrac{0}{0}$
Para evitar la indeterminación se multiplica por el conjugado.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{6x-\sin(2x)}{2x+3\sin(4x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{6x-\sin(2x)}{x}}{\dfrac{2x+3\sin(4x)}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{6-2\left(\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right)}{2+12\left(\dfrac{\sin(4x)}{4x}\right)} \\
&= \frac{6-2}{2+12} \\
&= \frac{2}{7}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 56

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)-1}{x}$

Desarrollo

Al reemplazar el valor de $x=0$ en la función se tiene
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)-1}{x} = \dfrac{cos(0)-1}{0} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$
Para evitar la indeterminación se multiplica por el conjugado.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{cos(x)-1}{x}\right)\left(\frac{cos(x)+1}{cos(x)+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{cos^2(x)-1}{x(cos(x)+1)} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x(cos(x)+1)} \\
&= -\left(\lim_{x\to 0} x\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}\right)^2\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{cos(x)+1}\right) \\
&= -(0)(1)(\frac{1}{2}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Algunos autores consideran al

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x} = 0 \tag{1.4}$$

como un límite fundamental trigonométrico.

Ejemplo 57

Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Desarrollo

Al reemplazar el valor de $x=\frac{\pi}{4}$ en la función se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}} &= \frac{sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}}\\ &= \frac{sen(0)}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}\\ &= \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Para evitar la indeterminación se aplica la siguiente sustitución.

Sea $u=x-\frac{\pi}{4}$, luego si $x\to\frac{\pi}{4}$ entonces $u\to 0$, con $x=u+\frac{\pi}{4}$, al reemplazar

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{cos\left(u+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

por identidades trigonométricas se tiene

$$\begin{aligned}&= \lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{cos(u)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-sen(u)sen\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}}\\ &= \lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(cos(u)-sen(u)-1\right)}\end{aligned}$$

se divide por u para poner en términos del límite fundamental,

$$= \sqrt{2}\lim_{u\to 0} \frac{\frac{sen(u)}{u}}{\frac{cos(u)-sen(u)-1}{u}}$$

se aplica propiedades del límite

$$= \sqrt{2}\frac{\lim\limits_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u}}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{cos(u)-1}{u}-\lim\limits_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u}}$$

por la ec. (1.4) se tiene

$$\begin{aligned}&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{0-1}\right)\\ &= -\sqrt{2}\end{aligned}$$

Solución del ejercicio en Matlab

```
>> syms x                              % Declarar variable
>> f=sin(x-pi/4)/(cos(x)-1/sqrt(2))    % Definición de función
>>L=limit(f,x,pi/4)                    % Cálculo del límite
>> L=-2^(1/2)                          % Resultado
>>ezplot(f,[-pi,pi])                   % Gráfica de la función
```

Se obtiene la siguiente representación gráfica de la función

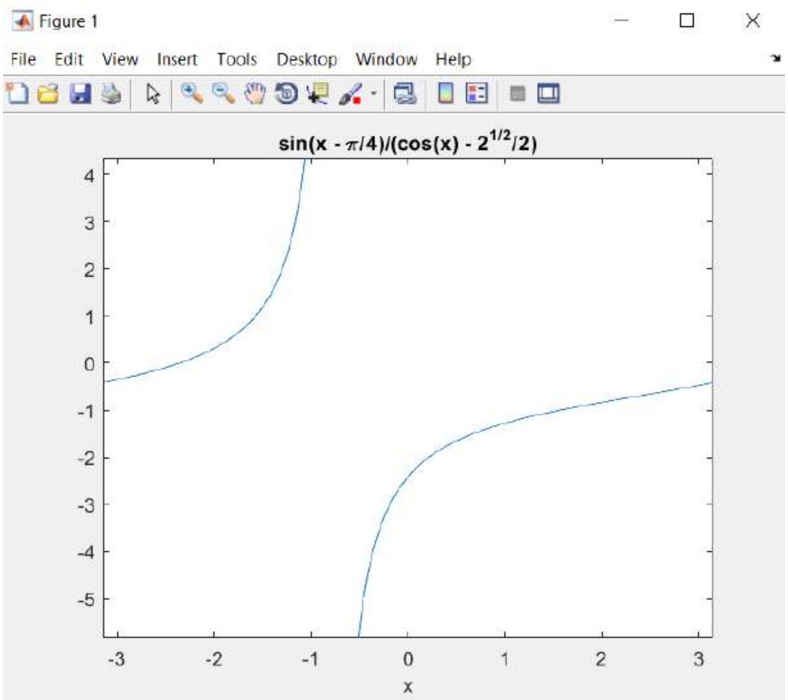


Figura 1.29: Límite trigonométrico

Ejemplo 58

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$

Desarrollo

Al reemplazar el valor de $x=0$ en la función se tiene

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2} = \dfrac{\cos(0)-\cos(0)}{0^2} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$

Para evitar la indeterminación se suma y resta 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(nx))-(1-\cos(mx))}{x^2}$$

por propiedades del límite

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(nx))}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(mx))}{x^2}$$

se multiplica por el conjugado

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(nx)}{x^2}\right)\left(\frac{1+\cos(nx)}{1+\cos(nx)}\right)\\
&- \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(mx)}{x^2}\right)\left(\frac{1+\cos(mx)}{1+\cos(mx)}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2(nx)}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\cos(nx)}\right)\\
&- \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2(mx)}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\cos(mx)}\right)\\
&= n^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(nx)}{nx}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos(nx)}\right)\\
&- \lim_{x\to 0} m^2\left(\frac{sen(mx)}{mx}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos(mx)}\right)
\end{aligned}
$$

al aplicar el límite se tiene

$$
\begin{aligned}
&= n^2(1)\left(\frac{1}{1+1}\right) - m^2(1)\left(\frac{1}{1+1}\right)\\
&= \left(\frac{n^2-m^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Solución del ejercicio en Matlab

`>> syms x`	`% Declarar variable`
`>> f=(cos(m*x)-cos(n*x))/(x^2)`	`% Definición de función`
`>>L=limit(f,x,0)`	`% Cálculo del límite`
`>> L=(n^2-m^2)/2`	`% Resultado`

Ejemplo 59

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{cos(x)}}{x^2}$

Desarrollo

se multiplica por el conjugado

$$
\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{cos(x)}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{cos(x)}}{x^2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{cos(x)}}{1+\sqrt{cos(x)}}\right)
$$

se multiplica nuevamente por el conjugado

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1-cos(x)}{x^2(1+\sqrt{cos(x)})}\right)\left(\frac{1+cos(x)}{1+cos(x)}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\sqrt{cos(x)})(1+cosx)}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right)\left(\frac{1}{\left(1+\sqrt{cos(x)}\right)(1+cos(x))}\right)
\end{aligned}
$$

por propiedades del límite

$$\begin{aligned}
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\left(1+\sqrt{cos(x)}\right)(1+cos(x))}\right)\\
&= 1\left(\frac{1}{1+1}\right)\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

1.12.1. Ejercicios Propuestos Trigonométricos

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x}$

   Rpta. 0

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos(x)-cos(3x)}{x^2}$

   Rpta. 4

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x)-sen(x)}{x^3}$

   Rpta. $\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-sen(2x)}{x+sen(3x)}$

   Rpta. $-\frac{1}{4}$

5. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$

   Rpta. $cosx$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+sen(x)}-\sqrt{1-sen(x)}}{x}$

   Rpta. 1

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos(x)-cos(2x)}{1-cos(x)}$

   Rpta. 3

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^7(x)}{x^2}$

   Rpta. $\frac{7}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-sen(x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

   Rpta. $\frac{1}{2}$

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{cos(x)-sen(x)}{cos(2x)}$

Rpta. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)$

Rpta. $\frac{2}{\pi}$

12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{sen\Big(x-\pi/6\Big)}{\sqrt{3}/2-cos(x)}$

Rpta. 2

13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{sen(x)-cos(x)}{1-tg(x)}$

Rpta. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(3x).sen(5x)}{(x-x^3)^2}$

Rpta. 15

15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-3cos(x)+1}{1-cos(x)}$

Rpta. $\frac{7}{2}$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} tg^2(x)(\sqrt{2sen^2(x)+3sen(x)+4}-\sqrt{sen^2(x)+6sen(x)+12})$

Rpta. $\frac{1}{12}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(a+2x)-2sen(a+x)+sena}{x^2}$

Rpta. $-sen(a)$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{cos(x)}-cos(x)}{x^2}$

Rpta. $\frac{3}{4}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2}{sen^2(x)}-\frac{1}{1-cos(x)})$

Rpta. $\frac{1}{2}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4cos(x)-cos(2x)-3}{xsen^3(x)}$

Rpta. ∞

1.13. Límite Fundamental Algebraico

Su análisis se fundamenta sobre las características de la Función Exponencial y Logarítmica.

Se define el número nepperiano a partir del análisis de la siguiente sucesión.
Recordando un ejemplo de ***sucesión de números reales*** tenemos

$$\varepsilon = \{\varepsilon_1 = (1+\frac{1}{1}), \varepsilon_2 = (1+\frac{1}{2})^2, ..., \varepsilon_n = (1+\frac{1}{n})^n, ...\}$$

Definiendo el número e como el ***supremo*** del conjunto de los números reales definidos por la "sucesión"ε. Se puede determinar que

$$\lim_{n\to\ +\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

.

Definición 21.

Se definie como ***Límite Fundamental Algebraico*** a la siguiente expresión:

$$\lim_{x\to\ 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1.5}$$

Una expresión equivalente a la ec(1.5) esta dada por

$$\lim_{x\to\ +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{1.6}$$

Analizando la gráfica podemos evidenciar que sus límites laterales son iguales. Por lo tanto, el límite existe y es único.

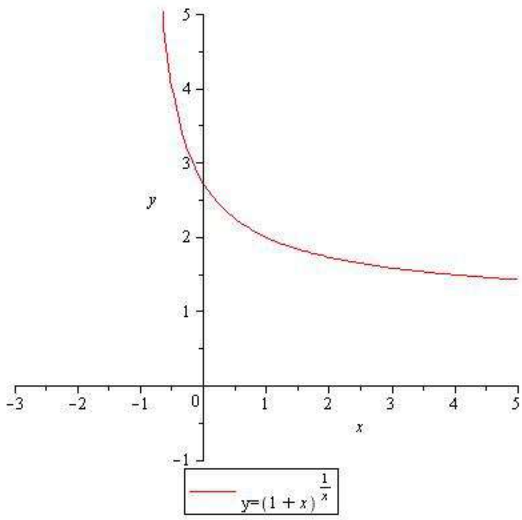


Figura 1.30: Límite Fundamental Algebraico

Realizando la sustitución $z = \dfrac{1}{x}$ tenemos

$$\lim_{x\to\ +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

Cálculo de Límites de la forma

$$\lim_{x\to\ x_0} (f(x))^{g(x)}$$

Para calcular los siguientes límites se debe tomar en consideración:

1. Si existen los límites $\lim_{x\to\ x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x\to\ x_0} g(x) = B$ y son finitos. Entonces

$$\lim_{x\to\ x_0} (f(x))^{\lim\limits_{x\to\ x_0} g(x)} = A^B$$

2. Si $\lim_{x\to\ x_0} f(x) = A \neq 1$ y $\lim_{x\to\ x_0} g(x) = \pm\infty$.
   Entonces $\lim_{x\to\ x_0} (f(x))^{g(x)}$ es inmediato.
3. Si $\lim_{x\to\ x_0} f(x) = A = 1$ y $\lim_{x\to\ x_0} g(x) = \pm\infty$.
   Entonces obtenemos la indeterminación de la forma $1^{\pm\infty}$.

   Estas forma de indeterminación la resolvemos de la siguiente manera:

   Consideramos a $f(x) = 1 + \phi(x)$ donde $\lim_{x\to\ x_0} \phi(x) = 0$

   Realizando la sustitución y aplicando la definición de número neperiano, obtenemos:

$$\lim_{x\to\ x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to\ x_0} \left[(1+\phi(x))^{\frac{1}{\phi(x)}}\right]^{\phi(x)g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\ x_0} \phi(x)g(x)}$$

NOTA:

Para el cálculo de límites de funciones logarítmicas se aplica la siguiente propiedad

$$\lim_{x\to\ x_0} ln\big(f(x)\big) = ln\big(\lim_{x\to\ x_0} f(x)\big)$$

Ejercicios resueltos

Ejemplo 60

Calcular $\lim_{x\to 0} \big(cos(x) + 5\,(sen(3x)\big)^{\frac{1}{x}}$

Desarrollo

Al reemplazar el valor de $x = 0$ en la función se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \big(cos(x) + 5\,sen(3x)\big)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0} \big(cos(0) + 5\,sen(3*0)\big)^{\frac{1}{0}} \\ &= \big(1+0\big)^{\infty} \\ &= 1^{\infty}\end{aligned}$$

Para resolver el límite procedemos a sumar y restar 1 de la siguiente manera

$$\lim_{x\to 0} \left(cos(x) + 5\,sen(3x)\right)^{\frac{1}{x}} \quad =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\mathbf{1} + cos(x) + 5\,sen(3x) - 1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(1 + cos(x) + 5\,sen(3x) - 1\right)^{\frac{1}{cos(x)+5\,sen(3x)-1}}\right]^{\frac{cos(x)+5\,sen(3x)-1}{x}}$$

como $\phi(x) = cos(x) + 5\,sen(3x) - 1$ entonces se tiene

$$= \left[e\right]^{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)+5\,sen(3x)-1}{x}}$$

por propiedades del límite

$$= \left[e\right]^{\left\{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)-1}{x} + \lim\limits_{x\to 0} 15\dfrac{sen(3x)}{3x}\right\}}$$

$$= \left[e\right]^{\left\{0+15\right\}}$$

$$= e^{15}$$

Solución del ejercicio en Matlab

```
>> syms x                          % Declarar variable
>> f=(cos(x)+5*sin(3*x))^(1/x)     % Definición de función
>>L=limit(f,x,0)                   % Cálculo del límite
>> L=e^15                          % Resultado
```

Ejemplo 61

Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-3}\right)^x$

Desarrollo

Sustituyendo tenemos,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{2x^2-3}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} \qquad \text{por función exponencial}$$

$$= 0 \qquad \text{límite de la función}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{2x^2-3}\right)^x = 0$$

Solución del ejercicio en Matlab

```
>> syms x                              % Declarar variable
>> f=((x^2+x+1)/(2*x^2-3))^(x)         % Definición de función
>>L=limit(f,x,+inf)                    % Cálculo del límite
>> L=0                                 % Resultado
```

Ejemplo 62

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}\right)^{x+1}$

Desarrollo

Sustituyendo tenemos,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}\right)^{x+1}=\left(1\right)^{+\infty}$$

procedemos a levantar la indeterminación,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}\right)^{x+1}&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}-1\right)^{x+1}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{5x-1}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2-3x+2}{5x-1}}\right]^{\frac{5x-1}{x^2-3x+2}(x+1)}\end{aligned}$$

Por la ec(1.6) tenemos

$$\begin{aligned}&=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-1}{x^2-3x+2}(x+1)}\\&=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2+4x-1}{x^2-3x+2}}\\&=e^5\end{aligned}$$

Ejemplo 63

Calcular $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}$

Desarrollo

Al sustituir el valor de $x=0$ se tiene

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}=\dfrac{e^0-1}{0}=\dfrac{0}{0}$

Para evitar la indeterminación se aplica la siguiente sustitución

Sea $u=e^{5x}-1$ de donde $x=\frac{1}{5}ln(1+u)$, si $x\to0$ entonces $u\to0$

al reemplazar en el ejercicio se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x} &= 5\lim_{u\to 0}\frac{u}{ln(1+u)}\\ &= \frac{5}{\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ln(1+u)}{u}}\end{aligned}$$

por propiedadesdes del logaritmo se tiene

$$= \frac{5}{ln\left(\lim\limits_{u\to 0}\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}}\right)}$$

por ecuación(1.5) se tiene

$$\begin{aligned}&= \frac{5}{ln(e)}\\ &= 5\end{aligned}$$

Solución del ejercicio en Matlab

```
>> syms x                          % Declarar variable
>> f=((exp(5*x)-1)/(x)             % Definición de función
>>L=limit(f,x,0)                   % Cálculo del límite
>> L=5                             % Resultado
```

Ejemplo 64

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\tan(x)}$

Desarrollo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{x}}{\tan(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(e^{2x}-1)}{\tan(x)}$$

el límite se lo divide por x por extremos y medios

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x}(e^{2x}-1)}{x}}{\frac{\tan(x)}{x}}$$

por propiedadesdes del límite se tiene

$$= \lim_{x\to 0}e^{x} * \frac{\overbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}}^{A}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}}$$

el límite A por el ejercicio anterior se tiene

$$\begin{aligned}&= 1\left(\frac{2}{1}\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

Solución del ejercicio en Matlab

```
>> syms x                               % Declarar variable
>> f=(exp(3*x)-exp(x))/(tan(x))         % Definición de función
>>L=limit(f,x,0)                        % Cálculo del límite
>> L=2                                  % Resultado
```

Ejemplo 65

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 3^x}{x}$

Desarrollo

Para evitar la indeterminación se suma y resta 1 de la siguiente manera

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 3^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5^x \mathbf{-1} - 3^x \mathbf{+1}}{x}$$

por propiedadesdes del límite se tiene

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x}$$

Para evitar la indeterminación se aplica la siguiente sustitución

Sea $u = 5^x - 1$ de donde $x = \frac{ln(1+u)}{ln(5)}$, si $x \to 0$ entonces $u \to 0$

Sea $z = 3^x - 1$ de donde $x = \frac{ln(1+z)}{ln(3)}$, si $x \to 0$ entonces $z \to 0$

al reemplazar en el ejercicio se tiene

$$= ln(5) \lim_{u\to 0} \frac{u}{ln(1+u)} - ln(3) \lim_{z\to 0} \frac{z}{ln(1+z)}$$

$$= ln(5) \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{1}{u} ln(1+u)} - ln(3) \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z} ln(1+z)}$$

por propiedadesdes del límite se tiene

$$= \frac{ln(5)}{ln\left(\lim\limits_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\right)} - \frac{ln(3)}{ln\left(\lim\limits_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}}\right)}$$

por la ecuación (1.5) se tiene

$$= \frac{ln(5)}{ln(e)} - \frac{ln(3)}{ln(e)}$$

$$= ln(5) - ln(3)$$

Solución del ejercicio en Matlab

```
>> syms x                               % Declarar variable
>> f=(5^(x)-3^(x))/x                    % Definición de función
>>L=limit(f,x,0)                        % Cálculo del límite
>> L=log(5) - log(3)                    % Resultado
```

1.13.1. Ejercicios Propuestos Exponenciales

Hallar los siguientes limites :

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{(x^2+2)}$

Rpta.e^2

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$

Rpta.e^2

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\dfrac{x+1}{3}}$

Rpta.$e^{-2/3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(cos(x)+sen(x))^{\dfrac{1}{x}}$

Rpta.e

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(a+x)-Ln(a)}{x}$

Rpta.$\dfrac{1}{a}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} x(ln(x+a)-ln(x))$

Rpta.a

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\dfrac{sen(x)}{x}}$

Rpta.$\dfrac{3}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Rpta.1

9. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

Rpta.e^{-2}

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

Rpta.e^{2a}

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1-tgx}\right)^{\dfrac{1}{sen(x)}}$

Rpta. e^2

12. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tg(x)}{1-sen(x)}\right)^{\dfrac{1}{sen(x)}}$

Rpta. e^2

13. $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{2-\sqrt{cos(x)}}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$

Rpta. 1

14. $\lim_{x\to 0}\left(cos(x)\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$

Rpta. $e^{-\dfrac{1}{2}}$

15. $\lim_{x\to 0}\left(cos\sqrt{\dfrac{5a}{x}}\right)^{bx}$

Rpta. $e^{\dfrac{15ab}{2}}$

16. $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{(e^x+x)^{tg(x)}}{(1+sen(x))^x}\right]^{\dfrac{ctg(x)}{x}}$

Rpta. e

17. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(sen(x))^{tg(x)}$

Rpta. 1

18. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{cos(x)}{cos2x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$

Rpta. $e^{\dfrac{3}{2}}$

19. $\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{ctg^2(x)}$

Rpta. e

20. $\lim_{x\to a}\dfrac{x-a}{Ln(x)-Ln(a)}$

Rpta. a

1.14. Asíntotas de una función

La asíntota de una función es una recta a la que tiende la función en el infinito, es decir, que la distancia entre la recta y la función es cada vez menor, formalizando este concepto tenemos la siguiente definición.

Definición 22.

Sea $y = f(x)$ una función real, r una recta y un punto $A \in f(x)$. Si el punto A se desplaza sobre la función $y = f(x)$ tendiendo al infinito y la distancia entre la recta r y el punto A de la curva tiende a cero, es decir:

$$\lim_{A \to \infty} d(r, A) = 0$$

Entonces a la recta r se le denomina ***asíntota de la función***.

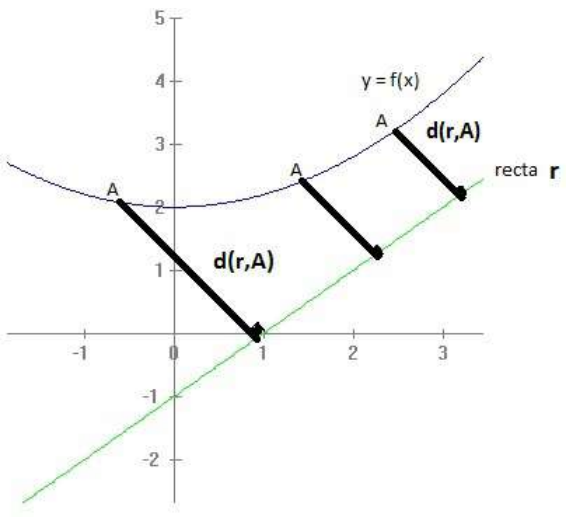


Figura 1.31: Asíntota de una curva

Existen tres tipos de asíntotas:

- **Asíntota vertical**: $x = a$,
- **Asíntota horizontal**: $y = a$,
- **Asíntota oblicua**: $y = a + bx$.

A continuación definamos cada una de estas asíntotas.

Definición 23 (Asíntota vertical).

Se dice que una recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de una función f si se cumple

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Las asíntotas verticales deben buscarse en los puntos donde no está definida la función, pero si lo está en las proximidades.

Ejemplo 66

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

ya que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty, \text{ y}$$
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \infty$$

Asíntotas horizontales

Definición 24 (Asíntota horizontal)**.**

Se dice que una recta $y = a$ es una *asíntota horizontal* de una función f si se cumple

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \quad \text{o} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = a \qquad a \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 67

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

ya que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1, \text{ y}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1$$

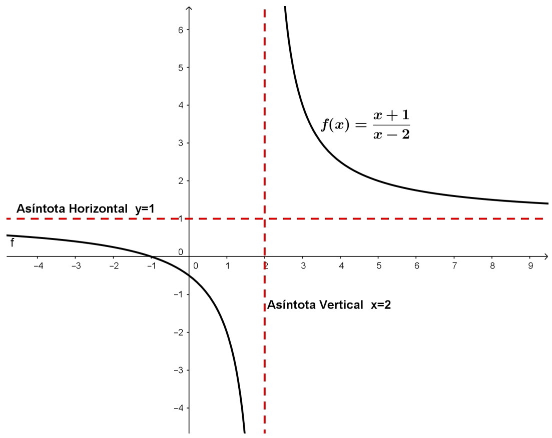


Figura 1.32: Asíntotas Vertical y Horizontal

Asíntotas oblicuas

Definición 25 (Asíntota oblicua).

Se dice que una recta $y = a + bx$ es una *asíntota oblicua* de una función $f(x)$ si se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = b \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - bx\big) = a.$$

o bien,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = b \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - bx\big) = a$$

Ejemplo 68

La recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

como la asíntota oblicua tiene por ecuación $y = a + bx$, de donde

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-x}\right) = 1, \text{ y}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - bx\big) \qquad = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{x}{x-1}\right) = 1$$

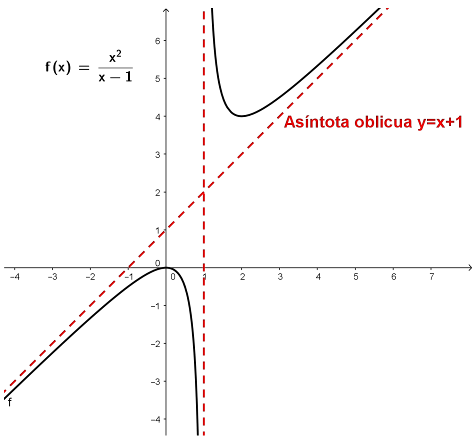


Figura 1.33: Asíntota Oblicua

CAPÍTULO 2

Capítulo 2

Continuidad de una Función Real

2.1. Continuidad de una Función en un punto

Definición 26.

Sea $f : A \to B$ una función real, se dice que f es ***continua*** en algún punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi, se cumple las tres condiciones:

1. $f(x_0)$ este definido
2. Exista $\lim\limits_{x\to\ x_0} f(x)$
3. Se cumpla $\lim\limits_{x\to\ x_0} f(x) = f(x_0)$

Por lo tanto, si se cumple las tres condiciones se dirá que la función $f(x)$ es continua en algún $x = x_0$. En caso de que no cumpla una de las tres condiciones se dirá que la la función $f(x)$ es discontinua en algún $x = x_0$.
Una forma equivalente para presentar la definición (26) es enunciar de la siguiente manera:

Continuidad de una Función en un punto

Sea $f : A \to B$ una función real, se dice que f es ***continua*** en algún punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi cumple

$$\lim_{x\to\ x_0} f(x) = f(x_0) \tag{2.1}$$

2.2. Propiedades sobre continuidad

Consideremos a $f(x)$ y $g(x)$ como dos funciones reales continuas sobre in intervalo $I = [a, b]$ que continene a $x = x_0$, entonces:

1. $k * f(x)$ es continua en $x = x_0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}$,

2. $f(x) \pm g(x)$ es continuas en $x = x_0$,

3. $f(x) * g(x)$ es continuas en $x = x_0$,

4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua sobre I, excepto para $x_0 \in I$ tal que $g(x_0) = 0$

5. La función $f(x)$ definida por $f(x) = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio real, es continua para todo número real.

   (Recuerde que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_n \neq 0, n \in I\!N$, $a_i \in I\!R \quad \forall i \in \{0, 1, ..., n\}$)

6. Si $g(x)$ es continua en x_0 y $f(x)$ es continua en $g(x_0)$, entonces la función compuesta $\big(f \circ g\big)_{(x)}$ es continua en $x = x_0$

2.3. Teoremas sobre funciones continuas

Teorema 27.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ y si $f(x)$ es continua en L, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f(L) = f\big(\lim_{x \to x_0} g(x)\big)$$

Demostración

Por hipótesis

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon' > 0 \qquad \exists \delta > 0 / \forall x \qquad 0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |g(x) - L| < \varepsilon'$$

Ahora como f es continua en $L \Leftrightarrow \lim\limits_{y \to L} f(y) = f(L) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta' > 0 / \forall x : |y - L| < \delta' \Rightarrow |f(y) - f(L)|| < \varepsilon$$

Si hacemos $\delta' = \varepsilon'$ tenemos:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \delta' \Rightarrow |f\big(g(x)\big) - f(L)| < \varepsilon$$

es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 / \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)|| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f(L) = f\big(\lim_{x \to x_0} g(x)\big)$$

Teorema 28.

La inversa de una función continua; si existe, es continua.

Teorema 29.

Si f es continua en $[a, b]$ entonces f es acotada en $[a, b]$.

Teorema 30.

Si f es continua en $[a,b]$ entonces f toma sus valores máximo y mínimo en $[a,b]$.

Es decir, $\exists c$ y $d \in [a,b]$ tales que

$$f(c) = \sup_{x\in[a,b]}(f(x))$$

y

$$f(d) = \inf_{x\in[a,b]}(f(x))$$

Demostración

La demostración se realizará por reducción al absurdo.

Sea

$$m = \inf_{x\in[a,b]}(f(x))(***)$$

Supongamos que no existe $x \in [a,b]$ para el que $f(x) = m$.

Definamos la función $g(x)$ como $g(x) = f(x) - m \qquad \forall x \in [a,b]$

Es decir, f es una función estrictamente positiva en $[a,b]$ y en este caso $\dfrac{1}{g(x)}$ es una función continua y por lo tanto acotada en $[a,b]$. Luego:

$$0 < \frac{1}{g(x)} < H \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-m} < H \Leftrightarrow \frac{1}{H} < f(x) - m \Leftrightarrow m + \frac{1}{H} < f(x)$$

Lo cual demuestra una contradicción, pues m era el ínfimo de $f(x)$ en $[a,b]$ y este resultado nos dice que entre m y $m + \dfrac{1}{H}$ no existen elementos del conjunto $\{f(x)/x \in [a,b]\}$, lo cual no es posible.

Teorema 31.

Sea $f(x)$ continua en x_0, si $f(x_0) \neq 0$, existe un intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x_0) \qquad \forall x \in V_\delta(x_0)$

Teorema 32.

BOLZANO.- Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, existe $a < c < b$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema 33.

VALOR INTERMEDIO.- Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, si $f(a) \neq f(b)$, entonces $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $f/a)$ y $f(b)$.

2.4. Ejemplos de funciones continuas

1. La función constante $f(x) = k$ es una función continua en todo $x = x_0 \in \mathbb{R}$,

2. La función identidad $f(x) = x$ es una función continua en todo $x = x_0 \in \mathbb{R}$,

3. La función polinomial definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

   Donde $a_n \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+$,

4. La función racional $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ es continua en todos los puntos $x = x_0$ donde $h(x) \neq 0$,

5. La continuidad de la función exponencial y logarítmica

6. La continuidad de la función seno y coseno

2.5. Tipos de discontinuidad

Definición 34 (Tipos de discontinuidad).

$\boxed{1.}$ ***Discontinuidad evitable o removible***

Sea $f : A \to B$ una función real, se dice que f tiene una ***Discontinuidad evitable ó removible*** en algún $x = x_0$ si:

1. $f(x_0)$ este definido
2. Exista $\lim\limits_{x\to\ x_0} f(x)$

Pero $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to\ x_0} f(x)$

$\boxed{2.}$ ***Discontinuidad no evitable o irremovible***

1. Discontinuidad de primera especie

   Se dice que f tiene una discontinuidad de primera especie si existen los límites lateral pero estos son diferentes; i.e:

$$\lim_{x\to\ x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to\ x_0^-} f(x)$$

2. Discontinuidad de segunda especie

   Diremos que f tiene una discontinuidad de segunda especie en el punto $x = x_0$, si no existe $\lim\limits_{x\to\ x_0} f(x)$; o si uno de los límites laterales es $\pm\infty$

Ejercicios resueltos

Ejemplo 69

Determinar la continuidad de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Desarrollo

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ ya que la función no está definida en $x = 1$ pero

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 2} x + 1 = 2.$$

Ejemplo 70

Determinar la continuidad de $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

Desarrollo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$.

Por lo tanto, la función tiene una discontinuidad inevitable de primera especie.

Ejemplo 71

Determinar la continuidad de $f(x) = e^{1/x}$

Desarrollo

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}$.
Por lo tanto, la función tiene una discontinuidad inevitable de segunda especie.

Utilizando el software Geogebra realizamos en análisis de la función según su gráfica

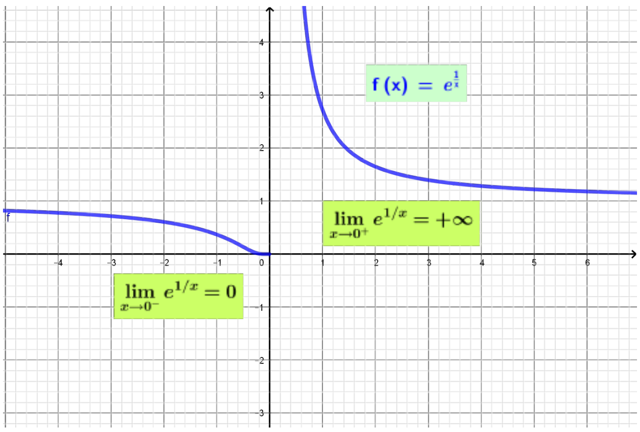


Figura 2.1: Continuidad de una función exponencial

Ejemplo 72

Determinar la continuidad de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Desarrollo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ no existe}$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Por lo tanto, la función tiene una discontinuidad inevitable de segunda especie.

Utilizando el software Geogebra realizamos en análisis de la función según su gráfica

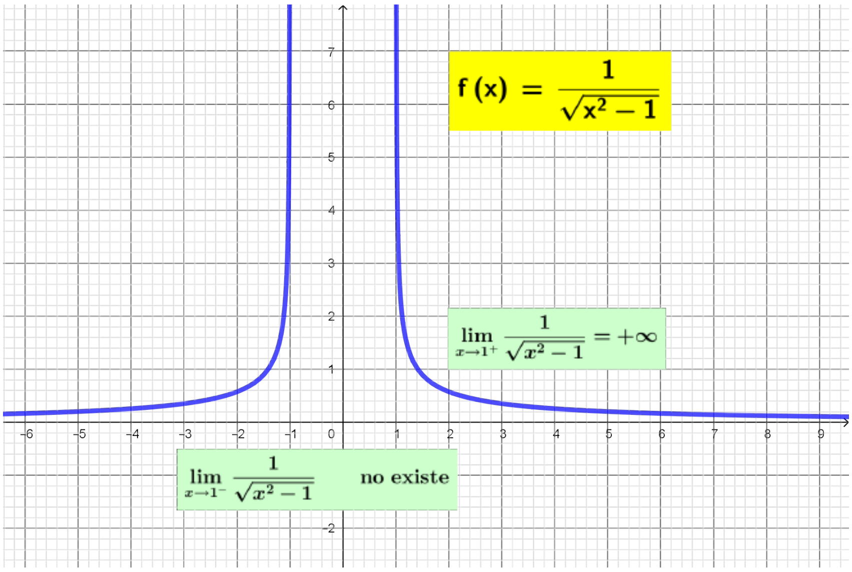


Figura 2.2: Continuidad de una función exponencial

2.6. Límites de las funciones elementales

- **Funciones polinómicas.**

  Si f es un polinomio, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- **Funciones racionales.**

  Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ que no sea una raíz de $q(x)$, y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Si a es una raíz de $q(x)$ entonces el límite puede existir o no.

- **Funciones potenciales.**

  Si $f(x) = x^r$ con $r \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de f en cualquier punto a tal que exista un intervalo $(a-\delta, a+\delta) \subset \mathrm{Dom}(f)$ para algún $\delta > 0$, y en ese caso, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- **Funciones exponenciales.**

  Si $f(x) = c^x$ con $c \in \mathbb{R}$ entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- **Funciones logarítmicas.**

  Si $f(x) = \log_c x$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}^+$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- **Funciones trigonométricas.**

  Si $f(x)$ es una función trigonométrica, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathrm{Dom}(f)$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2.6.1. Ejercicios Propuestos Continuidad.-

I.- Determinar los valores de x para los cuales la funcion es discontinua y construir la grafica:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & x \neq 1 \end{cases}$

   Rpta. Cont.en todo $x \neq 1$

2. $f(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq -2 \\ 2-x & -2 < x \leq 2 \\ 2x-1 & x > 2 \end{cases}$

   Rpta. Discont.en $x = -2, x = 2.$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   Rpta.discont.en $x = 0$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-|x|+x}{2} & x < 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

   Rpta.discont.en $x = 0$

5. $f(x) = \dfrac{3x_3 + 2x^2 - 6x + 1}{x^2 - x}$

   Rpta. Discont.en $x = 0, x = 1$

6. $f(x) = \dfrac{2x - |x|}{3x + |x|}$

   Rpta. Discont.en $x = 0$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{2} & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}$

   Rpta. Discont.en $x = 1$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq 0 \\ 2\dfrac{sen(x)}{x} & x > 0 \end{cases}$

   Rpta. Cont.en todo R

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x-2} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$

   Rpta. Discont.en $x = 0, x = 2$

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{|x^2 - 4|} & x \neq \pm 2 \\ \dfrac{3}{4} & x = \pm 2 \end{cases}$

Rpta. Discont.en ± 2

11. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x \leq 3 \\ x & x > 3 \end{cases}$

Rpta. Discont.en $x = 3$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x) - sen(a)}{x - a} & x \neq a \\ cosa & x = a \end{cases}$

Rpta. Cont.en $x = a$

13. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-|x| + x}{2} & x < 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

Rpta.discont.en $x = 0$

14. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{cos(mx) - cos(nx)}{x^2} & x \neq 0 \\ \dfrac{m^2 - n^2}{2} & x = 0 \end{cases}$

Rpta. Discont.en $x = 0$

15. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1} & x \neq 1 \\ \dfrac{\pi^2}{2} & x = 1 \end{cases}$

Rpta. Cont.en $\forall x$

Bibliografía

[1] Thomas, G. (2006). Cálculo - una variable. Editorial Pearson.

[2] Stewart, J. (2002). Cálculo - trascendentes tempranas. Editorial Thomson.

[3] Roland E. Larson, Robert P. Hostetler and Bruce H. Cálculo y geometría analítica Volumen 2 - 6a. Edicion. Mc Graw Hill.

[4] Leithold L. (1998). El cálculo. 7ma. Edición. Oxford University Press.Thomas/ Finney (1998)

[5] Stewart J. (2008). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas. 6ª. Edición CENGAGE Learning.

[6] Edwin J. Purcelll (2000) Cálculo diferencial e integral. Serie AWLL Pearson Educación

[7] Zill, D. G. (1996). Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.

[8] García A., López A. y otros. Çálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático de una variable". 2ª edición. Ed. CLAGSA, Madrid. 1994. 630 páginas.

[9] Espinoza R., Eduardo. (2012) Análisis Matemático 1". 5ª edición. Ed. Impreso en el Perú.

[10] LAZARO, P. M. (1997). Números Reales 2da. Edic. Edit. Moshera SRL Lima-Perú.

NORMA DEL PILAR BARRENO LAYEDRA
TERCER NIVEL:
INGENIERA EN SISTEMAS (UTI),
CUARTO NIVEL:
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA BÁSICA (ESPOCH)
DIPLOMA SUPERIOR EN DOCENCIA EN MATEMÁTICAS (USFQ)

JORGE CACHUPUT GUSÑAY
TERCER NIVEL:
DOCTOR EN FÍSICA (ESPOCH),
CUARTO NIVEL:
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA BÁSICA (ESPOCH). DIPLOMADO EN PROYECTOS Y TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍAS (ESPOCH)

JUAN MANUEL MARTINEZ NOGALES
TERCER NIVEL:
INGENIERO MECANICO (ESPOCH).
CUARTO NIVEL:
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN APRENDIZAJE DE LA FÍSICA (UNACH)

WILSON MARCELO ROMÁN VARGAS
TERCER NIVEL:
DOCTOR EN MATEMÁTICA (ESPOCH).
CUARTO NIVEL:
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA Y SIMULACIÓN NUMÉRICA (ESPOCH) MAESTRÍA EN INFORMÁTICA APLICADA (ESPOCH).
DIPLOMADO EN ESTADÍSTICA INFORMÁTICA (ESPOCH)
DIPLOMADO EN GESTIÓN DEL APRENDIZAJE UNIVERSITARIO (ESPE)

ISBN: 978-9942-33-037-6
9 789942 330376

compÁs