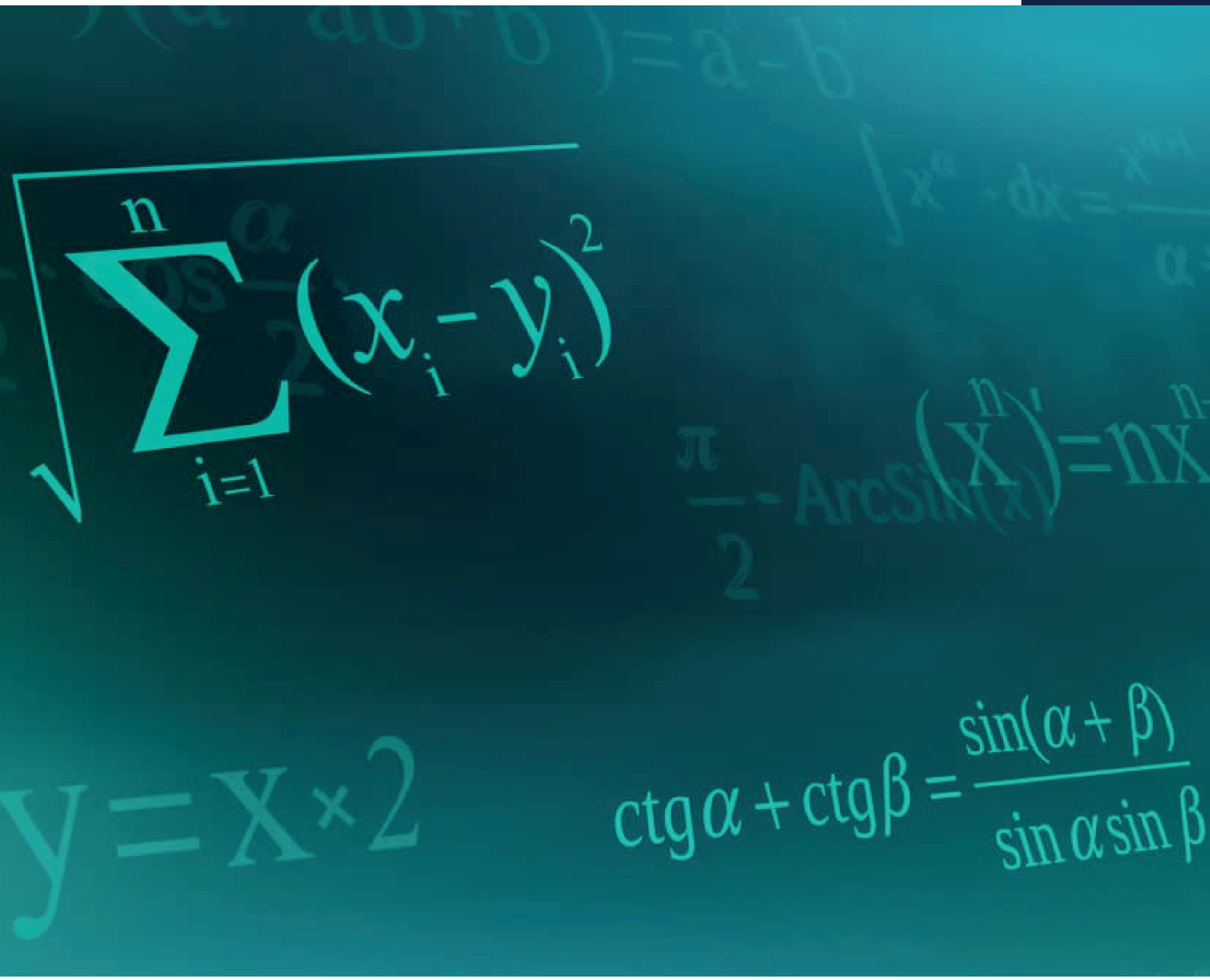
BUENAÑO BARRIONUEVO MANUEL DEL CARMEN
RUIZ AZUAJE MICHAEL ABRAHAM
MANOBANDA CUITO WILLIAM GERMAN
LADERA GARCÍA ARON ELEAZAR

# MATEMÁTICA I




INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO CORPORATIVO
EDWARDS DEMING®
saber qué hacer y cómo hacerlo

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Primera edición: abril 2018


ISBN: 978-9942-33-252-3
Diseño de portada y diagramación: Grupo Compás

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos con base en la normativa de la editorial.



Guayaquil-Ecuador 2018

# MATEMÁTICA I

*Autores*

BUENAÑO BARRIONUEVO MANUEL DEL CARMEN
RUIZ AZUAJE MICHAEL ABRAHAM
MANOBANDA CUITO WILLIAM GERMAN
LADERA GARCÍA ARON ELEAZAR

MATEMÁTICA I
Autor.

BUENAÑO BARRIONUEVO MANUEL DEL CARMEN
RUIZ AZUAJE MICHAEL ABRAHAM
MANOBANDA CUITO WILLIAM GERMAN
LADERA GARCÍA ARON ELEAZAR

**Experiencia académica:**
Docentes del Instituto Superior Tecnológico
Corporativo Edwards Deming.

Este libro fue elaborado en el contexto de desarrollo de la educación por el Instituto Superior Tecnológico Corporativo Edwards Deming, sus contenidos son una estructura básica para lograr un proceso de aprendizaje ideal.

El documento mantien una revisión de doble par ciego  lo que permite considerarse como una obra que contribuye con la formación profesional, consiguiendo el aval de universidades en América como la Universidad de Oriente y UO University.

**CONTENIDO**

## INTRODUCCIÓN

El concepto de conjunto es intuitivo y se podría definir como una "colección de objetos"; así, se puede hablar de un conjunto de personas, ciudades, gafas, lapiceros o del conjunto de objetos que hay en un momento dado encima de una mesa.

Un conjunto está bien definido si se sabe si un determinado elemento pertenece o no al conjunto. El conjunto de los bolígrafos azules está bien definido, porque a la vista de un bolígrafo se puede saber si es azul o no. El conjunto de las personas altas no está bien definido, porque a la vista de una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber distintas personas, que opinen si esa persona es alta o no lo es.

# CAPÍTULO I
# NOCIÓN DE CONJUNTO

**Definición**. Conjunto es una colección, reunión o una agrupación de objetos que poseen una característica o propiedad común bien definida.

Para establecer si un objeto pertenece o no a un conjunto, debe verificarse que posea la característica o propiedad declarada por el conjunto. De ahí que es importante que esta característica no sea ambigua.

Los conjuntos usualmente se denotan con letras mayúsculas del alfabeto español.

Algunas agrupaciones que representan conjuntos son:

- Los números enteros.
- Los animales en extinción.
- Los números primos.
- Los operadores de telefonía celular.

Todas estas agrupaciones poseen una característica que puede ser verificada con precisión. Para decir que $\boldsymbol{x}$ es un elemento del conjunto $\boldsymbol{A}$, escribiremos $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}.$ Para decir que $\boldsymbol{x}$ no está en $\boldsymbol{A}$, escribiremos $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$.

**Representaciones de un conjunto**

La descripción de un conjunto se puede realizar de las siguientes maneras:

- Por COMPRENSIÓN, para referirnos a alguna característica de los elementos.
- Por EXTENSION o TABULACIÓN, cuando se listan todos los elementos.

Ejemplo:

| **Por comprensión** | **lectura** | **Por extensión** |
|---|---|---|
| B = {x / x ϵ N, x \| 6} | "B es el conjunto de todos los números naturales que sean divisores de 6" | B = {1,2,3,6} |
| C = {x / x ϵ N, 6 \| x, x ≤ 12} | "C es el conjunto de los números naturales divisibles por 6 que sean menores o iguales que 12", o bien, "C es el conjunto de los múltiplos de 6 que sean menores o iguales que 12" | C = {6, 12} |

| | | |
|---|---|---|
| D = {x ϵ R / $x^2 - 3x = 0$} | "D es el conjunto de los números reales que sean raíces de la ecuación $x^2 - 3x = 0$ | D = {0,3} |
| E = {x ϵ N / x = 2n, nϵ Z} | "E es el conjunto de los números naturales que se obtengan de multiplicar 2 por un número entero", o bien, "E es el conjunto de los números naturales que sean múltiplos de 2" | E = {2,4, 6...} |
| F = {x ϵ R / $x^2 = x$} | "F es el conjunto de todos los números reales que coincidan con su cuadrado" | F = {0,1} |

**Representación Gráfica a través de Diagramas de Venn**

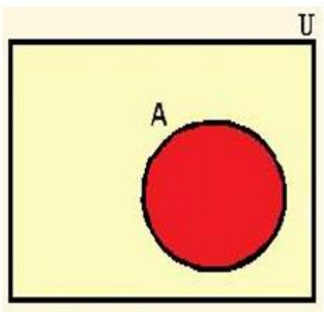
A veces es conveniente representar los conjuntos gráficamente, mediante un diagrama, para no perdernos entre símbolos.

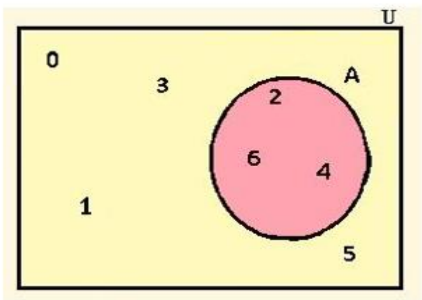
La representación más usada es la conocida con el nombre de Diagrama de Venn: el conjunto universal se representa mediante una superficie rectangular y los conjuntos con los que estamos trabajando, mediante círculos o superficies cerradas.

Los elementos correspondientes al conjunto se colocan en la superficie que representa al conjunto y el resto se colocan fuera de ella.

Así, si $U = \{0,1,2,3,4,5,6\}\, y\, A = \{2,4,6\}$, entonces el diagrama correspondiente sería:

Gráfico n1: Representación de conjuntos




**CONJUNTOS ESPECIALES**

**Conjunto Vacío**

Un conjunto que no tenga elementos se llama conjunto vacío y se representa por el símbolo Ø.

Muchas veces, en matemáticas, para indicar que un objeto no existe se representa simbólicamente por $x \epsilon \emptyset$.

**Igualdad entre conjuntos**
Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, decimos que dichos conjuntos son iguales.

Si dos conjuntos A y B son iguales, se indica con la siguiente notación A = B.

Si dos conjuntos $A$ y $B$ no son iguales, se indica con la siguiente notación $A \neq B$ ($A$ es distinto de $B$).

**Inclusión entre conjuntos.**
A veces, unos conjuntos tienen unos pocos elementos más que otro, es decir, todos los elementos de uno de ellos están en el otro, en ese caso diremos que uno de ellos está contenido en el otro.

Que un conjunto A esté contenido en un conjunto B se representa simbólicamente por:

$$A \subseteq B$$

Sinónimos de la frase "estar contenido en" son: "estar incluido en", "ser subconjunto de"

Evidentemente, si los dos conjuntos $A$ y $B$ son iguales, entonces se cumple simultáneamente $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Para cada conjunto A, se cumple $A \subseteq A$ y $\emptyset \subseteq A$. Los conjuntos $A$ y $\emptyset$ son subconjuntos impropios de $A$. Cualquier otro subconjunto de A que no sea vacío ni $A$ recibe el nombre de subconjunto propio de $A$.

**Subconjunto propio.**
Un conjunto A es subconjunto propio o estricto de un conjunto B si:

- $A \subseteq B$; es decir, si todo elemento de $A$ es un elemento de $B$; y,
- hay al menos un elemento de $B$ que no está en $A$.

## OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

En aritmética se estudian operaciones entre números, (Adición, Sustracción, etc.). La operación numérica de sumar hace corresponder a cada par de números, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ un nuevo número $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ que es su suma (resultado de la operación de sumar).

También es posible operar con conjuntos. En este caso, el resultado de operar dos conjuntos será un nuevo conjunto. Definiremos algunas de las operaciones posibles: Unión, Intersección, Diferencia, Complemento.

**Unión entre Conjuntos.**

La unión entre los conjuntos $A$ y $B$ es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto $A$ o al conjunto $B$. Se denota por $A \cup B$ y se define como:

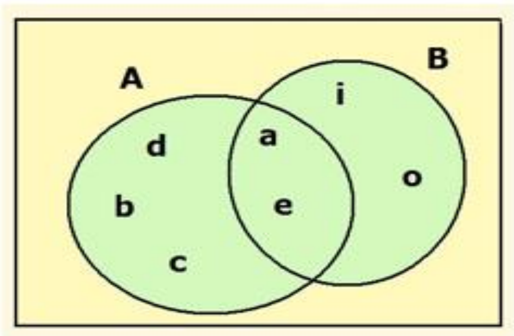
$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x}/(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}) \vee (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B})\}$$

Ejemplo:

Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e, i, o\}$, entonces la unión de dichos conjuntos estará formada por todos los elementos que estén en alguno de los dos conjuntos, esto es:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o\}$$

*GRÁFICO N.: 1 Diagrama de Venn Unión de conjuntos*




**Intersección entre conjuntos.**

La intersección de conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto $\boldsymbol{A}$ y al conjunto $\boldsymbol{B}$. Se denota por $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ y se define como:

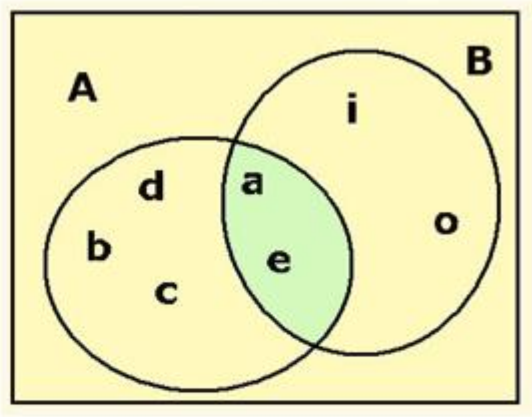
$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x}/(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}) \wedge (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B})\}$$

Ejemplo:

Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e, i, o\}$, entonces la intersección de dichos conjuntos estará formada por todos los elementos que estén a la vez en los dos conjuntos, esto es:

$$A \cap B = \{a, e\}$$

*Gráfico n.: 2 Diagrama de Venn Intersección de conjuntos*




**Diferencia entre conjuntos.**

La diferencia entre los conjuntos $A$ y $B$ es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto $A$, pero no pertenecen al conjunto $B$. Se denota por $A - B$ y se define como:

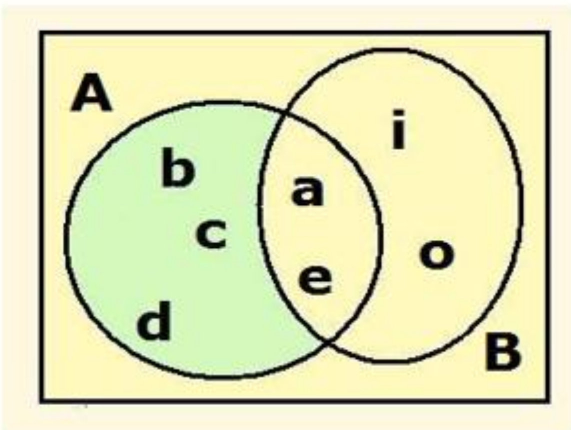
$$\boldsymbol{A - B} = \{\boldsymbol{x}/(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}) \wedge \neg(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B})\}$$

Ejemplo:

Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ $y$ $B = \{a, e, i, o\}$, entonces la diferencia de dichos conjuntos estará formada por todos los elementos que estén solamente en $A$, esto es:

$$A - B = \{b, c, d\}$$

*GRÁFICO N.: 3 Diagrama de Venn Diferencia de conjuntos*




**Complementación de conjuntos**

La complementación de un conjunto A es un nuevo conjunto formado por los elementos del referencial que no pertenecen al conjunto A. Se denota por $A'$ y se define por:

$$\boldsymbol{A'} = \{\boldsymbol{x}/(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}) \wedge \neg(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A})\}$$

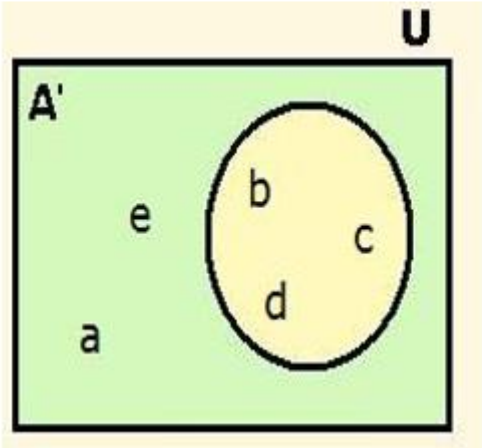
Ejemplo:

Si el conjunto universal es $U = \{ a, b, c, d, e \}$ $y$ $A = \{ b, c, d \}$, entonces el complementario de $A$ respecto de $U$ está formado por los elementos del universal que no estén en A, esto es:

$$A' = \{ a, e \}$$

Los conjuntos $\{ a, e \}$ $y$ $\{ b, c, d \}$ son complementarios.

*GRÁFICO N.: 4 Diagrama de Venn Complementación de Conjuntos*



## CAPÍTULO II

## NÚMEROS NATURALES

Los números naturales surgen de la necesidad de contar, de enumerar: N= {1, 2, 3,4...}

Con los números naturales N se puede sumar. De hecho, con la operación suma, los naturales forman un semi grupo conmutativo.

Con la operación producto los naturales también tienen estructura de semi grupo conmutativo.

El infinito de los números naturales se denomina infinito numerable. Cualquier conjunto que pueda ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto de los números naturales se dice que es infinito numerable. Por ejemplo, el conjunto de las potencias sucesivas de un número, es decir el conjunto $\{x, x^2, x^3, \ldots\}$ cuando x es distinto de 0, 1 y -1, es un conjunto infinito numerable. El conjunto de los números enteros y el de los racionales también son infinitos numerables como se verá más adelante.

El conjunto de los naturales es un conjunto totalmente ordenado, es decir, existe una relación de orden total, lo que significa que existe una relación de orden y que dos elementos cualesquiera pueden ser siempre comparados entre sí usando dicha relación. Dicho de otra forma, dados dos naturales x e y, o bien x ≤ y, o bien y ≤ x

Todo subconjunto A no vacío del conjunto de los naturales tiene un elemento mínimo, esto es existe un elemento x ε A tal que para todo y de A se tiene x ≤ y.

Por ejemplo, el subconjunto formado por los números pares tiene como elemento mínimo a 2.

## DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Un número primo es aquel número natural que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad, por ejemplo 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., son números primos.

Hay infinitos números primos. Un famoso procedimiento para encontrar números primos es la denominada criba de

Eratóstenes, que consiste en tomar una lista de los números naturales e ir tachando sucesivamente los múltiplos de cada natural que aún no hubiera sido tachado previamente.

Ej: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,…………

Los números primos son aquellos números en rojo.

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,…………

Todo número natural admite una descomposición en producto de números primos. Esta descomposición es única salvo el orden de los primos considerados. En el siguiente recuadro tienes algunos ejemplos.

25 = 5^2 180 = 2^2*3^2*5 81 = 3^4 78439 = 78439

Encontrar la factorización de números grandes es un problema con elevada complejidad computacional, de hecho, no hay ningún algoritmo eficiente para ello. Por eso varios sistemas criptográficos se basan en este problema.

**MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.**

El máximo común divisor de dos números se define, como su propio nombre indica, como el divisor más grande que ambos números tienen en común. Si disponemos de la factorización de ambos números, entonces el máximo común divisor se obtiene con aquellos factores comunes a ambas descomposiciones y elevados al menor de los exponentes con los que aparezcan.

El mínimo común múltiplo, nuevamente como indica su nombre, es el múltiplo más pequeño que ambos números tienen en común. Atendiendo a las descomposiciones de ambos números, el mínimo común múltiplo se obtiene considerando todos los factores comunes y no comunes, cada uno de ellos elevado al mayor exponente con el que aparezca.

Ej. Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 180 y 250

Descomponemos los números en factores primos

180 = 2^2 * 3^2 * 5

225 = 3^2 * 5^2

Mínimo común divisor: es el valor de factores comunes con su menor exponente

mcd = 3^2 * 5 = 45

Máximo común múltiplo: es el valor de factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

mcm = 2^2 * 3^2 * 5^2 = 900

## LOS NÚMEROS RACIONALES

Si se necesita además dividir, surgen los números racionales (o fraccionarios, o quebrados),

Q = {... 1/2, 5/3, 8/10, 238476/98745, …}

Los racionales se obtienen a partir de los enteros añadiendo los inversos para la multiplicación.

La suma de dos racionales a/b y c/d se define como a/b+c/d=(ad+cb) /bd.

El producto de dos racionales a/b y c/d se define como ac/bd.

Dos números racionales a/b y c/d son iguales si y sólo si ad=bc.

(En todo lo anterior, a, b, c y d denotan números enteros)

Un número racional se dice que está expresado mediante una fracción irreducible si el numerador y el denominador no tienen factores comunes.

De este modo, el conjunto de los racionales, con las operaciones de suma y producto tiene estructura de cuerpo conmutativo.

En Q se pueden resolver todas las ecuaciones lineales, es decir, aquéllas de la forma ax+b=0, con a y b racionales.

En Q se puede definir un orden total compatible con las operaciones suma y producto definidas anteriormente y que extienda el orden existente en Z y en N. Para ello basta con definirlo como sigue:

Dados dos números racionales a/b y c/d, donde b y c son enteros positivos (esto siempre puede conseguirse, por ejemplo, si b es negativo basta con multiplicar a y b por -1 para obtener un número racional igual que el dado, pero con denominador positivo), se dice que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ sí y sólo si $ad \leq bc$ respecto del orden existente en el conjunto de los enteros.

Por tanto, Q con dicho orden es un conjunto totalmente ordenado.

**Representación decimal de números racionales:**
Todo número racional admite una representación decimal, que es la que se obtiene al dividir el numerador entre el denominador, por ejemplo 1/2 tiene como expresión decimal 0.5, 3405/25=136.2 y 1/3= 0.33333.......

Esto puede dar lugar a dos tipos de expresiones decimales, las exactas y las periódicas. Éstas últimas pueden a su vez dividirse en periódicas puras o periódicas mixtas.

Expresión decimal exacta, es aquélla que tiene un número finito de términos. Por ejemplo: 0.5, 1.348 ó 367.2982345

Estas expresiones surgen de números racionales cuyo denominador (en la expresión irreducible) sólo contiene los factores 2 y 5. Por ejemplo 1349/1000, 40/25, ...

Expresión decimal periódica es aquélla que tiene un número infinito de cifra decimales, pero de modo que un grupo finito de ellas se repite infinitamente, de forma periódica, por ejemplo 0. 333333…, 125.67777777… o 3.2567256725672567…

Surgen de fracciones cuyo denominador contiene factores distintos de 2 y 5, por ejemplo, 1/3=0. 33333….

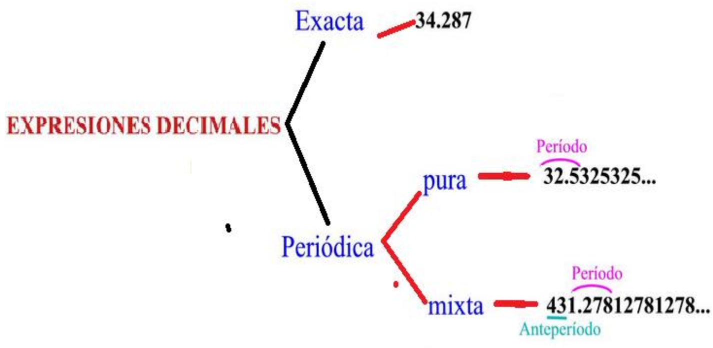
La parte que no se repite se denomina ante período y la que se repite, período.

Periódica pura es aquélla que no tiene ante período.

Periódica mixta es aquélla que sí tiene ante período.

Podría considerarse que las expresiones decimales exactas son periódicas mixtas, pero con período 0.

*Gráfico n.: 5: Expresiones decimales*




Recíprocamente, dada una expresión decimal exacta o periódica, puede encontrarse una expresión racional para la misma siguiendo la siguiente norma:

Si la expresión es exacta se coloca como numerador el número entero que resulta de suprimir el punto decimal y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras se encontraran a la derecha del punto decimal en la expresión decimal original.

Si la expresión es periódica, se coloca como numerador el resultado de restar al número entero formado por el ante período seguido de la primera repetición del período, el entero formado por el ante período, todo ello multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras significativas se encuentren a la izquierda del punto decimal. Como denominador tantos nueves como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga el ante período.

**Ejemplos:** Posteriormente se pueden simplificar las fracciones obtenidas para conseguir la expresión irreducible.

Exacta $34.287=\frac{34287}{1000}$

Periódica pura $\overbrace{32.5325325...}^{\text{Período}}=\frac{32500}{999}$

Periódica mixta $\underbrace{431}_{\text{Anteperíodo}}.\overbrace{2781278..}^{\text{Periodo}}=\frac{(431278-43)1000}{999900}=\frac{431235000}{999900}$

## LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Hay números que no son racionales, es decir que no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros. Por ejemplo, piensa en el número cuya representación decimal es

0.1234567891011121314151617181920…

Claramente, esta representación decimal no es exacta ni periódica, por tanto, no puede corresponderse con ningún número racional.

Veamos otros ejemplos.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730$$

Se trata de un ejemplo típico de número no racional con una demostración muy sencilla de que, en efecto, no puede ser racional

Igual que pasaba con $\pi$ , no es posible dibujar con regla y compás un punto en la recta real a distancia ε del origen.

Si consideramos el conjunto de todas las expresiones decimales, solamente aquéllas finitas o periódicas se corresponderán, como ya se vio, con números racionales; el resto forman el conjunto de los números irracionales. (SMITH, 2016)

## CAPITULO III

## LOS NÚMEROS REALES

La unión de los racionales y los irracionales forma el conjunto de los números reales. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ .

El conjunto de los reales, con el orden inducido por el orden ya visto en, N, Z y, Q es un conjunto totalmente ordenado.

Teniendo eso en cuenta, se puede representar gráficamente el conjunto de los reales con una recta, en la que cada punto representa un número.

Muchas de las propiedades que hemos visto para los conjuntos Q e $\mathbb{I}$ son heredadas por. $\mathbb{R}$ .

Como ya se ha visto, Q es denso en $\mathbb{R}$ . También es $\mathbb{I}$ denso en $\mathbb{R}$ .

Podemos considerar $\mathbb{R}$ como el conjunto de todos los límites de sucesiones cuyos términos son números racionales.

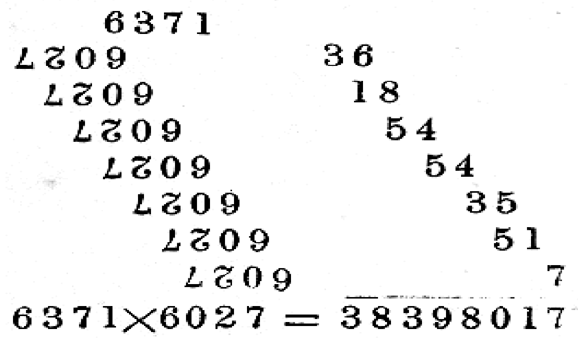
A diferencia de lo visto para N, Z y Q, el conjunto de los reales no es numerable

Veamos por último un cuadro resumen de las propiedades que hemos analizado en los distintos conjuntos de números.

GRÁFICO N.: 6 Resumen de propiedades

| | Ordenado | Denso | Numerable | Estructura algebraica |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | • | | • | + Semigrupo<br>* Semigrupo |
| $\mathbb{Z}$ | • | | • | + Grupo<br>* Semigrupo<br>+,* Anillo conmut. con1 |
| $\mathbb{Q}$ | • | • | • | + Grupo<br>* Grupo<br>+,* Cuerpo conmut. |
| $\mathbb{I}$ | • | • | | No tiene estructura algebraica al no ser cerrado para + y * |
| $\mathbb{R}$ | • | • | | + Grupo<br>* Grupo<br>+,* Cuerpo conmut. |

**NÚMEROS ENTEROS**



Cuando se necesita además restar surgen los números enteros Z = {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...}

Los enteros se obtienen a partir de los naturales añadiendo los opuestos para la operación suma.

Si a y b denotan números naturales, la suma de dos números enteros a+(-b), se define como:

el entero positivo a-b, si a > b,

0, si a=b

el entero negativo -(b-a) si a < b

La suma de dos enteros negativos se define como (-a) +(-b) =-(a+b)

De hecho, los enteros, con la operación suma tienen estructura de grupo conmutativo.

Si además de la suma, consideramos la operación de multiplicación definida como

(-a) (-b) = ab

(-a) b=a(-b) =-(ab),

El conjunto de los enteros, con ambas operaciones tiene estructura de anillo conmutativo y con unidad.

Por cierto, ¿qué hay más?, ¿números enteros o números naturales? Nótese que se puede establecer una correspondencia biyectiva entre ambos conjuntos, por ejemplo, como ésta:

Sí n es un entero positivo

Por tanto, el conjunto de los enteros es también infinito numerable. También es un conjunto totalmente ordenado, cuando se considera la relación de orden definida en la forma obvia y que extiende la relación de orden que se tiene en N. También es cierto que en los enteros todo subconjunto acotado inferiormente tiene elemento mínimo, y recíprocamente, todo subconjunto acotado superiormente tiene elemento máximo.

**¿Que son los Números Enteros?**
Número entero, cualquier elemento del conjunto formado por los números naturales y sus opuestos. El conjunto de los números enteros se designa por Z:

Z = {…, -11, -10…, -2, -1, -0, 1, 2…, 10, 11…}

Los números negativos permiten contar nuevos tipos de cantidades (como los saldos deudores) y ordenar por encima o por debajo de un cierto elemento de referencia (las temperaturas superiores o inferiores a 0 grados, los pisos de un edificio por encima o por debajo de la entrada al mismo…).

Se llama valor absoluto de un número entero a, a un número natural que se designa |a| y que es igual al propio a si es positivo o cero, y a -a si es negativo. Es decir:

• Si a > 0, |a| = a; por ejemplo, |5| = 5;
• si a < 0, |a| = -a; por ejemplo, |-5| = -(-5) = 5.

El valor absoluto de un número es, pues, siempre positivo.

Las operaciones sumas, resta y multiplicación de números enteros son operaciones internas porque su resultado es también un número entero. Sin embargo, dos números enteros sólo se pueden dividir si el dividendo es múltiplo del divisor.

**Suma de números enteros**
- Para sumar dos números enteros se procede del siguiente modo:

• Si tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos, y al resultado se le pone el signo que tenían los sumandos:

7 + 11 = 18

-7 - 11 = -18

- Si tienen distintos signos, es decir, si un sumando es positivo y el otro negativo, se restan sus valores absolutos y se le pone el signo del mayor:

  7 + (-5) = 7 - 5 = 2
  -7 + 5 = - (7 - 5) = -2
  14 + (-14) = 0

  La suma de números enteros tiene las propiedades siguientes:

  Asociativa:
  (a + b) + c = a + (b + c)

  Conmutativa:
  a + b = b + a

  Elemento neutro: el cero es el elemento neutro de la suma, a + 0 = a

  Elemento opuesto: todo número entero a, tiene un opuesto –a, a + (-a) = 0

**Multiplicación de números enteros**
Para multiplicar dos números enteros se multiplican sus valores absolutos y el resultado se deja con signo positivo si ambos factores son del mismo signo o se le pone el signo menos si los factores son de signos distintos. Este procedimiento para obtener el signo de un producto a partir del signo de los factores se denomina regla de los signos y se sintetiza del siguiente modo:

+ · + = +
+ · - = -
- · + = -
- · - = +

La multiplicación de números enteros tiene las propiedades siguientes:

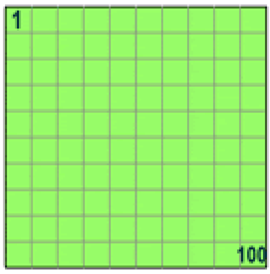
Asociativa: (a · b) · c = a · (b · c)
Conmutativa: a · b = b · a

Elemento neutro: el 1 es el elemento neutro de la multiplicación, $a \cdot 1 = a$

Distributiva de la multiplicación respecto de la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

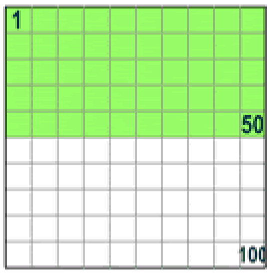
**Resta de números enteros**

Para restar dos números enteros se le suma al minuendo el opuesto del sustraendo: a- B = a + (-b)



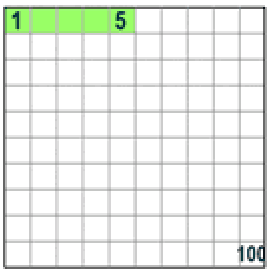

100% de 80 es $^{100}/_{100} \times 80 = 80$

Entonces 100% significa todo.



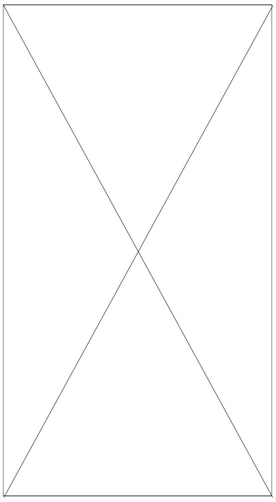

50% de 80 es $^{50}/_{100} \times 80 = 40$

Entonces 50% significa la mitad.




5% de 80 es $^{5}/_{100} \times 80 = 4$

Entonces 5% significa 5/100ths.



**Usando porcentajes**

Como "por ciento" quiere decir "por cada 100" deberías pensar siempre que "hay que dividir por 100" Así que **75%** quiere decir $^{75}/_{100}$

Y **100%** es $^{100}/_{100}$, o exactamente **1** (100% de cualquier número es el mismo número)

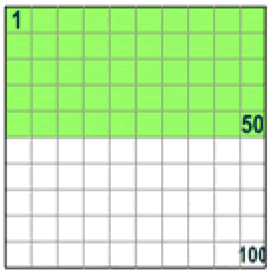
Y **200%** es $^{200}/_{100}$, o exactamente **2** (200% de cualquier número es el doble del número)

**Por ejemplo:**

$$5 - (-3) = 5 + 3 = 8$$
$$-2 - 5 = (-2) + (-5) = -7$$

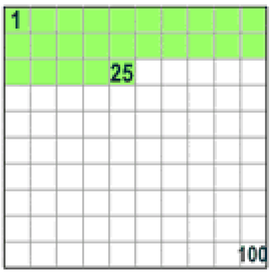
**PORCENTAJES**

Porcentajes (%) *quiere decir* ***partes por 100***, Cuando dices "por ciento" en realidad dices "por cada 100"




Así que **50%** quiere decir 50 por 100
(50% de la caja es verde)

Y **25%** quiere decir 25 por 100
(25% de la caja es verde)




Ejemplos: Porcentajes de 80

Un porcentaje también se puede escribir como un *decimal* o una *fracción*

**La mitad** se puede escribir...

| | |
|---|---|
| Como porcentaje: | 50% |
| Como decimal: | 0,5 |
| Como fracción: | $^{1}/_{2}$ |

Algunos ejemplos detallados

**Calcula 25% de 80**

25% = $^{25}/_{100}$ ➡ $(^{25}/_{100}) \times 80 = 20$

Así que 25% de 80 es 20

Un Skateboard tiene una rebaja de 25%. El precio normal es $120. Calcula el nuevo precio

Calcula 25% de $120

25% = $^{25}/_{100}$ ➡ $(^{25}/_{100}) \times \$120 = \$30$

25% de $120 es $30

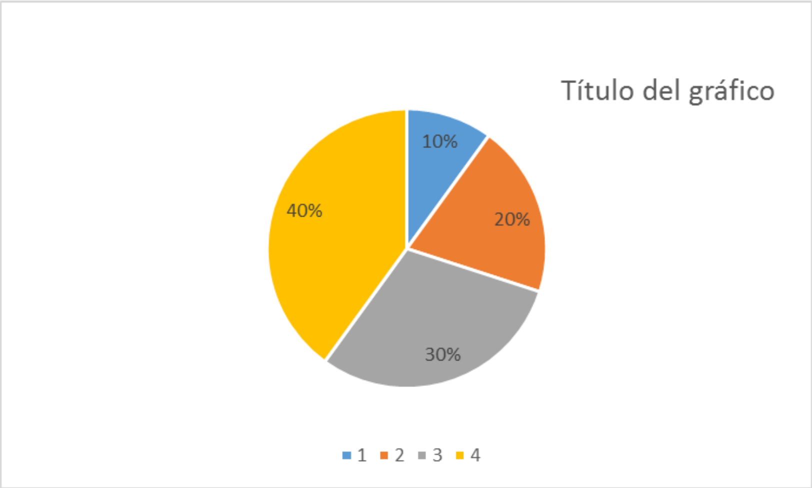
Así que la reducción es $30

Quita la reducción del precio original ➡ $120 - $30 = $90

El precio del Skateboard en rebajas es $90

**Usando regla de tres**

*Gráfico n.: 7 división porcentual*



Como se puede apreciar en este grafico el círculo representa el 100% de un pastel y cada una de sus partes de diferentes colores es el porcentaje que corresponde a la siguiente tabla

| Columna1 | Columna2 |
|---|---|
| 1 | 10% |
| 2 | 20% |
| 3 | 30% |
| 4 | 40% |

**¿Cómo se saca dichos porcentajes?**

Es simple con una regla de tres, el total de los datos suma 10 ese total me representa el 100% y cada valor es lo que deseo conocer qué porcentaje corresponde así:

10 100%

X

Como es una regla de tres directa se tiene que:

$$X = \frac{1 * 100\%}{10} = 10\%$$

Para los otros valores es igual

$$X = \frac{2 * 100\%}{10} = 20\%$$

$$X = \frac{3 * 100\%}{10} = 30\%$$

$$X = \frac{4 * 100\%}{10} = 40\%$$

**Convertir en fracciones, por simple inspección:**

1. $2\frac{15}{16}$
2. $5\frac{3}{8}$
3. $4\frac{7}{12}$
4. $4\frac{8}{9}$
5. $7\frac{7}{10}$
6. $9\frac{8}{15}$

**Convertir en número mixto:**

1. $\frac{115}{35}$
2. $\frac{174}{53}$
3. $\frac{215}{72}$
4. $\frac{354}{61}$
5. $\frac{815}{237}$
6. $\frac{1563}{315}$

**Sumar las siguientes fracciones:**

1. $\frac{1}{6}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}+\frac{13}{6}$
2. $\frac{3}{5}+\frac{7}{4}+\frac{11}{6}$
3. $\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}$
4. $\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{2}{21}+\frac{4}{63}$
5. $12\frac{5}{6}+13\frac{7}{9}$
6. $1\frac{1}{42}+3\frac{1}{14}+10\frac{11}{84}$

## CAPÍTULO IV

## EXPONENTES

### QUÉ ES UN EXPONENTE

Un exponente dice cuántas veces se utiliza la base como factor. Por ejemplo, $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Una expresión que tiene exponentes está escrita en notación exponencial.

### Multiplicación con exponentes

*Objetivo: Multiplicar números en forma exponencial.*

Con el significado de un exponente podemos desarrollar una regla para multiplicar potencias con bases iguales.

- $8^3 \cdot 8^2$ significa $(8 \cdot 8 \cdot 8)(8 \cdot 8) = 8^5$
- $5^2 \cdot 5^4$ significa $(5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^6$
- $a^5 \cdot a$ significa $(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)(a) = a^6$
  Nótese que se pudo haber sumado los exponentes para encontrar el exponente del producto.

- $8^3 \cdot 8^2 = 8^{3+2} = 8^5$
- $5^2 + 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$
- $a^5 \cdot a = a^{5+1} = a^6 \qquad a = a^1$

### Multiplicación de potencias con bases iguales

Para cualquier número real $a \neq 0$ y para cualquier par de números completos $m$ y $n$,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

**Ejemplos.** Simplificar. Expresar utilizando exponentes.

1. $8^4 \cdot 8^3 = 8^{4+3} = 8^7$
2. $y \cdot y^2 \cdot y^5 = y^{1+2+5} = y^8$
3. $(a^3b^2)(a^3b^5) = (a^3a^3)(b^2b^5)$
   $= \boldsymbol{a^{3+3}b^{2+5}}$
   $= a^6b^7$

**Practica.** Simplificar. Expresar utilizando exponentes

a. $5^2 \cdot 5^4$
b. $a^5 \cdot a^2$
c. $y^3 \cdot y^2 \cdot y^5$
d. $(mn^2)(m^4n^6)$

### División con exponentes

Objetivo: Dividir números en forma exponencial

La siguiente indica una regla para simplificar expresiones de la forma $\frac{a^m}{a^n}$

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$$

Nótese que podemos restar los exponentes para encontrar el exponente del cociente.

**División de potencias con bases iguales**
Para cualquier número real $a$ excepto $0$, y para cualquier par de números completos $m$ y $n$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ con $m > n$

**Ejemplos.** Simplificar. Expresar utilizando exponentes

1. $\frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3$
2. $\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4$
3. $\frac{p^5 \cdot q^7}{p^2 \cdot q^5} = p^{5-2} q^{7-5} = p^3 q^2$

**Practica.** Simplificar. Expresar utilizando exponentes.

a. $\frac{7^6}{7^2}$
b. $\frac{b^8}{b^4}$
c. $\frac{m^4}{m^2}$
d. $\frac{x^4 y^3}{x^2 y^2}$

Podemos utilizar el significado de los exponentes para simplificar $\frac{5^2}{5^5}$

$$\frac{5^2}{5^5} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^3}$$

También podemos utilizar la regla anterior para simplificar la expresión $\frac{5^2}{5^5}$

$$\frac{5^2}{5^3} = 5^{2-5} = 5^{-3}$$

Esto sugiere que $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

**Definición.** Para todo número real $\boldsymbol{a}$ excepto 0, y para todo número completo $\boldsymbol{m}$,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

**Ejemplos.** Expresar utilizando exponentes positivos

1. $4^{-2} = \frac{1}{4^2}$
2. $m^{-3} = \frac{1}{m^3}$
3. $ab^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

**Práctica.** Expresar utilizando sólo exponentes positivos

a) $2^{-2}$
b) $y^{-4}$
c) $3c^{-2}$

Sabemos que cualquier número diferente de cero dividido entre sí mismo es igual a 1. Por ejemplo, $\frac{a^2}{a^2} = 1$. Si utilizamos la regla anterior, encontramos que $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$. Podemos establecer la siguiente definición sobre 0 y exponentes.

**Definición** $a^0 = 1$ Para cualquier número real excepto 0

**Ejemplos**. Simplificar

1. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
2. $1^{-4} = \frac{1}{1^4} = 1$
3. $p^0 = 1$

**Práctica.** Simplificar

a) $4^{-2}$
b) $1^{-10}$
c) $3^0$

**Elevar una potencia a una potencia**

**Objetivo.** Encontrar la potencia de una potencia.

Podemos utilizar el significado de un exponente para simplifica expresiones como $(3^2)^4$.

$$(3^2)^4 = (3^2)(3^2)(3^2)(3^2)$$

$$= 3^{2+2+2+2}$$

$$= 3^8$$

Nótese que obtenemos el mismo resultado si multiplicamos los exponentes.

$(3^2)^4 = 3^{2\cdot 4} = 3^8$

En general, podemos establecer la siguiente regla para elevar una potencia a una potencia.

**Elevar una potencia a una potencia**

Para cualquier número real $a \neq 0$ y para cualquier par de números completos $m$ y $n$,

$(a^m)^n = a^{mn}$

**Ejemplos**. Simplificar

1. $(3^5)^4 = 3^{5\cdot 4} = 3^{20}$
2. $((-2)^3)^2 = (-2)^{3\cdot 2} = (-2)^6$
3. $(y^5)^3 = y^{5\cdot 3} = y^{15}$
4. $(m^2)^2 = m^{2\cdot 2} = m^4$

**Prácticas.** Simplificar

4. $(5^4)^3$
5. $(2^2)^5$
6. $(a^6)^3$
7. $(n^4)^4$

**Elevar un producto o un cociente a una potencia**

Objetivo: Encontrar la potencia de un producto o un cociente.

Recordemos que cuando una expresión que está dentro de paréntesis se eleva a una potencia, todo lo que está dentro del paréntesis es la base. Comparemos $2n^3$ y $(2n)^3$.

$2n^3$ Significa $2 \cdot n \cdot n \cdot n$ $\quad$ $n$ es la base

$(2n)^3$ Significa $(2n)(2n)(2n)$ $\quad$ $2n$ es la base.

Podemos utilizar el significado de los exponentes para escribir expresiones como $(2n)^3$ sin paréntesis.

**Ejemplos.** Simplificar.

a) $(2n)^3$ Significa $(2n)(2n)(2n) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot n \cdot n \cdot n$
$= 2^3 n^3$
$= 8n^3$

b) $(4x)^2$ Significa $(4x)(4x) = 4 \cdot 4 \cdot x \cdot x$
$= 4^2 x^2$
$= 16x^2$

c) $(3a^2)^3$ Significa $(3a^2)(3a^2)(3a^2) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$
$= 3^3 a^{2+2+2}$
$= 3^3 a^{2\cdot 3}$
$= 27a^6$

**Practica**. Simplificar.

1. $(3y)^2$
2. $(6m)^4$
3. $(2a^3)^3$
4. $(4x^3)^2$

Nótese la siguiente relación

$$(3a^2)^3 = (3^1 a^2)^3$$
$$= 3^{1\cdot 3} a^{2\cdot 3}$$
$$= 3^3 a^6$$

Cada factor dentro del paréntesis se eleva a la tercera potencia. Podemos utilizar la siguiente regla para elevar un producto a una potencia.

**La potencia de un producto**

Para cualquier par de número reales $a$ y $b \neq 0$, y para cualquier número completo $n$,

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

**Ejemplos.** Simplificar.

1) $(3x^2)^3 = 3^3 (x^2)^3$
$= 3^3 x^6$
$= 27x^6$

2) $(5x^3 y^5 z^2)^4 = 5^4 (x^3)^4 (y^5)^4 (z^2)^4$
$= 625x^{12} y^{20} z^8$

3) $(-5x^4y^3)^3 =$
$(-5)^3(x^4)^3(y^3)^3$
$= -125x^{12}y^9$

4) $[(-x)^{25}]^2 = (-x)^{50}$
$= x^{50}$

**Practica.** Simplificar

a) $(4y^3)^4$
b) $(3x^4y^7z^6)^5$
c) $(-7x^9y^6)^2$
d) $[(-y)^{15}]^3$

La regla para elevar un cociente a una potencia es similar a la regla para elevar un producto a una potencia.

**La potencia de un cociente**

Para cualquier par de números reales $a$ y $b$, excepto $b = 0$, y para cualquier número completo $n$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

**Ejemplos**. Simplificar.

1) $\left(\frac{x^2}{4}\right)^3 = \frac{(x^2)^3}{(4)^3} = \frac{x^6}{64}$
2) $\left(\frac{a^4}{b^3}\right)^2 = \frac{a^8}{b^6}$

**Practica.** Simplificar

a) $\left(\frac{y^3}{2}\right)^2$
b) $\left(\frac{a^5}{3}\right)^3$
c) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2$

**Ejercicios**

Escribir como una sola potencia.

1) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3 =$
2) $5^7 : 5^3 =$
3) $(5^3)^4 =$
4) $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 =$
5) $(3^4)^4 =$
9) $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2 =$
10) $2^7 : 2^6 =$
11) $(2^2)^4 =$
12) $(4 \cdot 2 \cdot 3)^4 =$
13) $(2^5)^4 =$

6) $[(5^3)^4]^2 =$ 14) $[(2^3)^4]^0=$
7) $(8^2)^3$ 15) $(27^2)^5=$
8) $(9^3)^2$ 16) $(4^3)^2 =$

Expresar utilizando exponentes positivos

1) $3^{-2}$ 2) $3a^{-1}$ 3) $(3x)^{-1}$ 4) $8m^{\cdot 1}$
5) $cd^{-1}$ 6) $5c^{-4}$ 7) $4m^{-1}$ 8) $4^{-1}$

Simplificar. Expresar sin usar exponentes.

1) $4^{-2}$ 2) $1^{-4}$ 3) $5^{-3}$ 4) $5^0$
5) $6^0$ 6) $10^0$ 7) $x^0$ 8) $2^{-4}$

Simplificar

1) $(-2)^4(-2)^2$ 2) $(-5)^2(-5)^3$ 3) $\frac{(-3)^6}{(-3)^4}$ 4) $\frac{(-10)^7}{(-10)^6}$
5) $\frac{4^3}{4^5}$ 6) $\frac{3^4}{3^6}$ 7) $\frac{(-2)^2}{(-2)^5}$ 8) $\frac{(-5)^3}{(-5)^4}$

Simplificar

**1)** $(2^5)^2$ 2) $(3^4)^3$ 3) $(m^8)^4$ 4) $(5y^4)^3$
5) $(2m^5n^4p^3)^3$ 6) $(4x^2y^3z)^4$ 7) $\left(\frac{m^4}{n^2}\right)^3$ 8) $\left(\frac{y^5}{3}\right)^2$
9) $\left(\frac{3\cdot 2^2}{5}\right)^3$ 10) $\left(\frac{-2x^2y^6}{5}\right)^2$ 11) $\left(\frac{2m^5n^5}{p^4}\right)^3$ 12) $(2n)^4\left(\frac{3}{2}n\right)^3$

**Ejercicios**

Escribir como una sola potencia.

1) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3 =$ 9) $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2 =$
2) $5^7 : 5^3 =$ 10) $2^7 : 2^6 =$
3) $(5^3)^4 =$ 11) $(2^2)^4 =$
4) $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 =$ 12) $(4 \cdot 2 \cdot 3)^4 =$
5) $(3^4)^4 =$ 13) $(2^5)^4 =$
6) $[(5^3)^4]^2 =$ 14) $[(2^3)^4]^0=$
7) $(8^2)^3$ 15) $(27^2)^5=$

8) $(9^3)^2$ 16) $(4^3)^2 =$

Expresar utilizando exponentes positivos

1) $3^{-2}$ 3) $3a^{-1}$ 5) $(3x)^{-1}$ 7) $8m^{\cdot 1}$

2) $cd^{-1}$ 4) $5c^{-4}$ 6) $4m^{-1}$ 8) $4^{-1}$

Simplificar. Expresar sin usar exponentes.

1) $4^{-2}$ 2) $1^{-4}$ 3) $5^{-3}$

4) $5^0$

5) $6^0$ 6) $10^0$ 7) $x^0$ 8) $2^{-4}$

Simplificar

1) $(-2)^4(-2)^2$ 2) $(-5)^2(-5)^3$ 3) $\frac{(-3)^6}{(-3)^4}$ 4) $\frac{(-10)^7}{(-10)^6}$

5) $\frac{4^3}{4^5}$ 6) $\frac{3^4}{3^6}$ 7) $\frac{(-2)^2}{(-2)^5}$ 8) $\frac{(-5)^3}{(-5)^4}$

EJERCICIOS TOMADOS DE (SMITH, 2016)

# CAPÍTULO V
## EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es una colección de variables y números reales.

Sobre ellas se pueden aplicar sumas, divisiones, multiplicaciones, divisiones, potencias y extracción de raíces.

Algunos Ejemplos de expresiones Algebraicas son:

$$x^3 - 5x + \frac{6}{\sqrt{x}} \qquad \frac{2xy + \left(\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{y-1}}$$

Si X es una variable, entonces un monomio en X es una expresión de la forma $ax^n$ , en donde a es un número real y n es un entero no negativo. Un binomio es la suma de dos

| monomio | binomio | trinomio |
|---|---|---|
| $5x$ | $5x+2$ | $x^2+x+1$ |

monomios y un trinomio la suma de tres monomios

Recuerda siempre que un monomio tiene solo un término, un binomio dos términos y un trinomio tres términos.

Polinomios: Un polinomio en X es la suma de cualquier número de monomios.

Definición: Un polinomio en es una suma de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde n es un entero no negativo y cada coeficiente de $a_k$ es un número real. Si es diferente de cero, se dice que el polinomio es de grado n

El coeficiente $a$ de la potencia más alta de X es el coeficiente principal del polinomio.

Ejemplos de polinomios:

| Ejemplo | Coeficiente principal | Grado |
| --- | --- | --- |
| $3x^4+5x^3+(-7)x+4$ | 3 | 4 |
| $x^8+9x^2+(-2)x$ | 1 | 8 |
| $-5x^2+1$ | -5 | 2 |
| 8 | 8 | 0 |
| $7x+2$ | 7 | 1 |

**Ejemplos de expresiones que no son polinomios:**

a) $\frac{1}{x}+3x$ b) $\frac{x-5}{x^2+2}$ c) $3x^2+\sqrt{x}-2$

En el primer ejemplo el exponente de X es negativo contradiciendo la definición de polinomio, de igual forma con el ejemplo c donde el exponente de X no es entero.

En el ejemplo b tenemos una expresión racional o fraccionaria con un polinomio en el numerador y otro en el denominador. El criterio que utilizaremos es el siguiente si el polinomio del denominador no es el constante o de grado cero, la expresión no es un polinomio. Recuerde que los exponentes deben ser enteros positivos.

## OPERACIONES CON POLINOMIOS:

**Suma:**

Sumamos términos semejantes es decir sumamos aquellos términos cuyas variables y exponentes sean iguales. Los pasos para hacer la suma son:

**Paso 1:** Elimine los paréntesis

**Paso 2:** Agrupe términos semejantes

**Paso 3:** Sume y reste los términos semejantes.

Ejemplo: Halla la suma de:

$$(x^3+2x^2-5x+7)+(4x^3-5x^2+3)$$

$$\begin{aligned}(x^3+2x^2-5x+7)+(4x^3-5x^2+3) &= x^3+2x^2-5x+7+4x^3-5x^2+3\\ &= (x^3+4x^3)+(2x^2-5x^2)-5x+(7+3)\\ &= (5x^3)+(-3x^2)-5x+(10)\\ &= 5x^3-3x^2-5x+10\end{aligned}$$

**Resta:**

Funciona igual que la suma solo hay que tener en cuenta que el signo negativo antes de los paréntesis cambia el signo de los términos dentro del paréntesis.

Ejemplo: Resta los siguientes polinomios:

$$(x^3+2x^2-5x+7)-(4x^3-5x^2+3)$$

**Paso 1:** Si un paréntesis tiene antepuesto o detrás un signo negativo, afecte los signos dentro del paréntesis cambiándolos por el opuesto y reemplaza el signo negativo que se encuentra

$$-(4x^3-5x^2+3)=+(-4x^3+5x^2-3)$$

antes del paréntesis por uno positivo.

**Paso 2:** Elimine los paréntesis. Para hacerlo solo escriba los términos que están dentro de los paréntesis con sus signos correspondientes e ignore el signo + que entre los dos paréntesis.

**Paso 3:** Agrupe los términos semejantes es decir los términos con iguales variables e iguales exponentes.

**Paso 4:** Sume y reste los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(x^3+2x^2-5x+7)-(4x^3-5x^2+3) &= (x^3+2x^2-5x+7)+(-4x^3+5x^2-3)\\ &= x^3+2x^2-5x+7-4x^3+5x^2-3\\ &= x^3-4x^3+5x^2+2x^2-5x+7-3\\ &= -3x^3+7x^2-5x+4\end{aligned}$$

Así que aplicando este concepto a la expresión entera tendríamos:

**Multiplicación**

**Multiplicación:o**

**Ejemplo 1**. Multiplicación de monomio por monomio:

Multiplicamos las constantes o números y las variables

$$-5x^2(2x^3+3x-1)=(-5x^2)(2x^3)+(-5x^2)(3x)+(-5x^2)(-1)$$
$$=-10x^5-15x^3+5x^2$$

**Ejemplo 2**. Multiplicación de monomio por polinomio:

$$(-3x+1)(2x^2+x+1) = -3x(2x^2+x+1)+1(2x^2+x+1)$$
$$= (-3x)(2x^2)+(-3x)(x)+(-3x)(1)+(1)(2x^2)+(1)(x)+(1)(1)$$
$$= -6x^3-3x^2-3x+2x^2+x+1$$
$$= -6x^3-3x^2+2x^2-3x+x+1$$
$$= -6x^3-x^2-2x+1$$

**División:**

Ejemplo1: División de polinomio entre un monomio

Expresa como un polinomio en X y Y:

$$\frac{6x^2y^3+4x^3y^2+10xy}{2xy}$$

**Paso1:** Dividimos cada término del numerador entre 2 XY

$$\frac{6x^2y^3+4x^3y^2+10xy}{2xy} = \frac{6x^2y^3}{2xy}+\frac{4x^3y^2}{2xy}-\frac{10xy}{2xy}$$

**Paso2:** Simplificamos.

$$\frac{6x^2y^3+4x^3y^2+10xy}{2xy} = 3xy^2+2x^2y-5$$

## CAPÍTULO VI

## ECUACIONES E INECUACIONES

### ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Muchos problemas de la vida diaria pueden plantearse a través de una relación de igualdad, llamada ecuación. Las ecuaciones tienen aplicación en todas las ramas de la Matemática y de las ciencias en general, por lo que su estudio es de suma importancia.

Definición: Ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que solo se verifica para ciertos valores determinados.

$$X + 5 = 7$$

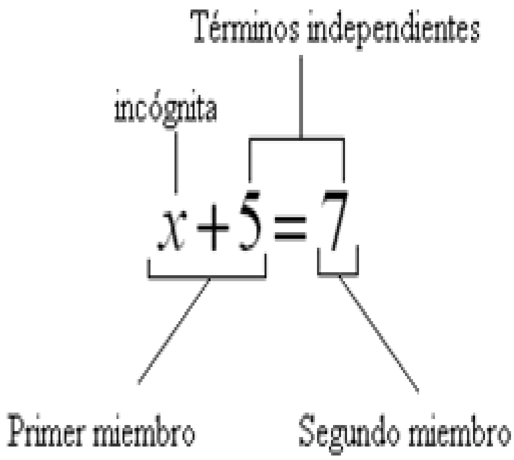
La igualdad se cumple si y solo si X es igual a 2, por lo tanto es una ecuación. Si tenemos por ejemplo

$$(x+5)^2 = x^2 + 2(x \cdot 5) + 5^2$$

Esta igualdad se cumple para cualquier valor de X ; por lo tanto es una identidad y no una ecuación

**Términos de una ecuación**

Los términos de una ecuación son cada una de las cantidades conectadas por los signos + o - en general una ecuación tiene las siguientes partes:




En donde el primer miembro es todo lo que está al lado izquierdo del símbolo igual

El segundo miembro es todo lo que está al lado derecho del símbolo igual

La incógnita es cualquier letra preferiblemente las últimas de nuestro alfabeto.

El éxito de resolver una ecuación no es más que hallar el valor de la incógnita, que satisface a la ecuación planteada. En el ejemplo el valor de X es 2, reemplazando este valor se tiene

$$X + 5 = 7$$

$$2 + 5 = 7$$

$$7 = 7 \quad \text{LQQD}$$

Qué es LQQD su significado Lo Que Queríamos Demostrar si es la solución correcta.

Locos quedamos queriendo demostrar si no hallamos solución

**Grado de una ecuación**

El grado de una ecuación está dado por el exponente más alto de la incógnita y sus soluciones llamadas raíces también son dadas por este exponente por ejemplo

$4X + 3 = 2X + 9$ Es una ecuación de primer grado y tiene un solo valor de la incógnita que satisface esta ecuación.

$5X^2 - 4X - 5 = 0$ Es una ecuación de segundo grado y tiene dos valores que satisfacen a la ecuación.

**Solución de una ecuación**

Para la solución o raíz de una ecuación se debe despejar la incógnita mediante la transposición de términos, mediante la operación contraria, por ejemplo para posar de un miembro a otro, si está sumando pasa a restar, si está restando pasa a sumar, si está multiplicando pasa a dividir, si está dividiendo pasa a multiplicar, es decir operación contraria.

**Ejemplos ilustrativos:**

1) $4x-3=2x+5$

a) Solución:

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| $4x-3=2x+5$ | Ecuación inicial |
| $4x-2x=5-3$ | Transposición de términos |
| $2x=8$ | Términos semejantes |
| $x=\frac{8}{2}$ | Trasponiendo el 2 |
| $x=4$ | Operando |

b) Comprobación:

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| $4x-3=2x+5$ | Ecuación inicial |
| $4(4)-3=2(4)+5$ | Reemplazando el valor encontrado (x = 4) en la ecuación inicial |
| $16-3=8+5$ | Multiplicando |
| $13=13$ | Términos semejantes |

2) $2x-7=4x+13$

**Solución:**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| $2x-7=4x+13$ | Ecuación inicial |
| $2x-4x=13+7$ | Transposición de términos |
| $-2x=20$ | Términos semejantes |
| $2x=-20$ | Cambiando de signo a todos los términos de la ecuación. |

Si la incógnita queda negativa es conveniente cambiar el signo a toda la ecuación.

| | |
|---|---|
| $x=\frac{-20}{2}$ | Trasponiendo el 2 |
| $x=-10$ | Operando |

**Comprobación:**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| $2x-7=4x+13$ | Ecuación inicial |
| $2(-10)-7=4(-10)+13$ | Reemplazando el valor encontrado en la ecuación inicial |
| $-20-7=-40+13$ | Multiplicando |
| $-27=-27$ | Términos semejantes |

3) $4[3x-(5x-8)]=20-4x$

**Solución:**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| $4[3x-(5x-8)]=20-4x$ | Ecuación inicial |
| $4[3x-5x+8]=20-4x$ | Supresión del paréntesis |
| $4[-2x+8]=20-4x$ | Términos semejantes |
| $-8x+32=20-4x$ | Supresión del corchete |
| $-8x+4x=20-32$ | Transposición de términos |
| $-4x=-12$ | Términos semejantes |
| $4x=12$ | Cambiando de signo a todos los términos de la ecuación. |
| $x=\frac{12}{4}$ | Trasponiendo el 4 |
| $x=3$ | Operando |

**Comprobación:**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| $4[3x-(5x-8)]=20-4x$ | Ecuación inicial |
| $4[3\cdot 3-(5\cdot 3-8)]=20-4\cdot 3$ | Reemplazando el valor encontrado en la ecuación inicial |
| $4[9-(15-8)]=20-12$ | Multiplicando |
| $4[9-15+8]=20-12$ | Supresión del paréntesis |
| $4[2]=8$ | Términos semejantes |
| $8=8$ | Operando |

4) $(3x-7)^2-5(2x+1)(x-2)=-x^2-(-3x-1)$

**Solución:**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| $(3x-7)^2-5(2x+1)(x-2)=-x^2-(-3x-1)$ | Ecuación inicial |
| $9x^2-42x+49-5(2x^2-3x-2)=-x^2-(-3x-1)$ | Productos notables |
| $9x^2-42x+49-10x^2+15x+10=-x^2+3x+1$ | Supresión de paréntesis |
| $9x^2-42x-10x^2+15x+x^2-3x=1-49-10$ | Transposición de térm. |
| $-30x=-58$ | Términos semejantes |
| $30x=58$ | Cambiando de signo |
| $x=\frac{58}{30}$ | Transponiendo el 30 |
| $x=\frac{29}{15}$ | Simplificando |

5) $$\frac{3x}{5}-\frac{1}{20}=\frac{x}{4}+1$$

**Solución:**

| Afirmaciones | Razones |
|---|---|
| $\frac{3x}{5}-\frac{1}{20}=\frac{x}{4}+1$ | Ecuación inicial |
| $\frac{3x}{5}-\frac{x}{4}=1+\frac{1}{20}$ | Transposición de términos |
| $\frac{12x-5x}{20}=\frac{20+1}{20}$ | Términos semejantes |
| $\frac{7x}{20}=\frac{21}{20}$ | Términos semejantes |
| $7x=\frac{21}{20}.20$ | Transponiendo el 20 |
| $7x=21$ | Simplificando el 20 |
| $x=\frac{21}{7}$ | Transponiendo el 7 |
| $x=3$ | Operando |

Sin embargo, es fácil resolver una ecuación, si es de primer grado se debe dejar la incógnita en el primer miembro, y los términos conocidos en el segundo miembro y realizar las operaciones, para sacar un solo valor.

Si la ecuación es de segundo grado, se coloca toda la ecuación en el primer miembro, por ende, el segundo miembro siempre es cero. Luego de ello se factora el primer miembro y cada factor se iguala a cero, obteniendo 2 raíces que satisfaga a la ecuación de segundo grado.

Esta resolución es fácil cuando nos plantea la ecuación en sí pero que sucede si existe un enunciado es decir problema, y debemos plantar nosotros la ecuación. Por ende, es necesario tomar en cuenta los siguientes lineamientos para transformar el enunciado del problema a lenguaje matemático, por ejemplo.

*Gráfico n.: 8 cambio de lenguaje común a Lenguaje matemático*

| ENUNCIADO | SIMBOLISMO |
|---|---|
| Un número cualquiera | X |
| El duplo de un número | 2X |
| El tercio de un número | X/3 |
| El cuadrado de un numero | $X^2$ |
| El número aumentado en 3 | X + 3 |
| El número disminuido en 1 | X - 1 |
| El duplo de un número disminuido en 1 | 2X -1 |
| El cuadrado de un número menos el número | $X^2$ - X |
| El 8% de un número | 8/100 |
| Tres números consecutivos | X,X+1,X+2 |
| Tres números pares consecutivos | 2X,2X+2,2X+4 |
| Tres números impares consecutivos | X,X+2,X+4 |

**Ejemplos:**

6) El duplo de un número es igual al número aumentado en 10. Hallar el número

**Solución:**

El duplo de un número es 2X

Número aumentado en 10 X+10

Igualo estas dos expresiones y tengo la ecuación:

$$2X = X + 10$$

Se resuelve la ecuación

$$2X – X = 10$$

$$X = 10 \quad \text{LQQD.}$$

7) La suma de dos números es 10 y su diferencia es 4. Hallar los números

El primer número es X

El segundo es Y

La suma de estos dos números es 10

X + Y = 10

La diferencia de estos dos números es 4

X – Y = 4

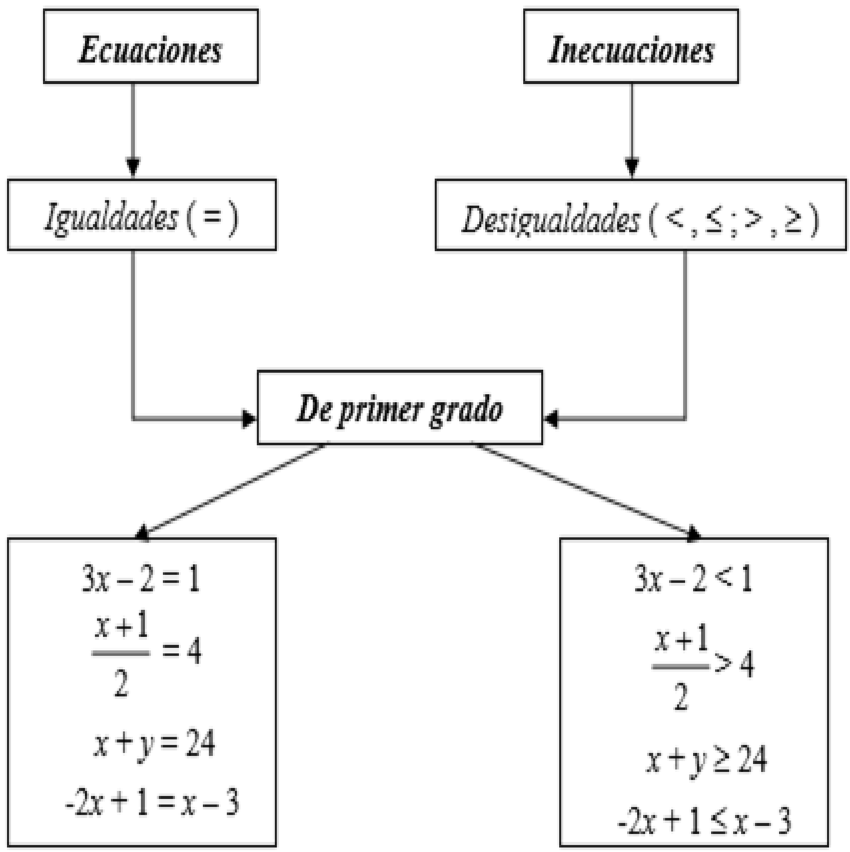
Sumo las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} X + Y & = & 10 \\ \underline{X - Y} & \underline{=} & \underline{\ \ 4} \\ 2X & = & 14 \end{array}$$

$$X = 7$$

Reemplazo 7 en cualquiera de las dos ecuaciones 7 + Y = 10 entonces Y = 3 Los números son 7 y 3

**INECUACIONES LINEALES**




Resolver una inecuación significa hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que se cumpla la desigualdad.

## Ejemplos: Resol

a) $3x - 2 < 1$

**Despejando**

$$3x - 2 < 1$$
$$3x < 1 + 2$$
$$3x < 3$$
$$x < 3 : 3$$
$$x < 1$$

**Aplicando propiedades**

$$3x - 2 < 1$$
$$3x - 2 + 2 < 1 + 2$$
$$\frac{1}{3}\,3x < \frac{1}{3}\,3$$
$$x < 1$$

**Solución:** $S = (-\infty, 1)$

**Representación gráfica:**


b) $\frac{x+1}{2} > 4$

Despejando

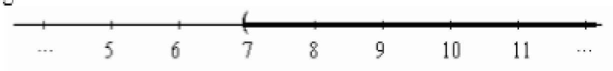
$$\frac{x+1}{2} > 4$$
$$x + 1 > 4 . 2$$
$$x + 1 > 8$$
$$x > 8 - 1$$
$$x > 7$$

Aplicando propiedades

$$\frac{x+1}{2} > 4$$
$$\frac{x+1}{2} . 2 > 4 . 2$$
$$x + 1 > 8$$
$$x + 1 + (-1) > 8 + (-1)$$
$$x > 7$$

Solución: $S = (7, +\infty)$

Representación gráfica:




c) $x + y \geq 24$

Es una ecuación lineal con dos incógnitas que se verifica para infinitas parejas de números. Por ejemplo:

$x = 0$ ; $y = 24$

$x = 2$ ; $y = 23$

$x = -3$ ; $y = 30$

$x = \frac{1}{2}$ ; $y = ....$

$x = ....$ $y = \sqrt{2}$

$x = 1$ ; $y = 10$

¿ verifican la ecuación ?

d) $-2x + 1 \leq x - 3$

Despejando

$$-2x + 1 \leq x - 3$$
$$-2x - x \leq -3 - 1$$
$$-3x \leq -4$$
$$x \geq -4 : (-3)$$

Aplicando propiedades

$$-2x + 1 \leq x - 3$$
$$-2x + 1 + (-x) \leq x - 3 + (-x)$$
$$[-2x + (-x)] + 1 \leq [x + (-x)] - 3$$
$$-3x + [1 + (-1)] \leq -3 + (-1)$$
$$-3x \leq -4$$

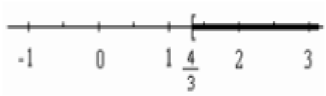
$x \geq \frac{4}{3}$

$$-\frac{1}{3}.(-3)\,x \geq -\frac{1}{3}.(-4)$$

$$x \geq \frac{4}{3}$$

Solución: $S = [\,\frac{4}{3}\,, +\infty)$

Representación gráfica:




Las inecuaciones permiten resolver problemas. Veamos el siguiente ejemplo.

***Ejemplo*:** Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?.

En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos $x$ al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

$$\underbrace{\text{Peso de la furgoneta}}_{875} - \underbrace{\text{peso de 4 cajones}}_{4.x} \quad \underbrace{\text{no es menor que 415 kg}}_{\geq 415}$$

$$875 - 4.x \geq 415$$

Una forma de resolver la inecuación es seguir los siguientes pasos:

- Restamos 875 a ambos miembros de la desigualdad $\longrightarrow$ $-4.x \geq 415 - 875$
- Hacemos el cálculo en el segundo miembro $\longrightarrow$ $-4.x \geq -460$
- Para despejar $x$, multiplicamos a ambos miembros por $-\frac{1}{4}$
  (**Cuidado:** como multiplicamos por un número negativo, debemos cambiar el sentido de la desigualdad) $\longrightarrow$ $x \leq \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-460)$
- Hacemos el cálculo $\longrightarrow$ $x \leq 115$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 115 kg. Además, como se trata de un peso, $x > 0$.

Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo (0 , 115]. Graficamos la solución en la recta real:

## CAPÍTULO VII: MATRICES

### MATRICES

Una matriz es una tabla ordenada de escalares ai j de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se denota también por (ai j), *i* =1,..., *m*, *j* =1, ..., n, o simplemente por (ai j).

Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas. Una matriz con *m* filas y *n* columnas se denomina matriz *m* por *n*, o matriz *m* ð *n*.

Las matrices se denotarán usualmente por letras mayúsculas, *A*, *B*,..., y los elementos de las mismas por minúsculas, *a, b,* ...

**Ejemplo:**

La siguiente matriz es una matriz $2 \times 3$: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Donde sus filas son (1, -3, 4) y (0, 5, -2) y sus

columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

**Clases de matrices**

Según el aspecto de las matrices, éstas pueden clasificarse en:

**Matrices Cuadradas**

Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. Se dice que una matriz cuadrada *n* ð *n* es de orden *n* y se denomina *matriz n-cuadrada.*

*Ejemplo:* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, *A* y *B* son matrices cuadradas de orden 3 y 2 respectivamente.

**Matriz Identidad**

Sea *A* = (ai j) una matriz *n*-cuadrada. La diagonal (o diagonal principal) de *A* consiste en los elementos a11, a22..., ann. La traza de *A*, escrito tr *A*, es la suma de los elementos diagonales.

La matriz *n*-cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otra posición, denotada por I, se conoce como matriz identidad (o unidad). Para cualquier matriz *A*,

*A* · I = I ·*A* = *A*.

**Matrices Triangulares**

Una matriz cuadrada *A* = (ai j) es una matriz triangular superior o simplemente una matriz triangular, si todas las entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero. Así pues, las matrices

Son matrices triangulares superiores de órdenes 2, 3 y 4.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**Matrices Diagonales**

Una matriz cuadrada es diagonal, si todas sus entradas no diagonales son cero o nulas. Se denota por *D* = diag (d11, d22..., dnn). Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 6 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Son matrices diagonales que pueden representarse, respectivamente, por diag(3,-1,7) diag(4,-3) y diag(2,6,0,-1).

**Transpuesta de una matriz**

La transpuesta de una matriz *A* consiste en intercambiar las filas por las columnas y se denota por AT. Así, la transpuesta de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ es } \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si *A* = (ai j) es una matriz *m* ð *n*, entonces AT = $\left(a_{ji}\right)$ es la matriz *n* ð *m*. La transposición de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. (*A* + *B*) T = AT + BT.

2. (AT)T = *A*.

3. (*kA*) T = kAT (si *k* es un escalar).

4. (*AB*) T = BTAT.

**Matrices Simétricas**

Se dice que una matriz real es simétrica, si AT = *A*; y que es antisimétrica, si AT = -*A*.

*Ejemplo:*

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que los elementos simétricos de *A* son iguales, o que AT = *A*. Siendo así, *A* es simétrica.

Para *B* los elementos simétricos son opuestos entre sí, de este modo *B* es antisimétrica.

*A* simple vista, *C* no es cuadrada; en consecuencia, no es ni simétrica ni antisimétrica.

**Matrices Ortogonales**

Se dice que una matriz real *A* es ortogonal, si AAT = AT *A* = I. Se observa que una matriz ortogonal *A* es necesariamente cuadrada e invertible, con inversa *A*-1 = AT.

Consideremos una matriz 3 ð 3 arbitraria:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Si *A* es ortogonal, entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

**Matrices Normales**

Una matriz es normal si conmuta con su transpuesta, esto es, si AAT = ATA. Obviamente, si *A* es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

*Ejemplo*:

Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Puesto que AAT = ATA, la matriz es normal.

## OPERACIONES CON MATRICES

### SUMA Y RESTA DE MATRICES

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden 3 ð 2 y otra de 3 ð 3, no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

**Ejemplo:**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Para sumar o restar más de dos matrices se procede igual. No necesariamente para poder sumar o restar matrices, éstas tienen que ser cuadradas.

*Ejemplo:*

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A + B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Producto de matrices**

Para poder multiplicar dos matrices, la primera debe tener el mismo número de columnas que filas la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.

Es decir, si tenemos una matriz 2 ð 3 y la multiplicamos por otra de orden 3 ð 5, la matriz resultante será de orden 2 ð 5.

(2 ð 3) ð (3 ð 5) = (2 ð 5)

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda por la primera, no podríamos efectuar la operación.

3 ð 5 por 2 ð 3,

Puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas la segunda.

Supongamos que *A* = (ai j) y *B* = (bi j) son matrices tales que el número de columnas de *A* coincide con el número de filas de *B*; es decir, *A* es una matriz *m* ð *p* y *B* una matriz *p* ð *n*. Entonces el producto *AB* es la matriz *m* ð *n* cuya entrada *ij* se obtiene multiplicando la fila *i* de *A* por la columna *j* de *B*.

Esto es,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ . & \dots & . \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ . & \dots & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ . & \dots & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & \dots & . \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$

*Ejemplo*:

1. $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

**Producto por un escalar**

El producto de un escalar *k* por la matriz *A*, escrito *k·A* o simplemente *kA*, es la matriz obtenida multiplicando cada entrada de *A* por *k*:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

*Ejemplo*:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

**División de matrices**

La división de matrices se define como el producto del numerador multiplicado por la matriz inversa del denominador. Es decir, sean las matrices *A* y *B* tal que *A*/*B* = *AB*-1:

Si una matriz está dividida entre un escalar, todos los términos de la matriz quedarán divididos por ese escalar.

*Ejemplo:*

Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, y $k = 2$ un escalar. En este caso:

$$A/k = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 8/2 & 16/2 \\ 3/2 & -6/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

## MATRICES INVERTIBLES

Se dice que una matriz cuadrada *A* es invertible, si existe una matriz *B* con la propiedad de que

*AB* = *BA* = *I*

Siendo *I* la matriz identidad. Denominamos a la matriz *B* la inversa de *A* y la denotamos por *A*-1

*Ejemplo:*

Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & -10 + 10 \\ 3 - 3 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & 15 - 15 \\ -2 + 2 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Puesto que *AB* = *BA* = *I, A* y *B* son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra.

### Método de Gauss

Sea *A* = (ai j) una matriz cuadrada de orden *n*. Para calcular la matriz inversa de *A*, que denotaremos como *A*-1, seguiremos los siguientes pasos:

**Paso1**. Construir la matriz *n ð 2n M* = (A⋮*I)* esto es, *A* está en la mitad izquierda de *M* y la matriz identidad *I* en la derecha.

**Paso 2.** Se deja tal y como está la primera fila de *M*, y debajo del primer término de la diagonal principal, a11, que llamaremos *pivote*, ponemos ceros. Luego se opera como se indica en el siguiente ejemplo.

*Ejemplo*:

Consideremos una matriz 3 ð 3 arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

**Paso 1**.

$$M = (A \;\vdots\; I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

**Paso 2**.

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} & a_{11}0 - a_{21}1 & a_{11}1 - a_{21}0 & a_{11}0 - a_{21}0 \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{11}1 - a_{31}1 & a_{11}0 - a_{31}0 & a_{11}1 - a_{31}0 \end{array}\right)$$

El siguiente paso es igual que el anterior, pero esta vez se coge como pivote el segundo término de la diagonal principal.

Al llegar al último término de la diagonal, se procede igual que antes, pero poniendo los ceros encima del nuevo pivote. Se observa que al coger como pivote el último término de la diagonal, la matriz *A* se transforma en una matriz triangular.

Una vez realizados todos los pasos, la mitad izquierda de la matriz *M* se convierte en una matriz diagonal. En este momento hay que proceder a transformar, si es que no lo está, la mitad izquierda en la matriz identidad, dividiendo si fuera necesario las filas de *M* por un escalar.

## CAPÍTULO VIII

## MATEMÁTICA FINANCIERA

Las matemáticas financieras son fundamentales para tomar la mejor decisión, cuando se invierte dinero en proyectos o en inversiones, por eso es conveniente que el lector defina y explique los conceptos básicos sobre proyectos y las diferentes inversiones que se pueden llevar a cabo en la vida cotidiana y empresarial. También, es importante, que se conozca la importancia del concepto del valor del dinero a través del tiempo, como elemento fundamental de las matemáticas financieras, así como del principio de equivalencia y el principio de visión económica, que se aplican en el diagrama económico, para efecto de trasladar los flujos de caja al presente o al futuro.

### IMPORTANCIA DE LA MATEMÁTICAS FINANCIERAS.

Las organizaciones y las personas toman decisiones diariamente que afectan su futuro económico, por lo cual, deben analizar técnicamente los factores económicos y no económicos, así como también los factores tangibles e intangibles, inmersos en cada una de las decisiones que se toman para invertir el dinero en las diferentes opciones que se puedan presentar, de allí, la importancia de las técnicas y modelos de la matemáticas financieras en la toma de las decisiones, ya que cada una de ellas afectará lo que se realizará en un tiempo futuro, por eso, las cantidades usadas en la matemáticas financieras son las mejores predicciones de lo que se espera que suceda.

No hay que olvidar que en todo proceso de toma de decisión siempre aparece el interrogante de tipo económico, debido a lo que espera toda organización o persona es la optimización de los recursos con que se cuenta.

Cuando se busca la solución que optimice los recursos con que se cuentan generalmente hay que abordar las siguientes preguntas claves:

¿Se justifica la realización del proyecto o la inversión?

¿Se puede usar la actual infraestructura de producción para alcanzar el nuevo nivel de producción?

¿El tiempo estipulado para la realización del proyecto es el adecuado?

¿Es recomendable o favorable la inversión económica o socialmente?
¿Cuál de las alternativas planteadas es la mejor para la organización o inversionistas?
Las respuestas a las preguntas señaladas ayudan a la organización o inversionista a eliminar proyectos que no son factibles de realizar por no contar con los recursos necesarios. De allí, la importancia de desarrollar todo el proceso de toma de decisiones para plantear soluciones o alternativas para el problema que se está enfrentando.
Lo expuesto anteriormente, muestra la dimensión e importancia de las matemáticas financieras como herramienta de análisis y evaluación en el proceso de toma de decisiones.

## DEFINICIONES DE LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Las matemáticas financieras pueden tener varias definiciones, pero todas presentan el mismo objetivo final.
"Estudia el conjunto de conceptos y técnicas cuantitativas de análisis útiles para la evaluación y comparación económica de las diferentes alternativas que un inversionista, o una organización pueden llevar a cabo y que normalmente están relacionadas con proyectos o inversiones en: sistemas, productos, servicios, recursos, inversiones, equipos, etc., para tomar decisiones que permitan seleccionar la mejor o las mejores posibilidades entre las que se tienen en consideración". (Santillán, 2014)
"Es una herramienta de trabajo que permite el análisis de diferentes alternativas planteadas para la solución de un mismo problema". (Santillán, 2014)
"Es el estudio de todas las formas posibles para desarrollar nuevos productos (o resolver un problema), que ejecutarán funciones necesarias y definidas a un costo mínimo".
"Es un conjunto de conceptos y técnicas de análisis, útiles para la comparación y evaluación económica de alternativas". (Santillán, 2014)
En general el objetivo básico de las matemáticas financieras es seleccionar la alternativa más conveniente desde el punto de vista económico.

### Definiciones de proyecto

Existen varias definiciones al término proyectos, entre las cuales se pueden enumerar las siguientes:

Las Naciones Unidas, en su Manual de Proyectos de Desarrollo Económico, expresa:
"*Un proyecto es el conjunto de antecedentes que permite estimas las ventajas y desventajas económicas que se derivan de asignar ciertos recursos de un país para la producción de determinados bienes o servicios*" (Santillán, 2014)
La definición indica que si los resultados económicos esperados son favorables el proyecto debe llevarse hasta finalizarlo, dando especial consideración a las diferentes etapas que lo conforman.
El Banco Mundial define proyecto de la siguiente manera:
*"El proyecto es, en un caso ideal, una serie óptima de actividades orientadas hacia la inversión fundadas en una planificación sectorial completa y coherente, mediante la cual se espera que un conjunto específico de recursos humanos y materiales produzca un grado determinado de desarrollo económico y social".* (Santillán, 2014)
El Instituto Latinoamericano y del Caribe de Planificación Económica y Social, Ilpes, en su documento Guía para la presentación de proyectos proporciona la siguiente definición:
*"En su significado básico, el proyecto es el plan prospectivo de una unidad de acción capaz de materializar algún aspecto del desarrollo económico o social.Esto implica, desde el punto de vista económico. Proponer la producción de algún bien o la prestación de algún servicio, con el empleo de una cierta técnica y con miras a obtener u determinado resultado o ventaja, económico o social.*
*Como plan de acción, el proyecto supone también la indicación de los medios necesarios para su realización y la adecuación de esos medios a los resultados que se persiguen. El análisis de estas cuestiones se hace en los proyectos no sólo del punto de vista económico sino también técnico y financiero, administrativo e institucional".*
En la forma más simple un proyecto se puede definir como la búsqueda de una solución inteligente al planteamiento de un problema para resolver, entre muchas, una necesidad humana.
Un proyecto de inversión es un plan, que, si se le asigna determinado monto de capital y se le proporciona insumos de diferentes tipos, podrá producir un bien o un servicio, útil al ser humano o a la sociedad en general

**Inversiones**

Las inversiones son la asignación de recursos en los diferentes departamentos de una organización, con las cuales se logran los objetivos trazados en cada uno de ellos. Las inversiones deben ser evaluadas cuidadosamente a fin de determinar su aceptación o rechazo y establecer su grado de prioridad dentro de los planes estratégicos de la empresa. Los errores cometidos en las decisiones de inversión no sólo tienen consecuencias negativas en los resultados de las operaciones, sino que también impactan las estrategias de la empresa. Las inversiones pueden clasificarse de acuerdo con varios criterios y desde diferentes puntos de vista. En este libro en primera instancia, se clasificarán por el tipo de función que desempeñan dentro de la empresa:

***Inversiones de renovación***: Se realizan cuando se van a sustituir equipos, instalaciones o edificaciones obsoletas o desgastadas físicamente por nuevos elementos productivos. Se invierte en renovar las operaciones existentes.

***Inversiones de modernización***: Comprenden todas las inversiones que se efectúan para mejorar la eficiencia de la empresa tanto en la fase productiva como en la comercialización de los productos. Se invierte para mejorar la eficiencia operacional.

***Inversiones de expansión***: Son las inversiones que se realizan para satisfacer una demanda creciente de los productos de la empresa.

***Inversiones estratégicas***: Son las que afectan la esencia misma de la empresa, ya que tomadas en conjunto definen el sistema de actividades de la misma. Estas inversiones se derivan del análisis de la estrategia de la empresa y su impacto en el sistema de actividades es contundente. Los casos más típicos son las inversiones para diversificación, la cobertura de nuevos mercados, las inversiones asociadas con nuevos desarrollos tecnológicos y las derivadas de las decisiones de integración vertical u horizontal en la empresa. Atendiendo a la relación de dependencia o independencia económica de las inversiones, éstas se pueden clasificar en mutuamente excluyentes, independientes y complementarias.

***Mutuamente excluyentes***: Cuando por su naturaleza solo se puede ejecutar una de ellas, pues sería redundante o contraría la política de la organización, hay que tener en cuenta, que las inversiones mutuamente excluyentes están vinculadas a la solución de un mismo problema, por eso, hay que seleccionar la mejor de todas.

***Inversiones Independientes***: Son aquellas que no guardan relación o dependencia económica entre sí, por tal motivo, la realización de una de ellas no impide la ejecución de otra u otras inversiones. La única limitante para la organización, es la disponibilidad de los recursos para cada una de las inversiones. El proceso decisorio se orienta a identificar una combinación de inversiones, factibles de ejecutar en función de la disponibilidad de recursos, que es la que genera los mejores resultados.

***Inversiones Complementarias***: Son las inversiones que tienen un alto grado de dependencia económica entre sí, que, en algunos de los casos al realizarse simultáneamente, interactúan reforzando o atenuando las características de ellas. Esto da como resultado que, en algunas combinaciones se presente el fenómeno de sinergismo y que, en tal sentido, haya que determinar el efecto sinérgico de la combinación. El proceso decisorio está orientado a identificar una mezcla de combinaciones o alternativas individuales, factibles de realizar en función de la disponibilidad de recursos, y que es la que produce los mejores resultados. Las inversiones también, se clasifican en función del sector de la economía en que se ejecutan, por lo tanto, habrá inversiones en empresas del sector privado y en el sector público.

***Inversiones en el sector privado***: Son inversiones preparados y ejecutados por personas naturales y jurídicas, con recursos privados y de crédito, se deben aceptar cuando se esperan incrementos en los beneficios de las empresas (crean valor) y por consiguiente se espera que aumente el patrimonio de los accionistas. No obstante, en algunas ocasiones hay inversiones de carácter estratégico que no generan los rendimientos mínimos exigidos por la empresa, pero que se aceptan por completar el sistema de actividades escogido por la estrategia de la empresa.

***Inversiones en el sector público***: Son inversiones desarrolladas por entidades del gobierno y con presupuestos de inversión pública. Generalmente apuntan al mejoramiento de la salud, la educación, la vivienda, el transporte, la seguridad, etc.

Estas inversiones se realizan con base en los planes y programas de desarrollo económico y social que se preparan en los diferentes niveles de la administración pública.

En las inversiones del sector público se deben valor aspectos cuantitativos y cualitativos de beneficio económico y social, y su objetivo primordial es aumentar el bienestar social.

**Proceso de toma de decisiones**

La toma de decisiones es la selección de un curso de acción entre varias alternativas planteadas en una organización y el núcleo de la planeación, también, es una actividad cotidiana en las organizaciones, cada problema o situación se tiene que resolver, por lo cual surgirá la necesidad de tomar una decisión. Por lo tanto, es recomendable puede señalar de la siguiente manera:

***1) Definir el problema***: Se trata de identificar en forma clara el problema y realizar su formulación de manera concreta y precisa, definiendo los objetivos buscados. La importancia de este punto es vital en el proceso de toma de decisiones, y es recomendable dedicarle todo el tiempo que se necesite, para lograr una clara y adecuada definición del problema, porque de lo contrario se corre el riesgo de dar solución a un problema inexistente. Debe quedar claro que los problemas en la vida cotidiana o real, están enunciados de manera muy general, por lo cual, es indispensable identificarlos y definirlos exactamente, en relación con sus objetivos como en los métodos de análisis que se seguirán.

La importancia de definir con claridad y precisión el problema radica en el hecho conocido de que es preferible no resolver el problema, antes que resolver el problema que no es, por eso, se dice que la definición del problema es la parte más crítica de todo proceso de toma de decisiones, debido a que una equivocada identificación traerá como consecuencia la toma de una decisión igualmente errada.

De una premisa equivocada siempre la conclusión será equivocada.

La importancia del proceso de identificación del problema, se traduce en el pensamiento de Albert Einstein: “Si se me concediese sólo una hora para resolver un problema del que dependiese mí propia vida, yo dedicaría 40 minutos a estudiarlo, 15 minutos a revisarlo y 5 minutos a solucionarlo”.

En este sentido, se recomienda agotar los mejores esfuerzos y recursos de la organización en la identificación de la problemática. Deben realizarse reuniones, tormentas de ideas y trabajos de grupo para la consecución de una visión clara y precisa de la situación que se deberá enfrentar.

**2)** ***Analizar el problema***: Una vez se haya definido en forma concreta el problema, se procede a discriminar todos los hechos que lo han originado o tienen relación con él. Es indispensable que, dentro del análisis, se realice una reseña de las decisiones tomadas en el pasado, en relación con el problema definido; porque muchas veces el problema surgido, tiene que ver con las decisiones que se han tomado con anterioridad en el tiempo.

También, es conveniente y necesario analizar las restricciones que se presentan al momento de dar solución a los problemas, y ellas pueden ser reales y ficticias.

Las restricciones reales son las que verdaderamente existen al momento de formular el problema, pueden ser: tecnológicas, de recursos, de tiempo, sociopolíticas, de seguridad, administrativas, etc. Estas restricciones, son necesarias tenerlas en cuenta al momento de seleccionar la solución al problema.

Las restricciones ficticias son las que no están o no existen contenidas en el problema que se ha definido; generalmente surgen de manera inconscientemente por el criterio de la persona que está realizando el análisis, y pueden ser: hábitos, temores, inhibiciones, timidez. Hay que tener en cuenta, que hay personas que se restringen ficticiamente más que otras, afectando en forma negativa la creatividad y dificultad la solución de los problemas o los convierte en imposibles de solucionarlos.

**3)** ***Generación de alternativas de soluciones***: Una vez que el problema se ha definido y analizado, se debe proceder a generar posibles soluciones y/o alternativas para ser aplicadas. Un brainstorning (tormenta de ideas), es un buen comienzo para la generación de soluciones. En el proceso de generación de soluciones, se recomienda reunir todas aquellas personas que tengan que ver o conozcan el problema e inducirlas al planteamiento de soluciones, no sin antes tener en cuenta los siguientes elementos:

a. Evitar resaltar las diferencias jerárquicas de los asistentes.
b. Buscar la participación del directivo más importante hasta el obrero más humilde de la organización.
c. No subestimar ninguna solución sugerida.
d. No permitir burlas a las soluciones planteadas.
e. No hacer comentarios negativos sobre las soluciones sugeridas.
f. Motivar e inducir permanentemente a las personas para que sugieran soluciones.

En caso que la decisión competa a una sola persona y ésta no tenga los medios para consultar con otros, es indispensable que se presenten distintas alternativas para que cada una sea evaluada individualmente.

**4)** ***Evaluación de alternativas***: El proceso de generación de alternativas de soluciones tendría poca importancia si las mismas no son analizadas y comparadas entre sí, de manera tal que se pueda determinar cuál es la más conveniente.

Mediante la evaluación de las alternativas se conocerá, cuál de ellas es la más rentable, cuál tendrá más posibilidad de realización, cuál apoyará los intereses generales de la compañía, así como también cuál de las posibles soluciones será más acorde con la visión y misión de la organización. Igualmente se considerarán las estrategias de la organización a corto, mediano y largo plazo.

Cuando se estima la conveniencia de una solución debe tomarse en cuenta la rentabilidad que produce, asociada al riesgo que conlleva. Adicionalmente, debe considerarse que el beneficio económico a corto plazo puede quedar relegado en aras de una estrategia superior de la empresa.

Es necesario que una vez se seleccione la alternativa que dará solución al problema, se le comunique a las personas de la organización encargadas de dar la aprobación final. De la presentación de la solución depende que se lleve a la práctica, por ello es importante estar seguros de los beneficios de dicha solución y llevar a cabo la sustentación con seguridad, demostrando clara y concretamente cuales son las ventajas de la solución propuesta. Es conveniente presentar soluciones a corto, mediano y largo plazo.

**5)** ***Implementar la solución***: La selección de la decisión no hace finalizar el proceso de toma de decisiones; por el contrario, una vez seleccionada la alternativa, se debe buscar su implementación, teniendo en factores tales como tiempo, recursos humanos, tecnológicos, financieros, etc. También es de suma importancia considerar la capacidad de entendimiento de la decisión por parte de la persona responsable de ejecutarle, así como su grado de compromiso. En muchas ocasiones una determinada decisión pasará por diferentes áreas de la organización y probablemente el compromiso no sea el mismo en cada una de ellas. Por otro lado, es probable que el entendimiento de la decisión no sea compartido por igual, por lo cual se deberán tomar en cuenta estas consideraciones al momento de implementar la decisión. Implementar una decisión exige en muchos casos todo un proceso de planificación y de distribución de recursos que garanticen su éxito. Una decisión podría fracasar por no contar con los recursos adecuados o con el compromiso y entendimiento de los miembros de la organización.

6) ***Evaluar los resultados de la decisión***: A través de un análisis de los resultados obtenidos por la puesta en práctica de una decisión tomada, se podrán tomar medidas para asegurar la optimización de los resultados. Es así como mediante la evaluación de éstos se pueden tomar las acciones necesarias para corregir cualquier desviación en los resultados inicialmente planificados. Adicionalmente, se puede descubrir la necesidad de incluir nuevos recursos en el proceso: humanos, financiero o de otra clase. También, se puede llegar a la conclusión de que la decisión tomada no fue la correcta y así adoptar las medidas necesarias para enmendar esa equivocación.

## ASPECTOS BÁSICOS DE UN ANÁLISIS DE INVERSIONES

Para la correcta realización de un estudio de las matemáticas financieras, se requieren básicamente analizar las siguientes etapas:

a. Análisis técnico
b. Análisis económico
c. Análisis financiero
d. Análisis de intangibles
e. Análisis del mercado
f. Análisis Administrativo
g. Análisis Social

**Análisis técnico:** Se refiere a la factibilidad operacional del proyecto o alternativa, es decir, se define la viabilidad técnica del proyecto. En este análisis, se definirá las especificaciones técnicas de los insumos necesarios para ejecutar el proyecto en relación con: tipo y cantidad de materia prima e insumos, nivel de calificación del recurso humano requerido, la maquinaria y los equipos necesarios para el proyecto y un programa de las inversiones iníciales y de reposición, así como también, los calendarios de mantenimiento.
Análisis económico: Se refiere a la factibilidad económica de la alternativa o proyecto (Si es rentable o no). Es importante, pues es la que al final permite decidir la implantación del proyecto.
**Análisis financiero**: Se refiere a la disponibilidad y origen de los fondos necesarios para realizar el proyecto. En otras palabras, se refiere a la identificación de las fuentes de financiación del proyecto internas y externas, permite adicionalmente establecer criterios para el manejo de excedentes e identificar las necesidades de liquidez, para construir y negociar el plan de financiamiento del proyecto.
**Análisis de intangibles**: Se refiere a considerar los efectos no cuantificables de un proyecto: Aspectos como: imagen corporativa, opinión pública, nombre, factores ecológicos y ambientales, leyes cambiantes, situación política, etc. El estudio de las leyes, debe llevarse a cabo en las etapas iníciales de la formulación y preparación, ya que un proyecto supremamente rentable, puede resultar no factible por una norma legal. En análisis de los factores ecológicos y ambientales, es necesario determinar el impacto del proyecto sobre el medio ambiente en el corto, mediano y largo plazo y el efecto del entorno sobre el proyecto.
**Análisis del mercado**: En el cual se determinan ventas y clientes potenciales para los bienes y servicios que van a producirse. Además, de estudiar la demanda, es necesario tener en cuenta la oferta y precios, tanto de los productos como de los insumos de un proyecto. En la demanda de los productos, se analiza el volumen presente y futuro y las variables relevantes para su proyección como: población objetivo o segmento de mercado, niveles de ingresos esperados, productos complementarios y sustitutos que ya estén o que en el futuro

entraran al mercado. Es importante tener en cuenta el mercado local, regional, nacional y el internacional.

**Análisis Administrativo**: Es un diseño que muestra la estructura organizacional y define las necesidades del personal del proyecto, además; genera la información sobre las necesidades de infraestructura para el normal desarrollo de las actividades de las diferentes áreas que conforman el proyecto como son: planeación, personal, finanzas, cobranzas, etc. En este análisis, también se señala los equipos y dotación de insumos requeridos para el adecuado funcionamiento administrativo.

**Análisis Social**: Determina la incidencia que el proyecto tiene en la comunidad y la manera de evitar las incidencias negativas del proyecto. En concreto el análisis está dirigido a identificar y caracterizar con precisión los diferentes grupos de la población implicados por el proyecto, desde el punto de vista de los beneficios y los costos.

**Análisis Sensorial**: Trata de fijar la posición personal del empresario en aspectos legales, éticos, morales y de gusto personal, con relación a la actividad en sí misma o a las condiciones que el proyecto exige.

## VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

Es el concepto más importante en las matemáticas financieras. El dinero, como cualquier otro bien, tiene un valor intrínseco, es decir, su uso no es gratuito, hay que pagar para usarlo. El dinero cambia de valor con el tiempo por el fenómeno de la inflación y por el proceso de devaluación. El concepto del valor del dinero dio origen al interés. Además, el concepto del valor del dinero en el tiempo, significa que sumas iguales de dinero no tendrán el mismo valor si se encuentran ubicadas en diferentes tiempos, siempre y cuando la tasa de interés que las afecta sea diferente a cero.

La inflación es el fenómeno económico que hace que el dinero todos los días pierda poder adquisitivo o que se desvalorice. Por ejemplo, dentro de un año se recibirá los mismo $ 1.000 pero con un poder de compra menor de bienes y servicios. Desde un punto de vista más sencillo, con los $ 1.000 que se recibirá dentro de un año se adquirirá una cantidad menor de bienes y servicios que la que se puede comprar hoy, porque la inflación le ha quitado poder de compra al dinero.

**Interés**
Cuando una persona utiliza un bien que no es de su propiedad; generalmente deba pagar un dinero por el uso de ese bien; por ejemplo, se paga un alquiler al habitar un apartamento o vivienda que no es de nuestra propiedad. De la misma manera cuando se pide prestado dinero se paga una renta por la utilización de eses dinero, En este caso la renta recibe el nombre de interés o intereses.
En otras palabras, se podría definir el interés, como la renta o los réditos que hay que pagar por el uso del dinero prestado. También se puede decir que el interés es el rendimiento que se tiene al invertir en forma productiva el dinero, el interés tiene como símbolo **I**. En concreto, el interés se puede mirar desde dos puntos de vista.

- Como costo de capital: cuando se refiere al interés que se paga por el uso del dinero prestado.
- Como rentabilidad o tasa de retorno: cuando se refiere al interés obtenido en una inversión.

Usualmente el interés se mide por el incremento entre la suma original invertida o tomada en préstamo **(P**) y el monto o valor final acumulado o pagado.
De lo anterior se desprende que si hacemos un préstamo o una inversión de un capital de **$P,** después de un tiempo **n** se tendría una cantidad acumulada de **$F,** entonces se puede representar el interés pagado u obtenido, mediante la expresión siguiente:

**I = F – P (8.1)**

Pero también: **I**= **Pin**
Analizando la anterior fórmula, se establece que el interés es una función directa de tres variables: El capital inicial (P), la tasa de interés (i) y el tiempo (n). Entre mayor sea alguno de los tres, mayor serán los intereses.
Las razones a la existencia del interés se deben a:

- El dueño del dinero (prestamista) al cederlo se descapitaliza perdiendo la oportunidad de realizar otras inversiones atractivas.
- Cuando se presta el dinero se corre el riesgo de no recuperarlo o perderlo, por lo tanto, el riesgo se toma si existe una compensación atractiva.

- El dinero está sujeto a procesos inflacionarios y devaluatorios en cualquier economía, implicando pérdida en el poder adquisitivo de compra.
- Quien recibe el dinero en préstamo (prestatario) normalmente obtiene beneficios, por lo cual, es lógico que el propietario del dinero, participe de esas utilidades.

Existen dos tipos de interés, simple y compuesto, los cuales se estudiarán posteriormente.

**Ejemplo**

Se depositan en una institución financiera la suma de $ 1.200.000 al cabo de 8 meses se tiene un acumulado de $ 200.000, calcular el valor de los intereses.

I= F-P= 1.400.000 - 1.200.000 = $ 200.000 tiempo y su medida, son los intereses producidos.

**Tasa de interés**

La tasa de interés mide el valor de los intereses en porcentaje para un período de tiempo determinado. Es el valor que se fija en la unidad de tiempo a cada cien unidades monetarias ($100) que se invierten o se toman en calidad de préstamo, por ejemplo, se dice.: 25% anual, 15% semestral, 9 % trimestral, 3% mensual.

Cuando se fija el 25% anual, significa que por cada cien pesos que se inviertan o se prestan se generaran de intereses $ 25 cada año, si tasa de interés es 15% semestral, entones por cada cien pesos se recibirán o se pagaran $ 15 cada seis meses, si la tasa es 9% trimestral se recibirán o se pagaran $ 9 de manera trimestral, y si la tasa es del 3% mensual, se recibirán o se pagaran $ 3 cada mes.

La tasa de interés puede depender de la oferta monetaria, las necesidades, la inflación, las políticas del gobierno, etc. Es un indicador muy importante en la economía de un país, porque le coloca valor al dinero en el tiempo.

Matemáticamente la tasa de interés, se puede expresar como la relación que se da entre lo que se recibe de interés (**I**) y la cantidad invertida o prestada, de la ecuación (8.1), se obtiene:

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{P}}$$

La tasa de interés siempre se presenta en forma porcentual, así: 3% mensual, 15% semestral, 25% anual, pero cuando se usa en cualquier ecuación matemática se hace necesario convertirla en número decimal, por ejemplo: 0,03, 0,15 y 0,25 La unidad de tiempo generalmente usada para expresar las tasas de interés es el año.

Sin embargo, las tasas de interés se expresan también en unidades de tiempo menores de un año. Si a la tasa de interés, no se le especifica la unidad de tiempo, se supone que se trata de una tasa anual.

**Ejemplo**

Una entidad le presta a una persona la suma de $ 2.000.000 y al cabo de un mes paga
$ 2.050.000. Calcular el valor de los intereses y la tasa de interés pagada.

$$I = F - P = 2.050.000 - 2.000.000 = \$50.000$$

$$i = \frac{I}{P} = \frac{50.000}{2.000.000} = 0.025\ m = 2{,}5\%\ m$$

**Equivalencia.**

El concepto de equivalencia juega un papel importante en las matemáticas financieras, ya que, en la totalidad de los problemas financieros, lo que se busca es la equivalencia financiera o equilibrio los ingresos y egresos, cuando éstos se dan en períodos diferentes de tiempo. El problema fundamental, se traduce en la realización de comparaciones significativas y valederas entre varias alternativas de inversión, con recursos económicos diferentes distribuidos en distintos períodos, y es necesario reducirlas a una misma ubicación en el tiempo, lo cual sólo se puede realizar correctamente con el buen uso del concepto de equivalencia, proveniente del valor del dinero en el tiempo. El proceso de reducción a una misma ubicación en el tiempo, se denomina transformación del dinero en el tiempo. Además, la conjugación del valor de dinero en el tiempo y la tasa de interés permite desarrollar el concepto de equivalencia, el cual, significa que diferentes sumas de dinero en tiempos diferentes pueden tener igual valor económico, es decir, el mismo valor adquisitivo.

**Ejemplo**
Si la tasa de interés es del 15%, $ 1.000 hoy es equivalente a $1.150 dentro de un año, o a $ 869,56 un año antes (1000/1.15). El concepto de equivalencia, también se puede definir, como el proceso mediante el cual los dineros ubicados en diferentes periodos se trasladan a una fecha o periodo común para poder compararlos.

Partiendo de la base que el dinero tiene valor en el tiempo, por consiguiente, es indispensable analizar la modalidad de interés aplicable y la ubicación de los flujos de caja en el tiempo, por lo tanto, sin importar que existen múltiples desarrollos referente a la ubicación, en este libro se tendrá en cuenta la *ubicación puntual*, la cual considera el dinero ubicado en posiciones de tiempo especifica; tiene dos modalidades.

***Convención de fin periodo***: valora los flujos de caja (ingresos y/o egresos) como ocurridos al final del periodo. Por ejemplo: Si durante el año 2003, se obtuvieron $1.500 millones de ingresos y el periodo analizado es enero 1 de 2007 a diciembre 31 de 2007, entonces, los ingresos se considerarían obtenidos el 31 de diciembre de 2007.

***Convención de inicio de periodo***: valora los flujos de caja (ingresos y/o egresos) como ocurridos al principio del periodo. En el ejemplo anterior los $ 1.500 millones de ingresos se considerarían obtenidos el 1 de enero de 2007.

**Diagrama de tiempo o flujo de caja**
El diagrama de tiempo, también es conocido con los nombres de diagrama económico o diagrama de flujo de caja. Es una de las herramientas más útiles para la definición, interpretación y análisis de los problemas financieros. Un diagrama de tiempo, es un eje horizontal que permite visualizar el comportamiento del dinero a medida que transcurren los periodos de tiempo, perpendicular al eje horizontal se colocan flechas que representan las cantidades monetarias, que se han recibido o desembolsado

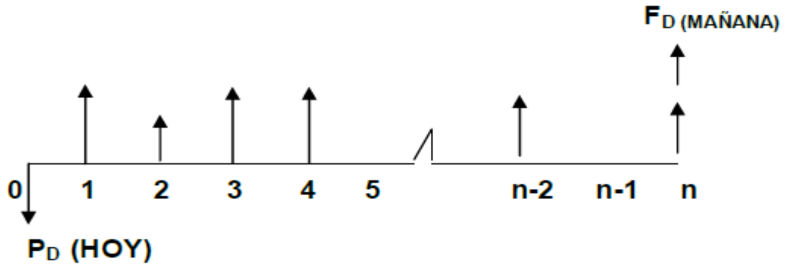
(FLUJO DE FONDOS O DE EFECTIVO). Por convención los ingresos se representan con flechas hacia arriba ( ↑ ) y los egresos con flechas hacia abajo ( ↓ ).

Al diagrama económico o de tiempo, hay que indicarle la tasa de interés (*efectiva o periódica*) que afecta los flujos de caja, la cual; debe ser concordante u homogénea con los periodos de tiempo que se están manejando, es decir; si los periodos de tiempos son mensuales, la tasa de interés debe ser mensual, si los periodos de tiempos son trimestrales, la tasa de interés que se maneja debe ser trimestral; si los periodos de tiempos son semestrales, la tasa de interés debe ser semestrales, y así sucesivamente.

Un diagrama de tiempo tiene un principio y un fin, el principio es conocido como el hoy (ubicado en el cero del diagrama), y allí se encontrará el presente del diagrama (**PD**), mientras que, en el fin, se ubicará el futuro del diagrama económico (**FD**) y la terminación de la obligación financiera.

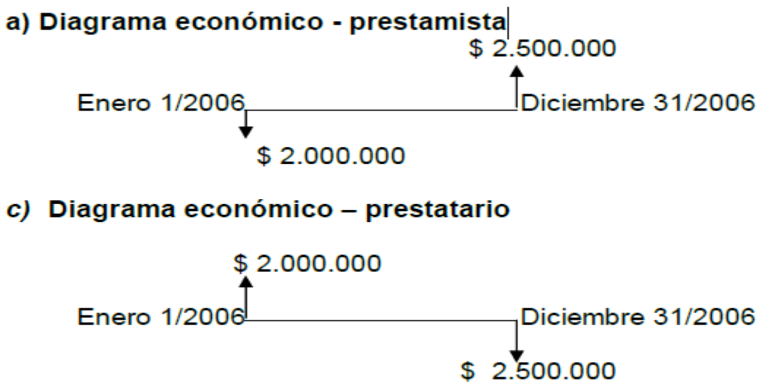
Hay que tener en cuenta, que un diagrama económico, contempla presentes y futuros intermedios, es decir, un periodo de tiempo puede ser el presente de uno o varios flujos de caja, o un periodo de tiempo podrá ser un futuro de uno o varios flujos de caja, todo depende entonces de la ubicación del periodo de tiempo versus la ubicación de los flujos de caja.

Es importante anotar que en las matemáticas financieras: *Sólo se permiten sumar, restar o comparar flujos de caja (ingresos y/o egresos) ubicados en los mismos periodos del diagrama económico.*



El diagrama de tiempo que se construya para un prestamista será inverso al que se construya para el prestatario.

**Ejemplo**
Una persona recibe un préstamo el 1 de enero de 2006 de $ 2.000.000 y cancela el 31 de diciembre del mismo año la suma de $ 2.500.000. Construir el diagrama económico.




**Consideraciones**
**1)** El momento en que el prestamista entrega el dinero, y el prestatario lo recibe se conoce con el nombre de presente o momento cero.
**2)** El valor entregado inicialmente se denomina valor presente o simplemente P.
**3)** El segmento de recta representa el tiempo de la operación financiera (n).
**4)** La suma entregada al final recibe el nombre de valor futuro o simplemente F.
Cuando una persona ahorra o deposita dinero en una institución financiera que reconoce una tasa de interés, la relación entre las partes se asimila al escenario prestamista – prestatario. Para este caso, el ahorrador o depositante asume el papel de prestamista y la institución financiera será el prestatario.
**Ejercicios propuestos**

**1)** Un apartamento por valor de $ 60.000.000 se adquiere a crédito, y se desea cancelar en un año con cuotas bimestrales iguales de $ 11.000.000. Construya el diagrama económico desde el punto de vista del comprador y del vendedor.
**2)** Se recibe un préstamo en una institución bancaria por valor de $ 25.000.000 para cancelar dentro de dos años, a una tasa

de 10% cuatrimestral anticipada. Construya el diagrama económico.

**3)** Un préstamo por $ 15.000.000 se paga con 4 cuotas trimestrales iguales más los intereses. Si la tasa de interés es del 7% trimestral. Construya el diagrama económico.

**4)** Construya el diagrama económico del ejercicio anterior, suponiendo que los intereses se cancelan de manera anticipada.

**5)** Roberto solicito prestado $ 6.300.000 para pagar en 4 meses. Si la tasa de interés es del 30% anual simple, ¿Qué cantidad debe pagar por concepto de intereses?

**6)** Pedro posee un capital de $ 3.200.000. Invierte 70% de su capital al 6,3% trimestral y el resto al 11,6% semestral. ¿Cuánto recibe cada mes de interés total?

## CAPÍTULO IX

## INTERÉS SIMPLE

Es importante anotar que, en realidad, desde el punto de vista teórico existen dos tipos de interés el Simple y el compuesto. Pero dentro del contexto práctico el interés compuesto, es el que se usa en todas las actividades económicas, comerciales y financieras. El interés simple, por no capitalizar intereses resulta siempre menor al interés compuesto, puesto que la base para su cálculo permanece constante en el tiempo, a diferencia del interés compuesto. El interés simple es utilizado por el sistema financiero informal, por los prestamistas particulares y prendarios. En este capítulo, se desarrollarán los conceptos básicos del interés simple.

### DEFINICIÓN DEL INTERÉS SIMPLE

Es aquel que se paga al final de cada periodo y por consiguiente el capital prestado o invertido no varía y por la misma razón la cantidad recibida por interés siempre va a ser la misma, es decir, no hay capitalización de los intereses.

La falta de capitalización de los intereses implica que con el tiempo se perdería poder adquisitivo y al final de la operación financiera se obtendría una suma total no equivalente a la original, por lo tanto, el valor acumulado no será representativo del capital principal o inicial.

El interés a pagar por una deuda, o el que se va a cobrar de una inversión, depende de la cantidad tomada en préstamo o invertida y del tiempo que dure el préstamo o la inversión, el interés simple varía en forma proporcional al capital (**P**) y al tiempo (**n**). El interés simple, se puede calcular con la siguiente relación:

$$\mathbf{I = P*i*n}$$

En concreto, de la expresión se deduce que el interés depende de tres elementos básicos: El capital inicial (**P**), la tasa de interés (**i**) y el tiempo (**n**).

En la ecuación (9.1) se deben tener en cuenta dos aspectos básicos:

a) La tasa de interés se debe usar en tanto por uno y/o en forma decimal; es decir, sin el símbolo de porcentaje.

b) La tasa de interés y el tiempo se deben expresar en las mismas unidades de tiempo. Si la unidad de tiempo de la tasa de interés no coincide con la unidad de tiempo del plazo, entonces la tasa de interés, o el plazo, tiene que ser convertido para que su unidad de tiempo coincida con la del otro. Por ejemplo, si en un problema específico el tiempo se expresa en trimestres, la tasa de interés deberá usarse en forma trimestral. Recuerde que si en la tasa de interés no se específica la unidad de tiempo, entonces se trata de una tasa de interés anual.

**Ejemplo**

Si se depositan en una cuenta de ahorros $ 5.000.000 y la corporación paga el 3% mensual. ¿Cuál es el pago mensual por interés?

P = $ 5.000.000
n = 1 mes

i = 3%/mes
I = P*i*n; I = 5.000.000 * 1 * 0.03 = $ 150.000/ mes

El depositante recibirá cada mes $ 150.000 por interés.

## CLASES DE INTERES SIMPLE

El interés se llama ordinario cuando se usa para su cálculo 360 días al año, mientras que será exacto si se emplean 365 o 366 días. En realidad, se puede afirmar que existen cuatro clases de interés simple, dependiendo si para el cálculo se usen 30 días al mes, o los días que señale el calendario. Con el siguiente ejemplo, se da claridad a lo expuesto con anterioridad.

**Ejemplo**

Una persona recibe un préstamo por la suma de $ 200.000 para el mes de marzo, se cobra una tasa de interés de 20% anual simple. Calcular el interés (I), para cada una de las clases de interés simple.

***Solución***:

a) **Interés ordinario con tiempo exacto**. En este caso se supone un año de 360 días y se toman los días que realmente tiene el mes según el calendario. Este interés, se conoce con el nombre de interés bancario; es un interés más costoso y el que más se utiliza.

$$I = pin = 200.000 x 0.20 x \frac{31}{360} = \$3.444.44$$

b) **Interés ordinario con tiempo aproximado**. En este caso se supone un año de 360 días y 30 días al mes. Se conoce con el nombre de interés comercial, se usa con frecuencia por facilitarse los cálculos manuales por la posibilidad de hacer simplificaciones

$$I = pin = 200.000 \times 0.20 \times \frac{30}{360} = \$3.333,33$$

c) **Interés exacto con tiempo exacto**. En este caso se utilizan 365 o 366 días al año y mes según calendario. Este interés, se conoce comúnmente con el nombre de interés racional, exacto o real, mientras que las otras clases de interés producen un error debido a las aproximaciones; el interés racional arroja un resultado exacto, lo cual es importante, cuando se hacen cálculos sobre capitales grandes, porque las diferencias serán significativas cuando se usa otra clase de interés diferente al racional. Lo importante, es realizar cálculos de intereses que no perjudiquen al prestamista o al prestatario.

$$I = pin = 200.000 \times 0.20 \times \frac{31}{365} = \$3.397,26$$

d) **Interés exacto con tiempo aproximado**. Para el cálculo de este interés se usa 365 o 366 días al año y 30 días al mes. No se le conoce nombre, existe teóricamente, no tiene utilización y es el más barato de todos.

$$I = pin = 200.000 \times 0.20 \times \frac{30}{365} = \$3.287,71$$

**Ejemplo 9.3**

Calcular el interés comercial y real de un préstamo por \$ 150.000 al 30% por 70 días

***Solución***

a) Interés comercial.

$$I = pin = 150.000 \times 0.30 \times \frac{70}{360} = \$8.750$$

b) Interés real o exacto

$$I = pin = 150.000 \times 0.30 \times \frac{70}{365} = \$8.630,14$$

Se observa que el interés comercial resulta más elevado que el interés real para el mismo capital, tasa de interés y tiempo. Esta ganancia adicional hace que el año comercial sea muy utilizado en el sector financiero y en el sector comercial que vende a crédito. Hay que recordar y dejar claro, que cuando el tiempo en un préstamo esta dado en días, es indispensable convertir la tasa de interés anual a una tasa de interés por día. Cuando la tasa anual se convierte a tasa diaria usando el año de 365 días o 366 si es bisiesto como divisor en la fórmula del interés simple o del monto, el interés obtenido se llama interés real o interés exacto. El año de 365 días o 366 se conoce como año natural.

Cuando se lleva a cabo la conversión usando como divisor 360 días, se dice que se está usando el año comercial. En este caso, el interés obtenido se llama interés comercial o interés ordinario. Si un problema no menciona de forma explícita cuál tipo de interés debe calcularse, entonces se supone que se trata del cálculo de un interés comercial.

**Desventajas del interés simple**

Se puede señalar tres desventajas básicas del interés simple:

a) Su aplicación en el mundo de las finanzas es limitada

b) No tiene o no considera el valor del dinero en el tiempo, por consiguiente, el valor final no es representativo del valor inicial.

c) No capitaliza los intereses no pagados en los períodos anteriores y, por consiguiente, pierden poder adquisitivo.

**Tabla de días**

Para realizar los cálculos de manera correcta, es necesario conocer el manejo de la tabla de días, para determinar en forma exacta los días que transcurren entre una fecha y otra, lo cual, es importante para el interés bancario y el racional La construcción de la tabla consiste en asignarle a cada día del año un número en forma consecutiva; esta asignación va desde el número 1, que corresponde al primero de enero, hasta el número 365, que corresponde al 31 de diciembre. Cuando el año es bisiesto, hay que adicionar un día, a partir del primero de marzo, por lo cual, el 31 de diciembre sería el día 366.

Para facilitar la identificación de las fechas, se seguirá el siguiente formato: los primeros dos dígitos indicaran los días, y variaran entre 01 y 31, los dos dígitos siguientes indicaran el mes, y variaran entre 01 y 12, y los últimos cuatros dígitos indicaran el año. Por ejemplo, el 14 de abril de 2004, se podrá expresar de la siguiente manera: 14-04-2004. La tabla de días se muestra a continuación:

*Tabla 1: tabla de cálculo de días para interés*

| DIA | ENE | FEB | MAR | ABR | MAY | JUN | JUL | AGO | SEP | OCT | NOV | DIC | DIA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 32 | 60 | 91 | 121 | 152 | 182 | 213 | 244 | 274 | 305 | 335 | 1 |
| 2 | 2 | 33 | 61 | 92 | 122 | 153 | 183 | 214 | 245 | 275 | 306 | 336 | 2 |
| 3 | 3 | 34 | 62 | 93 | 123 | 154 | 184 | 215 | 246 | 276 | 307 | 337 | 3 |
| 4 | 4 | 35 | 63 | 94 | 124 | 155 | 185 | 216 | 247 | 277 | 308 | 338 | 4 |
| 5 | 5 | 36 | 64 | 95 | 125 | 156 | 186 | 217 | 248 | 278 | 309 | 339 | 5 |
| 6 | 6 | 37 | 65 | 96 | 126 | 157 | 187 | 218 | 249 | 279 | 310 | 340 | 6 |
| 7 | 7 | 38 | 66 | 97 | 127 | 158 | 188 | 219 | 250 | 280 | 311 | 341 | 7 |
| 8 | 8 | 39 | 67 | 98 | 128 | 159 | 189 | 220 | 251 | 281 | 312 | 342 | 8 |
| 9 | 9 | 40 | 68 | 99 | 129 | 160 | 190 | 221 | 252 | 282 | 313 | 343 | 9 |
| 10 | 10 | 41 | 69 | 100 | 130 | 161 | 191 | 222 | 253 | 283 | 314 | 344 | 10 |
| 11 | 11 | 42 | 70 | 101 | 131 | 162 | 192 | 223 | 254 | 284 | 315 | 345 | 11 |
| 12 | 12 | 43 | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 | 12 |
| 13 | 13 | 44 | 72 | 103 | 133 | 164 | 194 | 225 | 256 | 286 | 317 | 347 | 13 |
| 14 | 14 | 45 | 73 | 104 | 134 | 165 | 195 | 226 | 257 | 287 | 318 | 348 | 14 |
| 15 | 15 | 46 | 74 | 105 | 135 | 166 | 196 | 227 | 258 | 288 | 319 | 349 | 15 |
| 16 | 16 | 47 | 75 | 106 | 136 | 167 | 197 | 228 | 259 | 289 | 320 | 350 | 16 |
| 17 | 17 | 48 | 76 | 107 | 137 | 168 | 198 | 229 | 260 | 290 | 321 | 351 | 17 |
| 18 | 18 | 49 | 77 | 108 | 138 | 169 | 199 | 230 | 261 | 291 | 322 | 352 | 18 |
| 19 | 19 | 50 | 78 | 109 | 139 | 170 | 200 | 231 | 262 | 292 | 323 | 353 | 19 |
| 20 | 20 | 51 | 79 | 110 | 140 | 171 | 201 | 232 | 263 | 293 | 324 | 354 | 20 |
| 21 | 21 | 52 | 80 | 111 | 141 | 172 | 202 | 233 | 264 | 294 | 325 | 355 | 21 |
| 22 | 22 | 53 | 81 | 112 | 142 | 173 | 203 | 234 | 265 | 295 | 326 | 356 | 22 |
| 23 | 23 | 54 | 82 | 113 | 143 | 174 | 204 | 235 | 266 | 296 | 327 | 357 | 23 |
| 24 | 24 | 55 | 83 | 114 | 144 | 175 | 205 | 236 | 267 | 297 | 328 | 358 | 24 |
| 25 | 25 | 56 | 84 | 115 | 145 | 176 | 206 | 237 | 268 | 298 | 329 | 359 | 25 |
| 26 | 26 | 57 | 85 | 116 | 146 | 177 | 207 | 238 | 269 | 299 | 330 | 360 | 26 |
| 27 | 27 | 58 | 86 | 117 | 147 | 178 | 208 | 239 | 270 | 300 | 331 | 361 | 27 |
| 28 | 28 | 59 | 87 | 118 | 148 | 179 | 209 | 240 | 271 | 301 | 332 | 362 | 28 |
| 29 | 29 | | 88 | 119 | 149 | 180 | 210 | 241 | 272 | 302 | 333 | 363 | 29 |
| 30 | 30 | | 89 | 120 | 150 | 181 | 211 | 242 | 273 | 303 | 334 | 364 | 30 |
| 31 | 31 | | 90 | | 151 | | 212 | 243 | | 304 | | 365 | 31 |

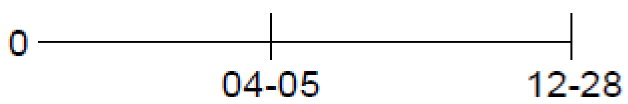
Nota: Cuando el año es bisiesto, a partir del primero de marzo se adiciona un día.

**Ejemplo**

Calcule los días transcurridos entre el 5 de abril de 2003 y 28 de diciembre del mismo año.

***Solución***

Según la tabla, los días transcurridos entre el inicio del año y el 5 de abril son 95, mientras; los días entre el inicio del año y el 28 de diciembre son 362, por lo tanto, por diferencia




362 – 95 = 267 días.

El cálculo realizado anteriormente, se refiere al año real o exacto, si desea calcular los días con base al año comercial (360 días, es decir, meses de 30 días), siga el siguiente procedimiento.

| | | Año | Mes | Día |
|---|---|---|---|---|
| | Fecha actual: | 2003 | 12 | 28 |
| (-) | Fecha inicial : | 2003 | 04 | 05 |
| | | 0 | 8 | 23 |

Son 8 meses y 23 días: 8x30 + 23 = 263 días

**Ejemplo**

Hallar los días transcurridos, entre el 20 mayo de 2001 y 25 de noviembre de 2002.

***Solución***

Teniendo en cuenta que la tabla está diseñada para un año,

20-05-2001 31-12-2001 25-11-2002

Ahora si el año se toma de 360 días, se obtendrá como respuesta 545 días.

se debe calcular, por separado los días que hay en cada año y luego sumarlos. Los días transcurridos entre el inicio del año 2001 y el 20 de mayo de 2001, son 140, por lo tanto, los días que hay entre el 20 de mayo de 2001 y el 31 de diciembre del mismo son: 365-140 = 225, mientras los días transcurridos entre el inicio del año 2002 y el 25 de noviembre de 2002, según la tabla son 329. Entonces, los días transcurridos entre el 20 mayo de 2001 y 25 de noviembre de 2002, son: 225 + 329 = 554 días

| | | Año | Mes | Día |
|---|---|---|---|---|
| | Fecha actual: | 2002 | 11 | 25 |
| (-) | Fecha inicial: | 2001 | 05 | 20 |
| | | 1 | 6 | 5 |

Son 1 año, 6 meses y 5 días: 1x360 + 6x30 + 5 = 545 días

## MONTO O VALOR FUTURO A INTERÉS SIMPLE

A la suma del capital inicial, más el interés simple ganado se le llama monto o valor futuro simple, y se simboliza mediante la letra **F**. Por consiguiente,

**F=P+I (9.2)**

Al reemplazar la ecuación (9.1) en la (9.2), se tiene,

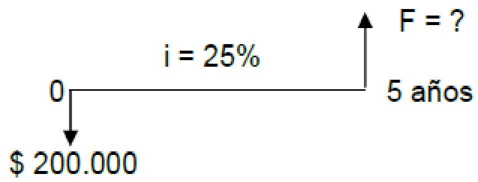
**F =P+Pin=P(1+in) (9.3)**

Las ecuaciones (9.2) y (9.3) indican que, si un capital se presta o invierte durante un tiempo **n**, a una tasa de simple **i%** por unidad de tiempo, entonces el capital ***P*** se transforma en una cantidad ***F*** al final del tiempo **n**. Debido a esto, se dice que el dinero tiene un valor que depende del tiempo.
El uso de la ecuación (9.3), requiere que la tasa de interés (**i**) y el número de períodos
(**n**) se expresen en la misma unidad de tiempo, es decir; que al plantearse el problema

**Ejemplo**

Hallar el monto de una inversión de $ 200.000, en 5 años, al 25% EA.

***Solución***




$$F = P(1+in) = 200.000(1+0,25x5) = \$450.000$$

**VALOR PRESENTE O ACTUAL A INTERÉS SIMPLE**

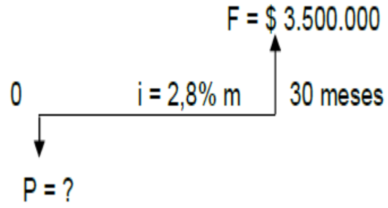
Se sabe que: F=P(1+in), y multiplicando a ambos lados por el inverso de (1 +in).

$$\mathbf{P = \frac{F}{(1+in)}} \quad \mathbf{(9.4)}$$

**Ejemplo**

Dentro de dos años y medio se desean acumular la suma de $ 3.500.000 a una tasa del 2.8% mensual, ¿Cuál es el valor inicial de la inversión?

***Solución:***




$$P = \frac{F}{(1+in)} = \frac{3.500.000}{(1+0,028\,x\,30)} = \$\ 1.902.173,91$$

De acuerdo al cálculo anterior, el valor presente, simbolizado por **P**, de un monto o valor futuro **F** que vence en una fecha futura, es la cantidad de dinero que, invertida hoy a una tasa de interés dada producirá el monto **F**. Encontrar el valor presente equivale a responder la pregunta: ¿Qué capital, invertido hoy a una tasa dada, por un período determinado, producirá un monto dado? En caso de una obligación el contexto, es exactamente el mismo, la pregunta sería: ¿Qué capital, prestado hoy a una tasa dada, por un período determinado, producirá un monto futuro a pagar?

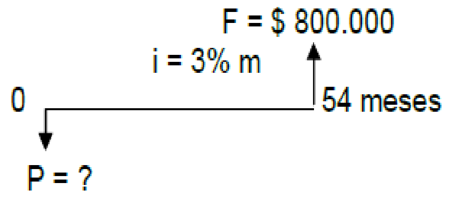
**Ejemplo**

Hallar el valor presente de $ 800.000 en 4 años y medio, al 3% mensual.

***Solución:***

a) De forma mensual

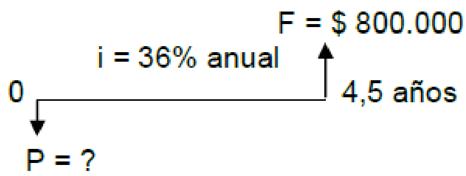
$n = 4.5x12 = 54$ meses




$$P=\frac{F}{(1+in)}=\frac{800.000}{(1+0,03x54)}=305.343.51$$

b) De forma anual

i = 0,03 x 12 = 36% anual




$$P=\frac{F}{(1+in)}=\frac{800.000}{(1+0,36x4,5)}=305.343.51$$

**Cálculo de la tasa de interés simple**

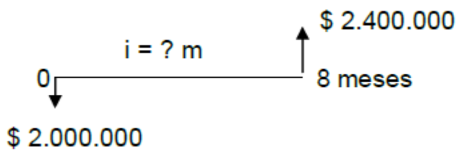
Partiendo que: F =P (1+ in), multiplicando a ambos lados por el inverso de **P** y restando uno a ambos lado de la ecuación se obtiene: $\frac{F}{P}-1=in$ , si luego se multiplica los dos términos de la ecuación por el inverso de **n**, resulta:

$$i=\frac{\left(\frac{F}{P}-1\right)}{n} \quad (9.5)$$

**Ejemplo**

Una persona le prestó a un amigo la suma de \$ 2.000.000 y paga después de 8 meses la suma de \$ 2.400.000 ¿Qué tasa de interés mensual simple le cobraron?

***Solución***




$$i=\frac{\left(\frac{F}{P}-1\right)}{n}=\frac{\left(\frac{2.400.000}{2.000.000}-1\right)}{8}=0.025\,m=2,5\%\,m$$

**Cálculo del tiempo(n)**

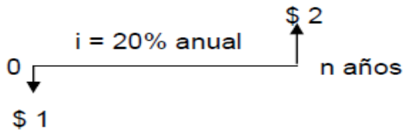
Partiendo que: F =P (1+ in), multiplicando a ambos lados por el inverso de **P** y restando uno a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$n=\frac{\left(\frac{F}{P}-1\right)}{i} \quad (9.6)$$

Si luego se multiplica los dos términos de la ecuación por el inverso de **i**, resulta:

**Ejemplo**

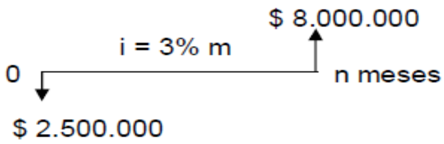
¿En cuánto tiempo se duplica un capital invertido al 20% de interés anual simple?




$$n=\frac{\left(\frac{F}{P}-1\right)}{i}=\frac{\left(\frac{2}{1}-1\right)}{0{,}20}=5\text{ años}$$

***Solución:***

**Ejemplo**
¿En cuánto tiempo se acumularían $ 8.000.000 si se depositan hoy $ 2.500.000 en un fondo que paga al 3% simple mensual?
***Solución:***




$$n=\frac{\left(\frac{F}{P}-1\right)}{i}=\frac{\left(\frac{8.000.000}{2.500.000}-1\right)}{0{,}03}=73{,}3\text{ meses}$$

**Ejercicios Propuestos**

**1)** Qué interés generan $ 850.000 en 6 meses al 2,8% mensual? **R/. $ 142.800**

**2)** Un CDT de $ 1.500.000 paga el 15% semestral; ¿cuánto produce de intereses al cabo de un año? **R/. $ 450.000**

**3)** En cuánto tiempo una inversión de $ 2.000.000 produce intereses de $ 700.000, si el capital se invirtió al 2,5% mensual. **R/. 14 meses**

**4)** Un inversionista adquirió 1.000 acciones a $ 3.200 cada una, a los 8 meses recibió
$ 896.000 de dividendos. ¿Cuál es la rentabilidad mensual y anual de la inversión?
**R/. 3,5% mensual, 42% anual**

**5)** En un préstamo de $ 8.000.000 a 3 años se pacta un interés del 7,5% trimestral para el primer año y del 12% semestral para los dos años siguientes. ¿Cuánto se espera de intereses en todo el plazo? **R/. $ 7.392.000**

**6)** Hallar el interés racional y el comercial de $ 450.000 en el mes de junio, al 20%. **R/.**
**$ 7.397,26 y $ 7.500**

**7)** Calcule el interés comercial y exacto de un préstamo de $ 5.000.000 al 28%, del 15 de abril del 2007 al 13 de agosto del mismo año. **R/. $ 466.666,67 y $ 460.273,97**

**8)** Obtenga el interés simple ordinario y real de 25.000 dólares, del 2 de enero de 2008 (año bisiesto) al 1 de agosto del mismo año. La tasa de interés es de 6,5%. **R/. $956,94 y $ 941,26**

**9)** ¿Cuánto dinero debo depositar hoy 25 de abril en una cuenta que paga el 23% imple real para que el 28 de julio pueda retirar $ 60.000. **R/. 56.644,77**

**10)** Una letra por valor de $ 600.000 va a ser descontada por un banco 35 días antes del vencimiento al 38%. ¿Calcular la tasa bancaria que realmente está cobrando el banco? **R/. $ 577.833,33 y 39,46%.**

**11)** Una empresa desea depositar $ 4.350.000 a un plazo de 200 días, y deberá decidir si deposita el dinero en el Banco X, que paga el 20% de interés comercial, o en el Banco Y, que paga el 21% de interés real. ¿En qué Banco le conviene depositar? **R/. Conviene depositar en el Banco Y**

**12)** Calcule el monto o valor futuro de un préstamo de $2.000.000 al 30% de interés simple y 10 meses de plazo. **R/. $ 2.500.000**

**13)** ¿Cuánto pagará un comerciante por un crédito que le concedió una fábrica por la suma de $ 918.300 a 25 días, si le aplican una tasa de interés de 3% mensual? **R/. $ 941.257,5**

**14)** Encuentre el valor presente de $ 3.800.000 que vence dentro de 7 meses, si la tasa de interés es del 25%. **R/. $ 3.316.363,64**

# CAPÍTULO X

## INTERÉS COMPUESTO.

El interés compuesto, es un sistema que capitaliza los intereses, por lo tanto, hace que el valor que se paga por concepto de intereses se incremente mes a mes, puesto que la base para el cálculo del interés se incrementa cada vez que se liquidan los respectivos intereses. El interés compuesto es aplicado en el sistema financiero; se utiliza en todos los créditos que hacen los bancos sin importar su modalidad. La razón de la existencia de este sistema, se debe al supuesto de la reinversión de los intereses por parte del prestamista.

## DEFINICIÓN DE INTERÉS COMPUESTO

Es aquel en el cual el capital cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital denominado monto y sobre este monto volver a calcular intereses, es decir, hay capitalización de los intereses. En otras palabras, s

e podría definir como la operación financiera en la cual el capital aumenta al final de cada periodo por la suma de los intereses vencidos. La suma total obtenida al final se conoce con el nombre de *monto compuesto o valor futuro*. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le denomina interés compuesto y para su cálculo se puede usar sin ningún problema la igualdad (9.1) del capítulo anterior.

El interés compuesto es más flexible y real, ya que valora periodo a periodo el dinero realmente comprometido en la operación financiera y por tal motivo es el tipo de interés más utilizado en las actividades económicas.

Lo anterior, hace necesario una correcta elaboración del diagrama de tiempo y lo importante que es ubicar en forma correcta y exacta el dinero en el tiempo.

Por último, es conveniente afirmar que el interés compuesto se utiliza en la Ingeniería Económica, Matemática Financieras, Evaluación de Proyectos y en general por todo el sistema financiero colombiano.

**Ejemplo 10.1**

Una persona invierte hoy la suma de $ 100.000 en un CDT que paga el 7% cuatrimestral, se solicita mostrar la operación de capitalización durante dos años

*Tabla 2: Intereses cuatrimestrales*

| Periodo | Cap. Inicial (P) | Interés | Monto (F) |
|---|---|---|---|
| 0 | 100,000.0000 | | 100,000.0000 |
| 1 | 100,000.0000 | 7,000.0000 | 107,000.0000 |
| 2 | 107,000.0000 | 7,490.0000 | 114,490.0000 |
| 3 | 114,490.0000 | 8,014.3000 | 122,504.3000 |
| 4 | 122,504.3000 | 8,575.3010 | 131,079.6010 |
| 5 | 131,079.6010 | 9,175.5721 | 140,255.1731 |
| 6 | 140,255.1731 | 9,817.8621 | 150,073.0352 |

En la tabla 3, se aprecia que los intereses cuatrimestrales se calculan sobre el monto acumulado en cada periodo y los intereses se suman al nuevo capital para formar un nuevo capital para el periodo siguiente, es decir, se presenta capitalización de intereses, con el objeto de conservar el poder adquisitivo del dinero a través del tiempo.

Para el cálculo del interés se usó la fórmula: I=Pin, mientras que para el monto se utilizó: F=P+I ; ecuaciones que fueron definidas con anterioridad

**Subdivisión del interés compuesto.**

El interés compuesto se puede subdividir de la siguiente manera:

a) **Interés compuesto discreto**: Se aplica con intervalos de tiempos finitos.

b) **Interés compuesto continuo:** Se aplica en una forma continua, o sea que los intervalos de tiempo son infinitesimales.

Sin importar el hecho de que el interés sea discreto o continuo y para dar una definición precisa del interés compuesto, es conveniente indicar los siguientes aspectos.

**Tasa de interés:** Es el valor del interés que se expresa como un porcentaje. Ej.

5%. 10%, 20%.

**Periodo de aplicación**: Es la forma como se aplicará el interés. Ej. 2% mensual,

20% anual compuesto trimestralmente, 18% anual compuesto continuamente.

**Base de aplicación**: Es la cantidad de dinero sobre la cual se aplicará el interés para cada periodo. Ej. 20% anual compuesto trimestralmente sobre el saldo mínimo trimestral.

**Forma de aplicación**: Es el momento en el cual se causa el interés. Ej. 2% mensual por adelantado, 18% anual por trimestre vencido.

**Comparación entre el interés simple y compuesto**
La comparación entre el interés simple e interés compuesto, se hará a partir del siguiente ejemplo.
**Ejemplo 10.2**
Suponga que se una persona invierte $ 1.000 a un interés del 2.5% mensual durante
12 meses, al final de los cuales espera obtener el capital principal y los intereses obtenidos. Suponer que no existen retiros intermedios. Calcular la suma final recuperada.

*Tabla 3 comparación de intereses simple y compuesto*

| Periodo | Capital Inicial o Presente | | Intereses | | Monto final o Futuro | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Simple | Compuesto | Simple | Compuesto | Simple | Compuesto |
| 1 | 1.000 | 1.000,00 | 25 | 25,00 | 1.025 | 1.025,00 |
| 2 | 1.000 | 1.025,00 | 25 | 25,63 | 1.050 | 1.050,63 |
| 3 | 1.000 | 1.050,63 | 25 | 26,27 | 1.075 | 1.076,90 |
| 4 | 1.000 | 1.076,90 | 25 | 26,92 | 1.100 | 1.103,82 |
| 5 | 1.000 | 1.103,82 | 25 | 27,59 | 1.125 | 1.131,41 |
| 6 | 1.000 | 1.131,41 | 25 | 28,29 | 1.150 | 1.159,70 |
| 7 | 1.000 | 1.159,70 | 25 | 28,99 | 1.175 | 1.188,69 |
| 8 | 1.000 | 1.188,69 | 25 | 29,72 | 1.200 | 1.218,41 |
| 9 | 1.000 | 1.218,41 | 25 | 30,46 | 1.225 | 1.248,87 |
| 10 | 1.000 | 1.248,87 | 25 | 31,22 | 1.250 | 1280,09 |
| 11 | 1.000 | 1.280,09 | 25 | 32,00 | 1.275 | 1312,09 |
| 12 | 1.000 | 1.312,09 | 25 | 32,80 | 1.300 | 1.344,89 |

En la tabla se observa que el monto a interés simple crece en forma aritmética y su gráfica es una línea recta. Sus incrementos son constantes y el interés es igual en cada periodo de tiempo. El monto a interés compuesto, en cambio, crece en forma geométrica y su gráfica corresponde a la de una función exponencial. Sus incrementos son variables. Cada periodo presenta un incremento mayor al del periodo anterior. Su ecuación es la de una línea curva que asciende a velocidad cada vez mayor.
En el diagrama anterior se puede observar que los flujos ubicados en el periodo **3**, **5** y **n-2**, son valores futuros con respecto al periodo **1** o **2**, pero serán presente con respecto a los periodos **n-1** o **n**

**Periodo**
El tiempo que transcurre entre un pago de interés y otro se denomina periodo y se simboliza por **n**, mientras que el número de periodos que hay en un año se representa por **m** y representa el número de veces que el interés se capitaliza

durante un año y se le denomina ***frecuencia de conversión o frecuencia de capitalización***.

A continuación, se presenta una tabla que muestra las frecuencias de capitalización más utilizadas o comunes.

*Tabla 4 : Frecuencias de capitalización*

| ***Capitalización intereses*** | ***Frecuencia conversión*** |
|---|---|
| Diaria | 365 |
| Semanal | 52 |
| Quincenal o Bimensua | 24 |
| Mensual | 12 |
| Bimestral | 6 |
| Trimestral | 4 |
| Cuatrimestral | 3 |
| Semestral | 2 |
| Anual | 1 |

En un ejercicio o problema de interés compuesto al especificar la tasa de interés se menciona inmediatamente el periodo de capitalización. Por ejemplo:
30% Anual capitalizable o convertible diariamente.
28% Liquidable o capitalizable semanalmente.
24% Capitalizable Quincenalmente.
36% Anual convertible mensualmente.
32% Anual liquidable bimestralmente.
40% Anual capitalizable Trimestralmente.
20% Anual compuesto cuatrimestralmente.
35% Anual convertible semestralmente.
18% Anual liquidable anualmente.
Si no se especifica el periodo de referencia, éste se debe entender de forma anual. Es decir, 28% Liquidable o capitalizable semanalmente, es lo mismo, que si se manifestara 28% Anual Liquidable o capitalizable semanalmente.
El periodo de capitalización es un dato indispensable en la solución de problemas de interés compuesto. Al realizar un cálculo de interés compuesto es necesario que la tasa de interés esté expresada en la misma unidad de tiempo que el periodo de capitalización.

**Ejemplo 10.3**

Si un documento ofrece pagos semestrales y tiene una duración de 3 años. ¿Cuánto vale m y n?

***Solución:***

Un año tiene 2 semestre, por lo tanto, **m = 2**.

Teniendo que la obligación financiera dura 3 años, el número de veces que el documento paga interés por año será 2, por consiguiente, en 3 años, pagará 6 veces, lo que indica que **n = 6**

**Valor futuro equivalente a un presente dado**

El valor futuro, se puede encontrar a partir de un valor presente dado, para lo cual, se debe especificar la tasa de interés y el número de períodos, y a partir de la siguiente demostración, se determina la fórmula que permite calcular el valor futuro.

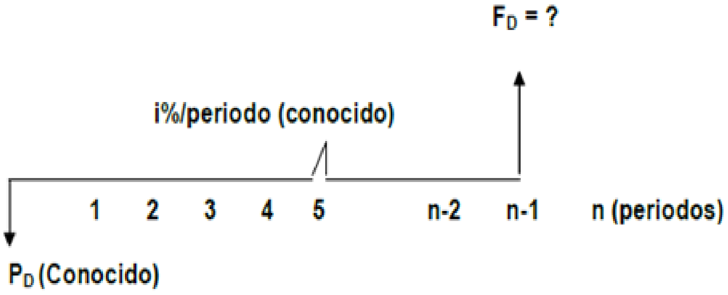
| PERIODO | CAPITAL INICIAL | INTERES | CAPITAL FINAL |
|---|---|---|---|
| 1 | $P$ | $Pi$ | $F_1 = P + Pi = P(1+i)$ |
| 2 | $P(1+i)$ | $P(1+i)i$ | $F_2 = P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$ |
| 3 | $P(1+i)^2$ | $P(1+i)^2 i$ | $F3 = P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$ |
| 4 | $P(1+i)^3$ | $P(1+i)^3 i$ | $F4 = P(1+i)^3 + P(1+i)^3 i = P(1+i)^3(1+i) = P(1+i)^4$ |
| : | : | : | : |
| : | : | : | : |
| N | $P(1+i)^{n-1}$ | $P(1+i)^{n-1}$ | $Fn = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1} i = P(1+i)^{n-1}(1+i) = P(1+i)^n$ |

Se concluye entonces que; donde:

$$F = P(1+i)^n \quad (10.1.)$$

F = Monto o valor futuro.
P = Valor presente o valor actual.
I = tasa de interés por periodo de capitalización.
n = Número de periodos ó número de periodos de capitalización.
La anterior fórmula se puede expresar mnemotécnicamente de la siguiente manera:
F = P (F/P, i, n); que se lee así: hallar F dado P, una tasa i y n periodos.
La forma nemotécnica se emplea cuando se usan las tablas financieras que normalmente se encuentran al final de los libros de ingeniería económica o de matemáticas financieras.
El término (F/P, i, n) se conoce con el nombre de factor y es un valor que se encuentra en las tablas financieras. El factor corresponde al elemento $(1+i)^n$ de la fórmula, que se

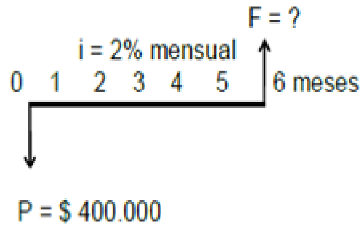
conoce con el nombre de *factor de acumulación en pago único*.




**Ejemplo 10.4**

¿Cuánto dinero se tiene dentro de seis meses en una cuenta de ahorros que reconoce el 2% mensual si hoy se invierte en una corporación $400.000?.

***Solución:***



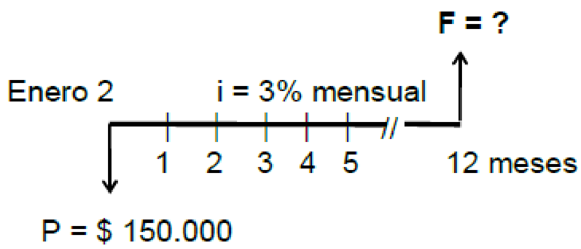

**$F = P(1+i)^n$** ; por consiguiente: $F = 400.000(1+0.02)^6$ = $ 450.465,

En las matemáticas financieras toda fórmula tiene asociada un diagrama económico, para la expresada anteriormente seria: El valor de **Va** se toma negativo ya que se trata de una inversión, para encontrar la respuesta se debe estar ubicado en la celda **B4**, siempre se debe hacer un clic sobre la opción aceptar de la venta de argumentos de función de **VF**. Introduzca los otros valores en las celdas tal como se señala en la hoja de Excel.

**Ejemplo 10.5**

El 2 de enero se consignó $150.000 en una cuenta de ahorros y deseo saber cuánto puedo retirar al finalizar el año, si me reconocen una tasa de interés mensual igual a 3%

***Solución:***

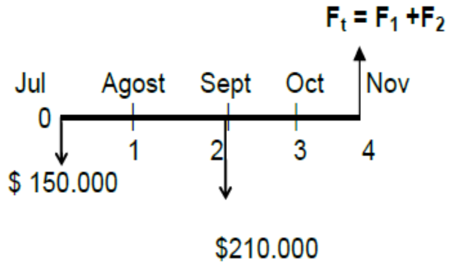



**$F = P(1+i)^n$** ; por lo tanto: $F = 150.000(1+0.03)^{12}$ = $ 213.864

**Ejemplo 10.6**

Al iniciar los meses de julio y septiembre me propongo ahorrar \$150.000 y \$210.000 respectivamente y deseo consignarlos en una corporación que me reconoce el 4% mensual. ¿Cuánto dinero tengo el primero de noviembre?

***Solución:***




$P_1$ = \$ 150.000      $P_2$ = \$ 210.000      i = 0.04 mensual.

$F_1 = P_1(1+i)^n$ ; $F_1 = 150.000(1+0.04)^4$ ; $F_1 = 150.000\ (1.04)^4 =$ \$ 175.479
$F_2 = P_2(1+i)^n$ ; $F_2 = 210.000(1+0.04)^4$ ; $F_2 = 210.000(1.04)^2 =$ \$ 227.136

$F_t = F_1 + F_2 = 175.479 + 227.136 =$ \$ 402.615;

## CÁLCULO DEL VALOR PRESENTE EQUIVALENTE DE UN FUTURO DADO.

Sabemos que $\mathbf{F = P(1+i)^n}$ ; por lo tanto, $\mathbf{P = F(1+i)^{-n}}$ **(10.2)**

El valor presente se puede definir, como el capital que, prestado o invertido ahora, a una tasa de interés dada, alcanzará un monto específico después de un cierto número de periodos de capitalización.

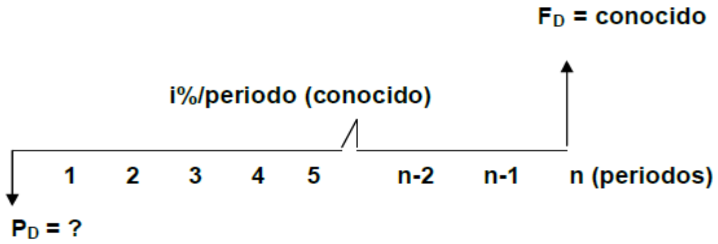
La anterior fórmula se puede expresar mnemotécnicamente de la siguiente manera:

**P= F (P/F, i, n);** que se lee así: hallar **P** dado **F**, una tasa **i** y **n** periodos.

La forma mnemotécnica se emplea cuando se usan las tablas financieras que normalmente se encuentran al final de los libros de ingeniería económica o de las matemáticas financieras.

El término **(P/F, i, n)** se conoce como el nombre de factor y es un valor que se encuentra en las tablas financieras. El factor corresponde al elemento $\mathbf{(1+i)^{-n}}$ de la fórmula, se conoce con el nombre de ***factor de descuento o factor de valor presente para pago único***.

El diagrama económico para la fórmula expresada anteriormente seria:

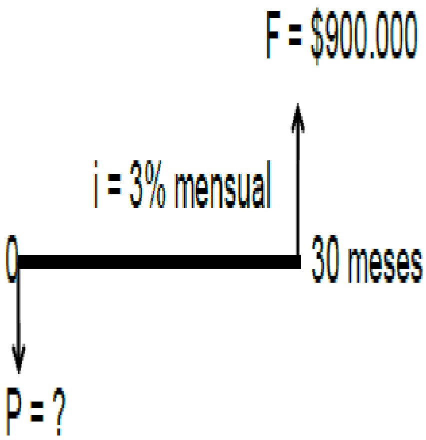



**Ejemplo 10.7**

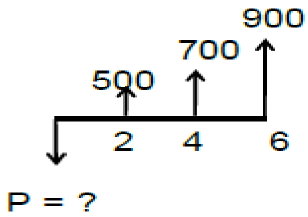
Dentro de dos años y medio deseo cambiar mi actual maquinaria empacadora por una de mayor capacidad. En esa fecha, estimo que puedo venderla por \$ 300.000 y la de mayor capacidad estará costando \$1.200.000 ¿Cuánto capital debo consignar en una entidad financiera que paga el 3% mensual, si deseo adquirir la nueva maquinaria?

***Solución:***

Como la actual maquinaria la vendería por \$ 300.000 dentro de dos años y medio y la nueva tendría un costo de \$ 1.200.000, realmente debo tener consignado en la entidad financiera en esa fecha \$ 900.000.




Se tiene que: $P = F(1+i)^{-n} = 900.000(1+0.03)^{-30} = \$370.788,08$ ;




**Ejemplo 10.8**

Calcule **P** en el siguiente diagrama de flujo si i = 10%.

***Solución:***

Hay que considerar que cada valor que está a la derecha de **P**, es un valor futuro (**F**).

Según el diagrama se tendrá:

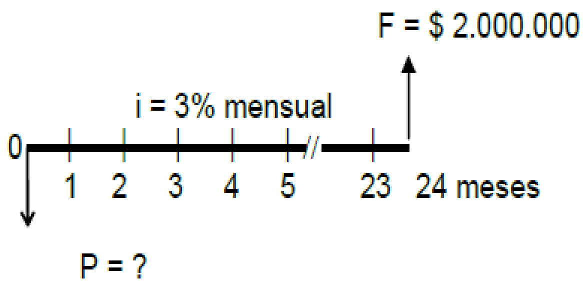
$P = F(1+i)^{-n} = 500(1+0.10)^{-2} + 700(1+0.10)^{-4} + 900(1+0.10)^{-6} = 413,22 + 478,10 + 508,02$

$$\boxed{P = \$\ 1.399,36}$$

**Ejemplo 3.9**

¿Qué capital es necesario invertir hoy en una institución que capitaliza el 3% mensual a fin de obtener en dos años $ 2.000.000?

***Solución:***

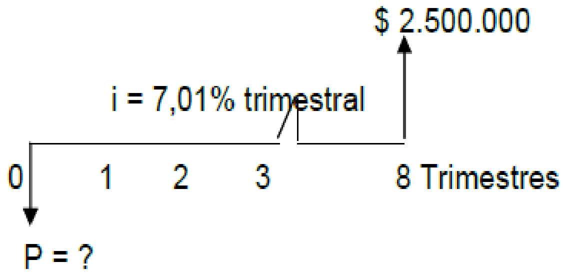



$$P = F(1+i)^{-n} = 2.000.000(1+0,003)^{-24} = \$983.867,47;$$

**Ejemplo 10.10**

Una persona desea invertir hoy una suma de dinero en una institución financiera para retirar $ 2.500.000 dentro de 2 años ¿Cuál será la suma a depositar si el rendimiento reconocido es de 7,01 trimestral?

***Solución:***
Como el interés que se da en el ejercicio es trimestral, y teniendo en cuenta que debe haber una relación de homogeneidad entre i y n, los dos años se hacen equivalentes 8 trimestres.



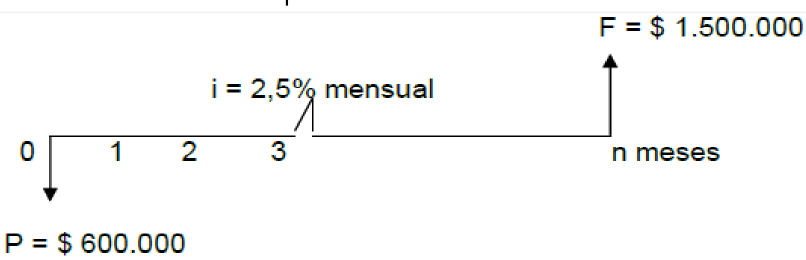

$$P = F(1+i)^{-n} = 2.500.000(0,0701)^{-8} = \$1.453.935,35\ ;$$

**CALCULO DEL NÚMERO DE PERIODOS.**

Sabemos que: $F = P(1+i)^{n}$; despegando se tiene: $\left(\frac{F}{P}\right) = (1+i)^{n}$ ; aplicando logaritmos tenemos: $Ln\left(\frac{F}{P}\right) = nLn(1+i)$; de donde: $\mathbf{n = \dfrac{Ln\left(\frac{F}{P}\right)}{Ln(1+i)}}$ **(10.3)**

Se puede hallar **n** por medio del uso de la mnemotecnia; **F = P(F/P, i, n) ó P= F(P/F, i, n)**.

**Ejemplo 10.11**
¿A cuánto tiempo $ 1.500.000 es equivalente a $ 700.000 hoy, sabiendo que el interés que gana el dinero es del 2?5% mensual?
***Solución:***
Como la tasa de interés está dada en término mensual, entonces el número de periodos será también en meses.



Se sabe que: $$n=\frac{\ln\left(\frac{F}{p}\right)}{\ln(1+i)}=\frac{\ln\left(\frac{1.500.000}{600.000}\right)}{\ln(1+0.025)}=\frac{\ln(2,5)}{\ln(1,025)}=37,10 \text{ meses}$$

## Calculo de la tasa de Interés (i).

Se sabe que: $F=P(1+i)^{n}$, despejando se obtiene: $\left(\frac{F}{P}\right)=(1+i)^{n}$, aplicando raíz e-enésima a ambos lado de la ecuación se tiene: $\left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}}=(1+i)^{\frac{n}{n}}$, por lo tanto;

$$\mathbf{i}=\left(\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{P}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}}-\mathbf{1} \quad \mathbf{(3.4)}$$

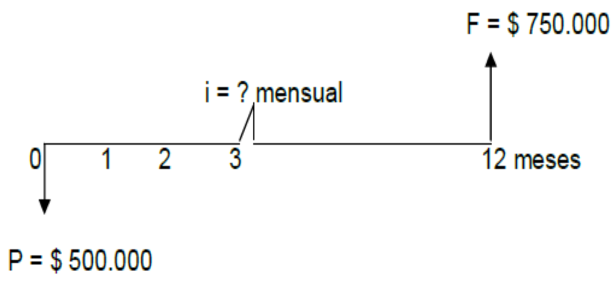
Se puede hallar **i** por medio del uso de las mnemotecnia **F = P(F/P, i, n)** ó **P= F(P/F, i, n)**.

### Ejemplo 10.12

Hace un año se hizo un depósito de $500.000 en una corporación y hoy el saldo en dicha cuenta es de $750.000. ¿Cuál es la tasa de interés mensual que reconoce la corporación?

***Solución:***

Como la tasa de interés que se pide es mensual, entonces, el número de periodos deberá ser expresado en meses, por lo cual, un año equivale a 12 meses.




Se sabe que: $\mathbf{i = (F/P)^{1/n} - 1}$ ; por consiguiente: $i = (750.000/500.000)^{1/12} - 1$ ;

Entonces $i = (1,5)^{1/12} - 1 = 0,03466$ mensual; de donde: **$i = 3,4366$ % mensual**

# CAPÍTULO XI: MATEMÁTICAS ADMINISTRACIÓN PROYECTOS

## PROYECTO.

Es una serie de trabajos que, por lo habitual, se dirigen hacia un producto mayor y cuyo desempeño requiere de un periodo considerable.

**Administración de proyectos**

Se lo define como la planeación, la dirección y el control de recursos (personas, equipamiento y materiales) para poder sujetarse a las limitantes técnicas, de costo y de tiempo del proyecto.

Con frecuencia se piensa que los proyectos sólo ocurren una vez, pero la realidad es que muchos de ellos se repiten o trasladan a otros contextos o productos. El resultado será otro producto del proyecto. El contratista que construye casas o la empresa que fabrica productos en poco volumen, como supercomputadoras, locomotoras o aceleradores lineales, de hecho, puede pensar que se trata de proyectos.

**Estructuración de los proyectos**

Existen diferentes tipos de proyectos y la alta gerencia debe decidir cuál de estas tres estructuras organizacionales utilizará para ligar el proyecto a la empresa matriz: un proyecto puro, un proyecto funcional o un proyecto matricial. A continuación, se explican las ventajas y las desventajas de estas tres formas básicas.

## PROYECTO PURO

**Proyecto puro** (llamado *trabajo de madriguera*), en cuyo caso un equipo auto contenido trabaja de tiempo completo en el proyecto.

**Ventajas**

- El gerente del proyecto tiene plena autoridad sobre el mismo.
- Los miembros del equipo dependen de un jefe. No tienen que preocuparse por dividir su lealtad con el gerente de un área funcional.
- Las líneas de comunicación son más cortas. Las decisiones se toman con rapidez.

- El orgullo, la motivación y el compromiso del equipo son enormes.

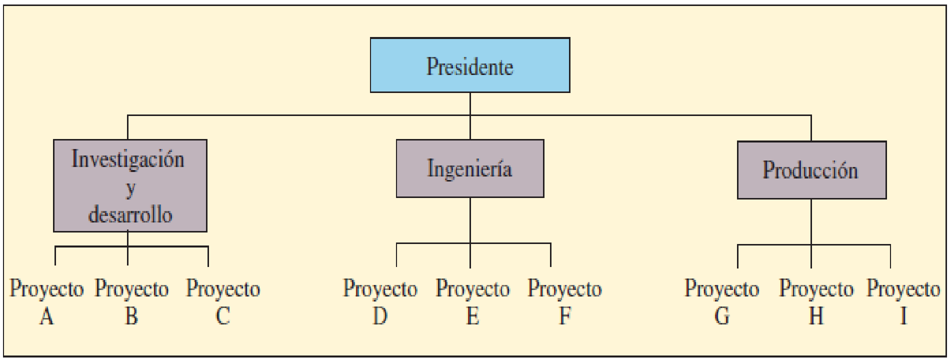
**Desventajas**

- Duplicación de recursos. El equipamiento y las personas no son compartidos entre proyectos.
- Las metas y las políticas de la organización son ignoradas, dado que los miembros del equipo muchas veces están lejos, en términos físicos y psicológicos, de la oficina matriz.
- La organización se rezaga en su conocimiento de la nueva tecnología porque las divisiones funcionales se debilitan.
- Dado que los miembros del equipo no tienen hogar en un área funcional, se preocupan por su vida después del proyecto, y demoran la conclusión del mismo.

## PROYECTO FUNCIONAL

En el otro extremo del espectro de la organización de proyectos está el proyecto funcional, el cual aloja el proyecto dentro de una división funcional.

GRÁFICO N.: 9 PROYECTO FUNCIONAL




**Ventajas**

- Un miembro de un equipo puede trabajar en varios proyectos.
- La experiencia técnica se conserva dentro del área funcional a pesar de que los individuos abandonen el proyecto o la organización.
- El área funcional es un hogar una vez que se ha terminado el proyecto. Los especialistas en las funciones pueden avanzar en un plano vertical.
- Una masa crítica de expertos especializados en un área funcional crea soluciones sinérgicas para los problemas técnicos del proyecto.

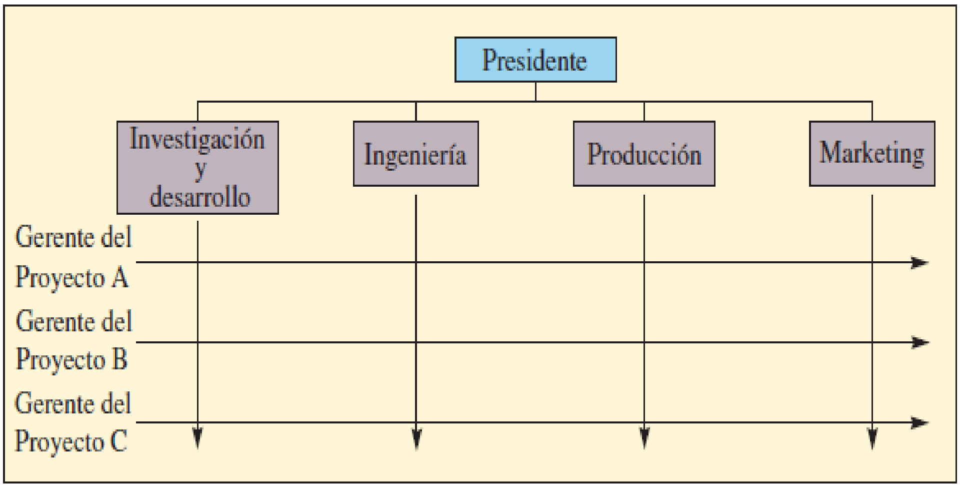
**Desventajas**

- Algunos de los aspectos del proyecto que no están relacionados directamente con el área funcional no salen bien librados.
- La motivación de los miembros del equipo suele ser poca.
- Las necesidades del cliente ocupan un segundo lugar y se responde a ellas con lentitud.

**PROYECTO MATRICIAL**

La forma clásica de organización especializada, o "el proyecto matricial", busca mezclar las propiedades de la estructura del proyecto puro y la del funcional. Cada proyecto utiliza a personas de distintas áreas funcionales. El gerente del proyecto (GP) decide cuáles tareas se desempeñarán y cuándo, pero los gerentes funcionales controlan cuáles personas y tecnologías se emplearán. Si se opta por la forma de matriz, distintos proyectos (hileras de la matriz) toman recursos a préstamo de las áreas funcionales (columnas). A continuación, la alta gerencia debe decidir si se utilizará una matriz de forma débil, equilibrada o fuerte. Esto determina si los gerentes del proyecto tendrán poca, igual o más autoridad que los gerentes funcionales con los cuales negocian para obtener recursos.

GRÁFICO N.: 10 PROYECTO MATRICIAL




**Ventajas**

- Se fortalece la comunicación entre las divisiones funcionales.
- El gerente de un proyecto es el encargado de que el proyecto llegue a buen término.
- La duplicación de recursos se reduce al mínimo.

- Los miembros del equipo tienen un “hogar” funcional una vez que se ha terminado el proyecto, por lo cual están menos preocupados por su existencia después del proyecto que si estuvieran dentro de un proyecto puro.
- Se siguen las políticas de la organización matriz, lo cual incrementa el apoyo que se brinda al proyecto.

**Desventajas**

- Hay dos jefes. Con frecuencia se hace más caso al gerente funcional que al del proyecto. Al final de cuentas, ¿quién está en posición de prometerle u otorgarle un aumento de sueldo?
- Está condenado al fracaso a no ser que el GP tenga sólidas habilidades para la negociación.
- La suboptimización representa un peligro, dado que los GP acaparan recursos para sus proyectos, afectando con ello otros proyectos.

## ESTRUCTURA DE LA DIVISIÓN DEL TRABAJO

Todo proyecto comienza con un enunciado de trabajo ET. Este enunciado puede ser una descripción por escrito de los objetivos que se alcanzarán, con una breve reseña del trabajo que se desempeñará y un calendario propuesto que plantea la fecha de inicio y la de conclusión.

Tarea: representa una subdivisión más de un proyecto. Por lo general sólo dura algunos meses y es desempeñada por un grupo u organización.

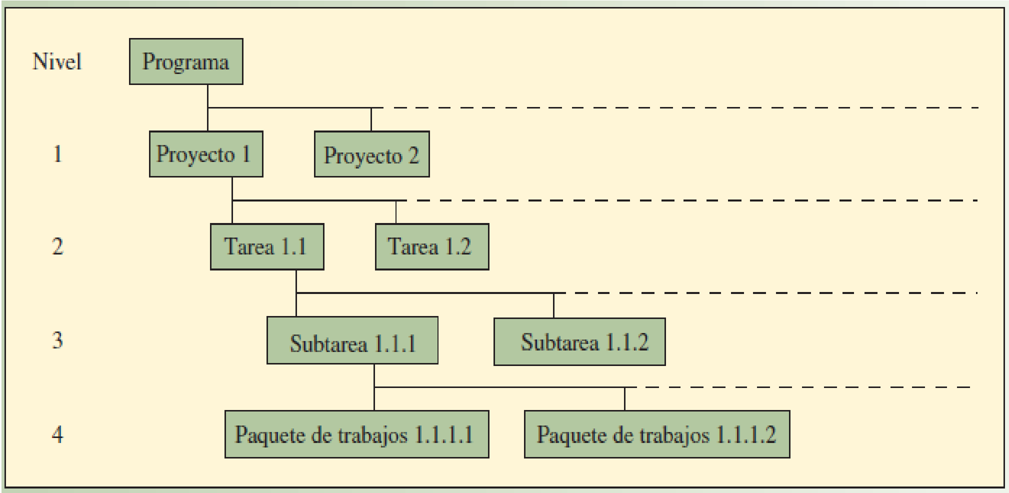
**SubTarea:**

Para subdividir el proyecto en partes que tengan mayor sentido.

Paquete de Trabajo: es un grupo de actividades combinadas que serán asignadas a una sola unidad organizacional. El paquete sigue adoptando el formato de toda administración de proyectos y presenta una descripción de lo que se hará, cuándo se iniciará y concluirá, el presupuesto, las medidas del desempeño y los hechos específicos que deben estar terminados en puntos determinados de tiempo.

En el gráfico se aprecia una estructura de trabajo

GRÁFICO N.: 11 Ejemplo de una estructura de la división del trabajo




**Actividades**

Se definen dentro del contexto de la estructura de división del trabajo y son partes del trabajo que consumen tiempo. Las actividades no requieren necesariamente que las personas hagan un esfuerzo, aun cuando es frecuente que sí lo requieran. Por ejemplo, esperara que la pintura se seque podría ser una actividad dentro de un proyecto.

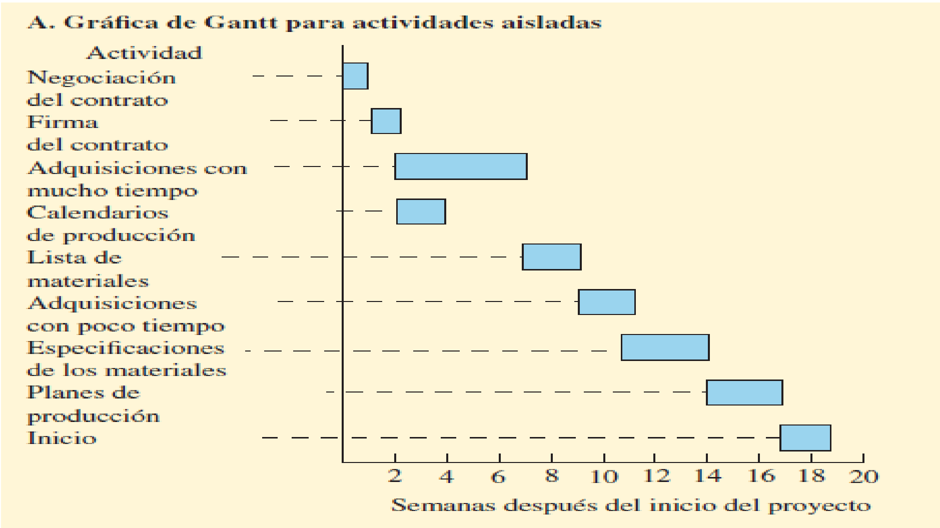
En la gráfica siguiente se puede ver un ejemplo de estructura de división de trabajo del diseño de un escáner óptico mayor.

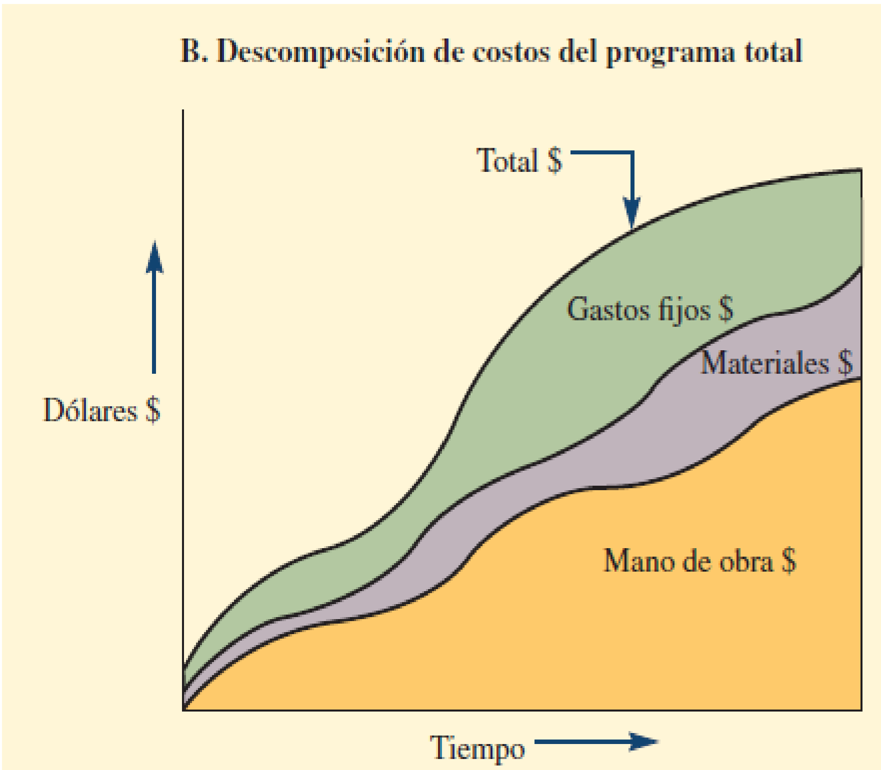
GRÁFICO N.: 12 División de trabajo del diseño de un escáner óptico mayor

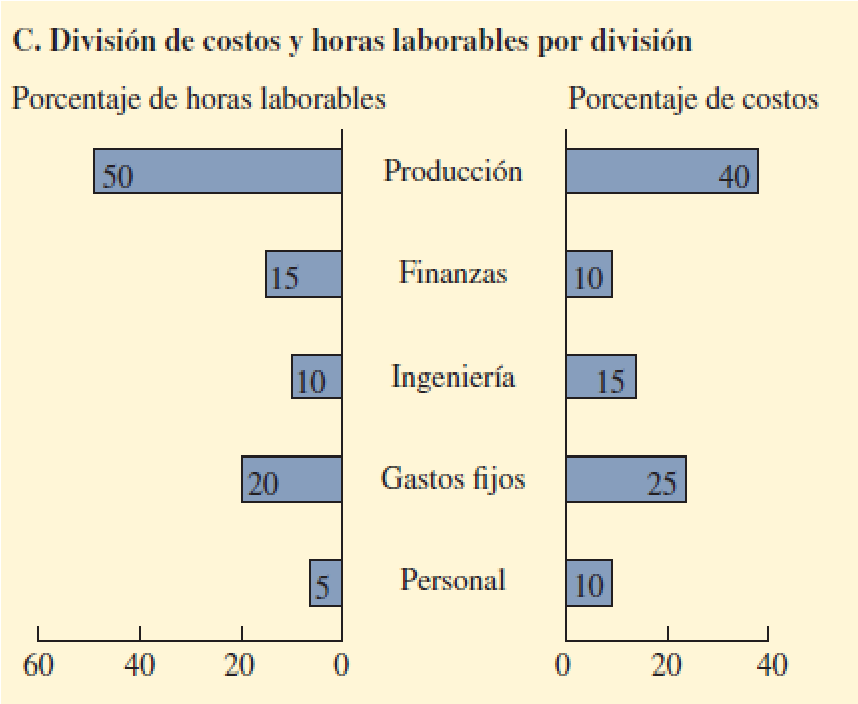
| Nivel 1 | Nivel 2 | Nivel 3 | Nivel 4 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | | | | 1 | Diseño del simulador óptico |
| | x | | | 1.1 | Diseño óptico |
| | | x | | 1.1.1 | Diseño del telescopio/enorme |
| | | x | | 1.1.2 | Interfaz telescopio/simulador óptico |
| | | x | | 1.1.3 | Diseño del sistema simulador del zoom |
| | | x | | 1.1.4 | Especificación auxiliar del componente del simulador óptico |
| | x | | | 1.2 | Análisis del desempeño del sistema |
| | | x | | 1.2.1 | Control general del sistema del firmware y el software |
| | | | x | 1.2.1.1 | Generación y análisis del diagrama de flujo lógico |
| | | | x | 1.2.1.2 | Diseño básico del algoritmo de control |
| | | x | | 1.2.2 | Analizador del rayo de distancia |
| | | x | | 1.2.3 | Diseño del método de inter e intraalineación del sistema |
| | | x | | 1.2.4 | Requerimientos de registro y reducción de los datos |
| | x | | | 1.3 | Integración del sistema |
| | x | | | 1.4 | Análisis de costos |
| | | x | | 1.4.1 | Análisis de costos/programa del sistema |
| | | x | | 1.4.2 | Análisis de costos/desempeño del sistema |
| | x | | | 1.5 | Administración |
| | | x | | 1.5.1 | Administración del diseño/ingeniería del sistema |
| | | x | | 1.5.2 | Administración del programa |
| | x | | | 1.6 | Adquisición de bienes con mucho tiempo |
| | | x | | 1.6.1 | Ópticos grandes |
| | | x | | 1.6.2 | Componentes del objetivo |
| | | x | | 1.6.3 | Detectores |

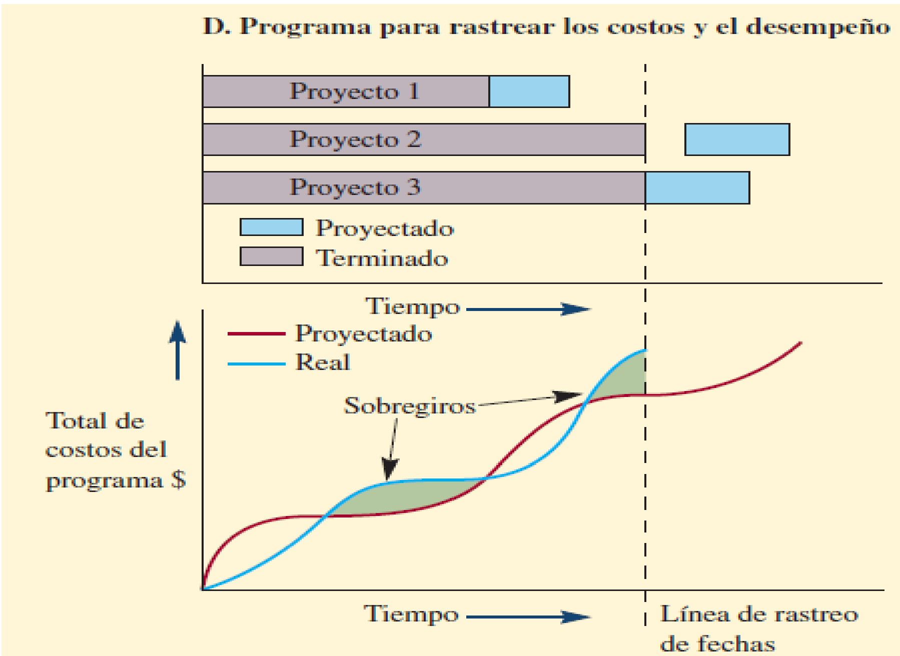
**Gráficas de control**

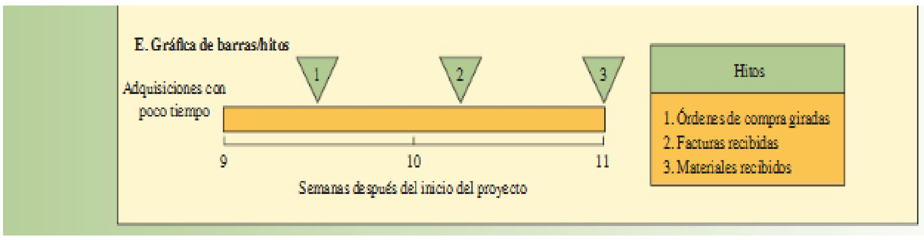
Las diferentes gráficas de control son las mismas que se utilizan en otras áreas de conocimiento, en el siguiente gráfico se aprecian algunos ejemplos de las mismas.




C. División de costos y horas laborables por división
Porcentaje de horas laborables
Porcentaje de costos
Producción
Finanzas
Ingeniería
Gastos fijos
Personal
50
15
10
20
5
40
10
15
25
10
60
40
20
0
0
20
40


D. Programa para rastrear los costos y el desempeño
Proyecto 1
Proyecto 2
Proyecto 3
Proyectado
Terminado
Tiempo
Proyectado
Real
Sobregiros
Total de costos del programa $
Tiempo
Línea de rastreo de fechas


E. Gráfica de barras/hitos
Adquisiciones con poco tiempo
1
2
3
9
10
11
Semanas después del inicio del proyecto
Hitos
1. Órdenes de compra giradas
2. Facturas recibidas
3. Materiales recibidos

**Modelos de planeación de redes**

Los dos modelos de planeación de redes más conocidos fueron creados en la década de 1950. El método de la ruta crítica (MRC) fue creado para programar cierres por mantenimiento de las plantas químicas propiedad de Du Pont. Dado que los proyectos de mantenimiento se realizan con frecuencia en esta industria, existen estimaciones bastante exactas de los tiempos que toman las actividades. El MRC parte del supuesto que es posible estimar con exactitud los tiempos de las actividades de un proyecto y que éstos no varían. La Técnica de evaluación y revisión de programas (PERT) fue creada para el proyecto de proyectiles Polaris de la Marina de Estados Unidos. Fue un proyecto colosal que incluyó a más de 3 000 contratistas. Como la mayor parte de estas actividades no se habían desempeñado nunca antes, la PERT fue creada para manejar estimaciones inciertas de tiempo. Con el correr de los años, las características que diferencian el MRC de la PERT han disminuido, por lo cual en la explicación que aquí se presenta se utilizará el término MRC.

**Ruta critica**

La ruta crítica de las actividades de un proyecto se refiere a la secuencia de actividades que constituyen la cadena más larga en términos del tiempo necesario para terminarlas. Si alguna de las actividades de la ruta crítica se demora, entonces el proyecto entero se retrasará. La meta central de las técnicas del MRC es determinar la información de cada actividad del proyecto para programarla. Las técnicas calculan el momento en que una actividad debe empezar y terminar, así como si la actividad forma parte de la ruta crítica o no.

**Método de la ruta critica**

¿Por qué es importante hallar la ruta crítica? Existen actividades en los proyectos que no deben retrasarse ni un minuto ni en segundo, ya que, si esas se atrasan, atrasan a todo el proyecto y puede ocasionar pérdida económica por multas.

Se trata de un procedimiento para programar un proyecto. En este caso,se utiliza un único estimado de tiempo, porque se supone que se conocen los tiempos de la actividad. Se programará un proyecto muy sencillo para demostrar el enfoque básico.

Piense que le han dejado una tarea de grupo que requiere decidir si se debe invertir en una compañía o no. Su profesor ha sugerido que hagan el análisis siguiendo cuatro pasos:

*a*) Escoger una compañía.

*b*) Conseguir el informe anual de esa compañía y hacer un análisis de proporciones.

*c*) Reunir datos técnicos del precio de las acciones y crear gráficas.

*d*) Revisar individualmente los datos y tomar una decisión en equipo respecto a comprar las acciones o no.

Las cuatro personas de su grupo deciden que el proyecto se puede dividir en las cuatro actividades que ha sugerido el profesor. Deciden que todos los miembros del equipo deben participar en la selección de la compañía y que esta actividad debe quedar terminada en una semana. Todos se reunirán al término de la misma para decidir cuál compañía considerará el grupo. En esa junta, el grupo se dividirá: dos personas serán encargadas del informe anual y el análisis de proporciones, y las otras dos reunirán los datos técnicos y crearán las gráficas. Su grupo estima que conseguir el informe anual y hacer el análisis de proporciones les tomará dos semanas y que reunir los datos del precio de las acciones y generar las gráficas les tomará una semana. Todos consideran que los dos grupos pueden trabajar de forma independiente.

Por último, acuerdan que el equipo se reunirá para tomar la decisión de compra. Antes de reunirse, quieren tomar una semana para que cada miembro del equipo pueda revisar todos los datos.

Se trata de un proyecto sencillo, pero servirá para demostrar el enfoque. A continuación, se presentan los pasos correspondientes.

Identifique cada una de las actividades que se dé desempeñarán en el proyecto y estime el tiempo que tomará concluir cada actividad. Esto es sencillo, dada la información que ha proporcionado el profesor.

Las actividades se identifican como A(1), B(2), C(1) y D(1). El número se refiere a la duración esperada de la actividad.

Determine la secuencia requerida de las actividades y construya una red que refleje las relaciones precedentes. Un camino fácil para hacerlo es identificar primero los precedentes inmediatos asociados a una actividad. Los precedentes inmediatos se refieren a las actividades que se deben terminar justo antes de otra actividad. Es preciso terminar la actividad A para que puedan empezar la actividad B y la C. Es necesario terminar la B y la C para que pueda empezar la D. La tabla siguiente representa lo que se sabe hasta aquí.

*Tabla 5: tabla de actividades*

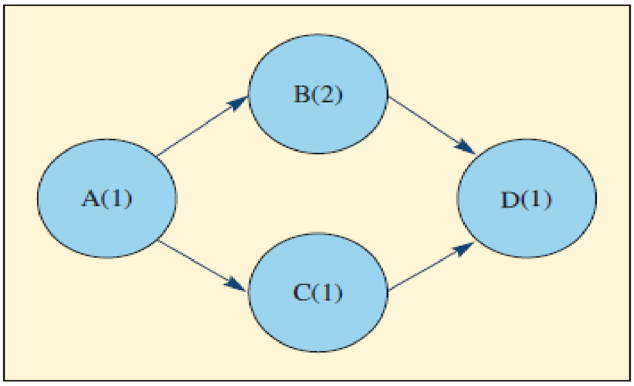
| Actividad | Designación | Precedentes inmediatos | Tiempo (semanas) |
|---|---|---|---|
| Elegir compañía | A | Ninguno | 1 |
| Conseguir informe anual y hacer análisis de proporciones | B | A | 2 |
| Recabar datos del precio de las acciones y hacer análisis técnico | C | A | 1 |
| Revisar datos y tomar una decisión | D | B y C | 1 |

*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

*Lo primero que hacemos es construir la Red en el cuál los círculos representan a la actividad designada con una letra y en paréntesis la duración en tiempo de dicha actividad.*

Los segmentos de recta representan el camino entre la finalización de la actividad anterior con el comienzo de la siguiente actividad tomando en cuenta los precedentes inmediatos en la tabla anterior de ejemplo La actividad B solo empieza cuando A termine, La actividad C solo empieza cuando A termina, y la actividad D solo empieza cuando las actividades B y C terminen.

*GRÁFICO N.: 13 construcción de la RED*




*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

Debemos tomar en cuenta 4 tiempos expresados así:

Los dos primeros tiempos que se debe calcular en cada actividad, son determinados de izquierda a derecha, empezando con la actividad inicial como en este caso A.

Tiempos tempranos o conocidos como Early en inglés:

Es = Early Start Time: Tiempo más temprano en iniciar la actividad

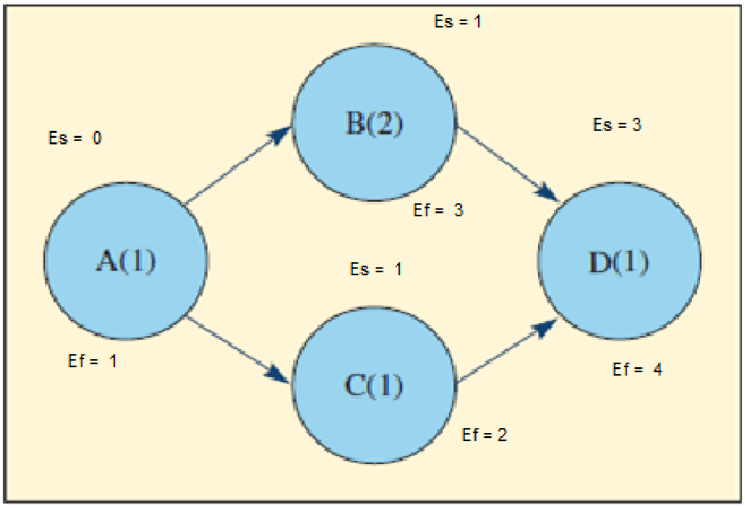
Ef = Early Finish Time: Tiempo más temprano en finalizar la actividad

Ta = Tiempo de la actividad el número que se encuentra en ()

Para esta primera parte se debe tomar en cuenta que Ef = Es + Ta

Siempre se debe hacer que cuando es la actividad inicial el tiempo más temprano es el de 0 es decir este momento.

*GRÁFICO N.: 14 con los tiempos tempranos*



| Actividad | A ( 1 ) | B ( 2 ) depende de A | C ( 1) depende de A | D (1) depende de B y C |
|---|---|---|---|---|
| Es | 0 | Es = 1 | Es = 1 | Es = 3 |
| Ef = Es + Ta | 1 | Ef = 3 | Ef = 2 | Ef = 4 |

Para calcular Es de la siguiente actividad se debe tomar en cuenta de que actividades anteriores depende. Por ejemplo la actividad B solo depende de que termine la actividad A, esta actividad A tiene como Ef = 1 entonces Es de B es 1: En cambio la actividad D depende de que termine las actividades B con Ef = 3, y de la actividad C con Ef = 2 ; entonces se escoge la Ef mayor es decir 3 , por tanto Es de C es 3 y su Ef es 4; en consecuencia el proyecto de 4 actividades tiene una duración de 4, si es semanas, 4 semanas, si es días, 4días, etc.

Los dos siguientes tiempos que se debe calcular en cada actividad, son determinados de derecha a izquierda, empezando con la actividad final en este caso D.

Tiempos tardíos o conocidos como late en inglés:

Ls = late Start Time: Tiempo más tardío en comenzar la actividad

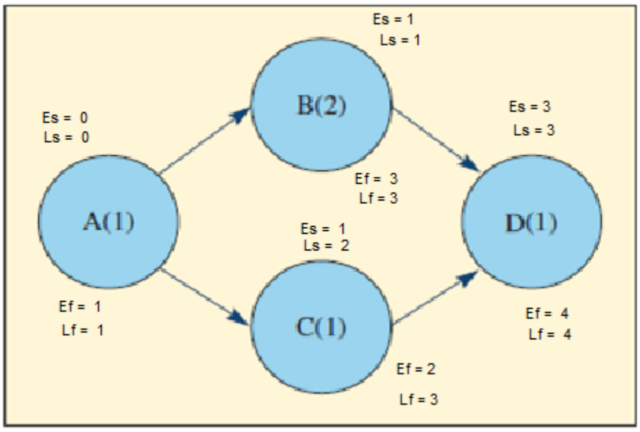
Lf = Late Finish Time: Tiempo más tardío en finalizar la actividad

Ta = Tiempo de la actividad el número que se encuentra en ()

Para esta segunda parte se debe tomar en cuenta que Ls = Lf - Ta

Siempre se debe hacer que cuando es la actividad final el Lf de esa actividad es el mismo Ef.

*GRÁFICO N.: 15 Grafico con los 4 tiempos*



| Actividad | A ( 1 ) | B ( 2 ) depende de A | C ( 1) depende de A | D (1) depende de B y C |
|---|---|---|---|---|
| Ls = Lf - Ta | 0 | Ls = 1 | Ls = 2 | Ls = 3 |
| Lf | 1 | Lf = 3 | Lf = 3 | Lf = 4 |

Con , Lf = 4 de la actividad D aplicamos la fórmula para Ls:

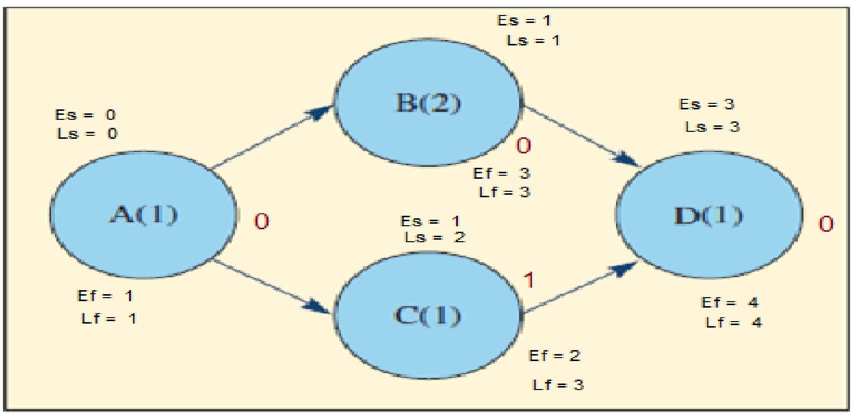
Ls = Lf – Ta = 4 – 1 = 3

Para calcular Lf de la siguiente actividad se debe tomar en cuenta de que actividades anteriores depende. Por ejemplo la actividad B solo depende de la actividad D , esta actividad D tiene como Ls = 3, entonces Lf de B es 3: aplicamos Ls = Lf – Ta = 3 – 2 = 1; En cambio la actividad C depende de la actividad D, esta actividad D tiene como Ls = 3, entonces Lf de C es 3: aplicamos Ls = Lf – Ta = 3 – 1 = 2 ; por último tenemos la actividad A, esta depende de las actividades B con Ls = 1 y de C con Lf = 2, se escoge la Lf Menor es decir que Lf de A es 1, aplicando Ls = Lf – Ta = 1 – 1 = 0.

Al salir Ls y Lf de la primera actividad A siempre 0 es una muestra de que el procedimiento está correcto.

Según (Richard B. Chase, 2016)"En el caso de algunas actividades de un proyecto puede haber cierto margen para el momento en que las actividades pueden iniciar o terminar y se llama **holgura de tiempo** de una actividad".
Es decir que Una vez realizado el procedimiento se calcula la Holgura, que es el tiempo que una actividad puede retrasarse, su cálculo es Es – Ls o también Ef – Lf en cualquiera de los 2 casos el resultado es el mismo, cabe recalcar que este cálculo es en cada actividad

GRÁFICO N.: 16 gráfico con holgura

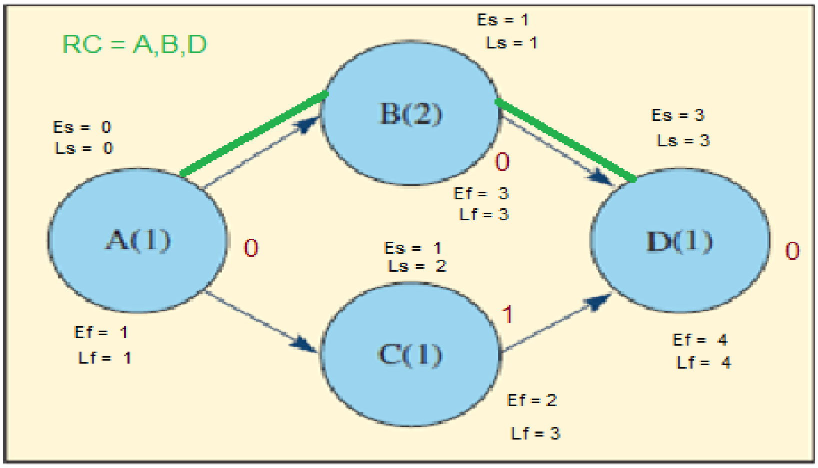


En este ejemplo las actividades A,B y D tienen holgura 0

La actividad C tiene holgura de 1; lo que significa que esta actividad puede retrasarse 1 semana si es en semanas 1 día si es en días, etc.

Por último la Ruta Crítica es aquel camino que va desde la actividad inicial hasta la última actividad del proyecto pasando por las actividades que tengan holgura 0

*GRÁFICO N.: 17 con ruta crítica*




En este ejemplo la Ruta Crítica va de A pasa por B y termina en D

RC = A, B, D

Veamos otro ejemplo:

Muchas compañías que han tratado de entrar en el mercado de las computadoras notebook han fracasado. Suponga que su empresa piensa que existe una enorme demanda en ese mercado porque los productos existentes no han sido diseñados correctamente. Son demasiado pesados, demasiado grandes o demasiado pequeños como para tener teclados de tamaño estándar. La computadora que usted desea será lo bastante pequeña como para cargarla en el bolsillo de una chaqueta en caso necesario. El tamaño ideal no pasará de 5 × 91/2 × 1 pulgadas, con un teclado plegable. No pesará más de 15 onzas y tendrá pantalla de cristal líquido (LCD),un micro drive de disco y una conexión inalámbrica. Así, le resultará atractiva a los empresarios que viajan, pero podría tener un mercado mucho más amplio, inclusive entre los estudiantes. Su precio estará en la banda de 175-200 dólares.

Así pues, el proyecto consiste en diseñar, desarrollar y producir un prototipo de esta pequeña computadora.

Dados los veloces cambios de la industria de las computadoras, es fundamental llegar al mercado con un producto de este tipo en menos de un año.

**Solución**

El primer encargo del equipo del proyecto es elaborar una gráfica de la red del proyecto y estimar la probabilidad de terminar el prototipo de la computadora en un plazo de 35 semanas. En seguida aparecen los pasos para elaborar la red.

1. Identifique las actividades. El equipo del proyecto decide que las actividades siguientes son los elementos principales del proyecto: diseño de la computadora, construcción del prototipo, pruebas del prototipo, especificación de los métodos (resumidos en un informe), estudios de evaluación del equipo automático de montaje, un informe del estudio del equipo de montaje y un informe final que resuma todos los aspectos del diseño, el equipo y los métodos.

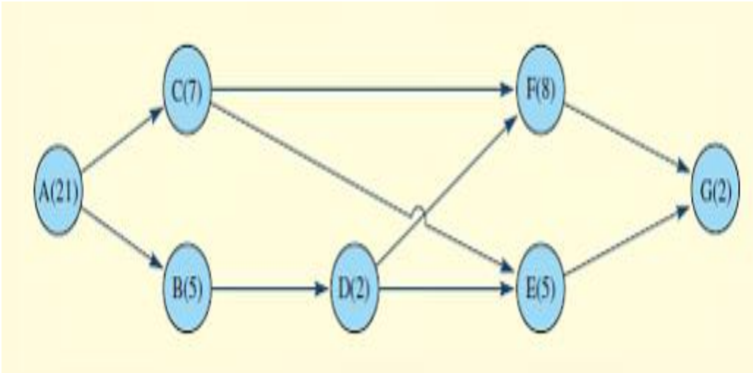
GRÁFICO N.: 18: actividades designación tiempos y precedentes

| | Designaciones y tiempos estimados del MRC | | |
|---|---|---|---|
| Actividad | Designación | Precedentes inmediatos | Tiempo (semanas) |
| Diseño | A | – | 21 |
| Construir prototipo | B | A | 5 |
| Evaluar equipo | C | A | 7 |
| Probar prototipo | D | B | 2 |
| Redactar informe del equipo | E | C, D | 5 |
| Redactar informe de los métodos | F | C, D | 8 |
| Redactar informe final | G | E, F | 2 |

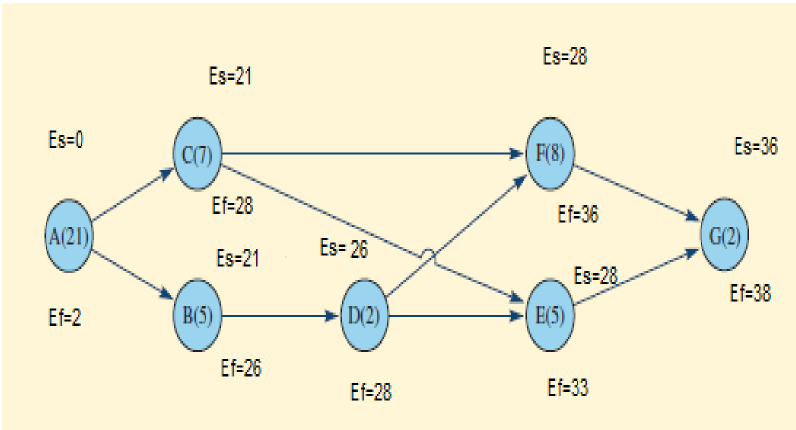
*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

2. Construya la red y la secuencia de las actividades. Con base en una charla con el personal, el gerente del proyecto prepara la tabla de precedentes y la secuencia de la red que muestra la figura 20.

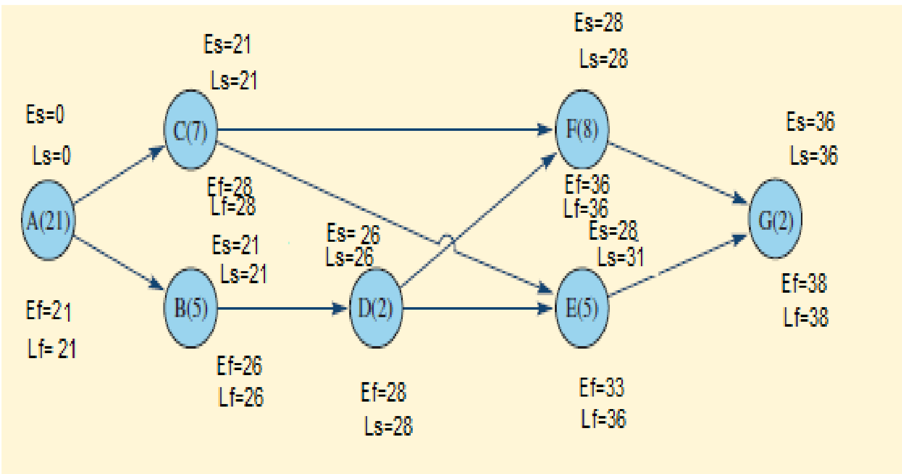
Cuando construya una red, asegúrese de que las actividades están en el orden adecuado y que conserva la lógica de sus relaciones. Por ejemplo, sería ilógico tener una situación en la cual el hecho A precede al hecho B, el B precede al C y el C precede al A.



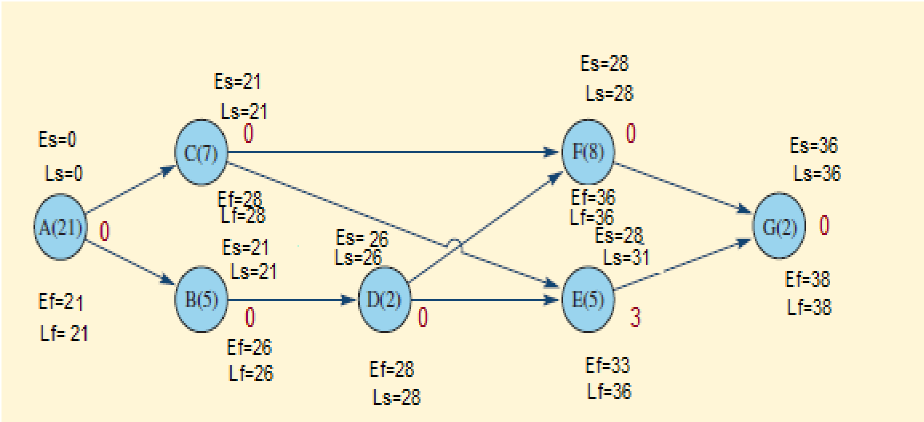

3. Se determina los Tiempos tempranos o conocidos como Early en inglés: Es y Ef de cada actividad, la actividad A es la inicial del proyecto entonces Es = 0



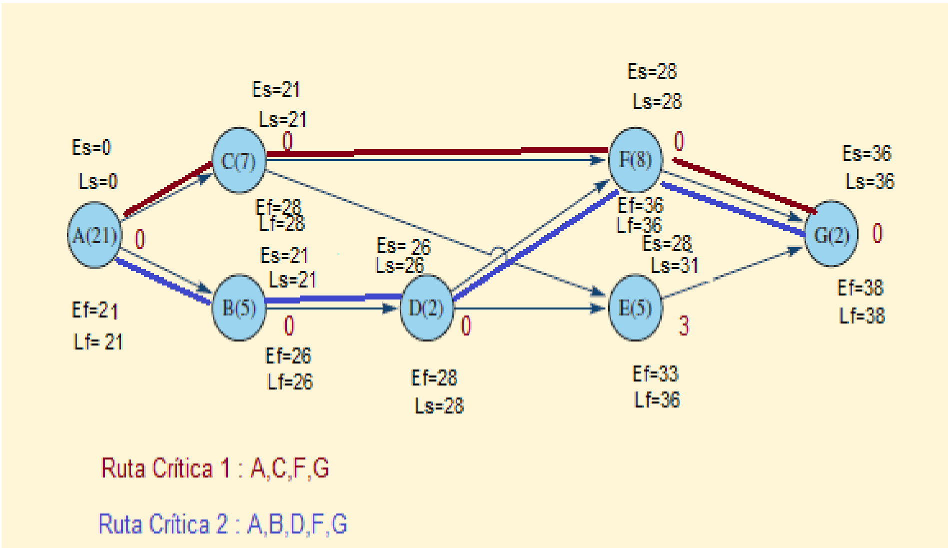

4. Se debe calcular Los dos siguientes tiempos TARDÍOS en cada actividad, son determinados de derecha a izquierda, empezando con la actividad final en este caso G.



5. Se realiza el cálculo de la holgura.




6. Se encuentra la ruta crítica. La ruta crítica es la secuencia más larga de actividades conectadas a lo largo de la red. Puede existir una o varias Rutas




**MRC CON TRES ESTIMADOS DE TIEMPO PARA LAS ACTIVIDADES**

El procedimiento más aconsejable es utilizar tres estimados. Estos tres estimados no sólo permiten estimar el tiempo de la actividad, sino que también permiten obtener un estimado de la probabilidad del tiempo para la conclusión de la red entera. Brevemente, el procedimiento es el siguiente: el tiempo estimado dela actividad se calcula utilizando un promedio ponderado del estimado mínimo de tiempo, el máximo y el más probable. El tiempo esperado para la conclusión de la red se calcula utilizando el procedimiento antes descrito. Así, utilizando los estimados de la variabilidad de las actividades de la ruta crítica es posible estimar la probabilidad de terminar el proyecto en un tiempo determinado.

Se utiliza la misma información que en el ejercicio anterior, con la salvedad de que las actividades tienen tres estimados de tiempo.

Tabla 6: Tabla actividades con 3 estimaciones de tiempo

| Actividad | Designación de la actividad | Tiempos estimados | | | Tiempos esperados (TE) | Varianzas de la actividad ($\sigma^2$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $a$ | $m$ | $b$ | $\frac{a+4m+b}{6}$ | $\left(\frac{b-a}{6}\right)^2$ |
| Diseño | A | 10 | 22 | 28 | 21 | 9 |
| Construir prototipo | B | 4 | 4 | 10 | 5 | 1 |
| Evaluar equipo | C | 4 | 6 | 14 | 7 | $2\frac{7}{9}$ |
| Probar prototipo | D | 1 | 2 | 3 | 2 | $\frac{1}{9}$ |
| Redactar informe | E | 1 | 5 | 9 | 5 | $1\frac{7}{9}$ |
| Redactar informe de métodos | F | 7 | 8 | 9 | 8 | $\frac{1}{9}$ |
| Redactar informe final | G | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 |

Fuente: *(Richard B. Chase, 2016)*

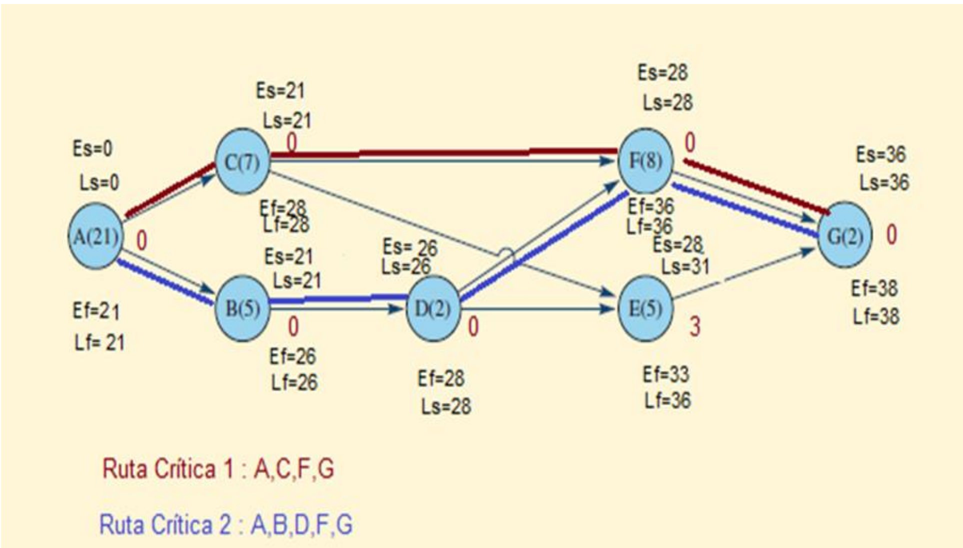
*La fórmula de Tiempos esperados es un promedio ponderado entre los 3 tiempos*

$$TE = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Se realiza para cada actividad su cálculo. Además, se realiza el cálculo de la varianza de cada actividad con la ecuación

$$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

Como se ve en la tabla 8. Con los valores de tiempo esperado se calcula la ruta crítica del proyecto, al ser los mismos valores se obtiene:



Determine la probabilidad de terminar el proyecto en una fecha dada, basándose en la aplicación de la distribución normal estándar. Una característica valiosa de utilizar tres estimados de tiempo es que permite al analista evaluar el efecto que la incertidumbre tiene en el tiempo de conclusión del proyecto.

La mecánica para obtener esta probabilidad es:

a) Sume los valores de las variaciones asociadas a cada actividad de la ruta crítica.

*GRÁFICO N. : 19 calculo de la varianza emn tres tiempos*

| RUTA CRITICA 1 | $\sigma^2=\left(\frac{b-a}{6}\right)^2$ | RUTA CRITICA 2 | $\sigma^2=\left(\frac{b-a}{6}\right)^2$ |
|---|---|---|---|
| A | 9 | A | 9 |
| C | 2,778 | B | 1 |
| F | 0,111 | D | 0,111 |
| G | 0 | F | 0,111 |
| | | G | 0 |
| Totales suma varianzas | 11,889 | | 10,222 |

Cuando hay más de dos rutas críticas se escoge aquella que tiene la suma de varianzas mayor.

Suponga que la gerencia quiere saber cuál es la probabilidad de terminar en 35 semanas para tomar una decisión de vender o no el proyecto.

Dado que la red tiene dos rutas críticas, hay que decidir cuáles variaciones se deben emplear para llegar a la probabilidad de cumplir con la fecha de conclusión del proyecto. Un enfoque conservador dicta utilizar la ruta con la variación total más grande para concentrar la atención de la gerencia en las actividades que tienen mayor probabilidad de exhibir grandes variaciones. Así, las variaciones asociadas a las actividades A, C, F y G se usarían para encontrar la probabilidad de la conclusión. Por lo tanto:

$$\sum \sigma_{cp}^2 = 9 + 2\frac{7}{9} + \frac{1}{9} + 0 = 11.89$$

Suponga que la gerencia quiere la probabilidad de finalizar el proyecto en 35 semanas, en tal caso D es 35. Se encontró que el tiempo esperado para la conclusión era 38. Sustituyendo en la ecuación Z y resolviéndola se tiene:

Entonces D = 35 TE = 38 $\sum \sigma_{cp}^{2}$ = 11.89

$$Z = \frac{D - T_E}{\sqrt{\sum \sigma_{cp}^{2}}}$$

$$Z = \frac{35 - 38}{\sqrt{11.89}}$$

$$Z = -0.87$$

En la tabla de transformada Z se observa que un valor de Z de −0.87 da una probabilidad de 0.1922, lo cual significa que el gerente del proyecto sólo tiene una probabilidad de 19% de concluir el proyecto en 35 semanas. Nótese que esta probabilidad es la de realmente concluir con la ruta crítica A-C-F-G. Dado que existe otra ruta crítica y otras rutas que se podrían volver críticas, la probabilidad de terminar el proyecto en 35 semanas de hecho es menor a 0.19

## EJERCICIOS RESUELTOS

PROBLEMA RESUELTO 1:

Se ha establecido que un proyecto tiene la siguiente lista de actividades y los correspondientes tiempos para terminarlas:

| Actividad | Tiempo (días) | Precedentes inmediatos |
|---|---|---|
| A | 1 | — |
| B | 4 | A |
| C | 3 | A |
| D | 7 | A |
| E | 6 | B |
| F | 2 | C, D |
| G | 7 | E, F |
| H | 9 | D |
| I | 4 | G, H |

a) Dibuje el diagrama de la ruta crítica.

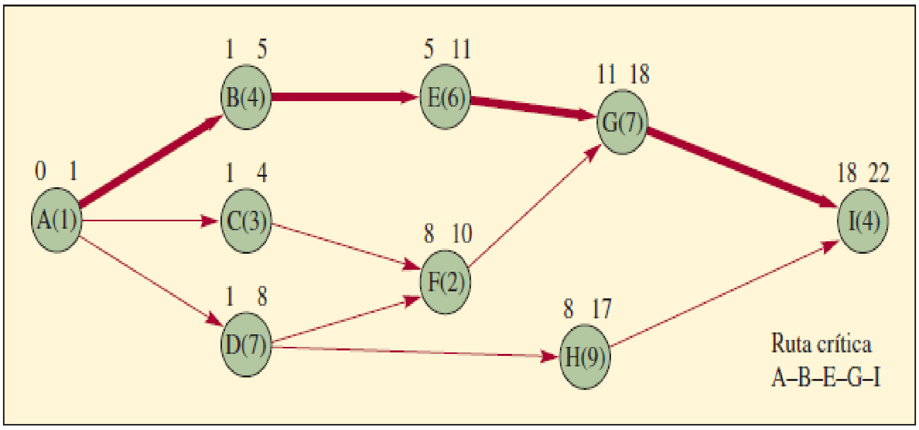
b) Marque los tiempos de inicio y fi nal más próximos.

c) Marque la ruta crítica.

d) ¿Qué pasaría si se modificara la actividad F de modo que tomara cuatro días en lugar de dos?

Solución

El siguiente diagrama muestra las respuestas a los incisos a, b y c.




a) Nueva ruta crítica: A-D-F-G-I. El tiempo para terminar es 23 días.

# CAPÍTULO XII

# FILAS DE ESPERA

Uno de los campos más importantes de la administración de operaciones es comprender qué son las líneas de espera o filas y aprender a administrarlas. Es fundamental para la creación de programas, el diseño de puestos, los niveles de inventarios, etc. En la economía de servicios, la gente espera en distintas líneas todos los días, desde que se dirige al trabajo en el automóvil, hasta cuando sale del supermercado.

También hay líneas de espera en las fábricas; los trabajos esperan en línea para ser procesados en diferentes máquinas y éstas esperan su turno para ser revisadas. En pocas palabras, las líneas de espera están por todas partes.

## La economía en el problema de la línea de espera

Un problema central en muchos contextos de servicios es la administración del tiempo de espera. El administrador debe ponderar el costo adicional de brindar un servicio más rápido (más carriles de tráfico, más pistas de aterrizaje, más cajas de salida) contra el costo inherente de la espera.

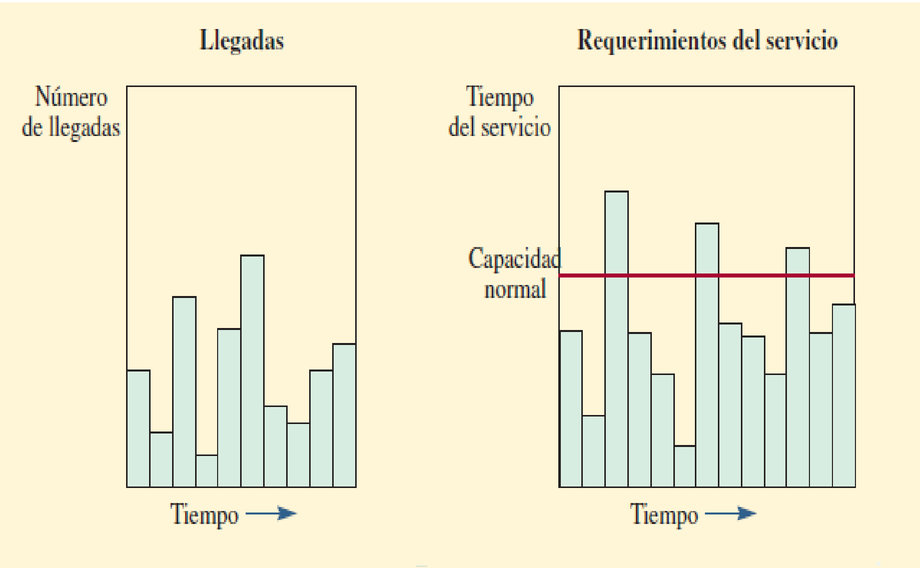
Con frecuencia, la decisión del equilibrio de estos costos es muy sencilla. Por ejemplo, si se encuentra que el total de tiempo que los empleados pasan formados en línea en espera de usar una copiadora lo podrían destinar a actividades productivas, se podría comparar el costo de instalar otra copiadora contra el valor del tiempo que se ahorrarán los empleados. Así, la decisión se podría reducir a términos de dólares y sería fácil tomar la decisión.

Por otro lado, suponga que su problema de la línea de espera radica en la demanda de camas de un hospital. Se puede calcular el costo de las camas adicionales sumando los costos de construir un edificio, el equipamiento adicional requerido y el incremento de mantenimiento. ¿Pero cuál es el otro lado de la balanza? En este caso se afronta el problema de tratar de adjudicar una cantidad de dinero a la necesidad del paciente que requiere una cama de hospital que no está disponible. Si bien es posible estimar el ingreso que pierde el hospital, ¿qué decir del costo humano que se deriva de la falta de una atención hospitalaria oportuna?

## La visión práctica de las líneas de espera

Antes de pasar a la presentación técnica de la teoría de las líneas de espera es conveniente analizar el aspecto intuitivo de la cuestión para entender su significado. El gráfico 22 muestra las llegadas a un local de servicios (como un banco) y los requerimientos de los servicios de ese local (como los cajeros y los gerentes de crédito). Una variable importante es el número de llegadas dentro de las horas que el servicio está abierto. Desde el punto de vista de la prestación del servicio, los clientes demandan distintas cantidades de servicio, que muchas veces exceden a la capacidad normal. Es posible controlar las llegadas de distintas maneras. Por ejemplo, se puede tener una línea corta (como en un restaurante de comida rápida de servicio en el coche que sólo tiene unos cuantos espacios), se puede establecer horarios específicos para clientes específicos o es posible hacer ofertas especiales. En el caso del servidor, se puede afectar el tiempo del servicio empleando a servidores más rápidos o lentos, máquinas más rápidas o lentas, diferentes herramientas, distinto material, diferente distribución, tiempo de preparación más expedito, etcétera.

GRÁFICO N.: 20 llegadas y servicio de un banco




*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

El punto esencial de las líneas de espera es que no son una condición fi ja de un sistema productivo, sino que se pueden controlar, en gran medida, por medio de la administración y el diseño del sistema.

**Sugerencias para administrar filas de espera**

Algunas sugerencias para administrar filas, basadas en investigaciones del sector bancario, son:

• **Segmente a los clientes**. Si un grupo de clientes necesita algún servicio rápido, ofrézcales una línea especial, de modo que no tengan que esperar a que pasen los clientes que requieren servicios más lentos.

• **Enseñe a sus servidores a ser amables.** Recibir a los clientes llamándoles por su nombre o brindándoles alguna otra forma de atención especial ayuda mucho a que se supere el sentimiento negativo que produce una espera larga. Los psicólogos sugieren que se enseñe a los servidores cuándo deben recurrir a acciones amigables específicas, como sonreír cuando reciben a los clientes, toman los pedidos y entregan el cambio (por ejemplo, en una tienda de abarrotes). Pruebas que han empleado estas acciones conductuales específicas han demostrado que, en la percepción de los clientes, se registran incrementos sustantivos con respecto a la amabilidad de los servidores.

• **Informe a sus clientes lo que pueden esperar de la situación**. Esto es especialmente importante cuando el tiempo de espera va a ser más largo de lo normal. Explíqueles por qué será más larga la espera y lo qué está haciendo para aligerarla.

• **Trate de distraer al cliente mientras espera.** Ofrecer música, un video o alguna otra forma de entretenimiento ayuda a distraer la atención de los clientes del hecho de que están esperando.

• **Sugiera a los clientes que acudan al establecimiento en periodos de poca actividad.** Informe a los clientes cuáles son las horas en las que seguramente no tendrán que esperar y también dígales cuáles son los periodos pico, esto podría ayudar a nivelar la carga.

## EL SISTEMA DE FILAS

El sistema de filas cuenta, en esencia, con tres componentes básicos: **1)** la población fuente y la forma en que los clientes llegan al sistema, **2)** el sistema de prestación del servicio y **3)** la condición de los clientes que salen del sistema (¿de regreso a la población fuente o no?), como muestra el gráfico 23.

*GRÁFICO N.: 21 Componentes del sistema de filas de espera*


*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

**Llegada de los clientes**

Las llegadas a un sistema de servicios pueden provenir de una población finita o de una infinita. La diferencia es importante porque los análisis se fundan en diferentes premisas y requieren de diferentes ecuaciones para su solución.

**Población finita:**

Se refiere al conjunto limitado de clientes que usarán el servicio y, en ocasiones, formarán una línea. La razón que explica la importancia de esta clasificación es que cuando un cliente abandona su posición como miembro de la población (por ejemplo, una máquina que se descompone o que requiere servicio), el tamaño del grupo de usuarios tendrá una unidad menos y ello disminuye la probabilidad de que se presente el siguiente hecho. Por otra parte, cuando un cliente recibe un servicio y regresa al grupo de usuarios, la población incrementa y la probabilidad de que el usuario requiera el servicio también aumenta. Esta clase de problemas de una población finita requiere un conjunto de fórmulas distinto al de una infinita.

**Población infinita:**

Es lo bastante grande, en relación con el sistema del servicio, como para que el tamaño que resulta de incrementos o decrementos en ella (un cliente que necesita un servicio o un cliente que ha recibido el servicio y regresa a la población) no afecte sustantivamente las probabilidades del sistema. En el caso de la explicación anterior de lo finito, si hubiera 100 máquinas en lugar de 6, entonces si una o dos máquinas se descompusieran, las probabilidades de las próximas descomposturas no serían muy diferentes y cabría suponer, sin gran posibilidad de errar, que la población (para efectos prácticos) es infinita. Las fórmulas de los problemas de filas "infinitas" no darían por resultado grandes errores si se aplicaran a un médico que tiene mil pacientes o a una tienda de departamentos con diez mil clientes.

## DISTRIBUCIÓN DE LAS LLEGADAS

Cuando se describe un sistema de espera es preciso definir la forma en que los clientes o las unidades que esperan están ordenados.

Las fórmulas de las líneas de espera suelen requerir una tasa de llegadas, o el número de unidades por periodo (por ejemplo, un promedio de uno cada seis minutos). La distribución de las llegadas constantes es periódica y el tiempo que transcurre entre las llegadas sucesivas es exactamente el mismo.

En los sistemas de producción, las únicas llegadas que en efecto se acercan a un periodo de intervalos constantes son las sujetas al control de una máquina. Las distribuciones de llegadas variables (aleatorias) son mucho más comunes.

Cuando se observan las llegadas a un local de servicios, se pueden adoptar dos puntos de vista: en primer término, se puede analizar el tiempo que transcurre entre llegadas sucesivas para ver si los tiempos siguen alguna distribución estadística. Por lo general se supone que el tiempo entre llegadas se distribuye de forma exponencial. En segundo, es posible establecer una duración de tiempo (T) y tratar de determinar cuántas llegadas entrarían en el sistema dentro de T. Por lo general se supone que el número de llegadas por unidad de tiempo tiene una distribución de Poisson.

### Distribución exponencial

En el primer caso, cuando las llegadas a un local de servicios se presentan de forma enteramente aleatoria, un plano de los tiempos entre llegadas produce una distribución exponencial, como la que presenta el gráfico 24. La función de probabilidad es:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

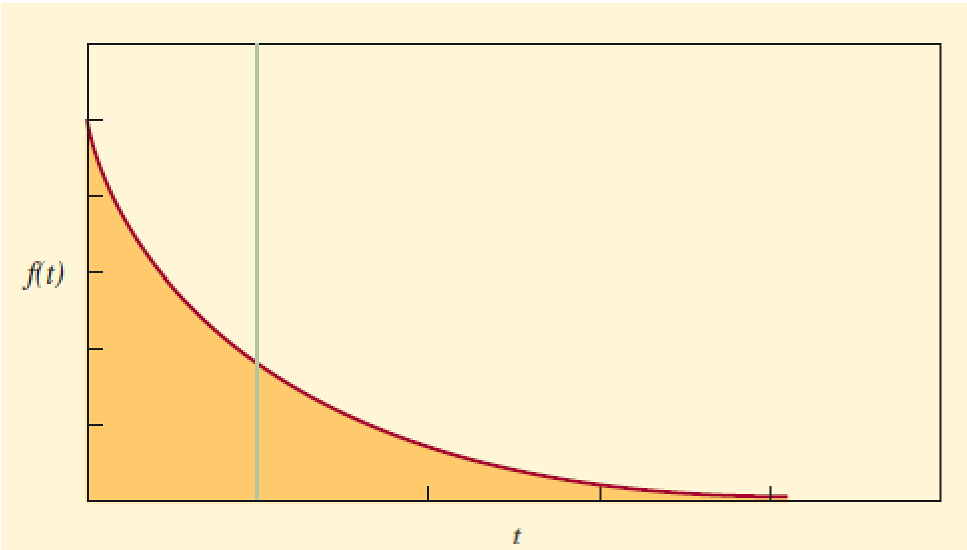
Donde λ es la media de las llegadas por periodo.

El área acumulada debajo de la curva del gráfico 24 es el resumen de la ecuación anterior dentro de su rango positivo, que es $e^{-\lambda t}$ Esta integral permite calcular las probabilidades de las llegadas dentro de un tiempo especificado. Por ejemplo, en el caso de llegadas de uno a una línea de espera (λ = 1), se puede derivar la tabla siguiente resolviendo $e^{-\lambda t}$

La columna 2 muestra la probabilidad de que pasen más de t minutos antes de que se presente la siguiente llegada. La columna 3 muestra la probabilidad de la próxima llegada dentro de t minutos (calculada como 1 menos la columna 2).

| (1) $t$ (Minutos) | (2) Probabilidad de que se presente la próxima llegada en $t$ minutos o más (del apéndice D o resolviendo $e^{-t}$) | (3) Probabilidad de que se presente la próxima llegada en $t$ minutos o menos [1-columna (2)] |
|---|---|---|
| 0 | 1.00 | 0 |
| 0.5 | 0.61 | 0.39 |
| 1.0 | 0.37 | 0.63 |
| 1.5 | 0.22 | 0.78 |
| 2.0 | 0.14 | 0.86 |

GRÁFICO N: 22 Distribución exponencial




*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

**Distribución de Poisson**

En el segundo caso, en el cual interesa el número de llegadas dentro de un periodo T, la distribución se presenta como en la gráfico 25 y se obtiene encontrando la probabilidad exacta de n llegada durante T. Si el proceso de llegadas es aleatorio, entonces la distribución es de Poisson y la fórmula es:

$$P_T(n) = \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Esta ecuación muestra la probabilidad de que haya exactamente n llegadas en el tiempo T.1 Por ejemplo, si la media de las llegadas de unidades al sistema es de tres por minuto (λ = 3) y si se quiere encontrar la probabilidad de que lleguen exactamente cinco unidades dentro de un periodo de un minuto (n = 5, T = 1), se tendrá:

$$P_1(5) = \frac{(3 \times 1)^5 e^{-3 \times 1}}{5!}$$

$$P_1(5) = \frac{3^5 e^{-3}}{120} = 2.025e^{-3} = 0.101$$

Es decir, hay una probabilidad de 10.1% de que haya cinco llegadas en un intervalo de un minuto.

La distribución de Poisson es discreta, a pesar de que con frecuencia se presenta como una curva ligera. La distribución es discreta porque, en el ejemplo, n se refiere al número de llegadas a un sistema y éste debe ser un entero. (Por ejemplo, no puede haber 1.5 llegadas.)

Asimismo, advierta que la distribución exponencial y la de Poisson se pueden derivar una de la otra.

La media y la varianza de Poisson son iguales y están denotadas por λ. La media de la exponencial es 1/λ y la varianza es $1/\lambda^2$. (Recuerde que el tiempo entre llegadas está distribuido exponencialmente y que el número de llegadas por unidad de tiempo es una distribución de Poisson.)

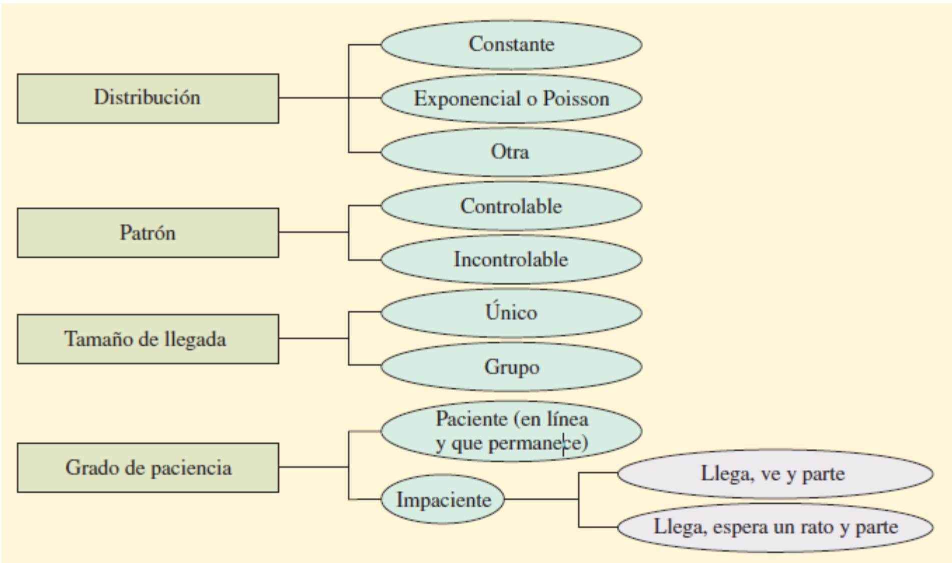
Otras características de las llegadas son los patrones de éstas, el tamaño de las unidades que llegan y el grado de paciencia. (Véase el gráfico 25)

**Patrones de las llegadas**

Las llegadas a un sistema son mucho más controlables de lo que se suele reconocer. Los peluqueros pueden disminuir la tasa de llegadas los sábados (y presuntamente cambiarlas a otros días de la semana) si cobran un dólar extra por los cortes de adulto o si cobran precios de adultos por los cortes de niños. Las tiendas de departamentos tienen rebajas durante la temporada floja o tienen rebajas de un solo día en parte para efectos de control. Las líneas aéreas ofrecen tarifas especiales a excursiones y fuera de temporada por razones similares. El instrumento más sencillo de todos para controlar las llegadas es anunciar el horario de actividades.

Las demandas de algunos servicios son claramente incontrolables, como las demandas de urgencias médicas en el hospital de una ciudad. Sin embargo, hasta en esas situaciones, las llegadas a las salas de urgencias de hospitales específicos son controlables en cierta medida, por ejemplo, manteniendo informados a los conductores de las ambulancias de la región del servicio acerca de la condición de los hospitales que las reciben.

GRÁFICO N: 23 Llegada de los clientes en forma de filas




Fuente: *(Richard B. Chase, 2016)*

**Tamaño de las unidades de las llegadas.**

Una llegada única se puede considerar una unidad. (Una unidad es el número más pequeño que se maneja.) Una llegada única al piso de la Bolsa de Valores de Nueva York (NYSE) es 100 acciones de una emisión, una llegada única en una planta de producción de huevos sería una docena de huevos o una caja de un kilo, una llegada única a un restaurante es una sola persona.

Una llegada de grupo es algún múltiplo de la unidad, como un bloque de 1 000 acciones en la

NYSE, un cartón de huevos en la planta de procesamiento o un grupo de cinco comensales en un restaurante.

**Grado de paciencia.**
Una llegada paciente es la de la persona que espera tanto tiempo como sea necesario hasta que el servicio está disponible para atenderla. (Aun cuando los que llegan gruñen y se mueven con impaciencia, el hecho de que esperen basta para calificarlos de llegadas pacientes para efectos de la teoría de la línea de espera.)

Existen dos clases de llegadas impacientes. Las personas que pertenecen a la primera clase, llegan, echan un ojo al local del servicio y a qué tan larga es la línea y optan por partir. Las de la otra clase llegan, ven la situación, se forman en la línea de espera y, después, pasado algún tiempo, deciden partir. Se dice que las personas del primer tipo son quejumbrosas, mientras que las del segundo son renegonas.

**Factores del sistema de filas**
El sistema de filas está compuesto primordialmente por líneas de espera y el número disponible de servidores. En seguida se presentan las cuestiones relativas a las características y la administración de las líneas de espera, la estructura de las líneas y el ritmo del servicio. Los factores que se deben considerar en el caso de las líneas de espera son su longitud, el número de líneas y la disciplina de la fila.

**LONGITUD.**
Una línea infinita es simplemente una que es muy larga en términos de la capacidad del sistema del servicio. Algunos ejemplos de longitud potencialmente infinita son la fila de vehículos automotores de varios kilómetros de largo que se forma para cruzar un puente y los clientes que se deben formar en una fi la que da la vuelta a la manzana para comprar una entrada para el teatro.

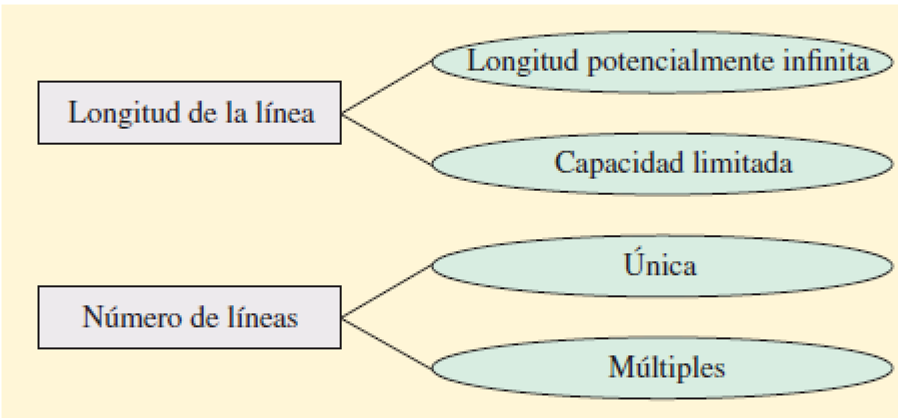
Las gasolineras, los muelles de carga y los estacionamientos tienen una capacidad limitada de líneas, en razón de restricciones legales o de las características físicas del espacio. Esto complica el problema de la línea de espera, no sólo por cuanto se refiere a la utilización del sistema del servicio y el cálculo de las líneas de espera, sino también con respecto a la forma de la distribución real de las llegadas. La persona que llega y que se le niega la posibilidad de formarse en la línea por falta de espacio podría volver a unirse a la población en un intento posterior o podría buscar el servicio en otra parte. Las dos acciones hacen una diferencia evidente en el caso de una población finita.

**Número de líneas.**

Una sola línea o fila es, evidentemente, una única línea. El término múltiples líneas se refiere a las líneas aisladas que se forman frente a dos o más servidores o a líneas aisladas que convergen en un punto central para su redistribución.

La desventaja de las líneas múltiples en un local muy activo es que las personas que llegan con frecuencia cambian de línea si varios de los servicios prestados en ella han durado poco o si les parece que los clientes que están en otras líneas requerirán un servicio que durará poco tiempo.

*GRÁFICO N.: 24 Longitud de fila de espera*




*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

**Disciplina de la fila.**

La disciplina de la fila se refiere a una regla o un conjunto de reglas que determinan el orden de prioridad en que se brindará el servicio a los clientes que están esperando en una línea. Las reglas que se elijan tienen un enorme efecto en el desempeño global del sistema. El número de clientes en la línea, el tiempo promedio de la espera, la banda de variación del tiempo de espera y la eficiencia del local del servicio son tan sólo algunos de los factores que se verán afectados por las reglas de prioridad.

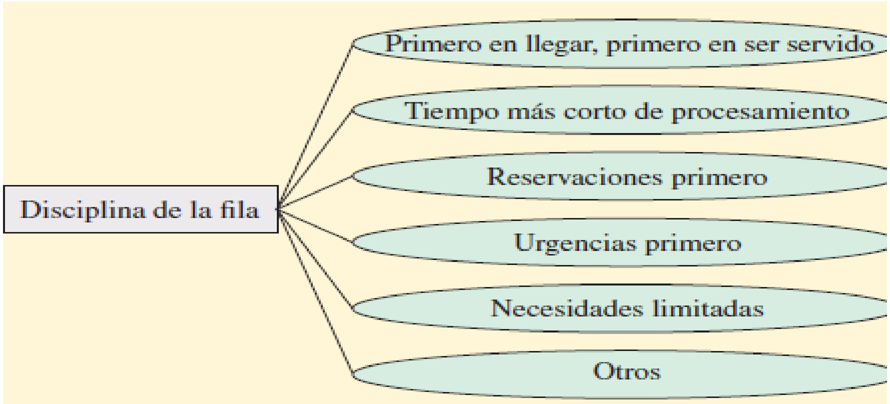
La regla de prioridad más común seguramente es la del primero en entrar, primero en salir (PEPS). Esta regla dice que los clientes que están en la línea serán atendidos en el orden cronológico de su llegada y ninguna otra característica tiene repercusiones para el proceso de selección. Esta regla es aceptada por casi todo el mundo como la más justa, aun cuando en la práctica discrimina a la persona que llega y que requiere poco tiempo para su servicio.

Otros ejemplos de reglas de prioridad son las que primero pasan las personas que tiene reservación, las urgencias, los clientes que producen más ganancias, los pedidos más grandes, los mejores clientes, la persona que lleva más tiempo esperando en la línea y la primera fecha prometida. El uso de una regla cualquiera plantea dos grandes problemas prácticos.

Uno es garantizar que los clientes conozcan la regla y la respeten. La otra es asegurarse de que existe un sistema que permitirá a los empleados manejar la línea (como los sistemas de tome-un-número). Distribución del tiempo del servicio Otra característica importante de la estructura de la espera es el tiempo que el cliente o la unidad pasa con el servidor una vez que ha iniciado el servicio. Las fórmulas de las líneas de espera por lo general especifican el ritmo del servicio como la capacidad del servidor para cubrir un número de unidades por periodo (como 12 servicios terminados por hora) y no como el tiempo del servicio, el cual puede durar un promedio de cinco minutos cada uno. Una regla del tiempo constante de un servicio dice que cada servicio toma exactamente el mismo tiempo. Al igual que en el caso de las llegadas constantes, esta característica suele estar limitada a las operaciones controladas por máquinas.

Cuando los tiempos del servicio son aleatorios se pueden calcular aproximadamente con la distribución exponencial. Cuando se use la distribución exponencial como cálculo aproximado de los tiempos del servicio, μ será el número promedio de unidades o clientes que pueden ser atendidos por periodo.

*GRÁFICO N.: 25 Disciplina de la fila*




*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

**Distribución del tiempo del servicio**

Otra característica importante de la estructura de la espera es el tiempo que el cliente o la unidad pasa con el servidor una vez que ha iniciado el servicio. Las fórmulas de las líneas de espera por lo general especifican el ritmo del servicio como la capacidad del servidor para cubrir un número de unidades por periodo (como 12 servicios terminados por hora) y no como el tiempo del servicio, el cual puede durar un promedio de cinco minutos cada uno. Una regla del tiempo constante de un servicio dice que cada servicio toma exactamente el mismo tiempo. Al igual que en el caso de las llegadas constantes, esta característica suele estar limitada a las operaciones controladas por máquinas.

Cuando los tiempos del servicio son aleatorios se pueden calcular aproximadamente con la distribución exponencial. Cuando se use la distribución exponencial como cálculo aproximado de los tiempos del servicio, μ será el número promedio de unidades o clientes que pueden ser atendidos por periodo.

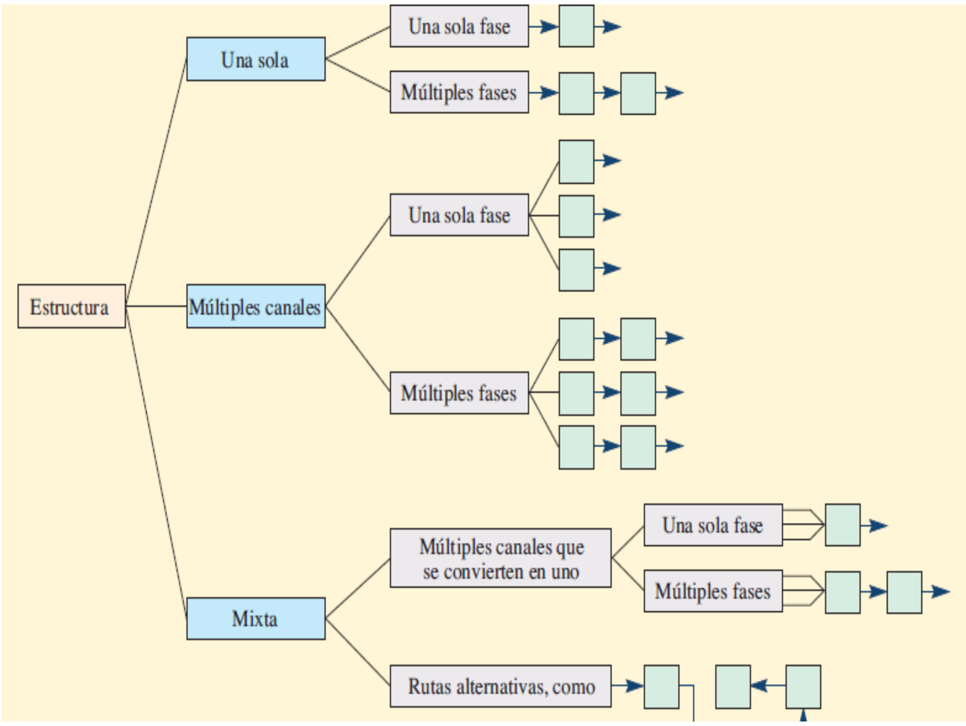
## ESTRUCTURAS DE LAS LÍNEAS

Como muestra el gráfico 28, el flujo de elementos que recibirán servicio puede avanzar por una sola línea, por múltiples líneas o por alguna mezcla de las dos. La elección del formato depende, en parte, del volumen de clientes servidos y, en parte, de las restricciones que impongan los requerimientos de la secuencia que rigen el orden en el cual se debe desempeñar el servicio.

**Un solo canal, una sola fase.**
Esta es la estructura más simple de la línea de espera y existen fórmulas muy sencillas para resolver el problema de los patrones de llegadas y servicios con una distribución estándar. Cuando las distribuciones no son estándar, el problema se resuelve con facilidad empleando una simulación de computadora. Un ejemplo típico de una situación de un solo canal, una sola fase es la de una persona en una peluquería.

**Un solo canal, una sola fase.**
Un negocio de lavado de automóviles sirve de ilustración porque desempeña una serie de servicios (aspirar, mojar, lavar, enjuagar, secar, limpiar las ventanas y estacionar) siguiendo una secuencia bastante uniforme. Un factor crítico en el caso de un solo canal con un servicio en serie es la cantidad de acumulación de elementos que se permite en el frente de cada servicio, lo cual a su vez constituye líneas separadas de espera.

*GRÁFICO N.: 26 Estructura de líneas*




*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

**Un solo canal, múltiples fases.**
Un negocio de lavado de automóviles sirve de ilustración porque desempeña una serie de servicios (aspirar, mojar, lavar, enjuagar, secar, limpiar las ventanas y estacionar) siguiendo una secuencia bastante uniforme. Un factor crítico en el caso de un solo canal con un servicio en serie es la cantidad de acumulación de elementos que se permite en el frente de cada servicio, lo cual a su vez constituye líneas separadas de espera.

**Múltiples canales, múltiples fases.**
Este caso se parece al anterior, salvo que en éste se desempeñan dos o más servicios en secuencia. La admisión de pacientes a un hospital sigue este patrón, porque por lo general siguen una secuencia específica de pasos: contacto inicial en el mostrador de admisiones, llenar formas impresas, preparar etiquetas de identificación, recibir la asignación de una habitación, acompañar al paciente a la habitación, etc. Dado que por lo normal hay varios servidores disponibles para este procedimiento, es posible procesar a más de un paciente a la vez.

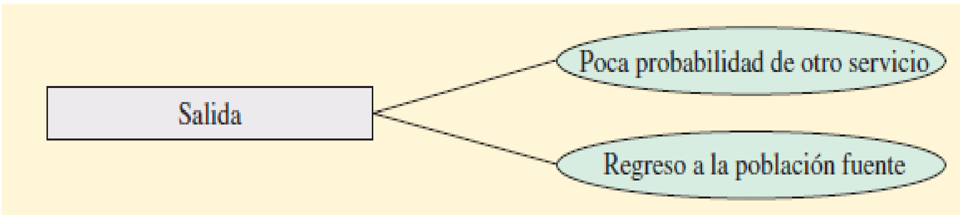
**Múltiples canales, múltiples fases.**
Bajo este título general se consideran dos subcategorías: estructuras de múltiples canales a uno solo y estructuras de rutas alternativas. En el primero, se encuentran líneas que se funden en una para recibir un servicio de una fase, como para cruzar un puente donde dos carriles se convierten en uno, o las líneas que se funden en una para recibir un servicio de varias fases, como las líneas de sub ensambles que alimentan la línea principal. En el segundo se encuentran dos estructuras que difieren en cuanto a los requisitos de la dirección del flujo. La primera es similar al caso de múltiples canales y múltiples pasos, salvo que en  puede haber cambios de un canal a otro una vez que se ha brindado el primer servicio, y  el número de canales y fases puede variar, de nueva cuenta, después de que se ha prestado el primer servicio.

**LA SALIDA DEL SISTEMA DE FILAS**

Cuando el cliente ha recibido el servicio, su suerte para salir tiene dos caminos posibles: el primero el cliente puede regresar a la población fuente y de inmediato convertirse en un candidato que vuelve a competir por un servicio, o en el segundo camino puede existir escasa probabilidad de otro servicio. El primer caso queda ilustrado con una máquina que ha sido reparada de rutina y ha vuelto a operar, pero se puede volver a descomponer; el segundo queda ilustrado con una máquina que ha sido objeto de mantenimiento o ha sido modificada y existe escasa probabilidad de que requiera otro servicio en un futuro próximo. En un tono más leve, se podría decir que la primera es como "el caso del catarro común recurrente" y el segundo "el caso de una operación para extraer el apéndice que ocurre una sola vez".

Seguramente está claro que cuando la población fuente es finita, todo cambio en el servicio desempeñado para clientes que regresan a la población modifica la tasa de llegadas al local del servicio. Por supuesto que esto modifica las características de la línea de espera que se está estudiando y, por necesidad, impone que se vuelva a analizar el problema.

*GRÁFICO N.: 27 salida del sistema*




*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

**MODELOS DE LÍNEAS DE ESPERA**

En esta sección se presenta una muestra de cuatro problemas de líneas de espera y sus correspondientes soluciones. Cada uno tiene una estructura ligeramente diferente (véase gráfico 30) y la ecuación de la solución (véase gráfico 32). Hay más tipos de modelos que estos cuatro, pero las fórmulas y las soluciones resultan bastante complicadas y, por lo general, se resuelven utilizando simulaciones de computadora. Además, cuando use estas fórmulas, recuerde que su estado es constante, que se derivan del supuesto de que el proceso que se está estudiando es constante. Así pues, pueden producir resultados inexactos cuando se aplican a procesos en los cuales las tasas de llegadas y/o de servicios cambian con el transcurso del tiempo. Para resolver estos problemas, se puede usar la hoja de cálculo de Excel Queue_Model.xls, desarrollada por John McClain de Cornell University.

*GRÁFICO N. : 28 propiedades de algunos modelos específica cos de líneas de espera*

| Modelo | Distribución | Fase del servicio | Población fuente | Patrón de llegadas | Disciplina de la fila | Patrón del servicio | Longitud permisible de la fila | Ejemplo típico |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Un solo canal | Una sola | Infinita | Poisson | PEPS | Exponencial | Ilimitada | Cajero para automóviles en un banco; puente de peaje con un solo carril |
| 2 | Un solo canal | Uno solo | Infinita | Poisson | PEPS | Constante | Ilimitada | Viajes en la montaña rusa de un parque de diversiones |
| 3 | Canales múltiples | Uno solo | Infinita | Poisson | PEPS | Exponencial | Ilimitada | Mostrador de refacciones en una agencia de automóviles |
| 4 | Un solo canal | Una sola | Finita | Poisson | PEPS | Exponencial | Ilimitada | Máquina que se descompone y es reparada en una fábrica |

*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

*GRÁFICO N.: 29 Notaciones de las ecuaciones*

**Notación de la fila infinita: modelos 1-3**

$\lambda$ = Tasa de llegadas
$\mu$ = Ritmo del servicio
$\frac{1}{\mu}$ = Tiempo promedio del servicio
$\frac{1}{\lambda}$ = Tiempo promedio entre llegadas
$\rho$ = Proporción del total de la tasa de llegadas al ritmo del servicio en el caso de un solo servidor $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^*$
$L_q$ = Número promedio que espera en la línea
$L_s$ = Número promedio en el sistema (inclusive la persona que está siendo servida)
$W_q$ = Tiempo promedio de espera en la línea
$W_s$ = Tiempo promedio total en el sistema (inclusive tiempo para ser servido)
$n$ = Número de unidades en el sistema
$S$ = Número de canales idénticos del servicio
$P_n$ = Probabilidad de que haya exactamente $n$ unidades en el sistema
$P_w$ = Probabilidad de esperar en línea

**Notación de la fila finita: modelo 4**

$D$ = Probabilidad de que una persona que llega deba esperar en línea
$F$ = Factor de eficiencia, una medida del efecto de tener que esperar en línea
$H$ = Número promedio de unidades que están siendo servidas
$J$ = Población fuente menos las personas en el sistema de la fila $(N - n)$
$L$ = Número promedio de unidades en la línea
$S$ = Número de canales del servicio
$n$ = Número promedio de unidades en el sistema de filas (inclusive la que está siendo servida)
$N$ = Número de unidades en la población fuente
$P_n$ = Probabilidad de que haya exactamente $n$ unidades en el sistema de las filas
$T$ = Tiempo promedio para brindar el servicio
$U$ = Tiempo promedio entre requerimientos de los servicios de los clientes
$W$ = Tiempo promedio de la espera en línea
$X$ = Factor de servicio o proporción del tiempo requerido para el servicio

*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

*GRÁFICO N.: 30 Ecuaciones para resolver cuatro problemas modelo*

Modelo 1

$$\begin{cases} L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} \qquad P_n = \left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad P_o = \left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right) \\ L_s = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} \qquad \rho = \dfrac{\lambda}{\mu} \end{cases}$$

Modelo 2

$$\begin{cases} L_q = \dfrac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} \qquad W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} \\ L_s = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu} \qquad W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} \end{cases}$$

(La ilustración 8A.9 proporciona el valor de $L_q$ dado $\lambda/\mu$ y el número de servidores $S$.)

Modelo 3
$$\begin{cases} L_s = L_q + \lambda/\mu & W_s = L_s/\lambda \\ W_q = L_q/\lambda & P_w = L_q\left(\dfrac{S\mu}{\lambda} - 1\right) \end{cases}$$

Modelo 4
$$\begin{cases} X = \dfrac{T}{T+U} & H = FNX & L = N(1-F) & n = L + H \\ P_n = \dfrac{N!}{(N-n)!}X^n P_o & & J = NF(1-X) & \\ W = \dfrac{L(T+U)}{N-L} = \dfrac{LT}{H} & & F = \dfrac{T+U}{T+U+W} & \end{cases}$$

*Fuente: (Richard B. Chase, 2016)*

Problema 1: Clientes en una línea. Un banco quiere saber cuántos clientes están esperando en el cajero de pago desde el automóvil, cuánto tiempo deben esperar, la utilización del cajero y cuál tendría que ser el ritmo del servicio para que 95% del tiempo no haya más de tres automóviles en el sistema en un momento dado cualquiera.

**Ejemplos Clientes en una línea**

Western National Bank está pensando en abrir un servicio para que los clientes paguen desde su automóvil. La gerencia estima que los clientes llegarán a un ritmo de 15 por hora. El cajero que trabajará en la ventanilla puede servir a los clientes a un ritmo de uno cada tres minutos. Parte 1 Suponiendo que las llegadas son de Poisson y el servicio es exponencial, encuentre:

1. La utilización del cajero.

2. El número promedio de automóviles en la línea de espera.

3. El número promedio en el sistema.

4. El tiempo promedio de espera en la línea.

5. El tiempo promedio de espera en el sistema, incluyendo el servicio.

**SOLUCIÓN: Parte 1**

1. La utilización promedio del cajero es (utilizando el modelo 1)

$\lambda = 15 \quad \mu = 20$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\rho = \frac{15}{20} = 75 \text{ por ciento}$$

**1.** El número promedio en la línea de espera es

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(15)^2}{20\,(20 - 15)} = 2.25 \text{ clientes}$$

**2.** El número promedio dentro del sistema es

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{15}{20 - 15} = 3 \text{ clientes}$$

**3.** El tiempo promedio de la espera en línea es

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.25}{15} = 0.15 \text{ de hora, o } 9 \text{ minutos}$$

**4.** El tiempo promedio de espera en el sistema es

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{3}{15} = 0.2 \text{ de hora, o } 12 \text{ minutos}$$

**Parte 2** Dado que el espacio disponible es limitado y que existe el deseo de brindar un nivel aceptable de servicio, el gerente del banco quiere tener la seguridad, con 95% de confianza, de que no habrá más de tres automóviles en el sistema en un momento dado. ¿Cuál es el nivel presente de servicio con el límite de tres automóviles?

¿Qué nivel de utilización de cajero se debe lograr y cuál debe ser el ritmo del servicio del cajero para asegurar 95% en el nivel del servicio?

SOLUCIÓN: Parte 2

El nivel presente del servicio para tres automóviles o menos es la probabilidad de que haya 0, 1, 2 o 3 automóviles en el sistema. Con el modelo 1, ilustración 8A.8:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

en $n = 0$, $P_0 = (1 - 15/20)$ $(15/20)^0 = 0.250$

en $n = 1$, $P_1 = (1/4)$ $(15/20)^1 = 0.188$

en $n = 2$, $P_2 = (1/4)$ $(15/20)^2 = 0.141$

en $n = 3$, $P_3 = (1/4)$ $(15/20)^3 = 0.105$

$\overline{0.684}$ o 68.5 por ciento

La probabilidad de tener más de tres automóviles en el sistema es de 1.0 menos la probabilidad de tres o menos automóviles (1.0 − 0.685 = 31.5 por ciento).

Para un nivel de servicio de 95% de tres o menos automóviles, esto dice que P0 + P1 + P2 + P3 = 95 por ciento.

$$0.95 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3$$

$$0.95 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\right]$$

Se puede resolver el caso por prueba y error para los valores de λ/μ. Si λ/μ = 0.50,

$$0.95 \stackrel{?}{=} 0.5(1 + 0.5 + 0.25 + 0.125)$$

$$0.95 \neq 0.9375$$

Donde $\lambda/\mu = 0.45$,

$$0.95 \stackrel{?}{=} (1 - 0.45)\,(1 + 0.45 + 0.203 + 0.091)$$

$$0.95 \neq 0.96$$

Donde $\lambda/\mu = 0.47$,

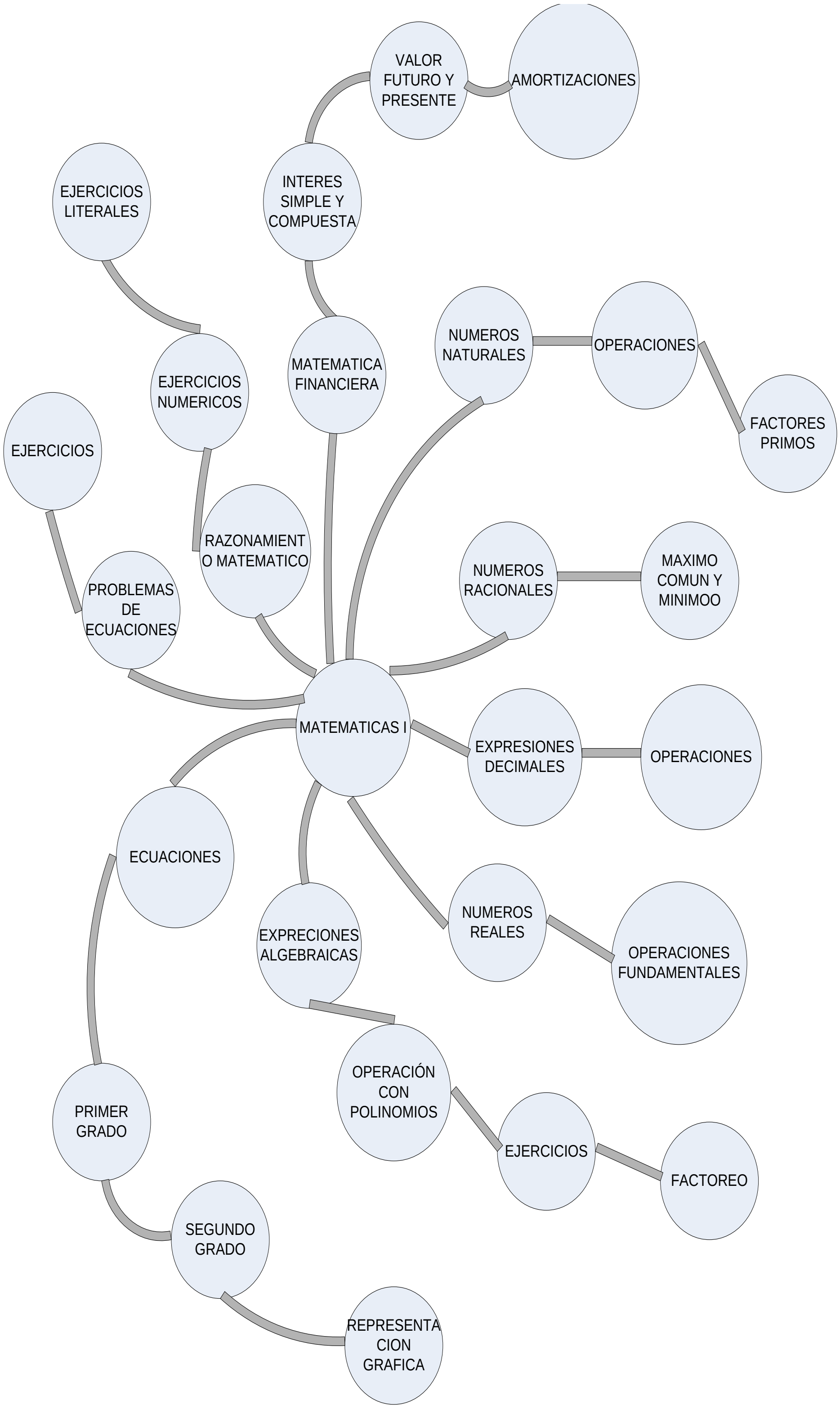
$$0.95 \stackrel{?}{=} (1 - 0.47)\,(1 + 0.47 + 0.221 + 0.104) = 0.95135$$

$$0.95 \approx 0.95135$$

Por lo tanto, con una utilización de ρ = λ/μ de 47%, la probabilidad de que haya tres o menos automóviles en el sistema es de 95 por ciento.

Para encontrar el ritmo de servicio requerido para alcanzar este nivel de servicio de 95%, simplemente se resuelve la ecuación λ/μ = 0.47, donde λ = número de llegadas por hora. Esto dará μ = 32 por hora. Es decir, el cajero debe servir aproximadamente a unas 32 personas por hora (un incremento de 60% sobre la capacidad original de 20 por hora) para 95% de confianza de que no habrá más de tres automóviles en el sistema. El servicio tal vez se pueda acelerar modificando el método del servicio, añadiendo a otro cajero o limitando los tipos de transacciones que ofrece la ventanilla para automóviles. Nótese que con la condición de 95% de confianza de que habrá tres o menos automóviles en el sistema, el cajero estará inactivo 53% del tiempo.

## Mapa mental del contenido



# REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍCAS


Administración de Sueldos y Salarios. (20 de 09 de 2017). *Administración de Sueldos y Salarios*. Obtenido de Administración de Sueldos y Salarios: http://adssuft.blogspot.com/

Bohlander, S. y. (2001). *Administración de recursos humanos.* México: International Thomson Editores.

Chiavenato, I. (2011). *Administración de Recursos Humanos.* MÉXICO: McGraw-Hill/Interacericana Editores, S.A.

Covey, S. (2005). *El 8vo hábito de la Efectividad a la Grandeza.* Barcelona: Paidós Ibérica.

Nacional, C. (2005). *Código de Trabajo.* Quito: Lexis.

Richard B. Chase, F. R. (2016). *ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES Producción y cadena de suministros.* México, D.F.: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Sánchez, G. (2008). *Código del Trabajo.* Quito: EDYPE.

Sánchez, G. (2009). *Rol de Pagos y Visto Bueno.* Quito: EDYPE.

Santillán, A. G. (2014). *MATEMÁTICAS FINANCIERAS PARA LA TOMA DE DECISIONES.* México: Servicios Académicos Internacionales para eumed.net.

Siliceo, A. (2004). *Capacitación y Desarrollo del personal.* México: Ed. Limusa.

SMITH. (2016). *ALGEBRA.* MEXICO: Pearson Educación , S.A. de C.V.

## NETGRAFÍA


Cevallos, S. (05 de 10 de 2017). *Pérez, Bustamante y Ponce*. Obtenido de Pérez, Bustamante y Ponce: http://www.pbplaw.com/que-tipo-de-contrato-de-trabajo-se-puede-firmar-en-ecuador/

Infoamérica. (20 de 06 de 2017). *Infoamerica*. Obtenido de Infoamerica: https://www.infoamerica.org/teoria/pasquali1.htm

Los Recursos Humanos. com. (20 de 09 de 2017). *LosRecursos Humanos.com*. Obtenido de LosRecursosHumanos.com: http://www.losrecursoshumanos.com/definicion-de-clima-laboral/

Obregoso, A. (25 de 09 de 2017). *Gestiopolis*. Obtenido de Gestiopolis: https://www.gestiopolis.com/el-clima-organizacional-que-es-y-como-analizarlo/

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA. (17 de 10 de 2017). *OFICINA DE RECURSOS HUMANOS*. Obtenido de OFICINA DE RECURSOS HUMANOS: http://orh.ucr.ac.cr/manual-puestos/glosario

Word press. (04 de 05 de 2017). *AdministraciónDFH*. Obtenido de AdministraciónDFH: https://administraciondfh2013.wordpress.com/2013/02/06/distincion-entre-administracion-del-factor-humano-de-personal-y-de-recursos-humanos/

ISBN: 978-9942-33-252-3
9 789942 332523

INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO CORPORATIVO
EDWARDS DEMING®
saber qué hacer y cómo hacerlo

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica