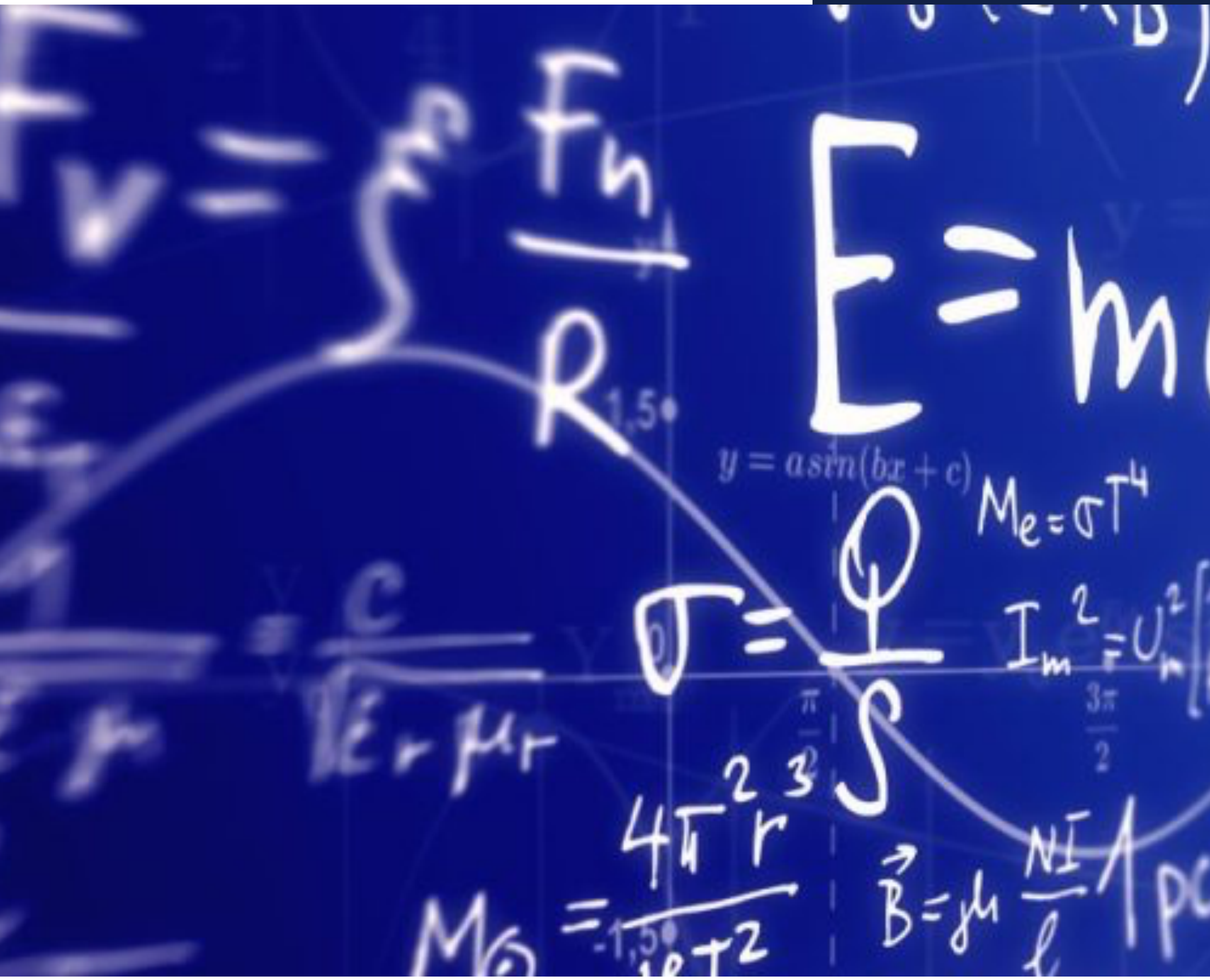
HIDALGO TORRES JOSE LUIS
LOPEZ AYALA MAURICIO BLADIMIR
ROSERO ORTIZ TONNY FABIAN
MANOBANDA CUITO WILLIAM GERMAN

FÍSICA



INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO CORPORATIVO
EDWARDS DEMING®
saber qué hacer y cómo hacerlo

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Primera edición: noviembre 2017

ISBN: 978-9942-33-258-5
Diseño de portada y diagramación: Grupo Compás

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos con base en la normativa de la editorial.

Guayaquil-Ecuador 2017

FÍSICA

Autores

HIDALGO TORRES JOSE LUIS
LOPEZ AYALA MAURICIO BLADIMIR
ROSERO ORTIZ TONNY FABIAN
MANOBANDA CUITO WILLIAM GERMAN

FÍSICA
Autor.

HIDALGO TORRES JOSE LUIS
LOPEZ AYALA MAURICIO BLADIMIR
ROSERO ORTIZ TONNY FABIAN
MANOBANDA CUITO WILLIAM GERMAN

Experiencia académica:
Docentes del Instituto Superior Tecnológico
Corporativo Edwards Deming.

Este libro fue elaborado en el contexto de desarrollo de la educación por el Instituto Superior Tecnológico Corporativo Edwards Deming, sus contenidos son una estructura básica para lograr un proceso de aprendizaje ideal.

El documento mantien una revisión de doble par ciego lo que permite considerarse como una obra que contribuye con la formación profesional, consiguiendo el aval de universidades en América como la Universidad de Oriente y UO University.

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

UNIVERSIDAD DE ORIENTE

UO GLOBAL UNIVERSITY ONLINE

INDICE

Introducción

El análisis dimensional es una parte fundamental de la física para permitir estudiar la relación entre las magnitudes fundamentales y derivadas, utilizando para este propósito Sistema Internacional de Unidades SI.

Siendo la meta principal de la física el descubrimiento de las leyes generales de la naturaleza y expresarlas de manera racional y objetiva; cumpliendo el objetivo al utilizar el método científico experimental, enfocándose en la observación de los fenómenos y en la realización de experimentos que permiten su medición de cantidades físicas. Según (Pérez, 2000)

CAPITULO I

ANÁLISIS DIMENSIONAL

¿Qué es magnitud?

Es todo aquello que es susceptible a ser medido y que se puede percibir por algún medio.

Por consiguiente, magnitud es todo aquello que se puede medir, es decir es la cantidad física que representa.

Medir?:

Es comparar una magnitud dada, con otra de su misma especie asumida en forma arbitraria como unidad de medida o patrón.

Al medir se compara la magnitud (tamaño) de la cantidad física con un patrón universal aceptado como unidad de medida. Este patrón lo podemos encontrar en cintas métricas, relojes, balanzas o termómetros. En la comparación se contabilizan cuántas unidades de medida caben en la magnitud de la cantidad física que se mide.

Ejemplo:

Para medir el largo de la pizarra, comparamos con un metro patrón.

La masa de un niño es de 20 kilogramos, significa que su masa es 20 veces mayor que 1 kilogramo.

Es importante que el patrón seleccionado como unidad de medida sea de la misma clase (característica) del objeto que va a medirse.

Una unidad de longitud, sea el metro, pie o centímetro, se utilizará para distancias, y una unidad de masa como el kilogramo o el gramo, son unidades para medir la masa de un cuerpo.

Clasificación de las magnitudes:

Por su origen:

Magnitudes Fundamentales.

Magnitudes Derivadas.

Por su naturaleza:

Magnitudes Escalares.

Magnitudes Vectoriales.

Magnitudes Fundamentales: Son aquellas elegidas arbitrariamente como base para establecer las unidades de un Sistema De Unidades y en función de las cuales se expresan las demás magnitudes. Según (Cuéllar, 2015) El SI se basa en siete

Cuadro N°. 1 Siete cantidades físicas fundamentales.

Cantidad	**Unidad**	**Símbolo de la unidad**
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Corriente eléctrica	Ampere	A
Intensidad de luminosidad	Candela	cd

Fuente: (Cuéllar, 2015)

Cuadro N°. 2 unidades fundamentales del SI (Sistema Internacional De Unidades)

Las unidades fundamentales del sistema métrico decimal son:

Cantidad física	Sistema MKS		Sistema CGS	
	Unidad básica	**Símbolo**	**Unidad básica**	**Símbolo**
Longitud:	Metro	m	Centímetro	cm
Masa:	Kilogramo	kg	Gramo	g
Tiempo:	Segundo	s	Segundo	s

PREFIJOS DEL SI

Según (Cuéllar, 2015):

Cuando expresamos una cantidad física, por ejemplo 100 metros = $1x10^2$ metros, comparamos la distancia con la longitud de un metro. Una longitud de cien metros significa que dicha longitud es cien veces mayor que la de un metro. Aunque se puede expresar cualquier cantidad en términos de la unidad fundamental, a veces no resulta muy conveniente.

Por ejemplo, si decimos que la distancia entre dos ciudades es de 960 000 metros = $96x10^4$ metros, por lo que resulta más el kilómetro, el cual equivale a 1000 metros o 10^3 metros. Así, tenemos que la distancia entre dichas ciudades es de 960 kilómetros.

Al medir cantidades, pequeñas o grandes, sus unidades se expresan agregando un prefijo a la unidad estándar o fundamental. Por ejemplo, el prefijo mili designa una milésima parte de la longitud de un metro, es decir, 1 milímetro = 0.001 metros = $1x10^{-3}$ metros. Cuadro N°. 3

Cuadro N°. 3 Prefijos del SI

Mayores que 1

Prefijo	Símbolo	Significado	Valor numérico	Expresión en notación científica
Giga	G	Mil millones	1 000 000 000	1×10^9
Mega	M	Millón	1 000 000	1×10^6
Kilo	K	Mil	1 000	1×10^3
Hecto	h	Cien	100	1×10^2
Deca	Da	Diez	10	1×10

Menores que 1

Prefijo	Símbolo	Significado	Valor numérico	Expresión en notación científica
Deci	d	Décimo	0.1	1×10^{-1}
Centi	c	Centésimo	0.01	1×10^{-2}
Mili	m	Milésimo	0.001	1×10^{-3}
Micro	u	Millonésimo	0.000001	1×10^{-6}
Nano	n	Billonésimo	0.000000001	1×10^{-9}
Pico	p	Trillonésimo	0.000000000001	1×10^{-12}

Múltiplo†	*Prefijo (y abreviatura)*	*Múltiplo*†	*Prefijo (y abreviatura)*
10^{12}	tera- (T)	10^{-2}	centi- (c)
10^{9}	giga- (G)	10^{-3}	mili- (m)
10^{6}	mega- (M)	10^{-6}	micro- (μ)
10^{3}	kilo- (k)	10^{-9}	nano- (n)
10^{2}	hecto- (h)	10^{-12}	pico- (p)
10	deca- (da)	10^{-15}	femto- (f)
10^{-1}	deci- (d)	10^{-18}	atto- (a)

*Por ejemplo, 1 gramo (g) multiplicado por 1000 (que es 10^3) es 1 kilogramo (kg); 1 gramo multiplicado por 1/1000 (que es 10^{-3}) es 1 miligramo (mg).

†Los prefijos de uso más común están en negritas. Observe que las abreviaturas de los múltiplos 10^6 y mayores son mayúsculas, en tanto que las abreviaturas de los múltiplos más pequeños son minúsculas.

Fuente: (Cuéllar, 2015)

Magnitudes Derivadas: Son aquellas magnitudes que se expresan en función de las magnitudes asumidas como fundamentales. Ver Cuadro N°. 4

Cuadro N°. 4 Unidades derivadas del SI

Cantidad	Unidad	Símbolo de la unidad
Área	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3
Densidad de la masa	Kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Energía	Joule	J
Calor de fusión	Joule por kilogramo	J/kg
Calor de evaporación	Joule por kilogramo	J/kg
Calor específico	Joule por kilogramo-kelvin	J/kg · K
Presión	Pascal	Pa
Potencial eléctrico	Volt	V

Fuente: (Cuéllar, 2015)

Magnitudes Escalares: Son aquellas que enunciado su valor seguido de su correspondiente unidad quedan perfectamente definidas, a veces afectado de un signo negativo convencionalmente elegido.

Ejemplo: La temperatura: - 15 °C

Son magnitudes escalares: Longitud, masa, tiempo, volumen, densidad, trabajo, potencia, energía, carga eléctrica, intensidad de corriente eléctrica, potencial eléctrico, iluminación.

Conversión de unidades: (Bedford & Fowler, 2008)

En la práctica se requieren convertir valores expresados en unidades de una clase a valores en otras unidades.

Por ejemplo, si algunos de los datos que deben usarse en una ecuación están dados en unidades SI y otros en unidades de uso común, todos se deben expresar en términos de un solo sistema de unidades antes de ser sustituidos en la ecuación. La conversión de unidades es sencilla, pero debe hacerse con cuidado. Cuadro N°. 5

Cuadro N°. 5 conversión de unidades

TIEMPO

1 min = 60 s
1 h = 60 min = 3600 s
1 día = 24 h = 86,400 s

LONGITUD

1 m = 3.281 pies = 39.37 pulg
1 km = 0.6214 mi
1 pulg = 0.08333 pie = 0.02540 m
1 pie = 12 pulg = 0.3048 m
1 mi = 5280 pies = 1.609 km
1 milla náutica = 1852 m = 6080 pies

ÁNGULO

1 rad = $180/\pi$ grad = 57.30 grad
1 grad = $\pi/180$ rad = 0.01745 rad
1 revolución = 2π rad = 360 grad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

ÁREA

1 mm^2 = 1.550×10^{-3} $pulg^2$ = 1.076×10^{-5} $pies^2$
1 m^2 = 10.76 $pies^2$
1 $pulg^2$ = 645.2 mm^2
1 pie^2 = 144 $pulg^2$ = 0.0929 m^2

VOLUMEN

1 mm^3 = 6.102×10^{-5} $pulg^3$ = 3.531×10^{-8} $pies^3$
1 m^3 = 6.102×10^4 $pulg^3$ = 35.31 $pies^3$
1 $pulg^3$ 1.639×10^4 mm^3 = 1.639×10^{-5} m^3
1 pie^3 = 0.02832 m^3

VELOCIDAD

1 m/s = 3.281 pies/s = 39.37 pulg/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h = 0.9113 pie/s
1 mi/h = (88/60) pies/s = 1.609 km/h = 0.4470 m/s
1 nudo = 1 milla náutica/h = 0.5144 m/s = 1.689 pies/s

ACELERACIÓN

1 m/s^2 = 3.281 $pies/s^2$ = 39.37 $pulg/s^2$
1 $pulg/s^2$ = 0.08333 pie/s^2 = 0.02540 m/s^2
1 pie/s^2 = 0.3048 m/s^2
1 g = 9.81 m/s^2 = 32.2 $pies/s^2$

MASA

1 kg = 0.0685 slug
1 slug = 14.59 kg
1 t (tonelada métrica) = 10^3 kg = 68.5 slug

FUERZA

1 N = 0.2248 lb
1 lb = 16 oz = 4.448 N
1 kip = 1000 lb = 4448 N
1 ton = 2000 lb = 8896 N

TRABAJO Y ENERGÍA

1 J = 1 N-m = 0.7376 pie-lb
1 pie-lb 1.356 J

POTENCIA

1 W = 1 N-m/s = 0.7376 pie-lb/s = 1.340×10^{-3} hp
1 pie-lb/s = 1.356 W
1 hp = 550 pies-lb/s = 746 W

PRESIÓN

1 Pa = 1 N/m^2 = 0.0209 lb/pie^2 = 1.451×10^{-4} $lb/pulg^2$
1 bar = 10^5 Pa
1 $lb/pulg^2$ (psi) = 144 lb/pie^2 = 6891 Pa
1 lb/pie^2 = 6.944×10^{-3} $lb/pulg^2$ = 47.85 Pa

Fuente: (Bedford & Fowler, 2008)

Magnitudes Vectoriales: Son aquellas que además de conocer su módulo o valor, es necesario conocer su dirección y sentido para que esté plenamente definida.

Son magnitudes vectoriales: Desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, torque, impulso, cantidad de movimiento, intensidad del campo eléctrico, inducción magnética.

Ejemplos de transformación de unidades: (Cuéllar, 2015)

1.- La longitud de una pluma es de 15.6 cm. Expresar dicha magnitud en metros. Solución

La relación numérica entre un metro y un centímetro es 1 m = 100 cm:

$$\frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}} = \frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}} = 1$$

Es igual a 1, porque estamos referenciando al mismo tamaño o magnitud física que corresponde a la unidad patrón que es el metro, en distinto sistema de unidades.

$$(15.6\ \cancel{cm})\left(\frac{1\ m}{100\ \cancel{cm}}\right) = 15.6\ cm$$

$$\frac{15.6\ m}{100} = 15.6\ cm$$

$$0.156\ m = 15.6\ cm$$

Entonces: 15.6 cm = 0.156 m

Observa que el método del factor unitario no altera la magnitud de la cantidad física porque se multiplica por un factor que es igual a uno.

El factor unitario por el que se multiplica una magnitud física para efectuar una conversión de unidades se debe seleccionar de manera que, si la unidad que se quiere cancelar se encuentra en el numerador, es necesario elegir el factor unitario que la tiene en el denominador.

De manera inversa, si la unidad que se busca cancelar está en el denominador, se selecciona el factor unitario que la tiene en el numerador

2.- El área de un cartel de publicidad es de 800 cm^2. Expresa esta magnitud en m^2. Solución

1 m = 100 cm

$(1\ m)^2 = (100\ cm)^2$

$1\ m^2 = 10\ 000\ cm^2$

Apliquemos a continuación el método del factor unitario:

$$\frac{1\ m^2}{10\ 000\ cm^2} = \frac{10\ 000\ cm^2}{1\ m^2} = 1$$

$800\ cm^2\ (1) = 800\ cm^2$

La unidad que queremos eliminar es cm^2; entonces seleccionamos el factor unitario

$$800\,\cancel{cm^2}\left(\frac{1\ m^2}{10\,000\ \cancel{cm^2}}\right) = 800\ cm^2$$

$$\frac{800}{10\,000} m^2 = 800\ cm^2$$

$$0.08\ m^2 = 800\ cm^2$$

Entonces: $800\ cm^2 = 0.08\ m^2$

3.- La velocidad promedio de un automóvil es de 90 km/h. Expresa dicha magnitud en m/s. Solución

En este caso es preciso efectuar dos conversiones de unidades: de kilómetros a metros y de horas a segundos:

1 km = 1000 m   1 h = 3600 s

$$\frac{1\ km}{1000\ m} = \frac{1000\ m}{1\ km} = 1 \qquad\qquad \frac{1\ h}{3600\ s} = \frac{3600\ s}{1\ h} = 1$$

Recuerda que 1 hora = 60 minutos = 60(60) segundos = 3600 segundos.

Dado que necesitamos cancelar la unidad de kilómetros, seleccionamos el factor unitario 1000 m / 1 km y también debemos cancelar la unidad de horas, elegimos el factor unitario

1 h / 3600 s

Luego:

$$90\ \frac{km}{h} = \left(90\ \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\right)\left(\frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{h}}{3600\ s}\right)$$

$$= \frac{90(1000\ m)}{3600\ s}$$

$$= 25\ \frac{m}{s}$$

$$90\ \frac{km}{h} = 25\ \frac{m}{s}$$

4.- ¿Determinar cuál es el área de una plancha rectangular que tiene de largo de 3×10^4 cm y de ancho de 2×10^3 cm?

Solución

Datos Fórmula

$b = 3 \times 10^4$ cm Área de un rectángulo: $A = a \times b$ $a = 2 \times 10^3$ cm

A = ?

Sustitución datos en fórmula:

$A = (2 \times 10^3)\ (3 \times 10^4)$

$A = (2 \times 3)\ (10^3 \times 10^4)$

$A = 6 \times 10^{3+4}$

$A = 6 \times 10^7\ cm^2$

Nota: Cuando la cantidad de cero es muy significativa, es preferible trabajar con notación científica.

CAPITULO II:

VECTORES

Introducción

Según (Gutiérrez, 2015). En el estudio de ciertos fenómenos naturales resulta que hay magnitudes físicas importantes para describirlos y comprenderlos, las cuales tienen características especiales.

Son las magnitudes físicas vectoriales, que pueden ser representadas por entes matemáticos llamados vectores.

Este estudio nos facilitará la comprensión y manipulación de magnitudes físicas vectoriales como el desplazamiento, la velocidad y la fuerza.

Magnitud vectorial

Según (Gutiérrez, 2015): Una magnitud vectorial está definida, por su magnitud expresada en números y el nombre de la unidad, requiere de una dirección, el sentido y el origen (o punto de aplicación).

Ejemplos de magnitudes vectoriales son: El desplazamiento, la fuerza, la aceleración, la velocidad, la cantidad de movimiento, etcétera.

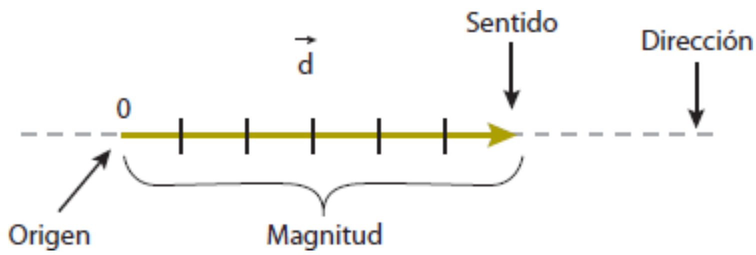
Las magnitudes vectoriales se representan por medio de vectores. Un vector es un ente matemático que consta de origen, dirección, sentido y magnitud (módulo o intensidad).

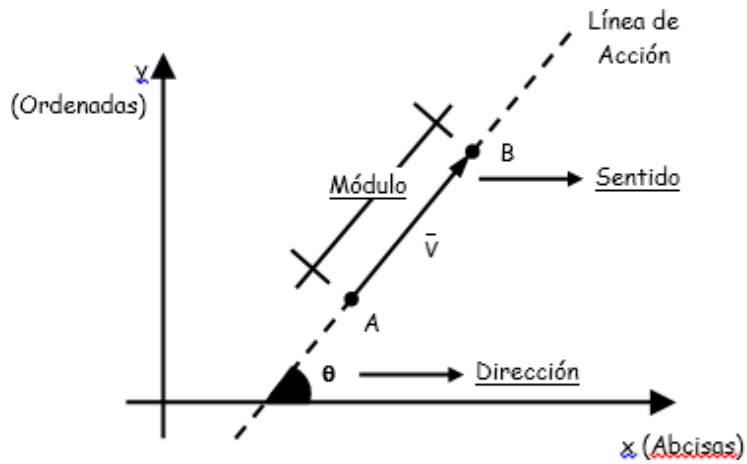
Simbólicamente los vectores y las magnitudes vectoriales se representan por letras negritas

(**d**) o por letras sobre las cuales se coloca una flecha pequeña ($\vec{d}$). La magnitud vectorial o módulo, se representa por la letra sin la flecha arriba (d) o por la letra con la flecha arriba entre dos líneas verticales (| $\vec{d}$ |).

Un vector se representa gráficamente por un segmento de recta dirigida (Gráfico N°. 1) y sus características son:

Gráfico N°. 1 características de un vector: Origen, magnitud (módulo), sentido y dirección.





Fuente: (Gutiérrez, 2015)

El origen del vector. Es el punto donde se inicia el segmento de recta (punto 0). La dirección del vector. Ésta queda representada por la recta sobre la que se encuentra el vector (línea punteada).

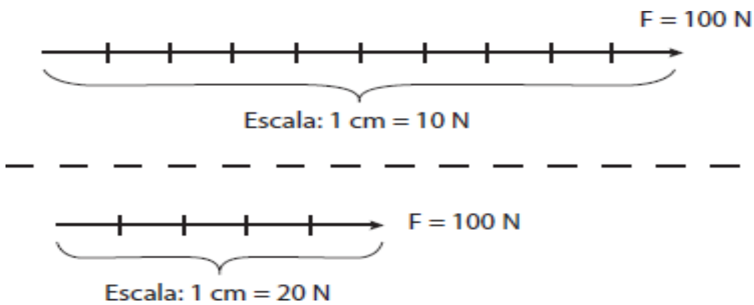
El sentido del vector. Está indicado por la punta de la flecha.

La magnitud o módulo del vector. Es el tamaño de la flecha, es decir, su longitud del origen a la punta (corresponde a 6 unidades en la gráfica).

Para representar gráficamente la magnitud de un vector se emplea una escala adecuada de acuerdo con la magnitud del vector y el tamaño que se le desee dar en el papel. Si queremos representar un vector en una cartulina, no emplearemos la misma escala que si lo hacemos en una hoja tamaño carta.

Por ejemplo, una fuerza de 100 N se puede representar por un vector que tenga una longitud de 10 cm en nuestro cuaderno, si la escala es 1 cm = 10 N, pero si la escala hubiese sido 1 cm = 20 N, el vector se hubiese representado por un segmento de recta de 5 cm de longitud (Gráfico N°. 2). En general es recomendable usar escalas de 1:1, 1:10, 1:100, siempre que sea posible.

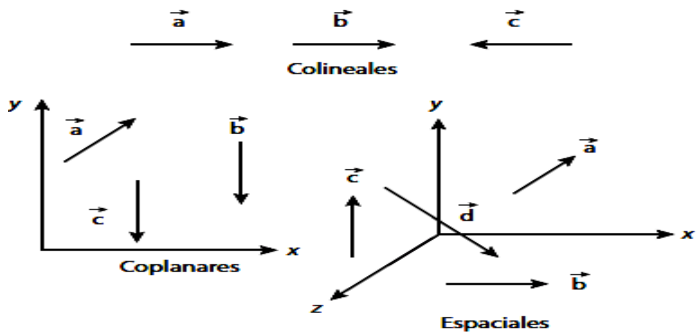
Gráfico N°. 2 Magnitud (módulo) del vector, mediante escalas.



Fuente: (Gutiérrez, 2015)

Clasificación de los vectores

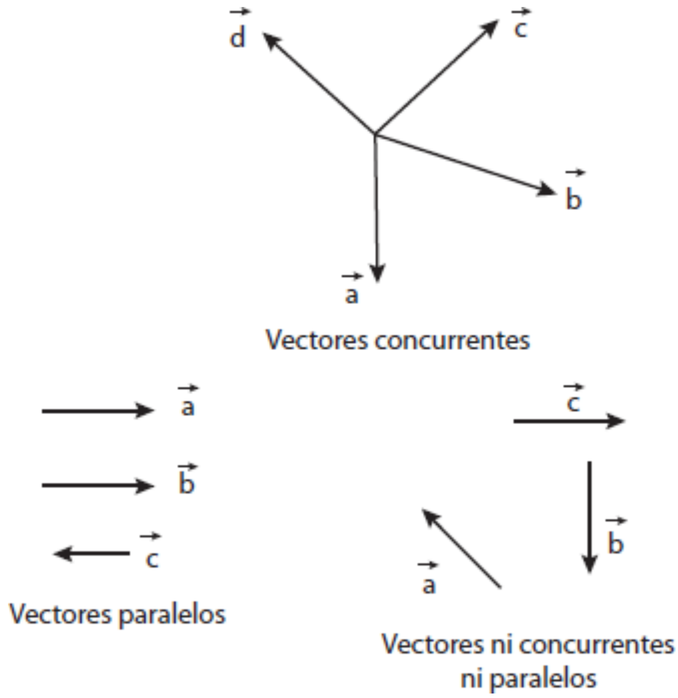
Los vectores se clasifican en: Colineales, coplanares y espaciales (Gráfico N°. 3). Gráfico N°. 3 Los vectores: Coplanares, colineales y espaciales



Fuente: (Gutiérrez, 2015)

A su vez, los vectores coplanares y espaciales se pueden clasificar en función de sus direcciones y orígenes en: Vectores concurrentes, vectores paralelos y vectores ni concurrentes ni paralelos (Gráfico N°. 4).

Gráfico N°. 4 clasificación según su dirección y origen

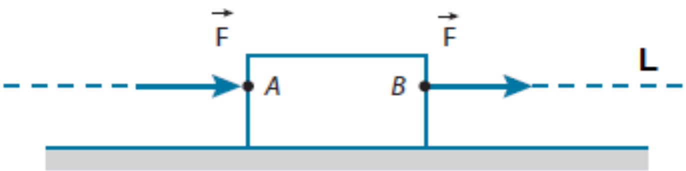


Fuente: (Gutiérrez, 2015)

Otros vectores que aparecen con frecuencia son los vectores deslizantes y los vectores fijos.

Vector deslizante: Es el vector que se puede trasladar a lo largo de su dirección a un punto arbitrario de la recta en que se encuentra. En la Gráfico N°. 5, la fuerza F se puede representar por un vector deslizante, ya que la caja experimenta el mismo efecto, ya sea que la empujen o la jalen.

Gráfico N°. 5 Vector deslizante



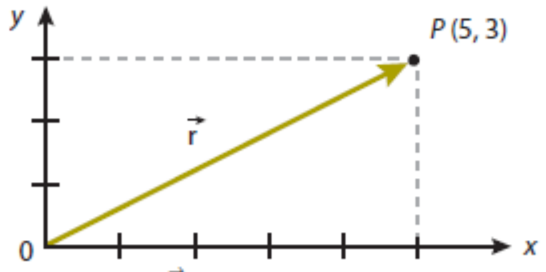
La fuerza $\vec{F}$ se puede aplicar en A o en B a lo largo de la línea L, es decir, la fuerza $\vec{F}$ se puede representar por un vector deslizante.

Fuente: (Gutiérrez, 2015)

Vector fijo: Es el vector que está ligado al origen o punto de aplicación.

Un ejemplo de vector fijo es el vector de posición que permite localizar un punto o un objeto en el plano o el espacio con respecto al origen del sistema de coordenadas cartesianas (Gráfico N°. 6).

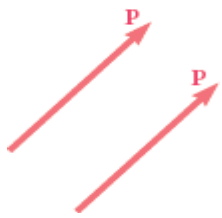
Gráfico N°. 6 Vector fijo



El vector $\vec{r}$ es un vector fijo que permite localizar la posición de P con respecto al origen del sistema de coordenadas.
(Gutiérrez, 2015)

Vectores iguales: Dos vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son iguales, tengan o no el mismo punto de aplicación; los vectores iguales pueden representarse por la misma letra. Gráfico N°. 7

Gráfico N°. 7 Vectores iguales

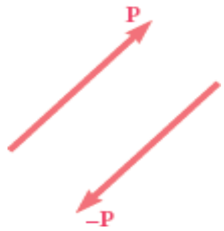


Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Vector negativo: El vector negativo de un vector P se define como aquel que tiene la misma magnitud que P y una dirección opuesta a la de P; el negativo del vector P se representa por

- P. A los vectores P y –P se les llama vectores iguales y opuestos. Se tiene P + (- P) = 0 .

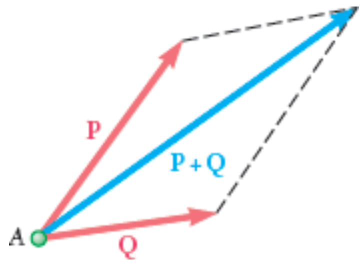
Gráfico N°. 8 Vector negativo



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Adición o suma de vectores Según: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010) Los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. La suma de dos vectores P y Q se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto A y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a P y a Q (Gráfico N°. 9).

Gráfico N°. 9 método del paralelogramo



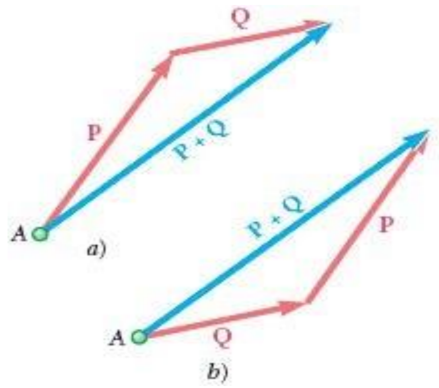
Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

La diagonal que pasa por A representa la suma vectorial de P y Q, y se representa por P + Q.

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores P y Q no depende del orden en que P y Q se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es conmutativa: P + Q = Q + P

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otro método para determinar la suma de dos vectores. Este método llamado **regla del triángulo** se obtiene como sigue: Considérese el Gráfico N°. 9 donde la suma de los vectores P y Q ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el lado del paralelogramo opuesto a Q es igual a Q en magnitud y dirección, se podría dibujar sólo la mitad del paralelogramo (Gráfico N°. 10a). De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse colocando P y Q de punta a cola y uniendo la cola de P con la punta de Q. En la Gráfico N°. 10b se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

Gráfico N°. 10 Regla del triángulo



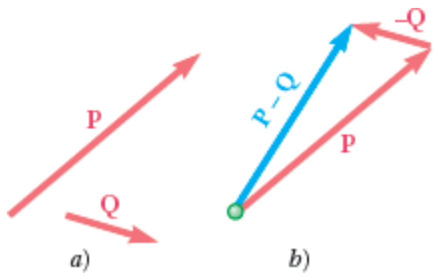
Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Sustracción o resta de vectores

Según (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010):

La resta de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De manera que el vector P - Q que representa la diferencia de los vectores P y Q se obtiene agregándole a P el vector negativo - Q (Gráfico N°. 11). Se escribe: P - Q = P + (- Q)

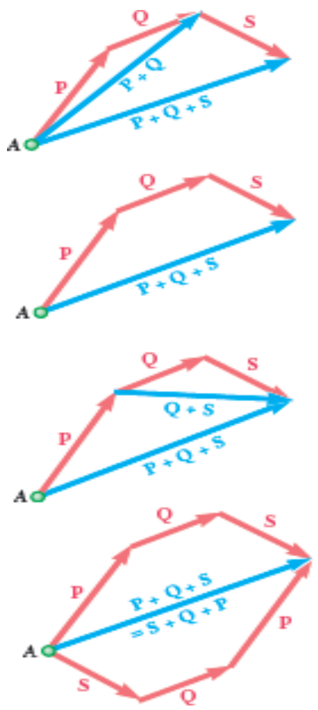
Gráfico N°. 11 Resta de vectores



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Consideremos la suma de tres vectores, aplicando el método del paralelogramo (Gráfico N°. 12):

Gráfico N°. 12 Suma de tres vectores



$$P + Q + S = (P + Q) + S = P + (Q + S)$$

$$P + Q + S = (P + Q) + S = S + (P + Q) \\ = S + (Q + P) = S + Q + P$$

Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

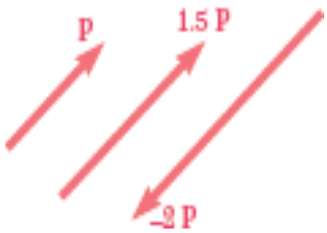
Producto de un escalar por un vector .

Según: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Se define el producto kP de un escalar k (k ϵ Reales) y un vector P como un vector que tiene la misma dirección y sentido que P (si k es positivo), o la misma dirección pero sentido opuesto al de P (si k es negativo) y una magnitud igual al producto de P y el valor absoluto de

k. (Gráfico N°. 13).

Gráfico N°. 13 Producto de un escalar por un vector



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

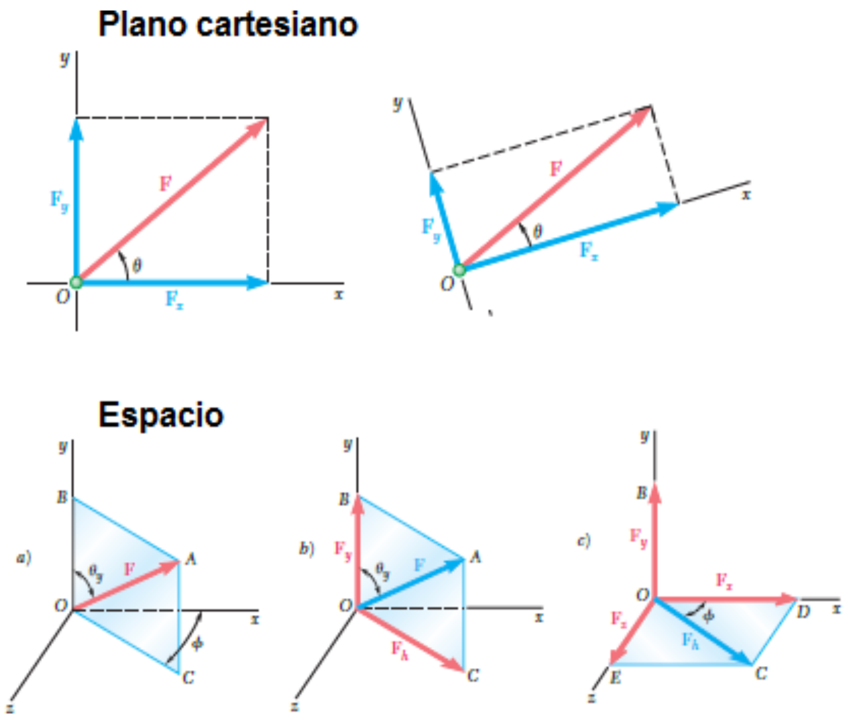
Componentes de un vector en un plano o sistema cartesiano "X – Y" y en el sistema espacial "X – Y – Z"

Un vector F (fuerza) se lo puede descomponer en sus componentes perpendiculares entre sí, como se lo muestra en el Gráfico N°. 14 F_x en el eje X, F_y en el eje Y y en el caso de un tercer eje: F_z en el eje Z.

Nota 1: Indicaciones descriptivas del plano cartesiano y del espacio para su comprensión de la ubicación gráfica de los vectores en estos sistemas:

Plano cartesiano: Formado por 2 ejes: "X – Y" Espacio: Formado por 3 ejes: "X – Y - Z"

Gráfico N°. 14 Componentes de un vector



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

En la intersección entre los ejes que son perpendiculares entre sí, se forman ángulos de 90° o denominados como ángulos rectos.

Con la intersección entre los ejes se forman planos, así por ejemplo:

En el sistema cartesiano rectangular se tienen los siguientes planos determinados por los sentidos de cada eje; en el caso del eje “X” que a partir del corte de los dos ejes “X – Y” se le ha dado un valor a este corte “0” u origen del sistema cartesiano, de similar manera para el caso de tres ejes “X – Y - Z”.

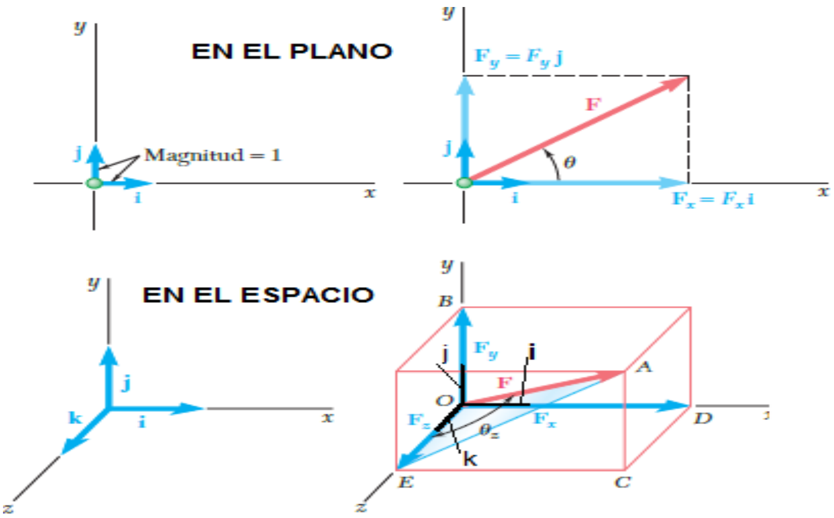
Cuatro Planos u cuadrantes:
X Y, X -Y, -X -Y, -X Y

En el espacio, en cambio se forman 12 planos:
X Y, X -Y, -X -Y, -X Y, Z Y, Z -Y, -Z -Y, -Z Y, X Z, X -Z, -X -Z, -X Z
En el espacio, se definen también según los sentidos de los ejes “X – Y - Z”, 8 octantes (cubos formados por los sentidos de los tres ejes) formados de la siguinte manera:

X Y Z, X Y -Z, X Y -Z, -X Y Z, -X -Y Z, X -Y Z, X Y -Z, -X -Y -Z

Nota 2: Por estandarización educativa se han dado los nombres de “X”, “Y”, “Z” a los ejes como se muestran en el Gráfico N°. 14; pero no hay ninguna restricción al respecto, es decir a los sentidos de los ejes se les puede dar cualquiera de las letras mayúsculas indicadas o cualesquiera de preferencia últimas letras del alfabeto o cualquier otro título según se requiera para el tema correspondiente.
A partir de éste momento se introducirán tres vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos X, Y, Z. A estos vectores se les llama vectores unitarios y se representan por **i**, **j**, **k**, respectivamente Gráfico N°. 15

Gráfico N°. 15 Vectores unitarios y componentes vectoriales de un vector F



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Nota: En adelante del contenido de ésta guía, los vectores se los representará con una letra en negrilla, en la práctica didáctica se acostumbra a los vectores representarlos como:

$\vec{F}$ $\vec{\lambda}$ $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$

Es decir, sobre la letra una flecha, para indicar que es un vector. De la definición del producto de un escalar y un vector, las componentes rectangulares **Fx**, **Fy**, **Fz** (estos **Fx**, **Fy**, **Fz** se llaman componentes vectoriales de la fuerza **F**) de una fuerza **F** pueden obtenerse con la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios **i**, **j**, **k** por escalares positivos o negativos F_x, F_y, F_z, (estos F_x, F_y, F_z se llaman componentes escalares o módulos de las componentes de la fuerza **F**) que dependerá del sentido de **Fx**, **Fy**, **Fz** .

$\mathbf{F_x} = F_x\,\mathbf{i}$ $\mathbf{F_y} = F_y\,\mathbf{j}$ $\mathbf{F_z} = F_z\,\mathbf{k}$

En el plano: **F = Fx + Fy** En el espacio: **F = Fx + Fy + Fz**

$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j}$ $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$

También las componentes escalares de un vector **F** se pueden también escribir de la siguiente manera:

Sea:

F la magnitud o módulo del vector **F**
Los ángulos: θ_X , θ_Y , θ_Z caracterizan la dirección del vector **F**:
θ_X es el ángulo entre el eje X y el vector **F** θ_Y es el ángulo entre el eje Y y el vector **F** θ_Z es el ángulo entre el eje Z y el vector **F**
La magnitud F, se lo calcula aplicando el Teorema de Pitágoras, de la siguiente: Plano: Espacio:

$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$ $\qquad$ $F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2}$

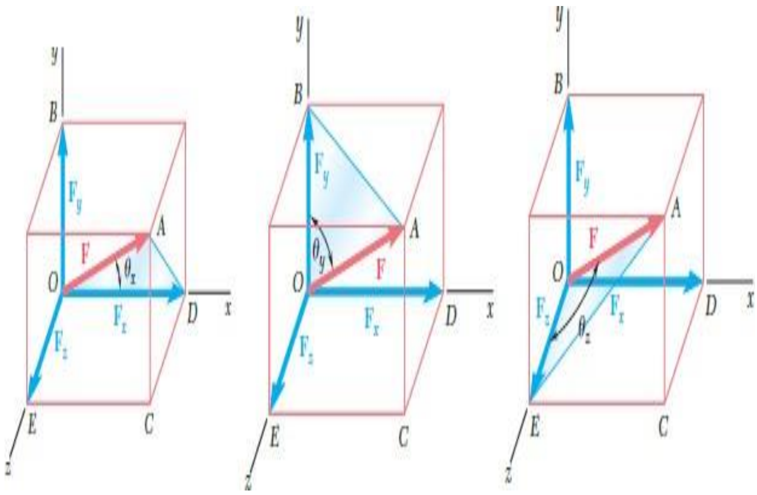
$F_x = F \cos \theta_x$ $\qquad$ $F_y = F \cos \theta_y$ $\qquad$ $F_z = F \cos \theta_z$

Nota: Sólo en el plano se podría obtener la dirección de un vector **F**, aplicando:
Si una fuerza **F** se define por sus componentes rectangulares F_x y F_y (véase Gráfico N°. 15), el ángulo θ que define su dirección escribiendo:

$$\text{tg } \Theta = \frac{F_y}{F_x}$$

El vector **F** según las condiciones dadas se lo puede escribir de la siguiente manera: En el plano: $\mathbf{F} = F \cos \theta_x \mathbf{i} + F \cos \theta_y \mathbf{j}$
En el espacio: $\mathbf{F} = F \cos \theta_x \mathbf{i} + F \cos \theta_y \mathbf{j} + F \cos \theta_z \mathbf{k}$

Gráfico N°. 16 Representación de las componentes del vector F



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

En el plano: $\mathbf{F} = F\,(\cos \theta_x\, \mathbf{i} + \cos \theta_y\, \mathbf{j})$

Sea: $\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x\, \mathbf{i} + \cos \theta_y\, \mathbf{j}$

El vector unitario **λ** del vector **F** , es de magnitud , tamaño o módulo = 1, recorre la misma línea de acción del vector **F;** se deduce que las componentes del vector unitario **λ** son, respectivamente, iguales a los cosenos directores de la línea de acción de **F**:

Nota: El vector unitario **λ** es adimensional, es decir no tiene unidades, porque es consecuencia de la relación del vector **F** sobre su magnitud o módulo F.

$\lambda_x = \cos \theta_x$ $\lambda_y = \cos \theta_y$ $\lambda_z = \cos \theta_z$

Se debe observar que los valores de los tres ángulos θx , θy , θz no son independientes.

La suma de los cuadrados de las componentes de **λ** es igual al cuadrado de su magnitud, es decir:

En el plano:

$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 1$ $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y = 1$

En el espacio:

$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \qquad \cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$

Entonces:$\mathbf{F} = F\,\boldsymbol{\lambda}$

En el plano: $\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j})$

Sea: $\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j}$

Entonces:$\mathbf{F} = F\,\boldsymbol{\lambda}$ Gráfico N°. 17

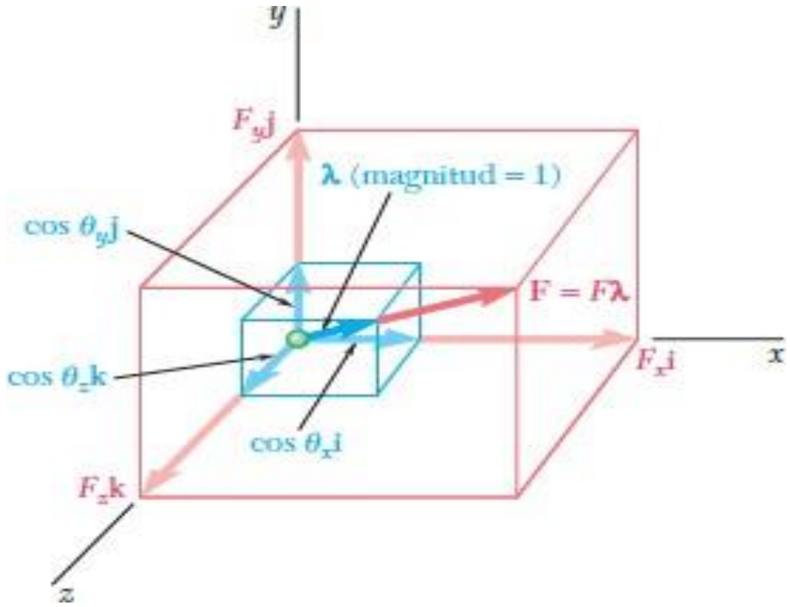
En el espacio: $\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j} + \cos\theta_z\,\mathbf{k})$

Sea: $\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j} + \cos\theta_z\,\mathbf{k}$

Entonces:$\mathbf{F} = F\,\boldsymbol{\lambda}$ Gráfico N°. 17

Implicando que el vector **F** se lo puede expresar por su valor escalar, magnitud, tamaño o módulo F y su vector unitario **λ.**

Gráfico N°. 17 Vector unitario del vector F



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

El vector unitario **λ** del vector **F** se lo puede también expresar en cualquiera de las siguientes maneras Gráfico N°. 17:

En el plano:

$$\lambda = \frac{F}{F} = \frac{Fx\ \mathbf{i} + Fy\,\mathbf{j}}{\sqrt{Fx^2+Fy^2+Fz^2}}$$

$$\lambda = \frac{Fx\ \mathbf{i}}{F} + \frac{Fy\ \mathbf{j}}{F}$$

$$\lambda = \frac{F\cos\theta_x\ \mathbf{i}}{F} + \frac{F\cos\theta_y\,\mathbf{j}}{F}$$

$$\lambda = \cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j}$$

En el espacio:

$$\lambda = \frac{F}{F} = \frac{Fx\ \mathbf{i} + Fy\,\mathbf{j} + Fz\,\boldsymbol{k}}{\sqrt{Fx^2+Fy^2+Fz^2}}$$

$$\lambda = \frac{Fx\ \mathbf{i}}{F} + \frac{Fy\ \mathbf{j}}{F} + \frac{Fz\ \mathbf{k}}{F}$$

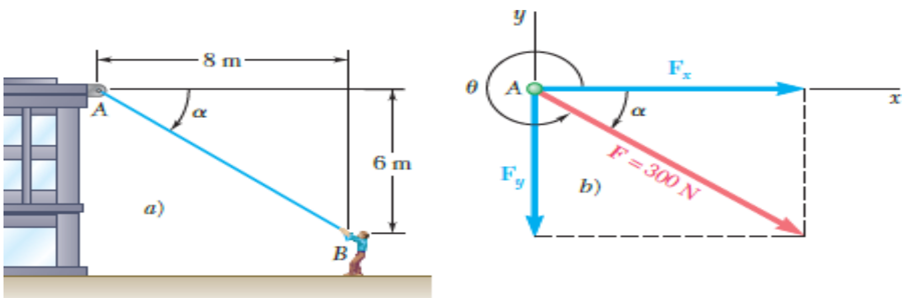
$$\lambda = \frac{F\cos\theta_x\ \mathbf{i}}{F} + \frac{F\cos\theta_y\,\mathbf{j}}{F} + \frac{F\cos\theta_z\,\mathbf{k}}{F}$$

$$\lambda = \cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j} + \cos\theta_z\,\mathbf{k}$$

Nota: Algunos autores en lugar de **λ** utilizan otras nomenclaturas, éso no está estandarizado; lo que es importante es que si se utiliza otra nomenclatura definamos sea por fórmula o de otra manera, para comprender que es lo que se quiere hacer o se refiere como vector unitario de **F**.

Ejemplo 1 (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010): Un hombre hala una cuerda atada a un edificio con una fuerza de 300 N, como se muestra en el Gráfico N°. 18a. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto A? Del Gráfico N°. 18b se tiene:

Gráfico N°. 18 Componentes rectangulares de una fuerza.



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

$$F_x = +(300\text{ N})\cos\alpha \qquad F_y = -(300\text{ N})\text{ sen }\alpha$$

Observando que AB = 10 m por el Teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo rectángulo, en el Gráfico N°. 18a se encuentra que:

$$\cos\alpha = \frac{8\text{ m}}{AB} = \frac{8\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{4}{5} \qquad \text{sen }\alpha = \frac{6\text{ m}}{AB} = \frac{6\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Obteniéndose:

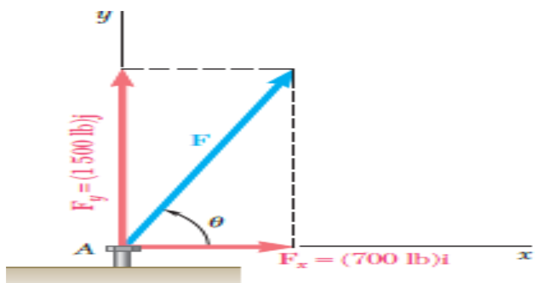
$$F_x = +(300\text{ N})\tfrac{4}{5} = +240\text{ N} \qquad F_y = -(300\text{ N})\tfrac{3}{5} = -180\text{ N}$$

$$\mathbf{F} = (240\text{ N})\mathbf{i} - (180\text{ N})\mathbf{j}$$

Ejemplo 2: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010) Una fuerza **F** = (700 lb)**i** + (1 500 lb)**j** se aplica a un perno.

A. Determínese la magnitud de la fuerza y el ángulo θ *qué* forma con la horizontal.

Primero se dibuja un diagrama (se le denomina también diagrama de cuerpo libre) que muestra las dos componentes rectangulares de la fuerza y el ángulo θ.



$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1\,500\text{ lb}}{700\text{ lb}}$$

Con la calculadora, se hace la división de 1500 lb entre 700 lb; se calcula el arco tangente de este cociente y se obtiene θ = 65.0°.

Luego para F, se tiene:

$$F = \frac{F_y}{\text{sen } \theta} = \frac{1\,500 \text{ lb}}{\text{sen } 65.0°} = 1\,655 \text{ lb}$$

Que es el módulo, tamaño o magnitud del vector **F** aplicado al perno.

Ejemplo 3: Una fuerza **F** en el espacio tiene las componentes escalares, magnitudes, módulos o tamaños: Fx = 20 lb, Fy = 30lb y Fz = 60 lb. Determine la magnitud de **F** , las formas de representación del vector **F**, el vector unitario **λ** del vector **F** y los ángulos θx , θy

, θz que forman con los ejes coordenados. Magnitud del vector **F**:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20 \text{ lb})^2 + (-30 \text{ lb})^2 + (60 \text{ lb})^2} \\ &= \sqrt{4\,900} \text{ lb} = 70 \text{ lb} \end{aligned}$$

Ángulos: θ_x , θ_y , θ_z:

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \qquad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \qquad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60 \text{ lb}}{70 \text{ lb}}$$

A estos cosenos se les llama también cosenos directores, porque determinan la dirección del vector **F**.

cos θx = 0,285714 cos θy = -0,42857 cos θz = 0,857143

En el caso de: cos θy = -0,42857 el valor del ángulo se ubica el cuarto cuadrante por característica de la función trigonométrica coseno, es decir se tiene un ángulo: θy = - 64,6° , como se pide el valor del ángulo positivo en el Excel, se tiene que hacer lo siguiente para obtener directamente el valor de 115,4°:

=ACOS (-0,42857) * 180 / PI() = 115,4°

θy = 115,4°

Calculando sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene:

$$\theta_x = 73.4° \qquad \theta_y = 115.4° \qquad \theta_z = 31.0°$$

Representación del vector **F**:

F = F_x**i** + F_y**j** + F_z**k**
F = 20lb*__i__ + 30lb*__j__ + 60lb*__k__

$F_x = F \cos \theta_x$ $\quad F_y = F \cos \theta_y F_z = F \cos \theta_z$

F_X = F cos θX $\quad F_X$ = 70lb* cos(73,4°) F_Y = F cos θY $\quad F_Y$ = 70lb* cos(-115,4°) F_Z = F cos θZ $\quad F_Z$ = 70lb* cos(31,0°)

F = 70lb* cos(73,4°)*__i__ + 70lb* cos(-115,4°)*__j__ + 70lb* cos(31,0°)*__k__

F = 70lb* (cos(73,4°)*__i__ + cos(-115,4°)*__j__ + cos(31,0°)*__k)__

F = 20lb*__i__ + 30lb*__j__ + 60lb*__k__

Representación del vector unitario **λ** del vector **F:**

$$\lambda = \frac{\mathbf{F}}{\mathrm{F}} = \frac{70lb * \cos(73{,}4°)\,\mathbf{i} \;+\; 70lb * \cos(-115{,}4°)\,\mathbf{j} \;+\; 70lb * \cos(31{,}0°)\,\boldsymbol{k}}{\sqrt{20^2+30^2+60^2}\,lb}$$

$$\lambda = \cos(73{,}4°)\,\mathbf{i} \;+\; \cos(-115{,}4°)\mathbf{j} \;+\; \cos(31{,}0°)\,\mathbf{k}$$

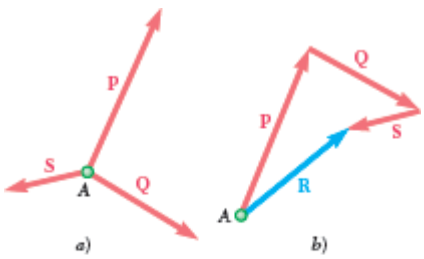
λ = 0,285714**i** + 0,42857**j** + 0,857143**k**

Obs: Entonces una manera rápida de establecer o determinar cual es el vector unitario **λ** si es que nos dan el vector **F** en su forma vectorial, simplemente dividimos cada componente vectorial del vector **F** por su módulo o magnitud F y se obtiene directamente el vector unitario **λ** de **F.**

Resultante de fuerzas concurrentes

Según (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010) una partícula A sujeta a varias fuerzas coplanares, es decir, fuerzas contenidas en el mismo plano (Gráfico N°. 14a). Como todas estas fuerzas pasan por A, se dice que son concurrentes. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre A pueden sumarse con la regla del polígono (Gráfico N°. 14b). Puesto que el uso de la regla del polígono es equivalente a la aplicación repetida de la ley del paralelogramo, el vector R obtenido representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen, es decir, la fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula A que las fuerzas dadas.

Gráfico N°. 19 Resultante de fuerzas concurrentes



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

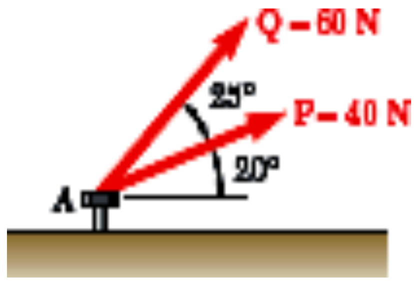
Descomposición de una fuerza en sus componentes

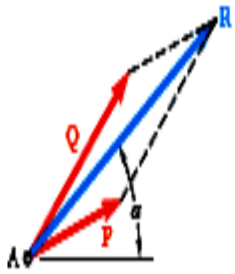
Según (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010) dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza F que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula.

A estas fuerzas se les llama componentes de la fuerza original F, y al proceso de sustituirlas en lugar de F se le llama descomposición de la fuerza F en sus componentes.

Ejemplo 1: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Las dos fuerzas P y Q actúan sobre el perno A. Determínese su resultante.





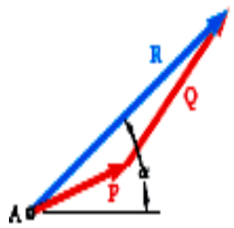
SOLUCIÓN

Solución gráfica. Dibuje a escala un paralelogramo con lados iguales a P y Q. La magnitud y la dirección de la resultante se miden y se encuentra que son

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35^\circ \qquad R = 98 \text{ N} \measuredangle 35^\circ$$

También puede usarse la regla del triángulo. Las fuerzas P y Q se dibujan de punta a cola y otra vez se obtienen la magnitud y la dirección de la resultante por medición directa.

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35^\circ \qquad R = 98 \text{ N} \measuredangle 35^\circ$$

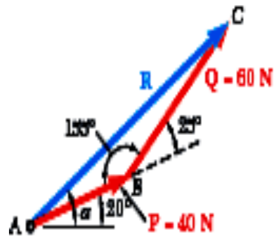


Solución trigonométrica. Se usa otra vez la regla del triángulo; los dos lados y el ángulo que se forma entre ellos se conocen. Se aplica la ley de los cosenos.

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$
$$R^2 = (40\text{ N})^2 + (60\text{ N})^2 - 2(40\text{ N})(60\text{ N}) \cos 155°$$
$$R = 97.73\text{ N}$$

Ahora con la aplicación de la ley de los senos, se escribe

$$\frac{\operatorname{sen} A}{Q} = \frac{\operatorname{sen} B}{R} \qquad \frac{\operatorname{sen} A}{60\text{ N}} = \frac{\operatorname{sen} 155°}{97.73\text{ N}} \tag{1}$$



Al resolver la ecuación (1) para el seno de A, se tiene

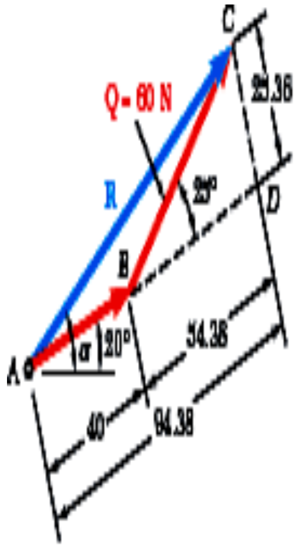
$$\operatorname{sen} A = \frac{(60\text{ N}) \operatorname{sen} 155°}{97.73\text{ N}}$$

Con la calculadora se obtiene primero el cociente, luego su arco seno y el resultado es

$$A = 15.04° \qquad \alpha = 20° + A = 35.04°$$

Con el uso de tres cifras significativas para escribir el resultado (véase sección 1.6):

$$\mathbf{R} = 97.7\text{ N} \measuredangle 35.0° \quad ◀$$



Solución trigonométrica alternativa. Se construye el triángulo rectángulo BCD y se calcula

$$CD = (60\text{ N}) \operatorname{sen} 25° = 25.36\text{ N}$$
$$BD = (60\text{ N}) \cos 25° = 54.38\text{ N}$$

Al usar entonces el triángulo ACD, se obtiene

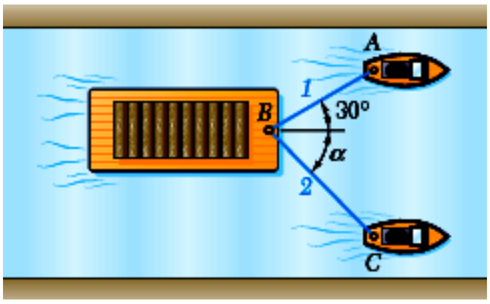
$$\tan A = \frac{25.36\text{ N}}{94.38\text{ N}} \qquad A = 15.04°$$

$$R = \frac{25.36}{\operatorname{sen} A} \qquad R = 97.73\text{ N}$$

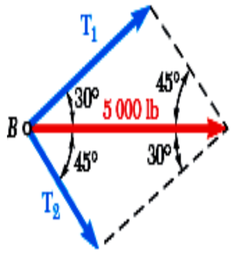
Otra vez, $\alpha = 20° + A = 35.04°$ $\quad \mathbf{R} = 97.7\text{ N} \measuredangle 35.0°$ ◀

Ejemplo 2: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Un lanchón es arrastrado por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas ejercidas por los remolcadores es una fuerza de 5000 lb dirigida a lo largo del eje del lanchón, determine:
a) La tensión en cada una de las cuerdas, sabiendo que a = 45°, y b) el valor de a tal que la tensión en la cuerda 2 sea mínima.

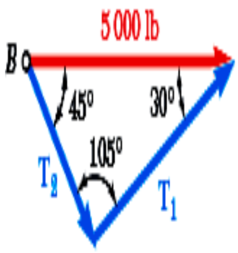


SOLUCIÓN



a) Tensión para $\alpha = 45°$. ***Solución gráfica.*** Se emplea la ley del paralelogramo; la diagonal (resultante) se sabe que es igual a 5 000 lb y que está dirigida hacia la derecha; los lados se dibujan paralelos a las cuerdas. Si el dibujo se hace a escala puede medirse

$$T_1 = 3\,700 \text{ lb} \qquad T_2 = 2\,600 \text{ lb}$$

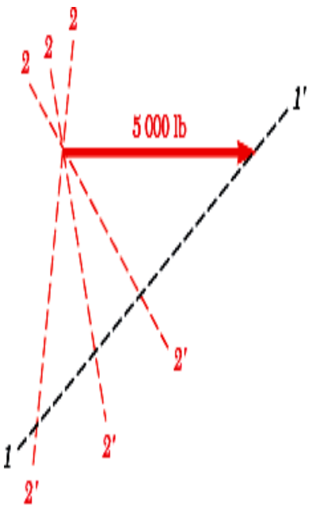


Solución trigonométrica. Puede usarse la regla del triángulo. Obsérvese que el triángulo mostrado representa la mitad del paralelogramo que se presenta antes. Si se emplea la ley de los senos, se escribe

$$\frac{T_1}{\text{sen } 45°} = \frac{T_2}{\text{sen } 30°} = \frac{5\,000 \text{ lb}}{\text{sen } 105°}$$

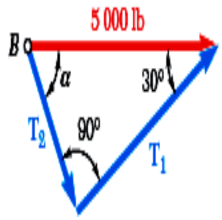
Con la calculadora, primero se calcula y se almacena el valor del último cociente. Al multiplicar este valor sucesivamente por sen 45° y sen 30°, se obtiene

$$T_1 = 3\,660 \text{ lb} \quad T_2 = 2\,590 \text{ lb}$$



b) Valor de α para T_2 mínima. Para determinar el valor de α tal que la tensión de la cuerda 2 sea mínima se usa otra vez la regla del triángulo. En el esquema mostrado, la línea *1-1'* es la dirección de $\mathbf{T}_1$. Las líneas *2-2'* indican varias direcciones posibles de $\mathbf{T}_2$. Observe que el mínimo valor de T_2 ocurre cuando $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son perpendiculares. El valor mínimo de T_2 es

$$T_2 = (5\,000 \text{ lb}) \operatorname{sen} 30° = 2\,500 \text{ lb}$$



Los valores correspondientes de T_1 y α son

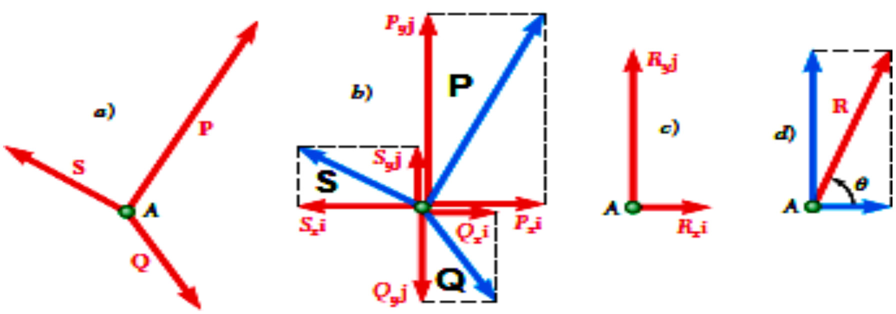
$$T_1 = (5\,000 \text{ lb}) \cos 30° = 4\,330 \text{ lb}$$

$$\alpha = 90° - 30° \qquad\qquad \alpha = 60°$$

Sumatoria de fuerzas y resultante

Al sumar tres o más fuerzas, no se puede obtener una solución trigonométrica práctica del polígono de fuerzas que defina a la fuerza resultante. En este caso se presenta una solución *analítica* del problema que es descomponiendo cada fuerza o vector en sus componentes rectangulares. Sea por ejemplo, las fuerzas **P**, **Q** y **S** que actúan sobre una partícula *A* (Gráfico N°. 20). Su resultante **R** está definida por:

Gráfico N°. 20 Descomposición vectorial en sus componentes rectangulares



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Resultante:

$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}$

Descomponiendo cada fuerza en sus componentes rectangulares, se tiene:

En el plano:

$R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} = P_x\,\mathbf{i} + P_y\,\mathbf{j} + Q_x\,\mathbf{i} + Q_y\,\mathbf{j} + S_x\,\mathbf{i} + S_y\,\mathbf{j}$

$= (P_x + Q_x + S_x)\,\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\,\mathbf{j}$

En el espacio:

$Rx\mathbf{i} + Ry\mathbf{j} + Rz\mathbf{k} = Px\mathbf{i} + Py\mathbf{j} + Pz\mathbf{k} + Qx\mathbf{i} + Qy\mathbf{j} + Qz\mathbf{k} + Sx\mathbf{i} + Sy\mathbf{j} + Sz\mathbf{k}$

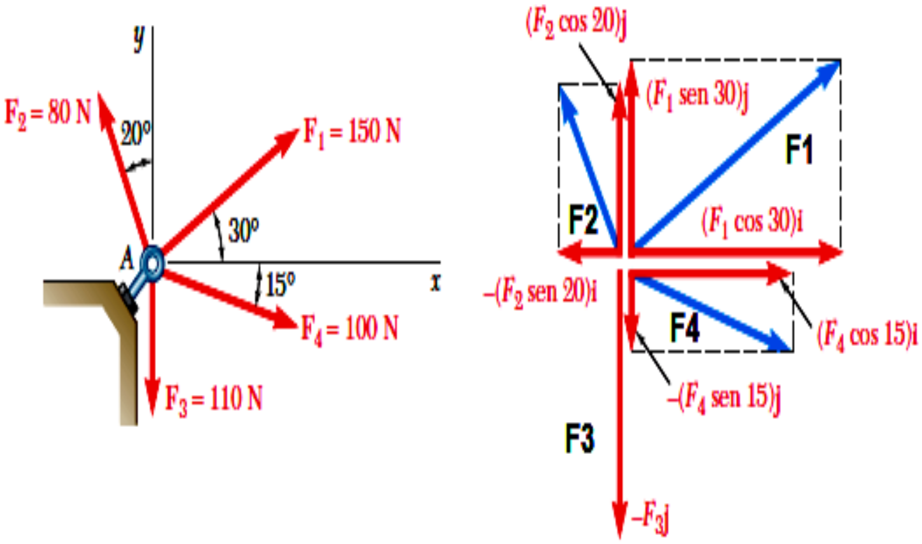
$= (Px + Qx + Sx)\mathbf{i} + (Py + Qy + Sy)\mathbf{j} + (Pz + Qz + Sz)\mathbf{k}$

Donde:

En el plano:	**En el espacio:**
R_x = $R_y P_x$ + Q_x + S_x S_y = P_y + Q_y +	$R_x = P_x + Q_x + S_x$ $R_y = P_y + Q_y + S_y$ $R_z = P_z + Q_z + S_z$
$R_x = \sum F_x$ $R_y = \sum F_y$	$R_x = \sum F_x$ $R_y = \sum F_y$ $R_z = \sum F_z$
$\mathbf{R} = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j}$	$\mathbf{R} = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} + R_z\,\mathbf{k}$

Ejemplo 1: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)
Cuatro fuerzas actúan sobre un perno *A* como se muestra en el Gráfico N°. 21. Determine la resultante de las fuerzas sobre el perno.

Gráfico N°. 21 Ejercicio de descomposición de fuerzas y resultante



Fuente: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Solución:

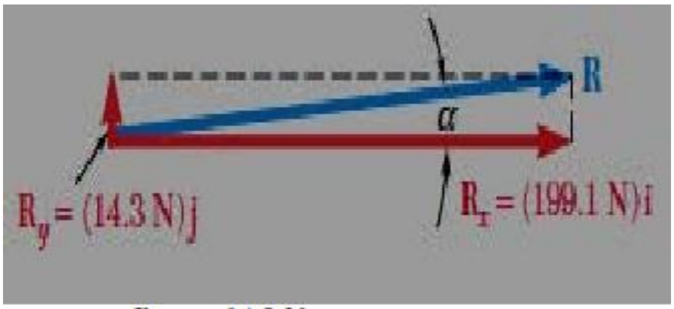
FUERZA F	COMPONENTES EL EJE X	MAGNITUD DE F EN N (Newton)	ÁNGULO	VALOR COMPONENTE EN N (Newton)	COMPONENTES EN EL EJE Y	MAGNITUD DE F EN N (Newton)	ÁNGULO	VALOR COMPONENTE EN N (Newton)
F1	F1x = F1*sen(30°*PI()/180°)	150	30	129,9	F1y = F1*cos(30°*PI()/180°)	150	30	75,0
F2	F2x = -F2*sen(20°*PI()/180°)	80	20	-27,4	F2y = F2*cos(20°*PI()/180°)	80	20	75,2
F3	F3x = -F3*sen(90°*PI()/180°)	110	90	0,0	F3y = -F3*cos(90°*PI()/180°)	110	90	-110,0
F4	F4x = F4*sen(15°*PI()/180°)	100	15	96,6	F4y = -F4*cos(15°*PI()/180°)	100	15	-25,9
			Rx =	199,1			Ry =	14,3

Nota: En el Excel al ángulo en grados hay que transformarlo a radianes, para que pueda calcular la respectiva función trigonométrica en el Excel.

Entonces la resultante **R** de las cuatro fuerzas es:

R = Rx **i** + Ry **j** **R** = (199,1 N)**i** + (14,3 N)**j**

La magnitud y la dirección de la resultante puede determinarse del triángulo que se muestra en el gráfico a continuación:

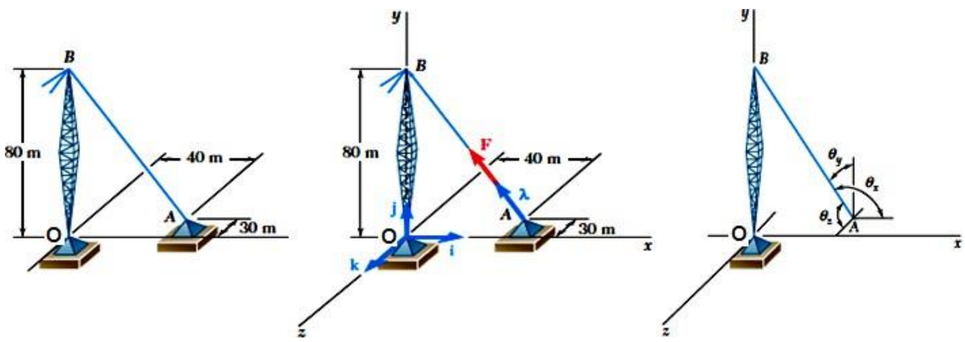


$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3\ \text{N}}{199.1\ \text{N}} \qquad \alpha = 4.1^\circ$$

$$R = \frac{14.3\ \text{N}}{\text{sen}\ \alpha} = 199.6\ \text{N} \qquad \mathbf{R} = 199.6\ \text{N} \measuredangle 4.1^\circ$$

Ejemplo 2: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

El alambre de una torre está anclado en *A* por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2500 N. Determine *a*) las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza que actúa sobre el perno y *b*) los ángulos θ_x , θ_y , θ_z que definen la dirección de la fuerza.



Solución:

Nota: Tomar en cuenta que el peso o fuerza tiene la torre, no el punto de anclaje o sujeción A; obviamente desde donde se ejerce la fuerza para que trate de caerse la torre es en el punto B, pero por fines pedagógicos se considera o grafica la fuerza en el punto A que sostiene a la torre para que no se caiga.

Esto es posible hacerlo porque la fuerza tiene como línea de acción todo el recorrido desde A hacia B, inclusive ésta línea de acción gráficamente se le puede considerar que sobrepasa los puntos mencionados. A la línea de acción se la puede considerar como el sentido que toma la fuerza, no la dirección; la dirección es la cantidad angular de la fuerza hacia cada uno de los ejes como se puede apreciar en la gráfica inicial del ejercicio.

Componentes de la fuerza. La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el perno pasa por *A* y *B* y la fuerza está dirigida de *A* hacia *B*. Las componentes del vector **AB**, que tienen la misma dirección que la fuerza **F**.

$d_x = -40m$ $d_y = 80m$ $d_z = 30m$

Obs.:

1. Para comprender por qué la componente d_x tiene signo negativo; imaginemos que en el punto A se traza un sistema coordenado X´Y´Z´ paralelo al sistema coordenado XYZ, entonces como se podría visualizar el punto O del sistema coordenado XYZ donde está ubicado la base de la torre se encuentra alejado una distancia de 40m, pero en el sentido contrario de la recta numérica y de allí que la componente $d_x = -40m$, entonces el signo negativo solamente indica el sentido hacia donde se encuentra la base de la torre, más no de que haya distancias o magnitudes negativas.

2.- Establezcamos las coordenadas espaciales de cada punto según:

El sistema cartesiano XYZ: O(0,0,0)	0m en X,	0m en Y,	0m en Z
B(0,80,0)	0m en X,	80m en Y,	0m en Z
A(40,0,-30)	40m en X,	0m en Y,	-30m en Z

Según lo que vimos en el tema: *Sumatoria de fuerzas y resultante;* el vector **AB** lo podemos determinar de la siguiente manera:

$$\mathbf{AB} = (B_x - A_x)\mathbf{i} + (B_y - A_y)\mathbf{j} + (B_z - A_z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{AB} = (0 - 40)m\mathbf{i} + (80 - 0)m\mathbf{j} + (0 - (-30))m\mathbf{k}$$

$$\mathbf{AB} = -40m\mathbf{i} + 80m\mathbf{j} + 30m\mathbf{k}$$

$$\mathbf{AB} = d_x\,\mathbf{i} + d_y\,\mathbf{j} + d_z\,\mathbf{k}$$

La distancia total de A a B o del segmento AB se lo obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Introduciendo el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, se escribe

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}\overrightarrow{AB}$$

***b)* Dirección de la fuerza.**

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2\,120 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

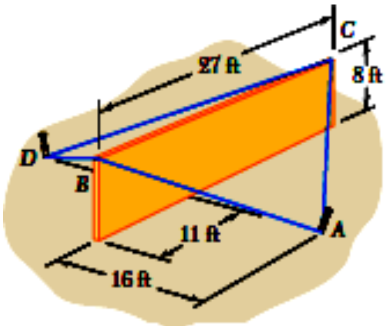
Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

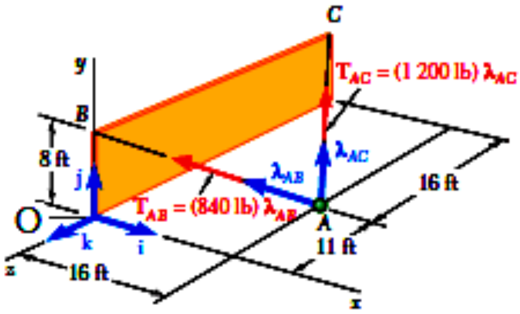
$$\theta_x = 115.1° \qquad \theta_y = 32.0° \qquad \theta_z = 71.5°$$

(*Nota*: El resultado también pudo haberse determinado con las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$ en lugar de la fuerza **F**.)

Ejemplo 3: (Beer, Johnston, Mazurek, & Eisenberg, 2010)

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable AB y 1200 lb en el cable AC, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables AB y AC sobre la estaca A.





Solución:

Componentes de las fuerzas. La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca A se descompondrá en sus componentes x, y, z. Primero se determinarán las componentes y la magnitud de los vectores **AB** y **AC**, midiéndolos desde A hacia la sección de la pared. Si se representa por **i**, **j**, **k** a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene:

$$\overrightarrow{AB} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k} \qquad AB = 21 \text{ ft}$$
$$\overrightarrow{AC} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} - (16 \text{ ft})\mathbf{k} \qquad AC = 24 \text{ ft}$$

Al representar por **λAB** al vector unitario a lo largo de la línea AB, se tiene:

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}\overrightarrow{AB}$$

TAB y **TAC** se les denomina tensiones o fuerzas que actúan sobre las líneas de acción AB y AC.

Al sustituir la expresión encontrada para **AB**, se obtiene:

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}[-(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{T}_{AB} = -(640 \text{ lb})\mathbf{i} + (320 \text{ lb})\mathbf{j} + (440 \text{ lb})\mathbf{k}$$

Si se representa con **λAC** al vector unitario a lo largo de *AC*, se obtiene en forma semejante:

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1\,200 \text{ lb}}{24 \text{ ft}}\overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = -(800 \text{ lb})\mathbf{i} + (400 \text{ lb})\mathbf{j} - (800 \text{ lb})\mathbf{k}$$

Resultante de las fuerzas. La resultante **R** de las fuerzas ejercidas por los dos cables es

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1\,440 \text{ lb})\mathbf{i} + (720 \text{ lb})\mathbf{j} - (360 \text{ lb})\mathbf{k}$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1\,440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$
$$R = 1\,650 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1\,440 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

Calculando en forma sucesiva cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 150.8° \qquad \theta_y = 64.1° \qquad \theta_z = 102.6° \blacktriangleleft$$

Según el problema se pide hasta las respuestas dadas, pero si observa en la gráfica, al otro lado de la pared se encuentra ubicado otro punto de anclaje como es obvio, caso contrario la pared se caería.

El otro punto de anclaje es en el punto D , teniéndose a partir de éste tensiones **TDB** y **TDC** suponiéndose que tienen las mismas condiciones dadas para las tensiones con las cuales se realizaron los cálculos. Esta parte con estas tensiones **TDB** y **TDC** se deja al estudiante para que suponga las mismas condiciones de manera simétrica y realice los mismos tipos de cálculo.

Productos escalar y vectorial

Según: (Pérez, 2015)
Producto escalar, punto o interno:
Dados los vectores **A** y **B**, su producto escalar o interno se representa por **A . B** y se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo θ que forman entre ellos:

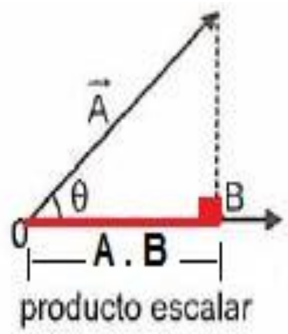
$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \vec{A}\,.\,\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = |\vec{B}||\vec{A}|\cos\theta \qquad \text{donde: } 0 \le \theta \le \pi$$

Debemos indicar que **A . B** es un número real (positivo, negativo o nulo) y no un vector. Dados los vectores:

$$\mathbf{A} = \vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\mathbf{B} = \vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \vec{A}\,.\,\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$



Nota: El producto punto o escalar para obtenerlo, bastaría con multiplicar las respectivas componentes en X, en Y y en Z, de los vectores que se traten en el problema a solucionar.

Entonces del producto escalar entre dos vectores, se obtiene un escalar que representa en el caso de la gráfica, **la magnitud o tamaño de la sombra que proyecta el vector A sobre el vector B.**

La sombra se proyecta de manera perpendicular o formando un ángulo de 90° con el vector **B** o sobre la línea de acción del vector **B**, si es que el ángulo entre los dos vectores es mayor a 90°.

Propiedades del producto escalar:

1. Propiedad conmutativa: $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$
2. Propiedad distributiva: $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$
3. Vectores paralelos: $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$
4. Vectores ortogonales: $\hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{k}=\hat{i}.\hat{k}=0$
5. $\vec{A}.\vec{A}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$
6. $\vec{B}.\vec{B}=b_1^2+b_2^2+b_3^2$
7. Cuadrado del módulo: $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2$
8. Si $\vec{A}.\vec{B}=0$ y ninguno de los vectores es nulo, entonces ambos vectores son perpendiculares.

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{i}||\mathbf{i}|\cos(0) = (1)(1)(1) = 1.$$

El producto punto de i y j es

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{i}||\mathbf{j}|\cdot\cos(90°) = (1)(1)(0) = 0.$$

Continuando de la misma manera, se obtiene

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1, & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0, & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0, \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0, & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1, & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0, \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0, & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0, & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1. \end{array}$$

Ejemplo 1: Sean los vectores **A** y **B** formando entre ellos un ángulo de 120°, sus módulos son: A = 3, B = 4. calcular **A.B**

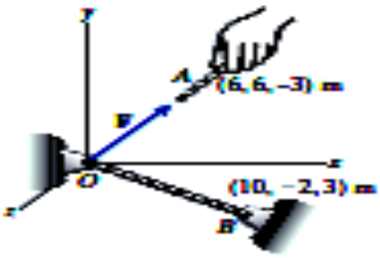
Según la definición: **A.B** = A*B*cos(ϴ)

A.B = 3*4*cos(120°) = -6

Indicando que la proyección del vector **A** sobre el vector **B**, tiene una magnitud o tamaño de 6 unidades, pero en sentido negativo, asumiento que si en la unión de los dos vectores se tiene el origen del sistema coordenado, entonces el valor -6 indica que la cantidad 6 se encuentra al lado izquierdo del sistema coordenado, ya que entre los dos vectores hay un ángulo de 120° que es mayor de 90°.

Ejemplo 2: (Bedford & Fowler, 2008

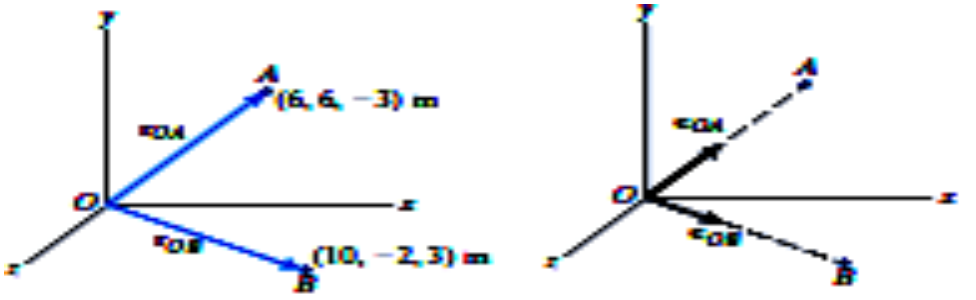
Suponga que usted hala el cable OA que se muestra en el gráfico ejerciendo una fuerza **F** de 50N en O. ¿Cuáles son las componentes vectoriales de **F** paralela y normal al cable OB?



(a) Componentes de F paralela y normal a OB.

Estrategia

Al expresar **F** como la suma de sus componentes vectoriales paralela **F**p (paralela se debe interpretar como la componente vectorial que tiene el mismo sentido y dirección de OB) y normal **F**n (normal se le interpreta como perpendicular) a OB (gráfico a); entonces primero se debe expresar **F** en términos de sus componentes escalares y luego determinar las componentes de un vector unitario **e**OB paralelo a OB. Es posible obtener las componentes de **F** determinando las componentes del vector unitario **e**OA que va de O a A y multiplicándolas por el módulo o magnitud del vector **F**, ex



(b) Vectores de posición $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$. (c) Vectores unitarios $\mathbf{e}_{OA}$ y $\mathbf{e}_{OB}$.

Solución:

Los vectores de posición de O a A y de O a B son (gráfico b)

$$\mathbf{r}_{OA} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\ (\mathrm{m}),$$
$$\mathbf{r}_{OB} = 10\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\ (\mathrm{m}).$$

$\mathbf{r}_{OA} \cdot \mathbf{r}_{OB}$ = (6)*(10) + (6)*(-2) + (-3)*(3) = 39 ≠ 0 lo que implica según la definición de producto punto o escalar que las líneas de acción OA y OB no son perpendiculares. En la gráfica da ésa impresión, pero como sugerencia hay que tener mucho cuidado en la apreciación óptica.

Sus magnitudes son r_{OA} = 9 m y r_{OB} = 10.6 m. Dividiendo estos vectores $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$ entre sus magnitudes r_{OA} y r_{OB} se obtienen vectores unitarios $\mathbf{e}_{OA}$ que van del origen hacia *A* y $\mathbf{e}_{OB}$ hacia *B* (gráfico c):

$$\mathbf{e}_{OA} = \frac{\mathbf{r}_{OA}}{|\mathbf{r}_{OA}|} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\ (\mathrm{m})}{9\ \mathrm{m}} = 0.667\mathbf{i} + 0.667\mathbf{j} - 0.333\mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_{OB} = \frac{\mathbf{r}_{OB}}{|\mathbf{r}_{OB}|} = \frac{10\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\ (\mathrm{m})}{10.6\ \mathrm{m}} = 0.941\mathbf{i} - 0.188\mathbf{j} + 0.282\mathbf{k}.$$

La fuerza **F** en términos de sus componentes escalares es

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\mathbf{e}_{OA} = (50\ \mathrm{N})(0.667\mathbf{i} + 0.667\mathbf{j} - 0.333\mathbf{k})$$
$$= 33.3\mathbf{i} + 33.3\mathbf{j} - 16.7\mathbf{k}\ (\mathrm{N}).$$

Tomando el producto punto de **e**OB y **F** se obtiene

$$\mathbf{e}_{OB} \cdot \mathbf{F} = (0.941)(33.3\ \mathrm{N}) + (-0.188)(33.3\ \mathrm{N}) + (0.282)(-16.7\ \mathrm{N})$$
$$= 20.4\ \mathrm{N}.$$

Este valor de 20,4N corresponde a la magnitud de la sombra del vector unitario **e**OB sobre la fuerza **F**.

La componente paralela de **F** es

$$\mathbf{F}_{\mathrm{p}} = (\mathbf{e}_{OB} \cdot \mathbf{F})\mathbf{e}_{OB} = (20.4\ \mathrm{N})(0.941\mathbf{i} - 0.188\mathbf{j} + 0.282\mathbf{k})$$
$$= 19.2\mathbf{i} - 3.83\mathbf{j} + 5.75\mathbf{k}\ (\mathrm{N}),$$

y la componente normal es

$$\mathbf{F}_{\mathrm{n}} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\mathrm{p}} = 14.2\mathbf{i} + 37.2\mathbf{j} - 22.4\mathbf{k}\ (\mathrm{N}).$$

Razonamiento crítico

¿Cómo se puede confirmar que los dos vectores son perpendiculares? Resulta claro, de la ecuación A.**B**= |**A**| |**B**|cosθ el producto punto de dos vectores diferentes de cero es cero si y sólo si el ángulo entre ellos es 90°.

Este diagnóstico puede usarse para confirmar que las componentes de **F** determinadas en este ejemplo son perpendiculares. Evaluando el producto punto de **F**p y **F**n en términos de sus componentes en Newtons, se obtiene

$$\mathbf{F}_{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{n}} = (19.2)(14.2) + (-3.83)(37.2) + (5.75)(-22.4) = 0.$$

Demostrando que las componentes vectoriales de **F**, $\mathbf{F}_p$ y $\mathbf{F}_n$ son perpendiculares o que el ángulo entre las dos componentes es de 90° como se muestra en el gráfico a).

Producto vectorial, cruz o externo

Dados los vectores **A** y **B**, su producto vectorial o externo se representa por otro vector **C** o da como resultado un vector **C** perpendicular a cada uno de los dos vectores **A** y **B**, denotándolo como:

C = A x **B**.

Su módulo se define como el producto de sus módulos por el seno del ángulo ϴ que forman entre sí:

Propiedades del producto vectorial:

1. Si $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$, entonces los vectores tienen la misma dirección o son paralelos.
2. Anticonmutativo: $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$
3. Propiedaddistributiva: $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$
4. Vectores paralelos: $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$
5. Vectores ortogonales:

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k};\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{j};\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

6. Dado los vectores:

$\vec{A}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k};$ $\qquad$ $\vec{B}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}$

entonces se cumple que: $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}$

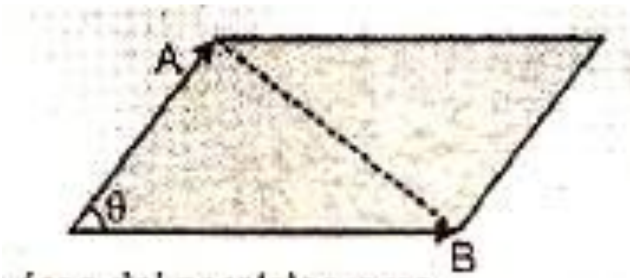
$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)i-(a_xb_z-a_zb_x)j+(a_xb_y-a_yb_x)k.$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{array}$$

En consecuencia, multiplicando vectorialmente los vectores **A** x **B** se obtiene un vector **C**, que se lo puede determinar realizando la operación del determinante como se indica en la sexta propiedad.

El área del paralelogramo formado por los vectores concurrentes A y B se lo puede determinar calculando el módulo o magnitud del producto vectorial de **A** x **B**:

Área del paralelogramo = | A x B ¡



área del paralelogramo

El área de la región triangular formado por los vectores **A** y **B** es:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2}$$

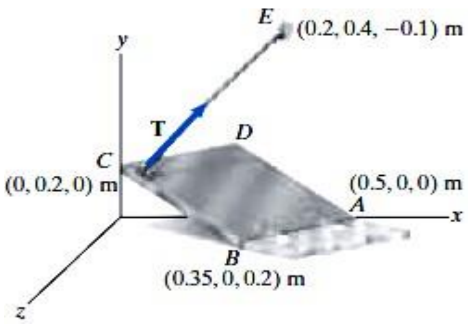
Ejemplo 1: Los vectores **A** y **B** forman entre sí un ángulo de 30°. Sabiendo que A = 6 y B = 5, calcular: | **A** x **B** |

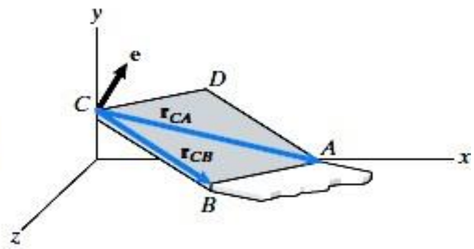
De la definición: | **A** x **B** | = | **A**| *| **B** |*sen θ = (6)(5)sen30° = 15 Entonces el área del paralelogramo formado por los dos vectores es de 15 u^2

Ejemplo 2: (Bedford & Fowler, 2008)

La cuerda *CE* que se muestra en el gráfico ejerce una fuerza **T** de 500N sobre la puerta

ABCD. ¿Cuál es la magnitud de la componente de **T** perpendicular a la puerta?





(a) Determinación de un vector unitario perpendicular a la puerta

Estrategia:

Se dan las coordenadas de las esquinas *A*, *B*, y *C* de la puerta. Si se toma el producto cruz del vector de posición **r**CB de *C* a *B* y el vector de posición **r**CA desde *C* hasta *A*, se obtendrá un vector que es perpendicular a la puerta. Se puede dividir el vector resultante entre su magnitud para obtener un vector unitario perpendicular a la puerta y después aplicar la ecuación de la componente paralela a la línea de acción CB **T**p = (**e.T**)**e** para determinar la componente de **T** perpendicular a la puerta.

Solución

Las componentes de **r**CB y **r**CA son:

$$\mathbf{r}_{CB} = 0.35\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}\ (\mathrm{m})$$
$$\mathbf{r}_{CA} = 0.5\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}\ (\mathrm{m}).$$

Su producto cruz es

$$\mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{r}_{CA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.35 & -0.2 & 0.2 \\ 0.5 & -0.2 & 0 \end{vmatrix} = 0.04\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j} + 0.03\mathbf{k}\ (\mathrm{m}^2)$$

Al dividir este vector entre su magnitud, se obtiene un vector **e** unitario que es perpendicular a la puerta (gráfico a):

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{r}_{CA}}{|\mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{r}_{CA}|} = \frac{0.04\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j} + 0.03\mathbf{k}\ (\mathrm{m}^2)}{\sqrt{(0.04\ \mathrm{m}^2)^2 + (0.1\ \mathrm{m}^2)^2 + (0.03\ \mathrm{m}^2)^2}}$$
$$= 0.358\mathbf{i} + 0.894\mathbf{j} + 0.268\mathbf{k}.$$

Para usar la ecuación de la componente paralela a la línea de acción CB $\mathbf{T}_p = (\mathbf{e}.\mathbf{T})\mathbf{e}$ es necesario expresar **T** en términos de sus componentes escalares. El vector de posición de *C* a *E* es

$$\mathbf{r}_{CE} = 0.2\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.1\mathbf{k}\ (\mathrm{m}).$$

Entonces, la fuerza **T** puede expresarse como

$$\mathbf{T} = |\mathbf{T}|\frac{\mathbf{r}_{CE}}{|\mathbf{r}_{CE}|} = (500\ \mathrm{N})\frac{0.2\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.1\mathbf{k}\ (\mathrm{m})}{\sqrt{(0.2\ \mathrm{m})^2 + (0.2\ \mathrm{m})^2 + (-0.1\ \mathrm{m})^2}}$$
$$= 333\mathbf{i} + 333\mathbf{j} - 167\mathbf{k}\ (\mathrm{N}).$$

La componente de **T** paralela al vector unitario **e**, que es la componente de **T** perpendicular a la puerta, es:

$$(\mathbf{e}\cdot\mathbf{T})\mathbf{e} = [(0.358)(333\ \mathrm{N}) + (0.894)(333\ \mathrm{N}) + (0.268)(-167\ \mathrm{N})]\mathbf{e}$$
$$= 373\mathbf{e}\ (\mathrm{N}).$$

La magnitud de la componente de **T** perpendicular a la puerta es 373 N.

Razonamiento crítico

¿Por qué resulta útil determinar la componente de la fuerza **T** perpendicular a la puerta? Si el eje Y es vertical y la cuerda *CE* es lo único que evita que la puerta caiga, puede verse de manera intuitiva que es la componente de la fuerza perpendicular a la puerta la que la mantiene en su lugar.

Sistemas de fuerzas en equilibrio

Según (Bedford & Fowler, 2008):

Se dice que un objeto, cuerpo está en *equilibrio* sólo si cada punto del objeto tiene la misma velocidad constante, lo cual se denomina *traslación uniforme*. La velocidad debe medirse con respecto a un marco o sistema cartesiano de referencia en el que sean válidas las leyes de Newton. Tal marco se llama *marco de referencia newtoniano* o *inercial*.

En muchas aplicaciones de ingeniería, un marco de referencia que esté fijo con respecto a la Tierra puede verse como inercial. Por lo tanto, puede suponerse que los objetos en traslación uniforme con respecto a la Tierra están en equilibrio.

La suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre un objeto en equilibrio es igual a cero. Se usará el símbolo $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ para denotar que la suma de las fuerzas externas de un objeto está en equilibrio.

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \sum \mathbf{F} = (\sum F_X)\mathbf{i} + (\sum F_Y)\mathbf{j} + (\sum F_Z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Esta ecuación o expresión implica también, que:

$\sum F_X = 0 \quad \sum F_Y = 0 \quad \sum F_Z = 0$

Si se está trabajando en el plano, solamente se tendría:

$\sum \mathbf{F} = (\sum F_X)\mathbf{i} + (\sum F_Y)\mathbf{j} = 0$

$\sum F_X = 0 \quad \sum F_Y = 0$

Es decir, las componentes escalares de los vectores en los ejes X, Y y Z de las fuerzas **F** aplicadas o que ejerce el cuerpo, deben ser iguales a cero, para decir que el cuerpo está en equilibrio, reposo o en movimiento constante.

En algunas situaciones, esta *ecuación de equilibrio* $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ puede usarse para determinar fuerzas desconocidas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio.

El primer paso consiste en dibujar un *diagrama de cuerpo libre* del objeto para identificar las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo.

A continuación, algunos ejemplos de diagramas de cuerpo libre:

Diagramas de cuerpo libre

Un *diagrama de cuerpo libre* es el dibujo de un objeto, aislado de su entorno, que muestra las fuerzas exteriores que actúan sobre el objeto. Dibujar un diagrama de cuerpo libre implica tres pasos.

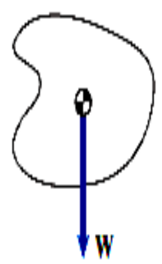
1. Identificar al objeto que se desea aislar.
2. Dibujar un bosquejo del objeto aislado de su entorno.
3. Dibujar vectores representando las fuerzas externas que actúan sobre el objeto.

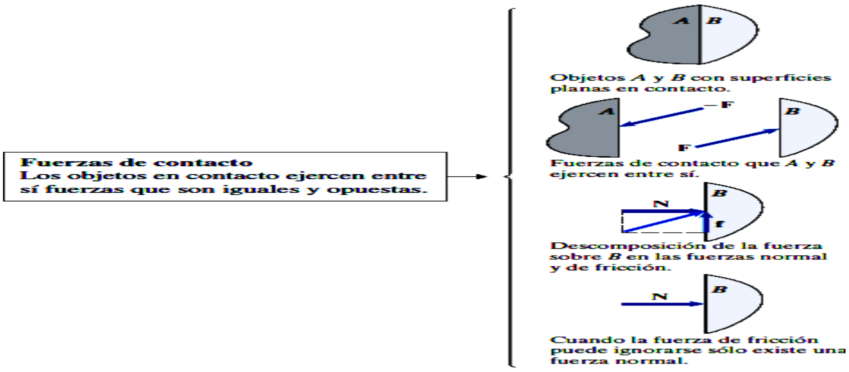
Fuerzas gravitatorias

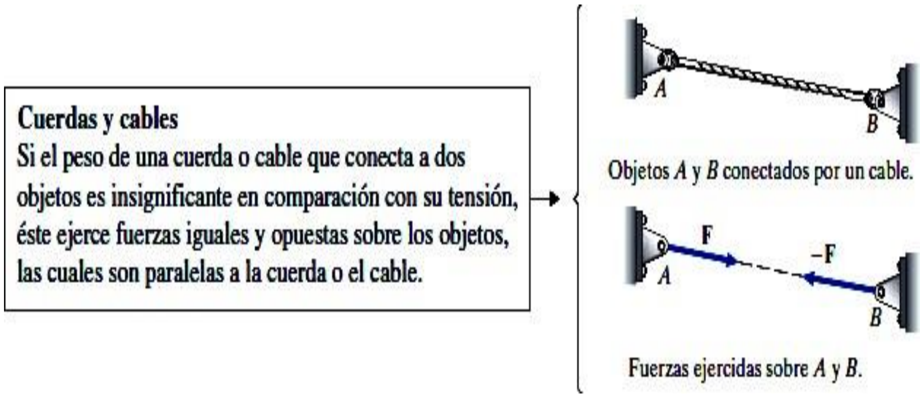
El peso de un objeto puede representarse mediante un vector. Su magnitud al nivel del mar está relacionada con la masa m del objeto mediante la ecuación

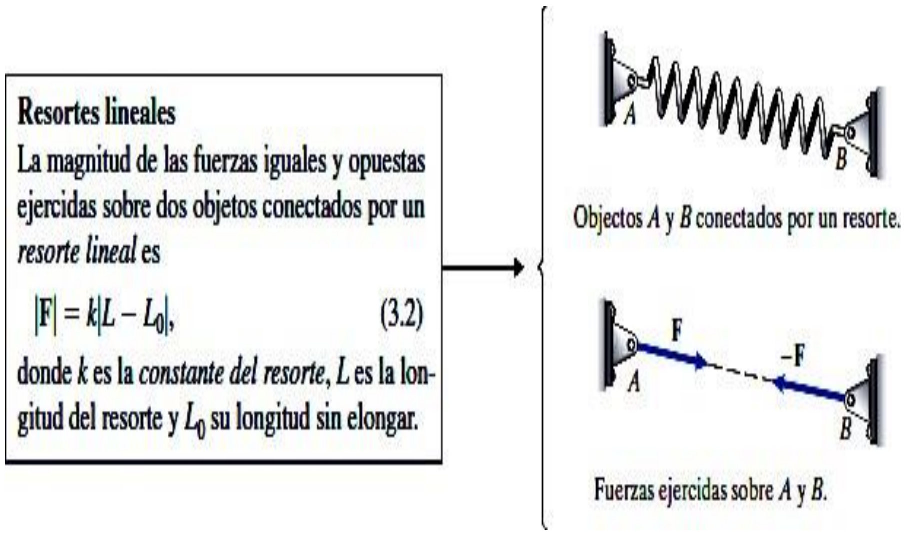
$$|\mathbf{W}| = mg,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar.



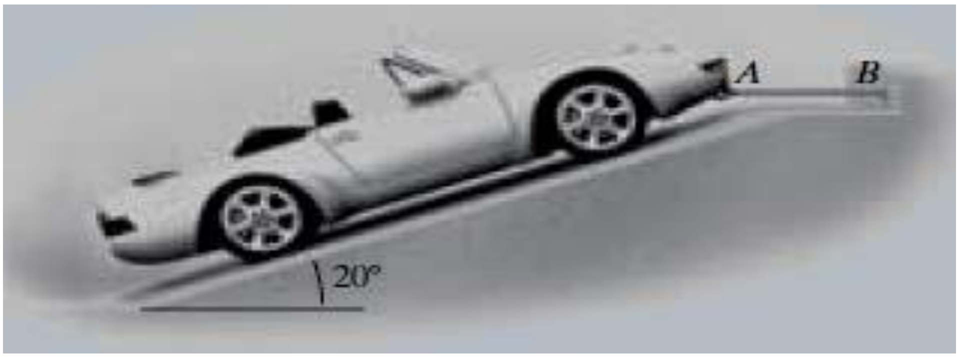






Ejemplos de aplicación sobre el uso del equilibrio para determinar fuerzas:

Ejemplo 1: El automóvil de 1440 kg se mantiene en su lugar sobre la rampa inclinada mediante el cable horizontal desde *A* hasta *B*. Los frenos del automóvil no están activados, por lo que las llantas ejercen sólo fuerzas normales sobre la rampa (No hay fricción cinética entre las llantas al no haber movimiento). Determine la magnitud de la fuerza ejercida por el cable sobre el automóvil.

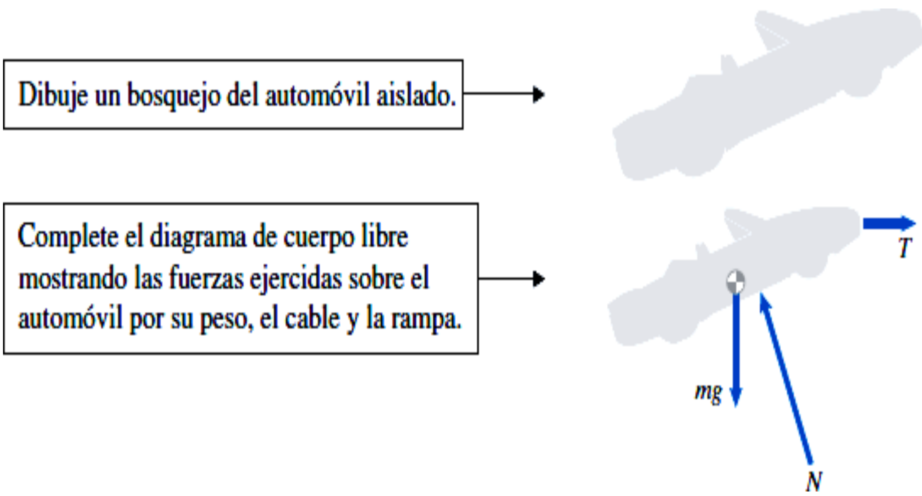


Estrategia:

Como el automóvil está en equilibrio, es posible dibujar su diagrama de cuerpo libre y usar las ecuaciones de equilibrio $\sum F_X = 0$, $\sum F_Y = 0$ para determinar la fuerza ejercida por el cable.

Solución:

Dibujar el diagrama de cuerpo libre del automóvil:

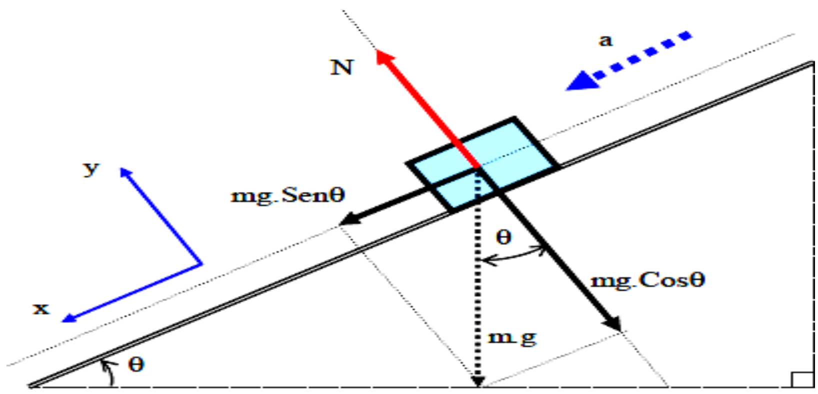


De $\sum F_X = 0$, se tiene que la T – Nsen20° = 0, de donde T/sen20° = N que se reemplaza en la $\sum F_Y = 0$ y con esto se obtiene el valor de la T = 5140 N.

Problema de práctica Suponga que el punto de unión del cable en *B* se mueve hacia arriba de manera que el cable sea paralelo a la rampa. Determine la magnitud de la fuerza ejercida por el cable sobre el automóvil.
Respuesta: 4830 N.

Observaciones:
Para realizar un diagrama de cuerpo libre, hay que suponer un dibujo de un sistema cartesiano paralelo a la superficie donde se encuentre asentado el cuerpo. El origen O(0,0,0) del sistema cartesiano que es dibuje, debe simularse que se lo ubica en el centro de gravedad o de equilibrio del cuerpo.

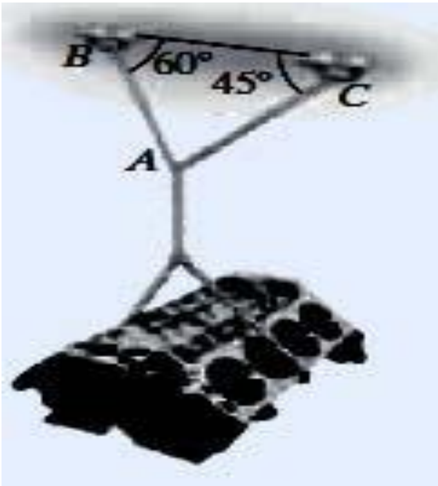
Observe que el ángulo 20° de inclinación de la rampa, donde se encuentra el vehículo sostenido por un cable AB, **es el mismo ángulo** entre la fuerza Normal **N** (la fuerza normal es una componente perpendicular al piso donde está asentado el vehículo) y el peso del vehículo W = mg, que tiene sentido vertical y en el mismo sentido de la fuerza de la gravedad –g**j.** Esto se puede demostrar aplicando conceptos de geometría.



Debe comprenderse que el peso total (el peso es una fuerza) de un cuerpo cualquiera es la suma de todos los pesos de todas las partes constitutivas del cuerpo. El peso es consecuencia de que a la masa del cuerpo se aplica la fuerza de la gravedad.

La fuerza **N** es una reacción de igual magnitud y de sentido contrario que el peso de un cuerpo que ejerce sobre el piso. En el caso del estar asentado un cuerpo sobre una superficie que tiene inclinación, ésta **N** es igual pero de sentido contrario que la componente del peso en el eje Y.

La magnitud de la gravedad para fines didácticos y de cálculo se lo supondrá que es igual a 9,81 m/s^2; el valor de la gravedad es diferente de acuerdo a la ubicación geográfica, por ejemplo, en los lugares más altos por ejemplo en las montañas más altas, la magnitud de la gravedad es un poquito menor al



valor indicado, en cambio en sitios más bajos la gravedad es un poquito más alta.
Es decir, la atracción gravitacional en los puntos más alejados es menor y en los puntos más cercanos es mayor al centro del planeta Tierra.
Por la gravedad es que todo cuerpo que se lanza al aire tiende a regresar, de allí que las naves espaciales deben ejercer un

mayor impulso o fuerza con sus cohetes propulsores, para poder salir de entre tantos factores de la atmósfera terrestre.

Ejemplo 2: El motor de automóvil que se muestra en el gráfico está suspendido mediante un sistema de cables. La masa del motor es de 200 kg. El sistema es estacionario o estático. ¿Cuáles son las tensiones en los cables *AB* y *AC*?

Estrategia:

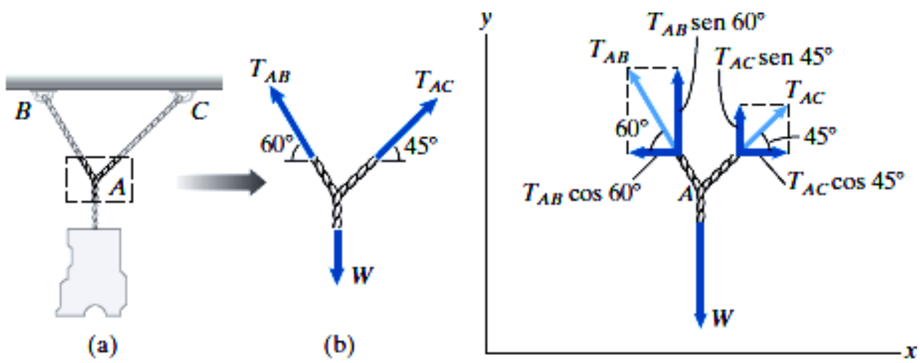
Se necesita un diagrama de cuerpo libre en el que se muestren las fuerzas que se desean determinar. Aislando parte del sistema de cables cerca del punto *A*, donde se unen los cables, se puede obtener un diagrama de cuerpo libre que está sometido al peso del motor y a las tensiones desconocidas en los cables *AB* y *AC*.

Solución:

Dibujo del diagrama de cuerpo libre aislando parte del sistema de cables cerca del punto *A*

(gráfico a), se obtiene un diagrama de cuerpo libre sometido al peso del motor

$W = mg$ = (200 kg)(9.81 m/s2) = 1962 N y a las tensiones en los cables *AB* y *AC* (gráfico b).



(a) Aislamiento de parte del sistema de cables.
(b) Diagrama de cuerpo libre completo.
(c) Selección de un sistema coordenado y descomposición de las fuerzas en sus componentes.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio: Se selecciona el sistema coordenado que se muestra en gráfico c y se descomponen las tensiones de los cables en sus componentes sobre los ejes X e Y.

Las ecuaciones de equilibrio resultantes son:

$$\Sigma F_x = T_{AC} \cos 45^\circ - T_{AB} \cos 60^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = T_{AC} \operatorname{sen} 45^\circ + T_{AB} \operatorname{sen} 60^\circ - 1962 \text{ N} = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones, se encuentra que las tensiones en los cables son:
TAB = 1436 N y TAC = 1016 N.

Razonamiento crítico
¿Cómo puede escogerse un diagrama de cuerpo libre que permita determinar las tensiones desconocidas en los cables? No existen reglas específicas para elegir diagramas de cuerpo libre.

Quizá sea necesario ensayar varios diagramas de cuerpo libre antes de encontrar el que proporcione la información requerida. Recuerde que las fuerzas que se desean determinar deben aparecer como fuerzas externas en el diagrama de cuerpo libre, y que el objetivo es obtener un número de ecuaciones de equilibrio igual al número de fuerzas desconocidas.

Ejemplo 3: La masa de cada polea del sistema es m (todas las masas de todas las poleas son iguales), y la masa del objeto suspendido *A* es m_A. Determine la fuerza **T** necesaria para que el sistema esté en equilibrio.

Estrategia:

Al dibujar diagramas de cuerpo libre de las poleas individuales y al aplicar el equilibrio, es posible relacionar la fuerza **T** con los pesos de las poleas y el objeto *A*.

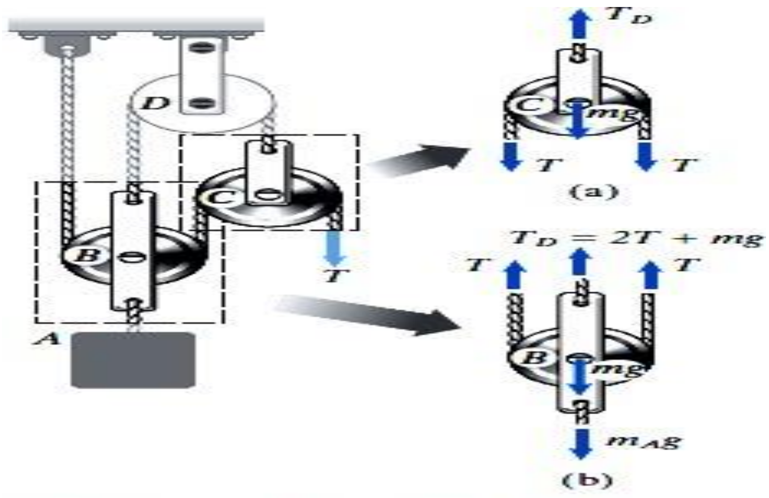
Solución:

Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la polea *C*, a la cual se le aplica la fuerza **T** (gráfico a). Se supone que la tensión en el cable soportada por la polea es igual a **T** en ambos lados (esto es obvio porque el cable es la mismo que circula por el entorno de cada polea). A partir de la ecuación de equilibrio $\sum F_Y = 0$

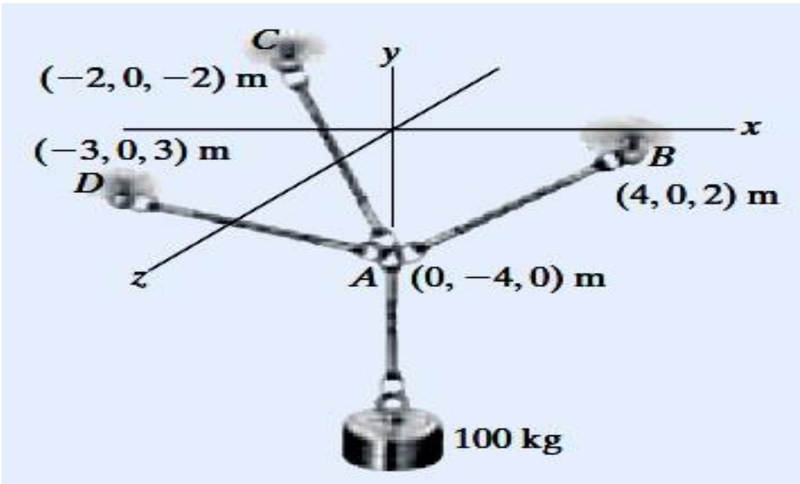
$$T_D - T - T - mg = 0$$

Se determina que la tensión en el cable soportada por la polea *D* es $T_D = 2T + mg$.

Recuerda que, según la condición del problema, las masas de todas las poleas son iguales: $m = m_B = m_C = m_D$



(a) Diagrama de cuerpo libre de la polea *C*.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la polea *B*.



Ahora se conocen las tensiones en los cables que se extienden desde las poleas *C* y *D* hasta la polea *B* en términos de T.
Al dibujar el diagrama de cuerpo libre de la polea *B* (gráfico b), se obtiene la ecuación de equilibrio.

$T + T + T_D - mg - m_A\, g = 0.$

$T + T + (2T + mg) - mg - m_A\, g = 0.$

Resolviendo, se obtiene $T = m_A\, g/4$.

Razonamiento crítico

Observe que los objetos que se aislaron en gráficos a y b incluyen partes de los cables. Los pesos de esas partes del cable son fuerzas que actúan en los diagramas de cuerpo libre. ¿Por qué no fueron incluidas? Se supuso de manera tácita que los pesos de esas partes podrían ignorarse en comparación con los pesos de las poleas y el objeto suspendido *A*.. Ésta es una aproximación válida para un objeto dado si su peso es pequeño en comparación con las otras fuerzas que actúan sobre él; sin embargo, en cualquier aplicación real de ingeniería, este supuesto debe evaluarse con cuidado. Es decir, el peso del cable debe considerarse en la realidad y de igual manera los pesos de las poleas podrían ser diferentes o iguales.

$T + T + 2T + mg - mg - m_A\, g = 0.$

Ejemplo 4: El cilindro de 1000 kg que se muestra en el gráfico pende del techo por un sistema de cables sostenidos en los puntos *B*, *C* y *D*. ¿Cuáles son las tensiones en los cables *AB*, *AC* y *AD*?

Estrategia:

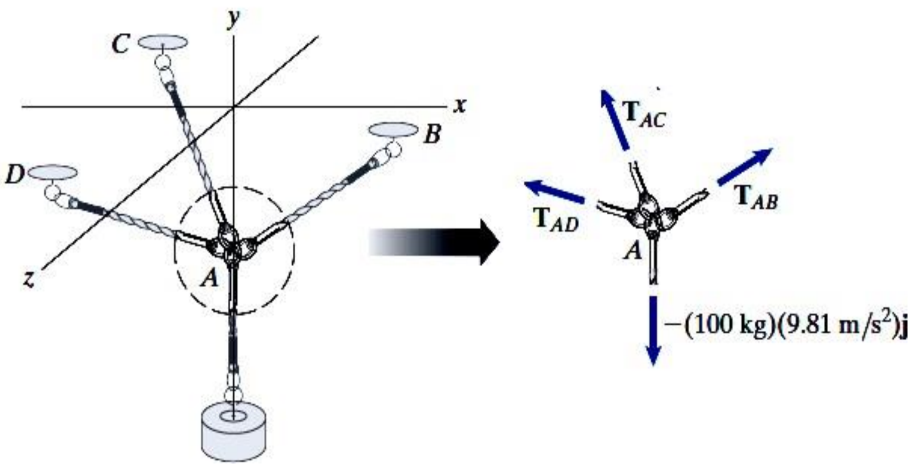
Si se aísla parte del sistema de cables cerca del punto *A*, se obtendrá un diagrama de cuerpo libre sometido a las fuerzas causadas por las tensiones en los cables.

Como cada suma de las componentes en X, Y y Z de las fuerzas externas debe ser igual a cero, se pueden obtener tres ecuaciones para las tres tensiones desconocidas. Para hacer esto, es necesario expresar las fuerzas ejercidas por las tensiones en términos de sus componentes.

Solución:

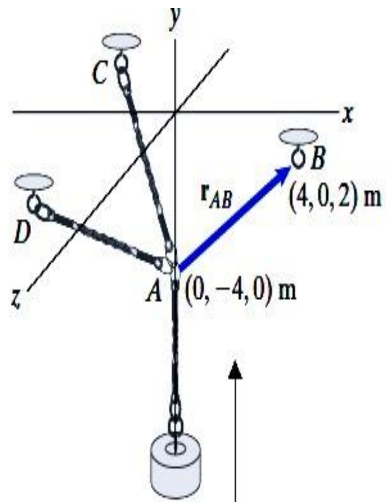
Aísle parte del sistema de cables cerca del punto A y muestre las fuerzas ejercidas por las tensiones en los cables. La suma de las fuerzas debe ser igual a cero:

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AD} - (981\ \text{N})\mathbf{j} = \mathbf{0}.$$



Dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicar las condiciones de equilibrio: $\sum F_Y = 0$

Escribir los vectores en términos de sus componentes:



$$\mathbf{r}_{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}.$$
$$= 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\ (\text{m}).$$
$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = 0.667\mathbf{i} + 0.667\mathbf{j} + 0.333\mathbf{k}.$$

Obtenga un vector unitario que tenga la misma dirección de la fuerza $\mathbf{T}_{AB}$ dividiendo el vector de posición $\mathbf{r}_{AB}$ del punto A al punto B entre su magnitud.

Resolviendo estas tres ecuaciones, se obtiene TAB = 519 N, TAC = 636 N y TAD = 168 N.

Problema de práctica: Suponga que los cables AB, AC y AD se alargan de manera que el punto de unión *A* se ubica en el punto (0, -6, 0) m. ¿Cuáles son las tensiones en los cables?

Respuesta: TAB = 432 N, TAC = 574 N, TAD = 141 N.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_{AB} &= T_{AB}\mathbf{e}_{AB} \\
&= T_{AB}(0.667\mathbf{i} + 0.667\mathbf{j} + 0.333\mathbf{k}), \\
\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC}(-0.408\mathbf{i} + 0.816\mathbf{j} - 0.408\mathbf{k}), \\
\mathbf{T}_{AD} &= T_{AD}(-0.514\mathbf{i} + 0.686\mathbf{j} + 0.514\mathbf{k}).
\end{aligned}
$$

Exprese la fuerza $\mathbf{T}_{AB}$ en términos de sus componentes escribiéndola como el producto de la tensión T_{AB} en el cable *AB* por el vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$. Exprese las fuerzas $\mathbf{T}_{AC}$ y $\mathbf{T}_{AD}$ en términos de sus componentes usando el mismo procedimiento.

Sustituya estas expresiones en la ecuación de equilibrio

$$\mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AD} - (981\ \text{N})\mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

Como las componentes **i**, **j** y **k** deben ser iguales a cero, esto resulta en tres ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&0.667T_{AB} - 0.408T_{AC} - 0.514T_{AD} = 0, \\
&0.667T_{AB} + 0.816T_{AC} + 0.686T_{AD} - 981\ \text{N} = 0, \\
&0.333T_{AB} - 0.408T_{AC} + 0.514T_{AD} = 0.
\end{aligned}
$$

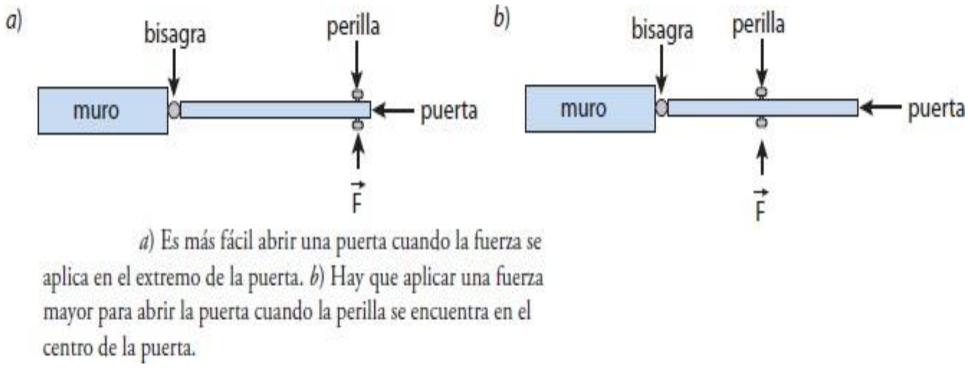
CAPÍTULO III:

MOMENTO DE UNA FUERZA, TORSIÓN O TORQUE Y CENTROS DE GRAVEDAD

Momento de una fuerza o torque

Según: (Gutiérrez, Física general, 2015) Al abrir o cerrar una puerta se le aplica una fuerza en la perilla, misma que le provoca una rotación. Si la perilla está en el centro de la puerta se deberá aplicar una fuerza mayor para abrirla o cerrarla que cuando está en el extremo, ¿a qué se debe esto? (Gráfico N°. 23). Los físicos explican esta situación mediante el concepto de *momento de fuerza o torque*.

Gráfico N°. 22 Momento de una fuerza o torque



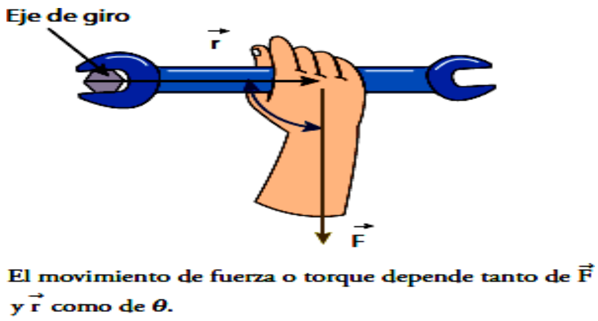
Fuente: (Gutiérrez, Físca general, 2015)

El **momento de fuerza** o **torque** es una magnitud física que indica la capacidad de una fuerza para producir rotación a un cuerpo y se representa por la letra griega **τ**→(tau).

Algunos autores utilizan otras simbologías para definir el vector momento de una fuerza o torque, entre ellas: **M**

El momento de fuerza depende tanto de la magnitud de la fuerza aplicada y de la distancia del eje de giro del cuerpo al punto de aplicación de la fuerza como del ángulo entre la fuerza y la línea que une al eje de giro con el punto de aplicación de la fuerza (Gráfico N°. 24).

Gráfico N°. 23 Movimiento del torque



Fuente: (Gutiérrez, Físca general, 2015)

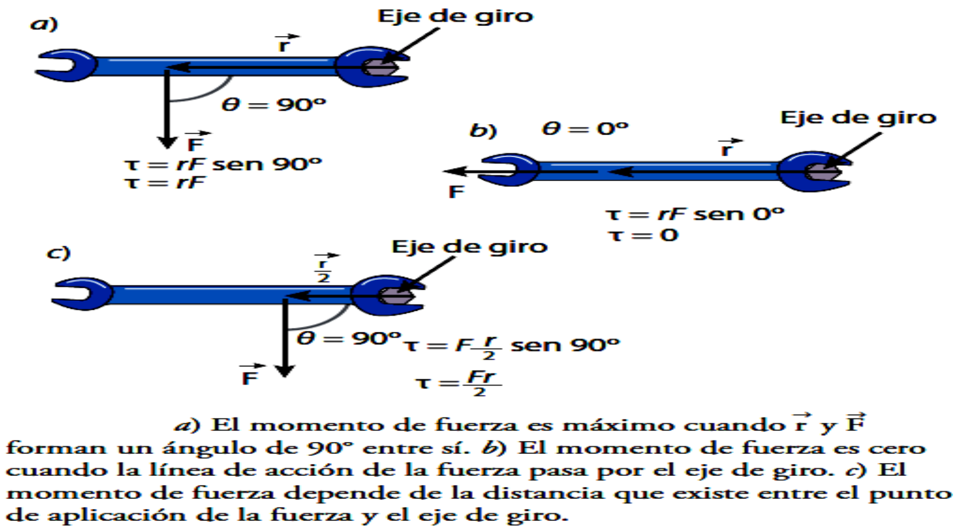
El momento de fuerza es una magnitud vectorial cuya magnitud se puede obtener por:

$\tau = rF sen\theta$

Con el fin de ilustrar el significado de esta ecuación consideremos la siguiente situación. Se pretende destornillar la tuerca Gráfico N°. 25 con una llave inglesa. Si se ejerce la mayor fuerza posible, y el ángulo entre esta fuerza y **r** es de 90°, entonces (sen 90° = 1) el momento de fuerza tomará el mayor valor posible, por otra parte, si la fuerza aplicada forma un ángulo

θ = 0° o θ = 180° con **r**, el momento de fuerza será cero, es decir, la tuerca no girará por muy grande que sea la fuerza aplicada (Gráfico N°. 25b).

Gráfico N°. 24 Torque en una llave

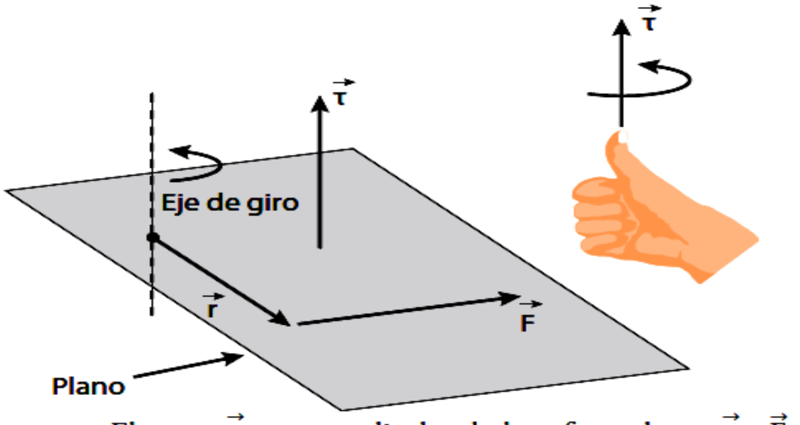


Fuente: (Gutiérrez, Físca general, 2015)

Si la fuerza **F** se aplica a la mitad de **r** como se ilustra en Gráfico N°. 25c, el momento de fuerza resultante será menor que el momento de fuerza que se obtiene cuando la fuerza **F** se aplica en el extremo de **r** como se ilustra en Gráfico N°. 25a. En el SI, la unidad del momento de fuerza o torque es el *newton-metro* (N · m).

Puesto que el momento de fuerza es una magnitud vectorial, el vector que lo representa es perpendicular al plano determinado por **r** y **F** y su sentido se puede obtener aplicando la regla de la mano derecha, o sea colocando tu mano derecha de manera que tus cuatro dedos sigan la dirección de rotación que tiende a darle al cuerpo; tu dedo pulgar apuntará en el sentido del vector **τ** (Gráfico N°. 26).

Gráfico N°. 25 Vector Momento o Torque τ



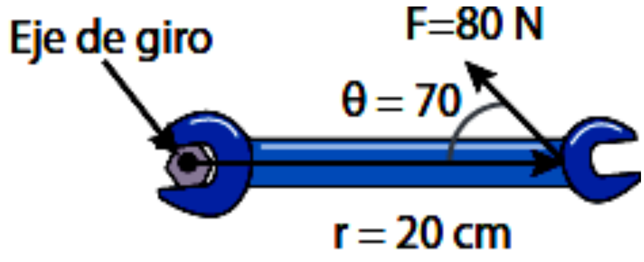
El vector $\vec{\tau}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

Fuente: (Gutiérrez, Física general, 2015)

Ejemplo: (Gutiérrez, Física general, SN)

Un técnico ejerce una fuerza de 80.0 N en el extremo de una llave inglesa de 20.0 cm como se muestra en Gráfico N°. 27. Si esta fuerza forma un ángulo de 70.0° con el mango de la llave,

¿cuál es la magnitud del momento de fuerza producido en la tuerca? Gráfico N°. 26 fuerza ejercida sobre la llave inglesa.



Fuerza ejercida sobre la llave inglesa.

Fuente: (Gutiérrez, Físca general, 2015)

Solución

La magnitud de **τ** se calcula por la siguiente fórmula:

$\tau = r\,F\,\mathrm{sen}\theta$

Al sustituir los valores:

$\tau = (0.20\ \mathrm{m})(80.0\ \mathrm{N})\ \mathrm{sen}\ 70.0°$

La magnitud de τ es:

$\tau = 15.0\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$

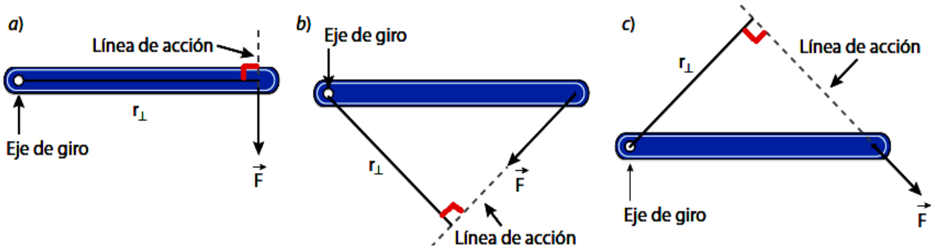
Hay situaciones en que la fuerza se aplica sobre un plano perpendicular al eje de rotación. Por ejemplo, en el Gráfico N°. 27, el eje de giro es perpendicular al plano que forman las componentes de la fuerza **F** y de **r.**

La magnitud del momento de fuerza $\tau = rF$ sen θ, puede reescribirse como:

$$\tau = r_{\perp} * F$$

Donde el subíndice $\perp$ significa perpendicular, es decir, la magnitud del momento de fuerza es el producto de la fuerza por la distancia perpendicular a la *línea de acción* de la fuerza. Esta distancia **$r_{\perp}$** recibe el nombre de *brazo de palanca.*

Gráfico N°. 27 Ejemplos de líneas de acción y brazos de palanca (r⊥).



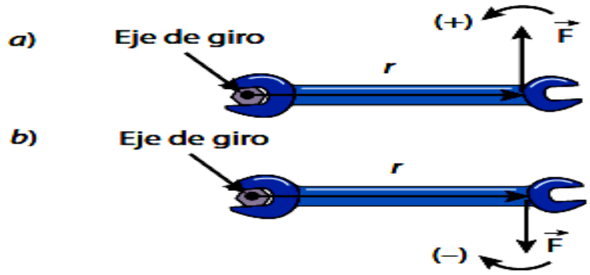
Fuente: (Gutiérrez, Físca general, 2015)

El ***brazo de palanca*** de una fuerza es la distancia perpendicular que hay de la línea de acción de la fuerza al eje de rotación. Es importante señalar que la ***línea de acción de una fuerza*** es una línea imaginaria que se extiende indefinidamente a ambos sentidos de su dirección.

Puesto que la dirección del momento de fuerza es perpendicular al plano formado por **F** y **r**, el sentido de **τ** se puede determinar de acuerdo con la siguiente convención:
Si la fuerza tiende a producir una rotación contraria a la de las manecillas del reloj, el momento de fuerza será *positivo*.

Los momentos de fuerza que tiendan a girar al cuerpo en el mismo sentido de giro que las manecillas del reloj se considerarán *negativos* (Gráfico N°. 29).

Gráfico N°. 28 El sentido positivo o negativo del momento de la fuerza



a) **El momento de fuerza es positivo.** *b)* **El momento de fuerza es negativo.**

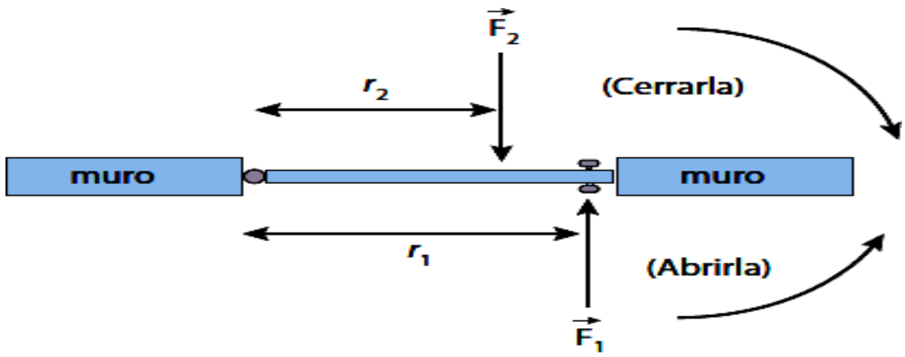
Fuente: (Gutiérrez, Físca general, 2015)

Momento de una fuerza resultante

Según: (Gutiérrez, Físca general, 2015)

Supongamos dos personas, la una trata de cerrar la puerta y la otra de abrirla como se muestra en el Gráfico Nº. 30, ¿en qué sentido girará la puerta? Para responder a esta pregunta hay que determinar el momento de fuerza (o torque) resultante.

Gráfico Nº. 29 Aplicación de 2 fuerzas para crear momento por la resultante de las fuerzas



Sobre la puerta están actuando dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, y una trata de cerrarla y la otra de abrirla.

Fuente: (Gutiérrez, Físca general, 2015)

Puesto que las fuerzas están actuando en el mismo plano, el *momento resultante* se obtiene de sumar algebraicamente los momentos de fuerza positivos y negativos debidos a cada fuerza.

Si las fuerzas son aplicadas formando un ángulo con la superficie del objeto, deberán descomponerse en sus componentes en X e Y.

Matemáticamente se expresa por:

$$\tau_R = \Sigma \tau = +\tau_1 - \tau_2 + \ldots$$

Cada fuerza determina un torque o momento, **F1** lo hace en el sentido antihorario que se asume como un momento positivo y la otra fuerza **F2** en sentido horario que se lo asume un momento negativo. En el caso del problema que se muestra en el Gráfico N°. 30, la magnitud del torque resultante se obtiene de:

$$\tau = r_1\ F1\ - r_2\ F_2$$

Que la puerta gire en uno u otro sentido depende de los valores de $r1$, $r2$, $F1$ y $F2$, pero si las dos fuerzas tienen la misma magnitud, entonces la puerta se abrirá, ya que $r1$ es mayor que r_2.

En consecuencia, la apertura o cierre de la puerta que es el momento de la resultante de las fuerzas aplicadas, dependerá en esencia de la distancia más grande donde se aplica cualquier fuerza hasta el eje.

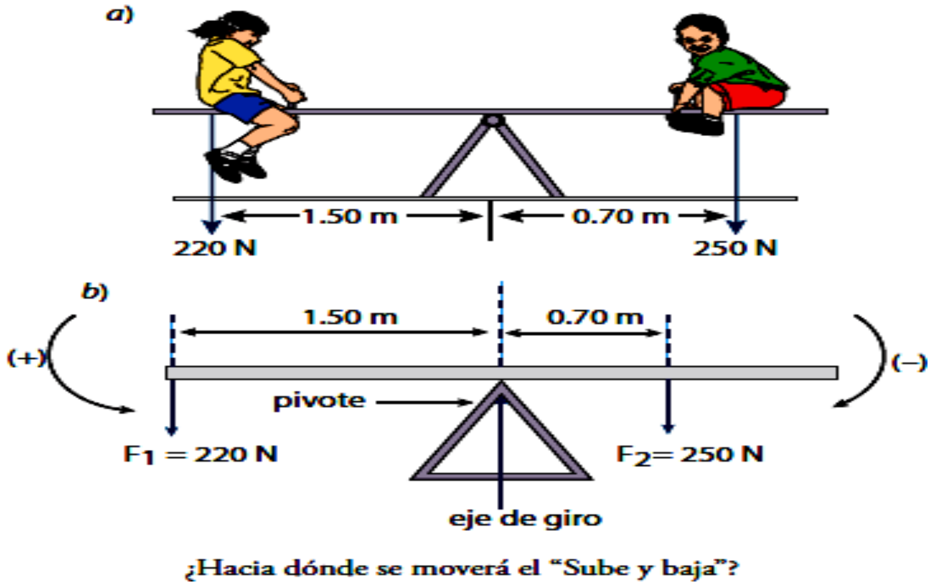
Para determinar el *momento de fuerza resultante* se puede seguir la siguiente *estrategia*:

Después de haber leído el problema hacer un dibujo del cuerpo con los datos.
Hacer un diagrama de cuerpo libre que además de indicar las fuerzas actuantes muestre el eje de rotación.
Determinar los brazos de palanca si es necesario.
Calcular los momentos de fuerza de cada fuerza. Asignar el signo apropiado.
Determinar el momento de fuerza resultante como la suma algebraica de los momentos de fuerza de cada fuerza.

Ejemplo: (Gutiérrez, Física general, 2015)
Determinar el momento de fuerza resultante sobre el sube y baja que se muestra en la fi gura
7.14. El niño pesa 250 N y se encuentra a 0.70 m del eje de giro.

La niña pesa 220 N y se encuentra a 1.50 m del eje de giro (Gráfico N°. 31*a*).

Gráfico N°. 30 Momento ejercido por dos fuerzas



Fuente: (Gutiérrez, Física general, 2015)

Solución:

Primero elaboramos un diagrama de cuerpo libre (Gráfico N°. 31*b*).

Datos Fórmula

$r1 = 1.50$ m $\boldsymbol{\tau R = \tau 1 + \tau 2}$

$r2 = 0.70$ m Del esquema:

$F_1 = 220$ N $\boldsymbol{\tau = r_1 F_1 - r_2 F_2}$

$F2 = 250$ N Sustituyendo valores:

$\tau = (1.50 \text{ m})(220 \text{ N}) - (0.70 \text{ m})(250 \text{ N})$

$\tau = 155 \text{ N} \cdot \text{m}$

Conclusión: El Sube y baja girará en sentido contrario a las manecillas del reloj o sea que la niña levantará al niño. La distancia desde donde está sentada la niña hasta el pivote del sube y baja es mucho más grande que la distancia donde está sentado el niño hasta el pivote, eso hace que el momento ejercido por el peso de la niña sea más grande que el momento ejercido por el peso del niño.

Resumen:

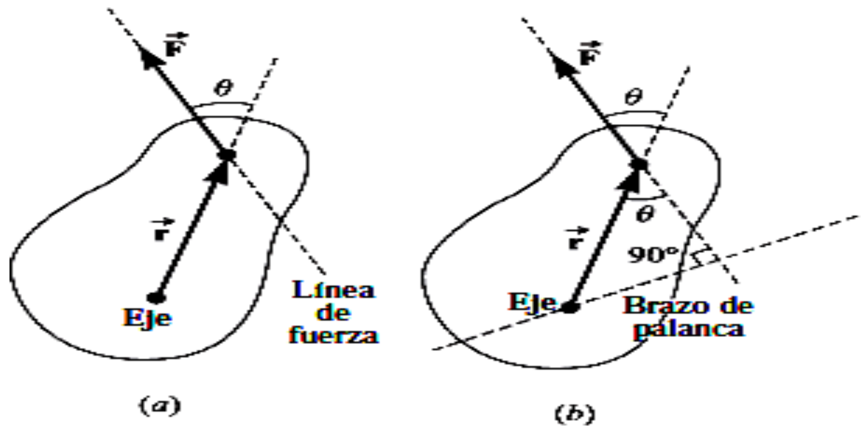
Según: (Bueche & Hecht, 2007)

El torque es una medida de la efectividad de la fuerza para que ésta produzca una rotación alrededor de un eje. Al torque se lo define de la siguiente forma:

$$\text{Torque} = \tau = rF\text{sen}\theta$$

Donde *r* es la distancia radial desde el eje al punto de aplicación de la fuerza y θ es el ángulo agudo entre las direcciones de **r** y de **F**, como se muestra.

Gráfico N°. 31 Interpretación gráfica del torque



Fuente: (Bueche & Hecht, 2007)

Con frecuencia, esta definición se escribe en términos **del brazo de palanca de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje a la línea de acción de la fuerza**, como se muestra en Gráfico N°. 32b. Como el brazo de palanca es igual a r sen θ, la ecuación del torque se escribe como:

$$\tau = (F)\ (\text{brazo de palanca})$$

Las unidades del torque son newton*metro (N * m). El torque puede ser positivo o negativo; es positivo cuando la rotación alrededor del eje es en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj y negativa cuando la rotación es en el mismo sentido en que se mueven las manecillas del reloj.

Para considerar el origen del momento o torque, tome un eje perpendicular al plano de las fuerzas coplanares. Todos los torques que tienden a producir una rotación en el sentido del reloj considérelos como negativos, y las que producen una rotación contra el sentido del reloj, como positivos; la suma de todos los torques que actúan sobre el objeto debe ser cero:

$$\circlearrowleft(+) \sum \tau = 0$$

La posición de los ejes es arbitraria: Si la suma de los torques es cero en torno a un eje determinado para un cuerpo que cumple la condición de fuerzas en equilibrio

$\sum F_X = 0$, $\sum F_Y = 0$, $\sum F_Z = 0$, entonces **$\sum \tau = 0$** para todo eje paralelo al primero.

Generalmente se escoge el eje donde se supondrá se ubicará el vector momento o torque, de tal forma que la línea de acción de la fuerza desconocida pase por la intersección del eje de rotación y el plano de las fuerzas. Entonces el ángulo θ entre **r** y **F** es cero; en consecuencia, dicha fuerza desconocida particular ejerce un torque cero y por tanto no aparece en la ecuación del torque.

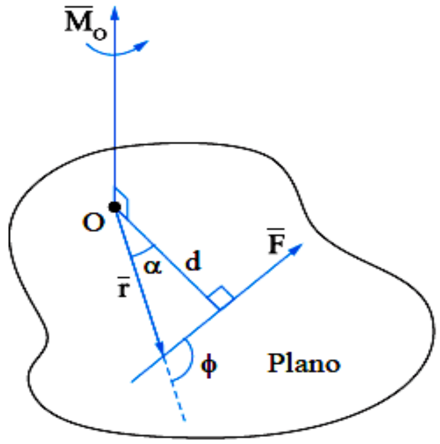
El vector torque es perpendicular a las fuerzas coplanares y al plano que las contiene y pasa por el eje de giro o de rotación del cuerpo.

Hay varios tipos de momentos o torques, en esta parte solamente mencionaremos los principales:

Según: (Gamio Arisnabarreta, 2015)

1.- Momento de una fuerza con respecto a un punto

Obs.: En párrafos anteriores les indicaba que algunos autores utilizan una nomenclatura y otros otra, lo importante en el uso de cualquier nomenclatura, en éste caso sobre los momentos o torques se defina a qué se refiere con ésa nomenclatura. En anteriores partes para el momento o torque estaba utilizando el símbolo **τ,** en ésta parte otro autor utiliza **M**, pero los autores se refieren a lo mismo.



$$\boxed{\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F}} \rightarrow \textbf{Expresión vectorial}$$

$$M_O = \left|\overline{M}_O\right| = r\,F\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\phi = 90^\circ + \alpha$$

$$M_O = r\,F\,\mathrm{sen}(90^\circ + \alpha)$$

$$M_O = r\,F\cos\alpha$$

$$M_O = (r\cos\alpha)F$$

$$\boxed{M_O = dF} \rightarrow \textbf{Magnitud}$$

Dirección: El vector momento **Mo** es perpendicular (⊥) al plano formado por **r** y **F** en el punto O.

Sentido: Regla de la mano derecha.

r es un vector cuyo origen es el punto O y cuyo extremo es cualquier punto situado en **F**

Vectorialmente el momento se lo puede determinar por:

$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F} = \left(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\right) \times \left(F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}\right)$$

$$\overline{M} = \underbrace{\left(yF_z - zF_y\right)}_{M_x}\overline{i} + \underbrace{\left(zF_x - xF_z\right)}_{M_y}\overline{j} + \underbrace{\left(xF_y - yF_x\right)}_{M_z}\overline{k}$$

$M_x, M_y, M_z \longrightarrow$ **Componentes escalares de $\overline{M}$ en los ejes x, y, z**

$\overline{M} = M_x\overline{i} + M_y\overline{j} + M_z\overline{k} \longrightarrow$ **Expresión vectorial**

$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \longrightarrow$ **Magnitud**

EL PRINCIPIO DE LOS MOMENTOS (TEOREMA DE VARIGNON)

El momento que una fuerza ejerce sobre un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al mismo punto.

Momento de una fuerza con respecto a un eje

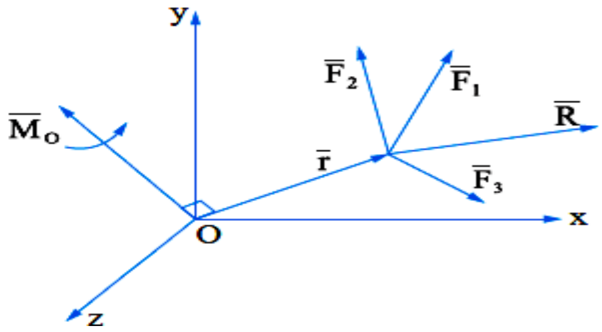
$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{R}$$

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F}_1 + \overline{r} \times \overline{F}_2 + \overline{r} \times \overline{F}_3$$

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3\right)$$

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{R}$$

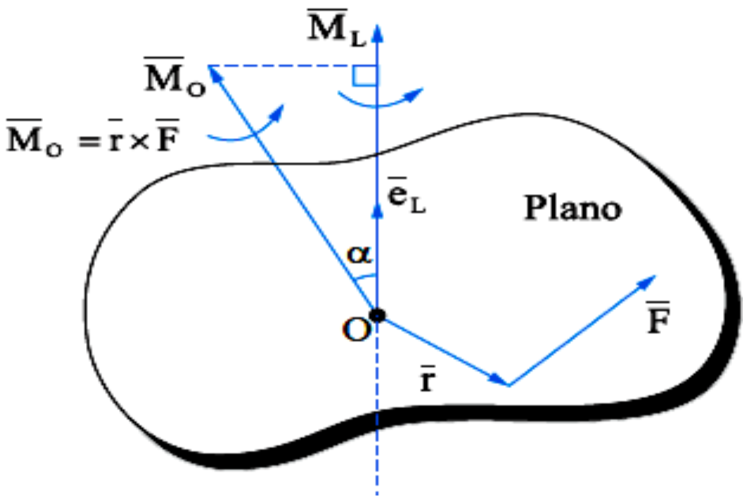


Momento de un par de fuerzas

$$M_L = \overline{M}_O \bullet \overline{e}_L \quad \text{ML es la magnitud de la sombra del vector Mo}$$

$$\overline{M}_L = \left(\overline{M}_O \bullet \overline{e}_L\right)\overline{e}_L \quad \text{Expresión vectorial}$$

$$\overline{M}_L = M_L \overline{e}_L$$



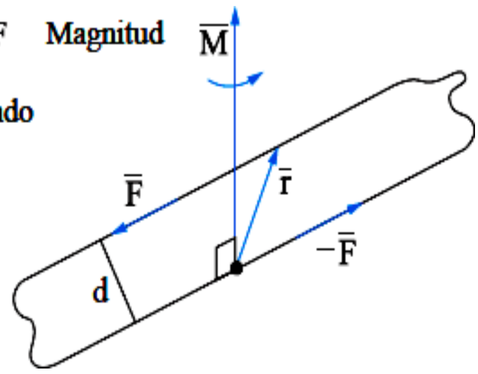
Par de fuerzas es el sistema formado por 2 fuerzas de igual magnitud, rectas de acción paralelas y sentido opuestos.

El momento de un par es el momento de una de las fuerzas con respecto a un punto cualquiera de la línea de acción de la otra fuerza.

$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}$ **Expresión vectorial** $M = dF$ **Magnitud**

Dirección: Perpendicular al plano formado por el par de fuerzas.

Sentido: Regla de la mano derecha.



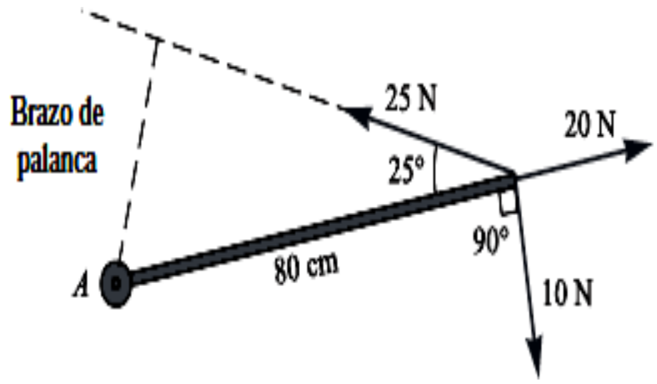
Los vectores momento de los pares son vectores libres; se pueden sumar o restar independientemente de su posición en el espacio.

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots$$

Los siguientes ejemplos son obtenidos de: (Bueche & Hecht, 2007)

Ejemplo 1: Calcular el torque alrededor del eje A (que es perpendicular a la página) en el
Gráfico N°. 33 debido a la acción de cada una de las fuerzas indicadas.

Gráfico N°. 32 Ejemplo 1 de torque



Fuente: (Bueche & Hecht, 2007)

Al utilizar la ecuación $\tau = rFsen\theta$, recuerda que un torque en el sentido del reloj es negativo y los torques contrarreloj son positivos. El torque de cada una de las tres fuerzas es:

Para 10 N: $\tau = (0.80\ m)(10\ N)(sen\ 90°) = 8.0\ N \cdot m$ Para 25 N: $\tau = (0.80\ m)(25\ N)(sen\ 25°) = 8.5\ N \cdot m$ Para 20 N: $\tau = (0.80\ m)(20\ N)(sen\ 0°) = 0\ N \cdot m$

La línea de acción de la fuerza de 20 N pasa por el eje y por tanto $\theta = 0°$. Expresándolo de otra forma, si la línea de acción de la fuerza pasa por el eje, entonces su brazo de palanca (***brazo de palanca* de la fuerza, es la distancia perpendicular desde el eje a la línea de acción de la fuerza**) es cero. De cualquier forma, el torque es cero para esta (y cualquier otra) fuerza cuya línea de acción pase por el eje.

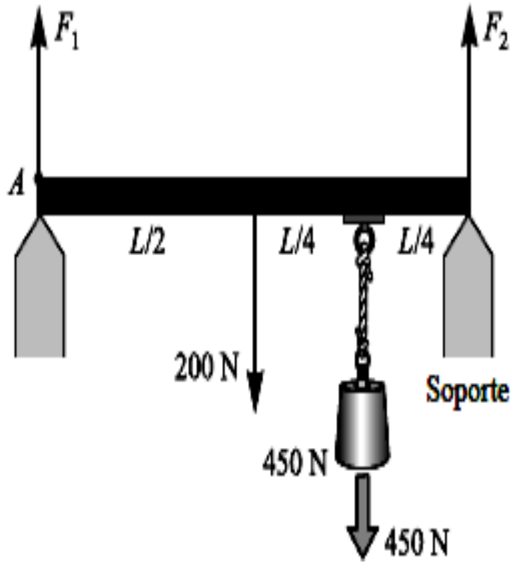
Ejemplo 2: Una viga metálica uniforme de longitud *L* pesa 200 N y sostiene un objeto de 450 N como se muestra en Gráfico N°. 34. Calcule la magnitud de las fuerzas que ejercen sobre la viga las columnas de apoyo colocadas en los extremos. Suponga que las longitudes son exactas.

En lugar de dibujar por separado los diagramas de cuerpo libre, se muestran en el

Gráfico N°. 34 las fuerzas que actúan sobre la viga. Como la viga es uniforme, su centro de gravedad se localiza en su centro geométrico. Por esta razón se muestra el peso de la viga (200 N) actuando sobre su centro. Las fuerzas **F1** y **F2** son las reacciones de las columnas de apoyo sobre la viga. Como no existen fuerzas en la dirección X que actúen sobre la viga, solamente hay que escribir dos ecuaciones para esta condición de equilibrio:

$\Sigma \mathbf{F_Y} = 0$ y $\Sigma \boldsymbol{\tau} = 0$.

Gráfico N°. 33 Ejemplo 2 de torque



Fuente: (Bueche & Hecht, 2007)

Aplicando $\Sigma \mathbf{FY} = 0$ se tiene: $F1 + F2 - 200\ N - 450\ N = 0$ (1)
Antes de escribir la ecuación del torque o momento, se debe escoger un eje. Se escoge en el punto *A*, de tal forma que la fuerza desconocida **F1** pase por éste y no ejerza torque alguno. Entonces la ecuación del torque es:

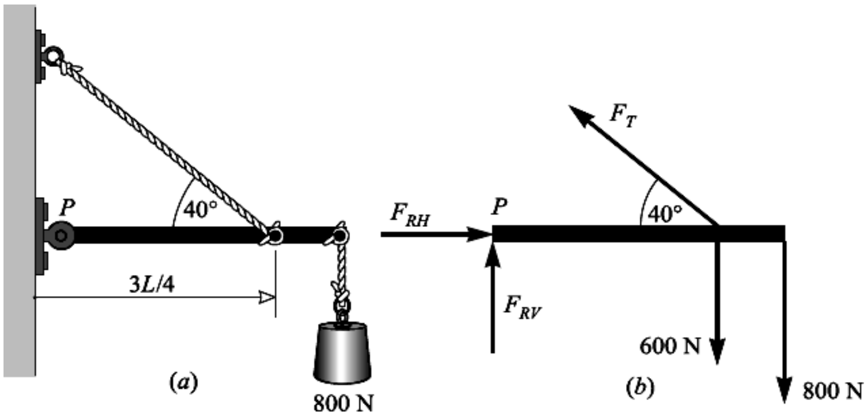
$$\circlearrowleft + \Sigma \tau = -(L/2)(200\,\mathrm{N})(\operatorname{sen} 90°) - (3L/4)(450\,\mathrm{N})(\operatorname{sen} 90°) + LF_2 \operatorname{sen} 90° = 0$$

Al dividir la ecuación entre *L* y resolviendo para F_2, se encuentra que $F_2 = 438$ N.

Para calcular el valor de F1, se sustituye el valor de F2 en la ecuación de las fuerzas (1) y se obtiene F1 = 212 N.

Ejemplo 3: Mire el diagrama que se muestra en Gráfico N°. 35a. La viga uniforme de 600 N está sujeta a un gozne en el punto P. Calcule la tensión en la cuerda y las componentes de la fuerza de reacción que ejerce el gozne sobre la viga.

Gráfico N°. 34 Ejemplo 3 de torque



Fuente: (Bueche & Hecht, 2007)

Las fuerzas sobre la viga se indican en Gráfico N°. 35*b*, donde la fuerza ejercida por el gozne se representa mediante sus componentes, F_{RH} (Es la fuerza de reacción en X de la pared) y F_{RV} (Es la fuerza de reacción en Y de la pared).

La ecuación del torque tomando el punto P como eje es:

$+(3L/4)(F_T)(\text{sen } 40°) - (L)(800\ N)(\text{sen } 90°) - (L/2)(600\ N)(\text{sen } 90°) = 0$

Al resolver esta ecuación se obtiene: $F_T = 2\ 280\ N$ F_{RH} y F_{RV} se calculan con las siguientes ecuaciones:

Como F_T es conocida, estas ecuaciones dan $F_{RH} = 1750\ N$ y $F_{RV} = 65.6\ N$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad 0 \qquad -F_T \cos 40^\circ + F_{RH} = 0$$

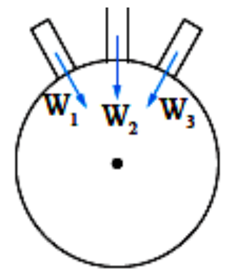
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad 0 \qquad F_T \,\text{sen}\, 40^\circ + F_{RV} - 600 - 800 = 0$$

Centros de gravedad

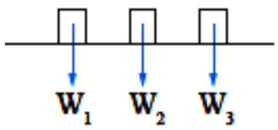
El centro de gravedad según **(**Bueche & Hecht, 2007) de un objeto es el punto en el cual se puede considerar que está concentrado todo su peso; esto es, la línea de acción del peso pasa por el centro de gravedad. Una sola fuerza vertical y dirigida hacia arriba, igual en magnitud al peso del objeto y aplicada en el centro de gravedad, mantendrá al cuerpo en equilibrio.

Según: (Gamio Arisnabarreta, 2015), sea:

Peso (W): Fuerza ejercida por la tierra sobre los elementos del cuerpo rígido.

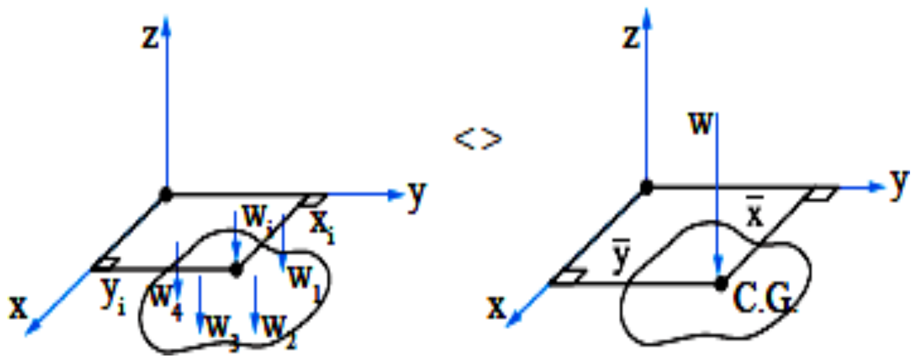


La tierra: "Los pesos son fuerzas concurrentes".



→ Fuerzas paralelas

Para distancias cortas es buena aproximación considerar a los pesos como fuerzas paralelas.



$$W = W_1 + W_2 + ... + W_i$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \text{ , peso total}$$

$$\Sigma M_y : \sum_{i=1}^{n} W_i x_i \quad (1) \qquad \Sigma M_x : \sum_{i=1}^{n} W_i y_i \quad (3)$$

$$\Sigma M_y : W\bar{x} \quad (2) \qquad \Sigma M_x : W\bar{y} \quad (4)$$

$$(1) = (2) \qquad (3) = (4)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \quad (5) \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \quad (6)$$

De manera similar:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \quad (7)$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ → **Coordenadas del centro de gravedad**

Las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo se las puede obtener utilizando las fórmulas definidas en: **(5)**, **(6)** **y** **(7)**

En las mencionadas fórmulas, bastaría con reemplazar en cada una de ellas los pesos W_i y las distancias definidas por los puntos cartesianos P(Xi , Yi , Zi) o de posición, donde se encuentran ubicados los pesos W_i.

Como aplicación de éstas coordenadas en otros campos, por ejemplo:

Se puede determinar la ubicación de una instalación o infraestructura física de una empresa que requiera optimizar los costos logísticos para movilizar o transportar desde allí sus productos a sus clientes según su ubicación geográfica.

Notas:
El centro de gravedad toma en cuenta los materiales que componen el cuerpo y es el punto donde está aplicada la fuerza resultante equivalente que es el peso del cuerpo.
El centroide es un centro geométrico, que toma en cuenta la forma más no los materiales que componen el cuerpo.
Si el cuerpo es homogéneo (γ = constante) el centro de gravedad coincide con el centroide.

A continuación, se presentan la forma o manera de calcular el centro de gravedad de algunos de los principales cuerpos o figuras:

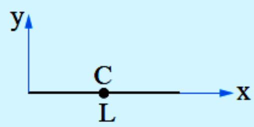
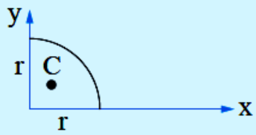
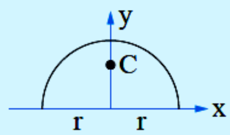
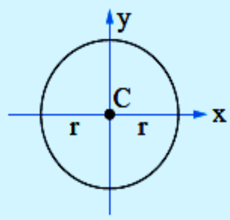
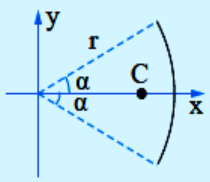
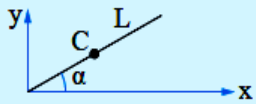
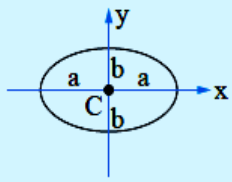
Para determinar las coordenadas de los centros de gravedad, de las figuras que se muestran en los cuadros a continuación, se debe reemplazar en las fórmulas dadas en los cuadros para cada figura o cuerpo, las magnitudes de lo que se solicita en ellos.
Por ejemplo, para determinar el centro de gravedad C.G. de:
Recta: Lo que se requiere para determinar el C.G., solamente el tamaño o magnitud del largo de la recta. Entonces el C.G. de la recta estaría dado por:
En algunos casos se tiene: $\overline{x} = 0$ o $\overline{y} = 0$ en algunos de

ellos o en ambos casos, es porque se hace coincidir el C.G. con el sistema cartesiano en figuras perfectamente simétricas como por ejemplo en: Circunferencia, círculo, corona circular, elipse, polígonos regulares.

Tabla de centros de gravedad

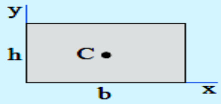
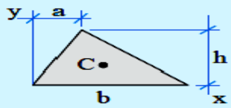
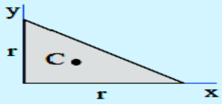
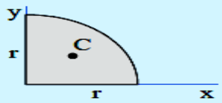
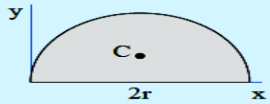
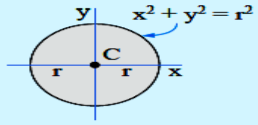
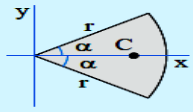
Centro de gravedad de líneas

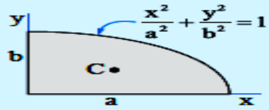
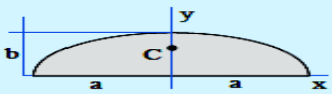
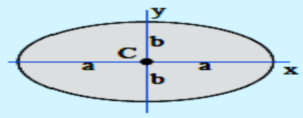
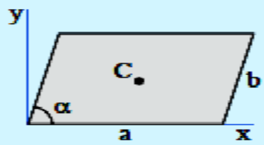
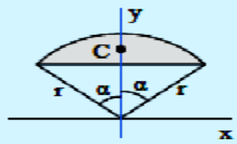
C = Centro de gravedad

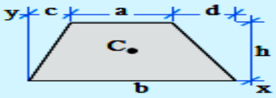
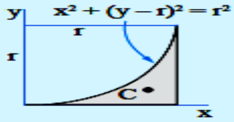
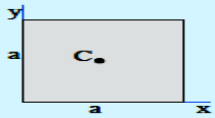
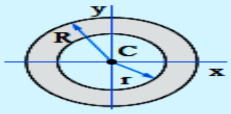
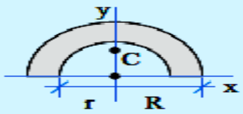
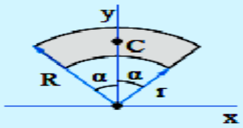
	Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	L
1	Recta		$\frac{L}{2}$	0	L
2	1/4 de circunferencia		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
3	1/2 de circunferencia		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
4	Circunferencia		0	0	$2\pi r$
5	Arco de circunferencia		$\frac{r \operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$
6	Recta inclinada		$\frac{L}{2}\cos\alpha$	$\frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha$	L
7	Elipse		$\bar{x}=0 \quad \bar{y}=0$ $0\le b\le \frac{a}{3}\,;\, L\approx 4.17\frac{b^2}{a}+4a$ $\frac{a}{3}<b\le a\,;\, L\approx \pi\left[1.5\left(a+b-\sqrt{ab}\right)\right]$		

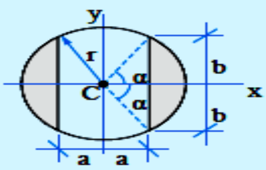
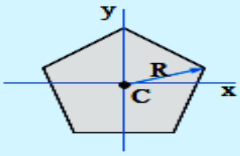
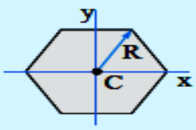
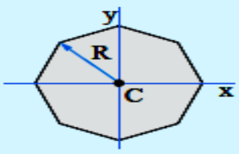
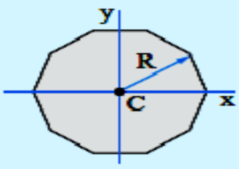
Nota: α solo en las fórmulas debe ir en radianes.

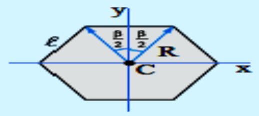
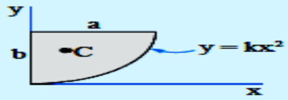
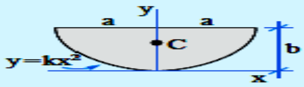
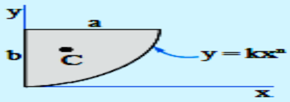
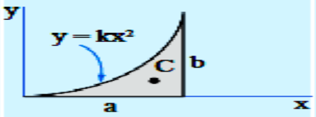
Centro de gravedad de superficies planas

	Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	A
1	Rectángulo		$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	bh
2	Triángulo		$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
3	Triángulo rectángulo		$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
4	1/4 de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
5	Semicírculo		r	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
6	Círculo		0	0	πr^2
7	Sector circular		$\frac{2r\operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

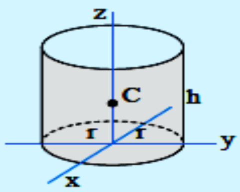
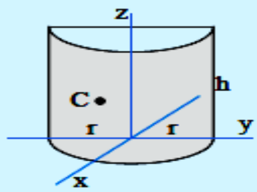
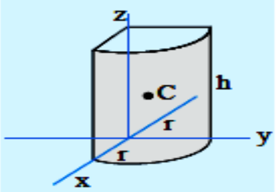
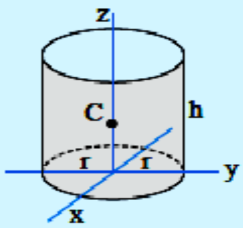
	Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	A
8	1/4 de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
9	Semielipse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
10	Elipse		0	0	πab
11	Paralelogramo		$\frac{a+b\cos\alpha}{2}$	$\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{2}$	$ab\operatorname{sen}\alpha$
12	Segmento circular		$\bar{x}=0$ $\bar{y}=\frac{2r}{3}\left(\frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}\right)$ $A=r^2\alpha-r^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$		

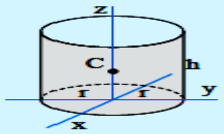
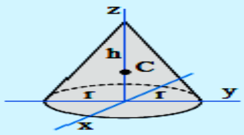
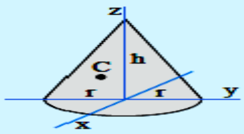
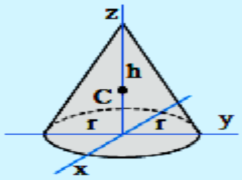
	Nombre	Figura	$\overline{x}$	$\overline{y}$	A
13	Trapecio		$\overline{x}=\frac{3a^2+6ac+3bd+2c^2-2d^2}{3(a+b)}$	$\overline{y}=\frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$	$A=\frac{h}{2}(a+b)$
14	Tímpano de 1/4 de círculo		$\overline{x}=\frac{2r}{3(4-\pi)}$	$\overline{y}=\frac{(10-3\pi)r}{3(4-\pi)}$	$A=r^2-\frac{\pi}{4}r^2$
15	Cuadrado		$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2
16	Corona circular		0	0	$\pi(R^2-r^2)$
17	Semicorona circular		0	$\frac{4(R^2+Rr+r^2)}{3\pi(R+r)}$	$\frac{\pi}{2}(R^2-r^2)$
18	Segmento de corona circular		0	$\frac{2(R^3-r^3)\operatorname{sen}\alpha}{3(R^2-r^2)\alpha}$	$\alpha(R^2-r^2)$

	Nombre	Figura	$\overline{x}$	$\overline{y}$	A
19	Círculo con núcleo retirado		0	0	$2\alpha r^2-2ab$
20	Pentágono		0	0	$2.3773R^2$
21	Hexágono		0	0	$2.598R^2$
22	Octágono		0	0	$2.8284R^2$
23	Decágono		0	0	$2.9389R^2$

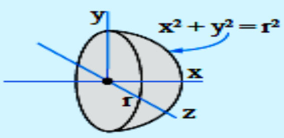
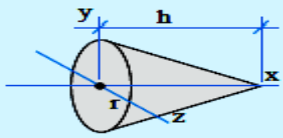
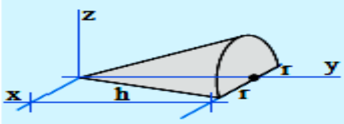
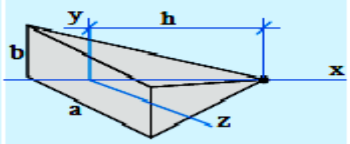
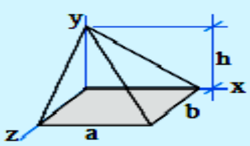
	Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	A
24	Polígono regular con "n" lados $\frac{\beta}{2}=\frac{180°}{n}$		0	0	$\frac{nl^2}{4\tan\frac{\beta}{2}}$
25	Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3b}{5}$	$\frac{2ab}{3}$
26	Área parabólica		0	$\frac{3b}{5}$	$\frac{4ab}{3}$
27	Semiparábola de grado "n"		$\frac{(n+1)a}{2n+4}$	$\frac{(n+1)b}{2n+1}$	$\frac{nab}{n+1}$
28	• Tímpano semiparabólico • Enjuta semiparabólica		$\frac{3a}{a}$	$\frac{3b}{10}$	$\frac{ab}{3}$

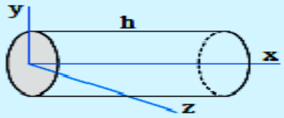
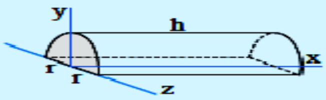
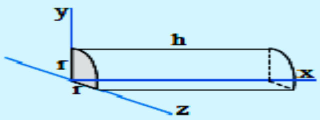
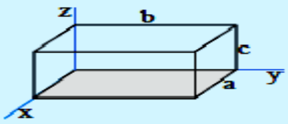
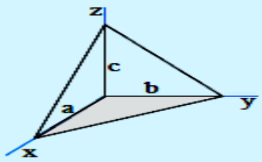
Centro de gravedad de superficies curvas

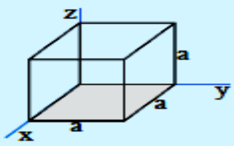
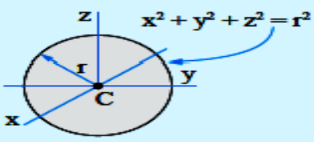
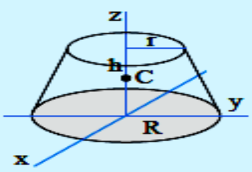
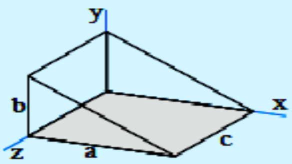
	Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	A
1	Cáscara cilíndrica base circular		0	0	$\frac{h}{2}$	$2\pi rh$
2	Cáscara semi-cilíndrica		$\frac{2r}{\pi}$	0	$\frac{h}{2}$	πrh
3	1/4 de cáscara cilíndrica		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi rh}{2}$
4	Cáscara cilíndrica de fondo cerrado		0	0	$\frac{h^2}{2h+r}$	$\pi r(2h+r)$

	Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	A
5	Cáscara cilíndrica cerrada de ambos lados		0	0	$\frac{h}{2}$	$2\pi r(h+r)$
6	Cáscara cónica de fondo abierto		0	0	$\frac{h}{3}$	$\pi r\sqrt{h^2+r^2}$
7	Cáscara semicónica		$\frac{4r}{3\pi}$	0	$\frac{h}{3}$	$\frac{\pi r}{2}\sqrt{h^2+r^2}$
8	Cáscara cónica base cerrada		$\bar{x}=0$	$\bar{y}=0$	$\bar{z}=\frac{h}{3}\left[1+\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}}\right]^{-1}$	$A=\pi r\left(r+\sqrt{h^2+r^2}\right)$

Centro de gravedad de volúmenes

	Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	V
1	1/2 de esfera (hemisferio)		$\frac{3r}{8}$	0	0	$\frac{2}{3}\pi r^3$
2	Cono		$\frac{h}{4}$	0	0	$\frac{\pi r^2 h}{3}$
3	Semicono		0	$\frac{3h}{4}$	$\frac{r}{\pi}$	$\frac{\pi r^2 h}{6}$
4	Pirámide		$\frac{h}{4}$	0	0	$\frac{hab}{3}$
5	Pirámide irregular		$\frac{3a}{8}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{3b}{8}$	$\frac{abh}{3}$

	Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	V
6	Cilindro		$\frac{h}{2}$	0	0	$\pi r^2 h$
7	Semicilindro		$\frac{h}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	0	$\frac{\pi r^2 h}{2}$
8	1/4 de cilindro		$\frac{h}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2 h}{4}$
9	Prisma rectangular		$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{c}{2}$	abc
10	Tetraedro recto		$\frac{a}{4}$	$\frac{b}{4}$	$\frac{c}{4}$	$\frac{abc}{6}$

	Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	V
11	Cubo		$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^3
12	Esfera		0	0	0	$\frac{4\pi r^3}{3}$
13	Tronco de cono		$\bar{x}=0$	$\bar{y}=0$	$\bar{z}=\frac{(R^2+3r^2+2rR)h}{4(R^2+r^2+rR)}$	$V=\frac{\pi h}{12}(4R^2+4Rr+4r^2)$
14	Prisma triangular		$\frac{a}{3}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{c}{2}$	$\frac{abc}{2}$

CAPÍTULO IV
CINEMÁTICA

Conceptos

Según (Pérez T., 2007):

Cinemática

Es una parte de la Mecánica, que tiene por finalidad describir matemáticamente todos los tipos posibles de movimiento mecánico sin relacionarlo con las causas que determinan cada tipo concreto de movimiento.

La cinemática estudia las propiedades geométricas del movimiento, independientemente de las fuerzas aplicadas y de la masa de la partícula.

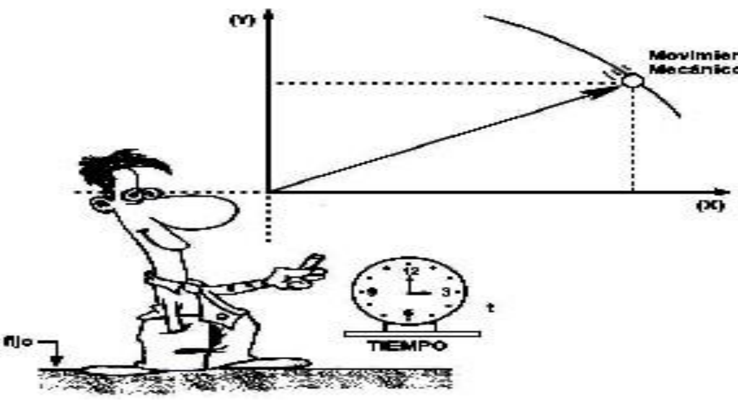
Movimiento

El movimiento es una propiedad fundamental de la materia asociada a ella y que se manifiesta a través de cambios, transformaciones y desarrollo.

Movimiento mecánico:

Es el cambio de posición que realiza o experimenta un cuerpo con respecto a un sistema de referencia (Gráfico N°. 47). Un observador al visualizar el movimiento de un cuerpo se considera que se encuentra en el origen de coordenadas y que la tierra no se mueve.

Gráfico N°. 35 Movimiento mecánico



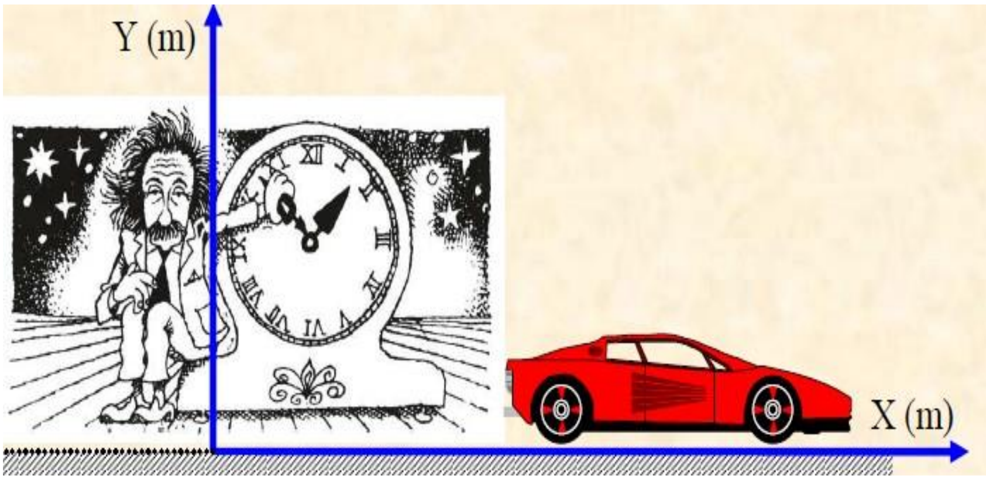
Fuente: (Pérez T., 2007)

Sistema de referencia:

Es un lugar del espacio en donde en forma real o imaginaria se sitúa un observador para analizar un fenómeno.

Sobre un cuerpo en el espacio se fija rigurosamente un sistema coordenado (cartesiano, cilíndrico, polar, etc.), lugar en el cual se instala un reloj (sistema horario) y se ubica un observador en forma real o imaginaria, quien estudiará el fenómeno (movimiento mecánico) en el espacio y en el tiempo. A este conjunto se le denomina sistema de referencia

Gráfico N°. 36 Sistema de referencia



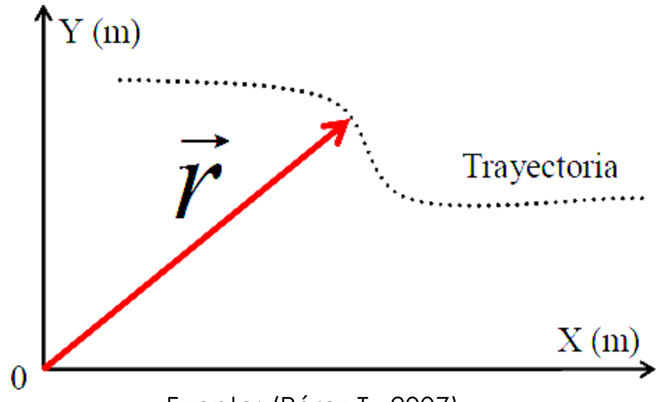
Fuente: (Pérez T., 2007)

Elementos del movimiento mecánico

Móvil. - Es el cuerpo o partícula que realiza un movimiento Mecánico o que puede moverse.

Trayectoria. - Es la línea recta o curva Gráfico N°. 49 que describe el móvil al desplazarse. Si la trayectoria es curvilínea, el recorrido es mayor que la distancia. En cambio, si la trayectoria es rectilínea, entonces el recorrido es igual a la distancia.

Gráfico N°. 37 Trayectoria



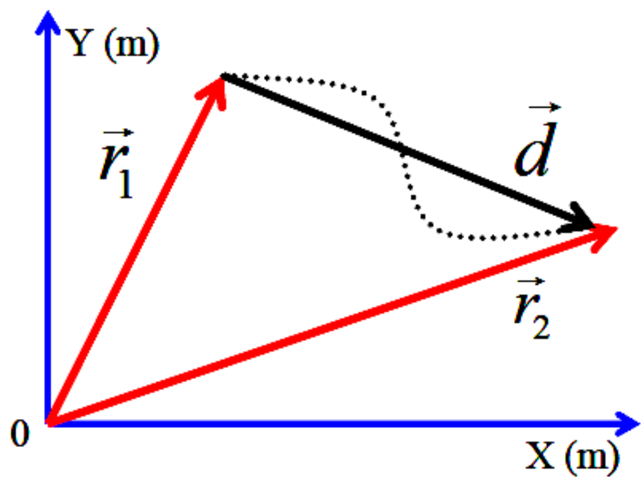
Fuente: (Pérez T., 2007)

Recorrido (e). - Es la medida de la longitud de la trayectoria entre dos puntos considerados. Es una magnitud física escalar.

Vector Posición ($\vec{r}$) .- Es el vector utilizado por el observador para ubicar al móvil en el espacio y en el tiempo. Este vector se traza desde la visual del observador (origen de coordenadas) al móvil en un cierto instante.

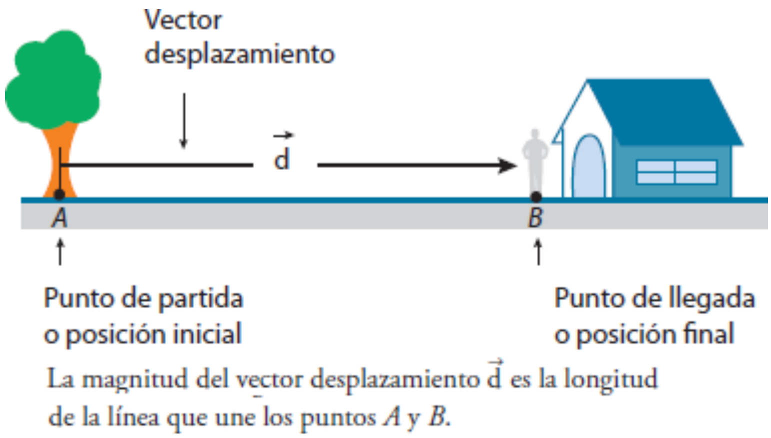
Desplazamiento ($\vec{d}$) Gráfico N°. 50 y Gráfico N°. 51.- Es una magnitud física vectorial, que sirve para expresar el cambio de posición efectivo entre dos puntos efectuado por un móvil.

Gráfico N°. 38 Vector desplazamiento



Fuente: (Pérez T., 2007)

Gráfico N°. 39 Vector desplazamiento



Fuente: (Gutiérrez, 2015)

Adición de vectores: $\vec{r}_1 + \vec{d} = \vec{r}_2$

Desplazamiento: $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

El desplazamiento se define como el cambio de posición: $\vec{d} = \Delta\vec{r}$

Distancia (d). - Es el módulo del vector desplazamiento. Es la medida del segmento que une el punto inicial con el punto final del movimiento.

Tiempo. - Es una forma real de existencia de la materia, que se encuentra asociada a su movimiento y espacio ocupado.

El Tiempo en Mecánica sirve para medir la duración de un fenómeno físico y su ubicación respectiva.

El Tiempo para un evento físico definido previamente se puede clasificar en:

Intervalo de Tiempo (Δt). - Denominado también tiempo transcurrido, es el que sirve para medir la duración de un evento físico.

Instante de Tiempo ( ).- Es aquel intervalo de tiempo pequeñísimo que nos permitirá ubicar la tendencia de ocurrencia de un fenómeno físico y su ubicación principalmente en el espacio.

Medidas del movimiento

El movimiento mecánico se puede expresar en función de la rapidez de cambio de posición en el tiempo, a través de la **velocidad** y la **aceleración**, y también en función a la naturaleza de las transformaciones y considerando la masa del cuerpo el movimiento se mide en base al concepto de ENERGÍA y cantidad de movimiento.

Velocidad. - Es una magnitud física vectorial que nos expresa la rapidez con la cual un móvil cambia o tiende a cambiar de posición en un intervalo de tiempo como la Velocidad Media y en función a un instante de tiempo como la Velocidad Instantánea.

Velocidad media (Vm). - Es aquella magnitud física vectorial que expresa la rapidez de cambio de posición de un móvil, evaluada en un intervalo de tiempo. la velocidad media **Vm** es colineal y del mismo sentido que el desplazamiento Gráfico N°. 52.

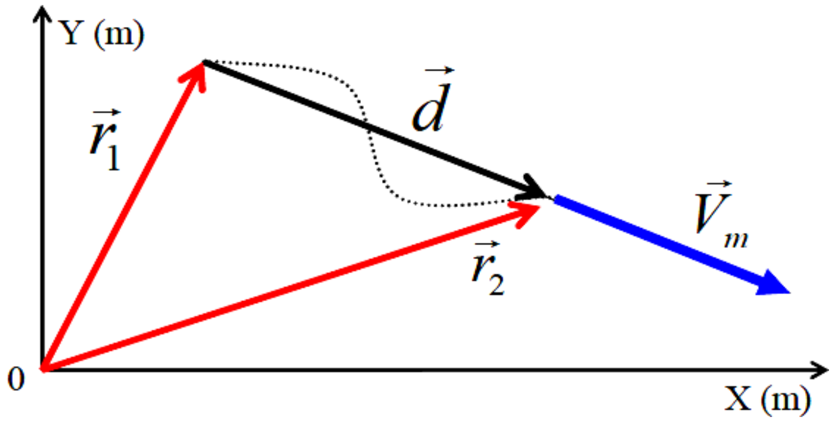
La velocidad media se evalúa entre dos puntos de la trayectoria. matemáticamente se expresa así:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$ **La velocidad media es independiente de la trayectoria.**

Para un movimiento unidimensional en el eje X se expresa así:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_F - X_0}{\Delta t}$$

Gráfico N°. 40 Vector velocidad media



Fuente: (Pérez T., 2007)

Velocidad instantánea (V). - Es aquella magnitud física que expresa la rapidez de cambio de posición de un móvil en un instante de tiempo. Matemáticamente la velocidad instantánea viene a ser el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero:

$$\vec{V}_{\text{instantanea}} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{\text{m}}$$

Con el uso del cálculo diferencial, la velocidad instantánea se expresa así:

$$V = \frac{dr}{dt}$$ Se lee ***derivada*** de la posición respecto del tiempo.

Para un movimiento unidimensional en el eje X.

$V = \dfrac{dX}{dt}$, se lee ***derivada*** de la posición en el eje X respecto del tiempo. Donde X es un polinomio cuya ***variable*** es el tiempo.

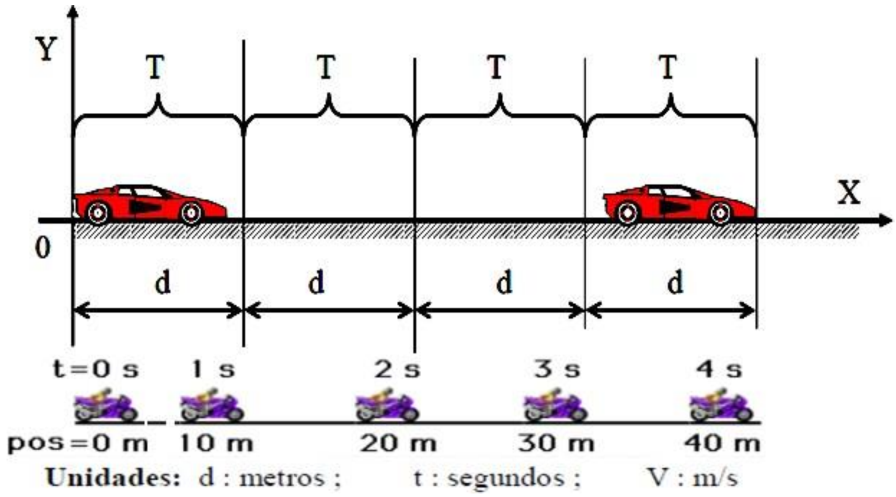
Ejemplos de unidades de la velocidad: cm/s; m/s; km/h

La velocidad instantánea se representa mediante un vector tangente a la curva. Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)

Concepto de M.R.U.- El móvil describe una trayectoria rectilínea

Gráfico N°. 53, avanzando distancias iguales en intervalos de tiempos iguales, moviéndose con *velocidad constante* (módulo y dirección).

Gráfico N°. 41 M.R.U.



Fuente: (Pérez T., 2007)

Velocidad constante. - La partícula se mueve con velocidad constante en módulo y dirección. Es decir, la trayectoria es siempre rectilínea.

Características del M.R.U.:

La **velocidad** es una cantidad física vectorial, es decir tiene módulo y dirección.

El módulo o magnitud del vector velocidad denominado también como **rapidez** es constante Que podríamos definirlo simbólicamente como V.

Entonces:V = constante, la aceleración: a = 0 (no hay aceleración, porque no hay cambios de velocidad)

Cálculo de la rapidez: $V = \frac{d}{t}$

De esta fórmula de la rapidez se pueden obtener la distancia y el tiempo.

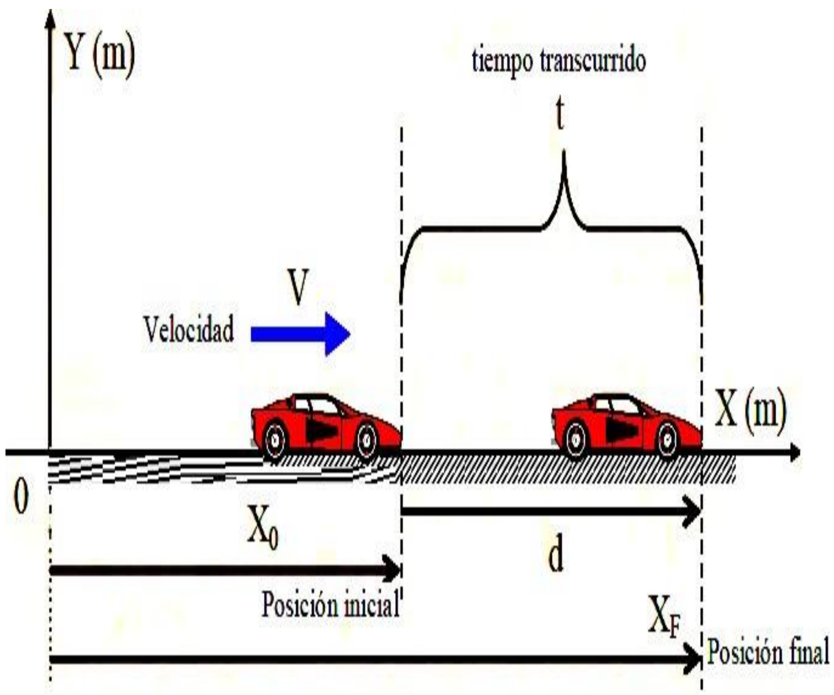
Cálculo de la distancia: $d = V . t$

Cálculo del tiempo transcurrido: $t = \dfrac{d}{V}$

Ecuación del movimiento (M.R.U.). - La posición final de la partícula es igual a la adición de la posición inicial más el desplazamiento. Gráfico N°. 54

$X_f = x_0 + d$; $d = V.t$ $X_f = x_0 + V.\,t$

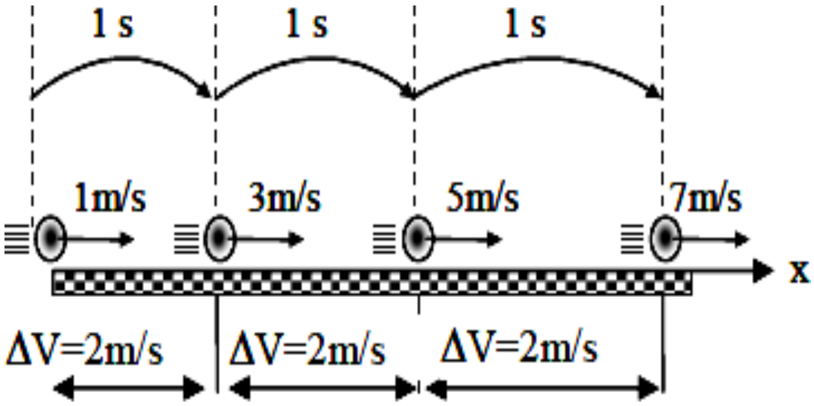
Gráfico N°. 42 Posición final del movimiento de un cuerpo



Fuente: (Pérez T., 2007)

Concepto de M.R.U.V. Gráfico N°. 55**-** Es aquel movimiento donde el móvil describe una línea recta en intervalos de tiempo iguales, los cambios de velocidad (ΔV) son iguales y las distancias recorridas son diferentes. Tiene aceleración constante.

Gráfico N°. 43 Características del M.R.U.V.



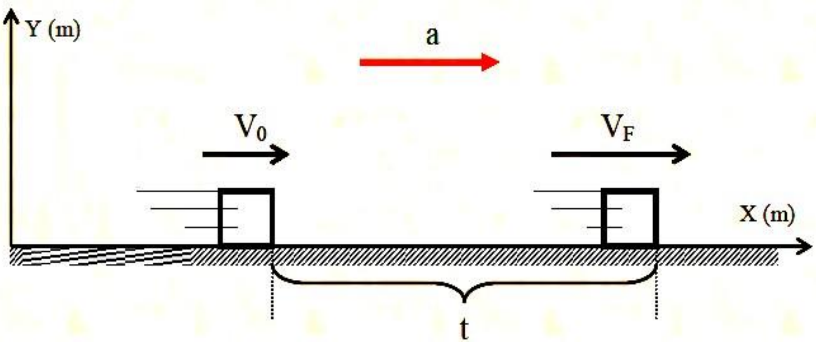
Fuente: (Pérez T., 2007)

Aceleración lineal o tangencial. - La aceleración lineal Gráfico N°. 56 mide la rapidez del cambio de la velocidad en módulo. En el M.R.U.V. la aceleración lineal es constante, es decir no cambia la dirección ni el módulo de la aceleración.

Unidad de la aceleración en el S.I.: m/s² o m.s^{-2}

$$a = \frac{\Delta V}{t} \Rightarrow a = \frac{V_F - V_0}{t} \Rightarrow V_F = V_0 + a.t$$

Gráfico N°. 44 La aceleración



Fuente: (Pérez T., 2007)

Fórmulas del M.R.U.V.:

Cuando aumenta la velocidad Acelera	Cuando disminuye la velocidad Desacelera
1) $d = V_0.t + \frac{1}{2}a.t^2$	1) $d = V_0.t - \frac{1}{2}a.t^2$
2) $d = V_F.t - \frac{1}{2}a.t^2$	2) $d = V_F.t + \frac{1}{2}a.t^2$
3) $V_F = V_0 + a.t$	3) $V_F = V_0 - a.t$
4) $V_F^2 = V_0^2 + 2a.d$	4) $V_F^2 = V_0^2 - 2a.d$
5) $d = \frac{(V_0 + V_F)}{2}.t$	5) $d = \frac{(V_0 + V_F)}{2}.t$

En el M.R.U.V. o **acelerado,** la aceleración y la velocidad tienen la misma dirección. En cambio, si el movimiento es **desacelerado,** la aceleración tiene dirección y sentido opuesto a la velocidad.

$$V_F = V_0 \pm a.t$$

V_0 : velocidad inicial — V_F : velocidad final

(+) : Movimiento acelerado — (-) : Movimiento desacelerado

Ejemplo tomado de (Medina G., 2009):

Un móvil parte del reposo y de un punto A, con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado (a =10 cm/s^2); tarda en recorrer una distancia BC = 105 cm un tiempo de 3s, y, finalmente, llega al punto D (CD = 55 cm).

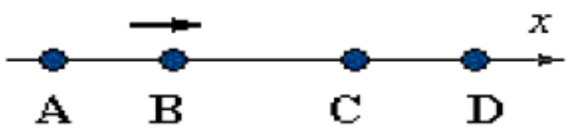
Calcular:

La velocidad del móvil en los puntos B, C y D.

La distancia AB.

El tiempo invertido en el recorrido AB y en el CD.

El tiempo total en el recorrido AD.



Solución.

$$\text{a)}\quad \left.\begin{aligned} BC &= v_B t + \frac{1}{2}at^2 \\ 105 &= v_B 3 + \frac{1}{2}10\times 3^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_B = 20 \text{ cm/s}$$

$$v_C = v_B + at = 20 + 30 = 50 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{aligned} CD &= v_C t + \frac{1}{2}at^2 \\ 55 &= 50t + \frac{1}{2}10t^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{c)}\quad \left.\begin{aligned} v_B &= at \\ 20 &= 10t \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = \frac{20}{10} = 2 \text{ s}$$

d) Será la suma de los tiempos parciales:

$t = 2 + 3 + 1 = 6$ s

Caída libre o movimiento M.R.U.V. en sentido vertical

Concepto Gráfico Nº. 57**.-** Es aquel tipo de movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.) cuya trayectoria es una línea recta en sentido vertical y que se debe a la presencia del campo de gravedad, es decir la aceleración en este caso es la aceleración de la gravedad "g".

$$\Rightarrow t^2 + 10t - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \text{ s}$$

$$v_D = v_C + at = 50 + 10 = 60 \text{ cm/s}$$

$$\text{b)}\quad v_B = \sqrt{2aAB}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \frac{v_B^2}{2a} = \frac{400}{20} = 20\text{cm}$$

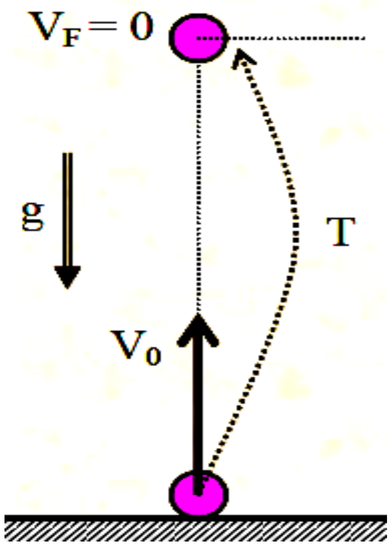
La única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su propio peso, no considera la resistencia del aire.

Este tipo de movimiento se obtiene, cuando un cuerpo es lanzado hacia arriba, hacia abajo, o simplemente es soltado.

Cuando un cuerpo es lanzado hacia arriba desacelera su movimiento, en cambio cuando desciende o es lanzado hacia abajo acelera su movimiento.

En las ecuaciones cinemáticas no se considera la masa ni la fuerza resultante.

Gráfico N°. 45 M.R.U.V. en sentido vertical



Fuente: (Pérez T., 2007)

Tiempo de vuelo Gráfico N°. 57. - Consideremos un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba. Cuando el cuerpo alcanza la altura máxima su velocidad final V_F es nula.

De la ecuación:

$V_F = V_0 - g.t$

Reemplazando los datos:

$0 = V_0 - g.T$

Despejando:

$$T = \frac{V_0}{g}$$

Tiempo de subida:

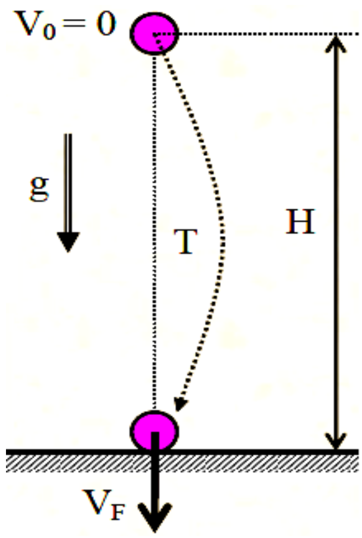
$$t_{SUBIDA} = \frac{V_0}{g} = T$$

Tiempo de vuelo:

$$t_{VUELO} = \frac{2.V_0}{g} = 2T$$

t_{VUELO} = 2T, porque el mismo tiempo de subida se hace de bajada. La trayectoria es simétrica.

El intervalo de tiempo depende de la altura. - Todos los cuerpos que se dejan caer simultáneamente con la misma velocidad inicial cero desde una altura, utilizan el mismo intervalo de tiempo para llegar al suelo.



$$h = V_0.t + \tfrac{1}{2}.g.t^2$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$H = 0 + \tfrac{1}{2}.g.T^2$$

el intervalo de tiempo de caída es:

$$T = \sqrt{\frac{2.H}{g}}$$

El valor de la aceleración de la gravedad, con fines prácticos se le asume como:

g = 9,8 m/s^2 como se indicó en temas anteriores, la gravedad no es la misma en todos los puntos geográficos.

*** En los polos: g = 9,83 m/s² (Máxima)**
*** En el Ecuador: g = 9,78 m/s² (Mínima)**

Altura máxima. - Un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba alcanza su altura máxima cuando su velocidad final en el punto más alto es igual a cero.

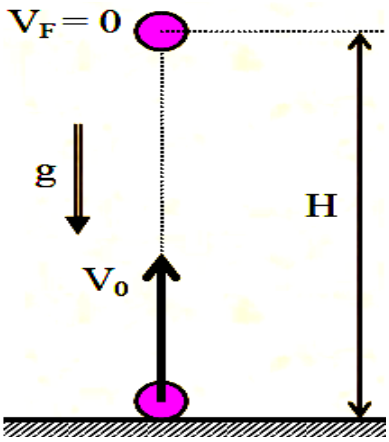
Aplicando la ecuación:

$$V_F^2 = V_0^2 - 2g.h$$

Reemplazando los datos:

$$0 = V_0^2 - 2g.H$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g}$$



Tiempo de alcance. - Cuando dos partículas son lanzadas simultáneamente, en la misma dirección, de diferentes posiciones, en una misma línea vertical; el tiempo de alcance es:

$$H_A - H_B = H$$

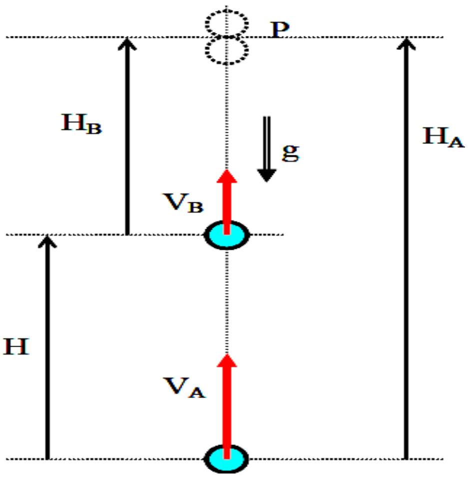
$$(V_A.T - \tfrac{1}{2}gT^2) - (V_B.T - \tfrac{1}{2}gT^2) = H$$

simplificando tenemos:

$$V_A.T - V_B.T = H$$

despejando obtenemos:

$$T_{encuentro} = \frac{H}{V_A - V_B}$$



Tiempo de encuentro. - Cuando dos partículas son lanzadas, simultáneamente, en direcciones opuestas, de diferentes posiciones en una misma línea vertical; el tiempo de encuentro es:

Obs.:

La altura en un desplazamiento vertical tendrá signos positivo o negativo Gráfico N°. 58:

Si la altura tiene signo positivo significa que el cuerpo se encuentra sobre el nivel de referencia, subiendo.

Si la altura tiene signo negativo significa que el cuerpo se encuentra debajo de la línea de referencia descendiendo.

Si la altura es cero significa que el cuerpo ha regresado o está pasando en ese instante por el nivel de referencia (N.R.).

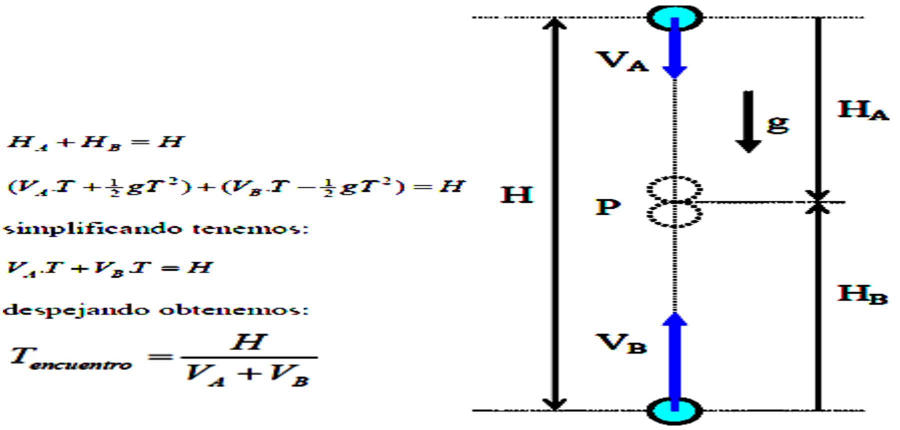
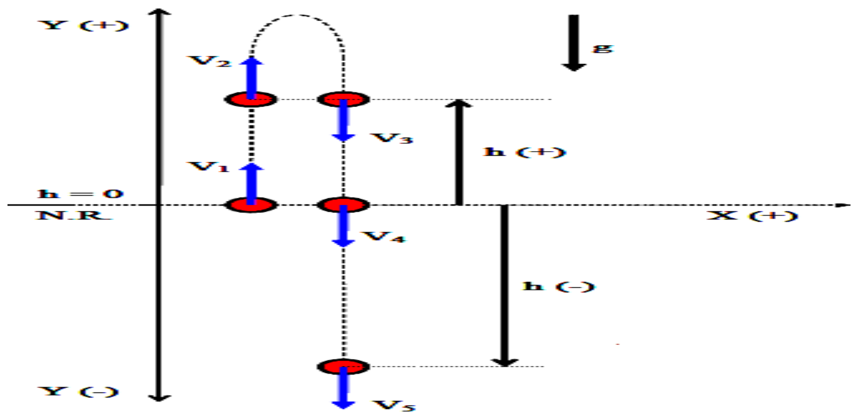


Gráfico N°. 46 Signos para la altura



Fuente: (Pérez T., 2007)

Ejercicios tomados de (Medina G., 2009)**:**

1.- Desde lo alto de un edificio, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una rapidez de 12,5 m/s. La pelota llega a tierra 4,25 s, después.

Determine:

La altura que alcanzó la pelota respecto del edificio.

La rapidez de la pelota al llegar al suelo.

Solución.

La altura en función del tiempo será

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Con $g = 10 m/s^2$, $v_0 =$ 12,5 m/s

$y = h + 12{,}5t - 5t^2$

a) Al tiempo $t = 4{,}25$ s, $y = 0$, luego:

$h + 12{,}5(4{,}25) - 5(4{,}25)^2 = 0,$

$\Rightarrow h = 37{,}19$ m

b) $v_y = 12{,}5 - 10t = 12{,}5 - 10(4{,}25)$

$= -30{,}0$ m/s

2.- Desde el piso, se lanza hacia arriba una pelota con una rapidez de 40 m/s. Calcule:

El tiempo transcurrido entre los dos instantes en que su velocidad tiene una magnitud de 2,5 m/s.

La distancia respecto al piso que se encuentra la pelota en ese instante.

Solución.

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

$$v_y = v_0 - gt \qquad (2)$$

a) De la ecuación (2):

$$v_y = v_0 - g t_1 = 2{,}5$$

$$v_y = v_0 - g t_2 = -2{,}5$$

Restando obtenemos:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{5}{g} = 0{,}5s$$

b) De la ecuación (2):

$$v_y = v_0 - g t_1 = 2{,}5$$

$$40 - g t_1 = 2{,}5$$

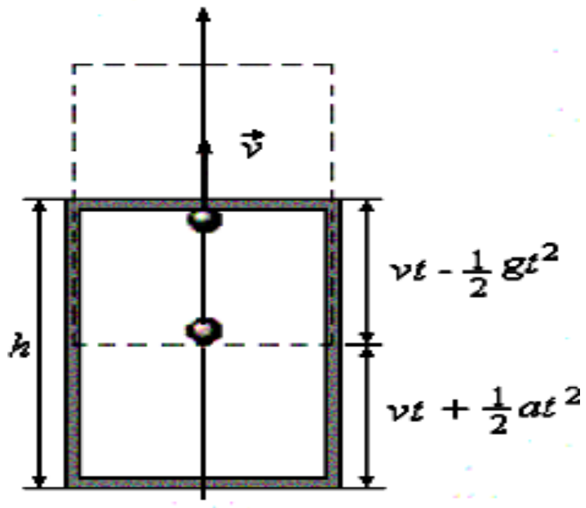
$$\Rightarrow \; t_1 = \frac{37{,}5}{9{,}8} = 3{,}83 \text{ s.}$$

Con t_1 en (1):

$$h = 40(3{,}83) - \frac{1}{2} g (3{,}83)^2 = 81{,}41 \text{ m.}$$

Con t_2 se obtiene la misma altura, porque es cuando la pelota está de bajada.

3.- La cabina de un ascensor de altura 3 m asciende con una aceleración de 1m/s^2. Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.



Solución:

Primer método: En el instante en que empieza a caer el cuerpo el ascensor lleva una velocidad vertical hacia arriba *v*.

El espacio vertical y hacia abajo que debe recorrer la lámpara es:

$$h - \left(vt + \frac{1}{2}at^2 \right)$$

(*h* = altura del ascensor) y ($vt + at^2/2$) ascenso del suelo de éste.

La lámpara al desprenderse lleva una velocidad inicial hacia arriba v. Aplicando la ecuación:

$$s = vt + \frac{1}{2}at^2$$

Siendo positivas las magnitudes hacia arriba y negativas las descendentes, tendremos:

$$-h + vt + \frac{1}{2}at^2 = vt - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Longrightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{9{,}8+1}} = 0{,}74 \text{ s}$$

Segundo método: La aceleración de la lámpara respecto al ascensor, considerando magnitudes positivas hacia abajo, es:

$$a_{BA} = a_B - a_A = 9{,}8 - (-1) = 10{,}\ 8\ \mathrm{m/s^2}$$

$$h = \frac{1}{2} a_{BA} t^2 \quad \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_{BA}}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{10{,}8}} = 0{,}74\ \mathrm{s}$$

4.- Una bola es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s de la parte alta de una torre que tiene una altura de 50 m. En su vuelta pasa rozando la torre y finalmente toca la tierra.

¿Qué tiempo t_1 transcurre a partir del instante en que la bola fue lanzada hasta que pasa por el borde de la torre? ¿Qué velocidad v_1 tiene en este tiempo?

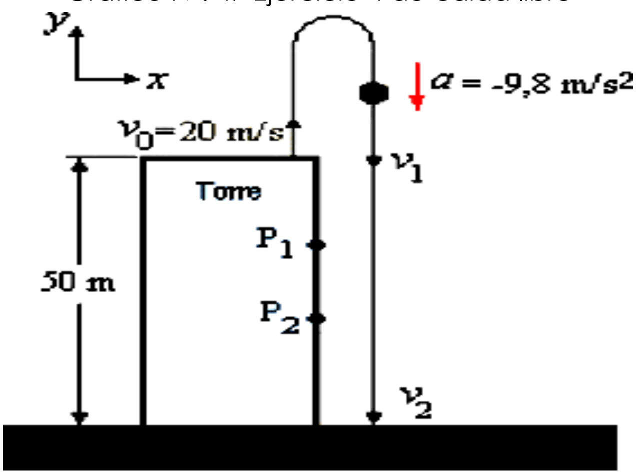
¿Qué tiempo total t_2 se requiere para que la bola llegue al piso? ¿Cuál es la velocidad v_2 , con la que toca el piso?

¿Cuál es la máxima altura sobre el suelo alcanzada por la bola? Los puntos P_1 y P_2 están a 15 y 30 m, respectivamente, por debajo del techo de la torre.

¿Qué tiempo se requiere para que la bola viaje de P_1 a P_2?

¿Se desea que después de pasar el borde, la bola alcance la tierra en 3s, ¿con qué velocidad se debe lanzar hacia arriba de la azotea?

Gráfico N°. 47 Ejercicio 4 de caída libre



Solución:

a) Para el sistema de coordenadas mostrado en la figura, $y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Pero en el borde del techo $y = 0$, luego

$0 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$,

De la cual $t_1 = 0$, indica el instante en el cual la bola es lanzada, y también $t_1 = 4{,}08$ s, la cual es el tiempo en que la bola retorna al borde.

Luego, de $v = v_0 + at$

$v_1 = 20 + (-9{,}8)(4{,}08) = -20 \mathrm{m/s}$, que es el negativo de la velocidad inicial.

b) $-50 = 20 t_2 + \frac{1}{2}(-9{,}8) t_2^2 \Rightarrow t_2 = 5{,}8 \mathrm{s}$

$v_2 = 20 + (-9{,}8)(5{,}8) = -37 \mathrm{m/s}$

c) Máxima altura sobre tierra: $h = y_{max} + 50$.

De $v_0^2 + 2 a y_{max} = 0$, $\Rightarrow$

$$y_{max} = \frac{-(20)^2}{-2(9{,}8)} = 20{,}4 \mathrm{m}$$

Luego, $h = 70{,}4$ m.

d) Si t_1 y t_2 son los tiempos para alcanzar P_1 y P_2, respectivamente,

$-15 = 20 t_1 - 4{,}9 t_1^2$ y $-30 = 20 t_2 - 4{,}9 t_2^2$

Resolviendo, $t_1 = 4{,}723$ s, $t_2 = 5{,}248$ s, y el tiempo de P_1 a P_2 es $(t_2 - t_1) = 0{,}525$ s.

e) Si v_0 es la velocidad inicial deseada, entonces $-v_0$ es la velocidad cuando pasa el borde. Luego aplicando $y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ al viaje hacia abajo de la torre, encontramos:

$-50 = (-v_0)(3) - 4{,}9(3)^2$, $\Rightarrow v_0 = 1{,}96$ m/s.

Movimiento parabólico o tiro parabólico

Según (Medina G., 2009):

Introducción

Considere un objeto que se desplaza en el aire sin ninguna fuerza con excepción de la gravedad y de la resistencia del aire.

La fuerza de la gravedad produce una aceleración constante hacia abajo de magnitud 9,80 m/s^2.

Como primera característica, no hay los efectos del aire y de variaciones en g. Asumiremos que la tierra es plana para el rango horizontal de los proyectiles.

Con éstas simplificaciones, podemos obtener una descripción bastante buena del movimiento del proyectil. El recorrido de un proyectil se llama su trayectoria.

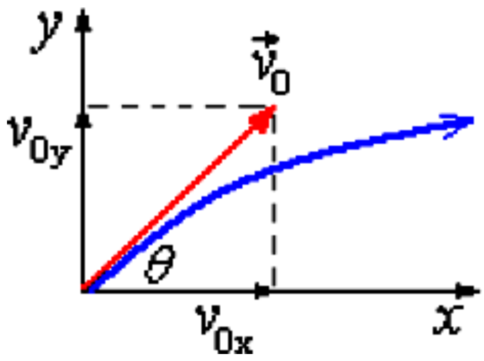
Si se desprecia la resistencia del aire, no hay entonces aceleración en la dirección horizontal

$a_X = 0$.

La aceleración en la dirección de Y es debido a la gravedad. Es constante y dirigida hacia abajo $a_Y = -g$.

Es conveniente elegir $X_0 = 0$ y $Y_0 = 0$ (es decir, poner el origen en el punto donde el proyectil comienza su movimiento).

Nos referimos a V_0 como la rapidez inicial del proyectil. Si el proyectil es lanzado con un ángulo θ sobre la horizontal, la velocidad inicial en la dirección X y la velocidad inicial en la dirección **Y** se pueden expresar en términos de g y θ usando trigonometría.



$$v_{0x} = v_0 \cos\theta\,,\quad v_{0y} = v_0 \mathrm{sen}\theta$$

$$a_x = 0\,,\quad a_y = -g$$

Con esto:

$$v_x = v_0 \cos\theta = \text{constante}\,,\quad v_y = v_0 \mathrm{sen}\theta - gt$$

$$x = (v_0 \cos\theta)t\,,\quad y = (v_0 \mathrm{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Entonces tómese en cuenta que: $V_X = V_{0X}$ = constante

Obs.: Lo que implica que el movimiento parabólico tiene **M.R.U.** en el sentido horizontal y

M.R.U.V. en sentido vertical

Ecuación de la trayectoria

De la ecuación para x obtenemos $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$.

Sustituyendo en la ecuación para y

$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\right)x^2$$

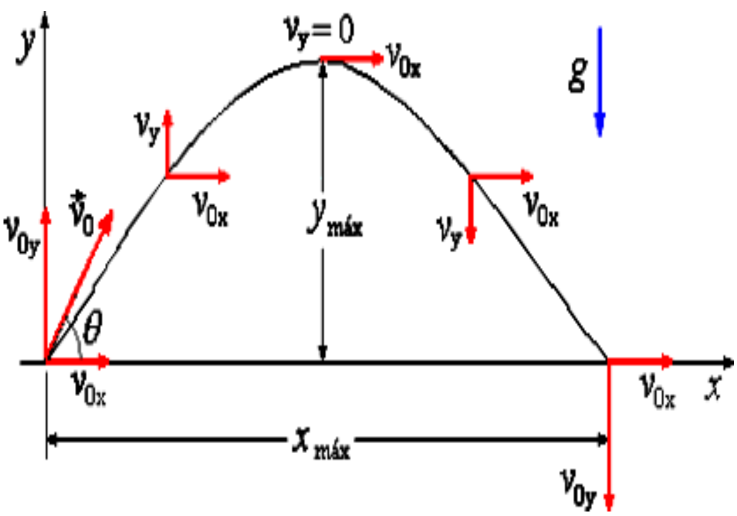
Corresponde a la ecuación de una parábola que pasa por el origen.

Una característica importante del movimiento de un proyectil es que el movimiento horizontal es independiente del movimiento vertical.

Así un proyectil se mueve a una velocidad constante en la dirección horizontal, independiente de su movimiento en sentido vertical. Gráfico N°. 60

El movimiento como describe una trayectoria parabólica, como se muestra en la gráfica, ésta es simétrica; entonces mientras el objeto asciende las componentes de la velocidad en el sentido de Y son positivas, mientras que en el otro lado de la curva las mismas componentes son iguales en magnitud en su respectivo punto simétrico de las coordenadas, pero de signo contrario.

Gráfico N°. 48 Movimiento parabólico



Fuente: (Medina G., 2009)

Tiempo de vuelo

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Hay un valor máximo de t cuando el ángulo de lanzamiento del proyectil θ = 90°. Es decir, cuando el proyectil se lanza verticalmente hacia arriba, describiendo una trayectoria rectilínea a lo largo del eje *y*.

Alcance horizontal:

$$x_{máx} = (v_0 \cos\theta)t = (v_0 \cos\theta)\left(\frac{2v_0 \text{sen}\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2 \text{sen}(2\theta)}{g}$$

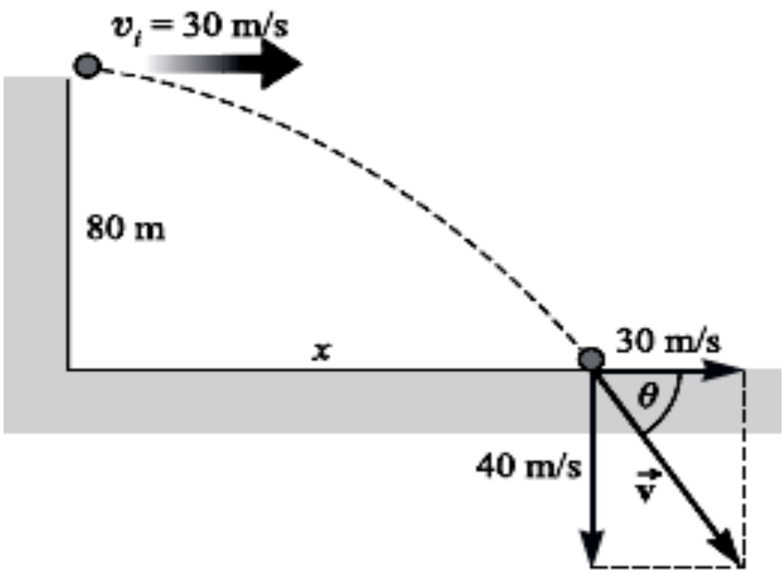
La altura máxima

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \text{sen}^2\theta}{2g}$$

Hay altura máxima cuando el ángulo de disparo θ = 90°. Ejercicios tomados de (Bueche & Hecht, 2007):

1.- Como se muestra en el Gráfico N°. 61, desde la cima de un risco de 80 m de alto se dispara un proyectil con una rapidez horizontal de 30 m/s. *a*) ¿Cuánto tiempo necesitará para chocar contra el suelo en la base del risco? *b*) ¿A qué distancia del pie del risco será el choque? *c*) ¿Con qué velocidad se estrellará?

Gráfico N°. 49 Ejercicio 1 Tiro parabólico



Fuente: (Bueche & Hecht, 2007)

Los movimientos horizontal y vertical son independientes entre sí. Considérese primero el movimiento vertical. El *ascenso* como positivo, *y* = 0 en lo alto del risco, se tiene:

$V_{iY} = 0$ parte del reposo

$$y = v_{iy}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$
$$-80\,\text{m} = 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2)t^2$$

Resolviendo la ecuación se tiene: t = 4.04 s o 4.0 s.

Ahora considerar el movimiento horizontal. a = 0 por M.R.U. en el eje X $V_X = V_{iX} = V_{fX}$ = 30 m/s.
Utilizando el valor de t encontrado en *a*), se tiene:

$X = V_X.\ t$ = (30 m/s)(4,04 s) = 121 m = 0,121 km

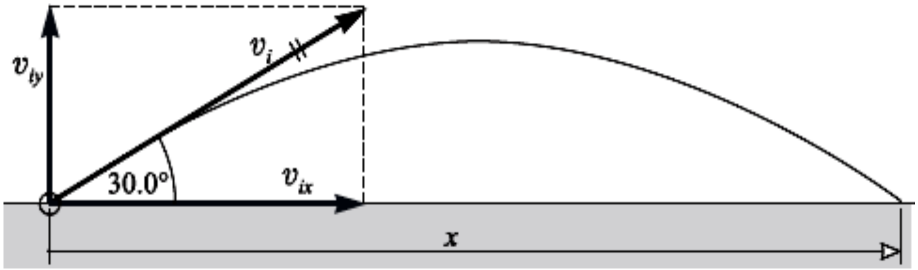
La velocidad final tiene una componente horizontal de 30 m/s, la componente vertical al tiempo *t* = 4.04 s está dada por $V_{fY} = V_{iY} + a_Y.t$

$V_{fY} = 0 + (-9{,}8\ m/s^2)(4{,}04\ s) = -40\ m/s$
La resultante de esas dos componentes de la velocidad es:

$$v = \sqrt{(40\ \text{m/s})^2 + (30\ \text{m/s})^2} = 50\ \text{m/s}$$

El ángulo ϴ que se muestra en el gráfico está dado por tanϴ = 40/30, de donde ϴ = 53°. En consecuencia, cae a una V **=** 50 m/s y con un ángulo ϴ = 53° por debajo del eje X.
2.- Se lanza una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 100 m/s con un ángulo de 30.0° en relación con la horizontal. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento alcanzará la pelota su nivel inicial?

Gráfico N°. 50 Ejemplo 2 Tiro parabólico



Fuente: (Bueche & Hecht, 2007)

Al problema hay que dividirlo en dos partes; una horizontal y otra vertical, para lo cual

$$v_{ix} = v_i \cos 30.0° = 86.6 \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad v_{iy} = v_i \operatorname{sen} 30.0° = 50.0 \text{ m/s}$$

al *ascenso* se lo toma como positivo.

Para la parte vertical del problema, y = 0, porque la pelota regresa a su altura original; entonces:

$$y = v_{iy}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \qquad \text{o} \qquad 0 = (50.0 \text{ m/s}) + \tfrac{1}{2}(-9.81 \text{ m/s}^2)t$$

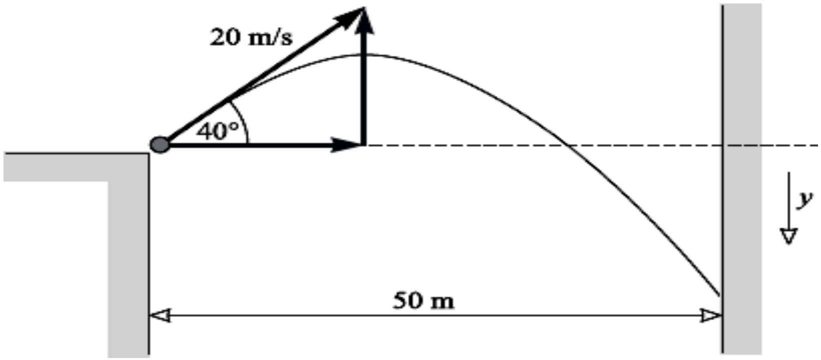
t = 10.2 s.

Para la parte horizontal del problema, $V_{iX} = V_{fX} = V_X$ = 86,6 m/s

$$x = v_x t = (86.6 \text{ m/s})(10.2 \text{ s}) = 884 \text{ m}$$

3.- Como se muestra en Gráfico N°. 63, se lanza una pelota desde lo alto de un edificio hacia otro más alto, a 50 m de distancia. La velocidad inicial de la pelota es de 20 m/s, con una inclinación de 40° sobre la horizontal. ¿A qué distancia, por encima o por debajo de su nivel inicial, golpeará la pelota sobre la pared opuesta?

Gráfico N°. 51 Ejemplo 3 Tiro parabólico



Fuente: (Bueche & Hecht, 2007)

Solución:

$$v_{ix} = (20\ \mathrm{m/s})\cos 40° = 15.3\ \mathrm{m/s}$$
$$v_{iy} = (20\ \mathrm{m/s})\ \mathrm{sen}\ 40° = 12.9\ \mathrm{m/s}$$

Consideremos primero el movimiento horizontal.

$$v_{ix} = v_{fx} = v_x = 15.3\ \mathrm{m/s}$$

X = VX . t

$$50\ \mathrm{m} = (15.3\ \mathrm{m/s})t \qquad \mathrm{o} \qquad t = 3.27\ \mathrm{s}$$

En el movimiento vertical, al tomar la *caída* como positiva, se tiene:

$$y = v_{iy}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = (-12.9\ \mathrm{m/s})(3.27\ \mathrm{s}) + \tfrac{1}{2}(9.81\ \mathrm{m/s^2})(3.27\ \mathrm{s})^2 = 10.3\ \mathrm{m}$$

Debido a que el valor de *y* es positivo y como se consideró positiva la *caída*, la pelota golpeará a una distancia de 10 m por debajo de su nivel inicial o referencial del eje X.

CAPÍTULO V

TRABAJO – ENERGÍA - POTENCIA

Introducción

Según (Jerry, Buffa, & Lou, 2007):

Una descripción del salto con pértiga (garrocha), como se muestra Gráfico N°. 64, sería: un atleta que corre con una pértiga en el suelo e intenta empujar su cuerpo por arriba de una barra colocada a cierta altura. Un físico podría dar una descripción distinta: el atleta tiene energía potencial química almacenada en su cuerpo, usa tal energía potencial para efectuar trabajo al correr por la pista para adquirir velocidad, es decir, energía cinética.

Gráfico N°. 52 Salto con garrocha

Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Cuando la pértiga toca el suelo, casi toda su energía cinética se convierte en energía potencial elástica de la pértiga flexionada. Esta energía potencial es utilizada para levantar al atleta, para efectuar trabajo contra la gravedad, y se convierte parcialmente en energía potencial gravitacional. En el punto más alto apenas queda suficiente energía cinética para llevar al saltador sobre la barra.

Durante la caída, la energía potencial gravitacional se convierte otra vez en energía cinética, que el colchón absorbe al efectuar trabajo para detener la caída. El saltador participa en un juego de toma y daca de trabajo-energía.
Entonces se tiene dos conceptos muy importantes tanto en la ciencia como en la vida cotidiana: trabajo y energía.
Se piensa en el trabajo como algo relacionado con hacer o lograr algo, puesto que el trabajo nos cansa físicamente y a veces mentalmente, hemos inventado máquinas y dispositivos para reducir el esfuerzo que realizamos personalmente.

Pensando en energía nos viene a la mente el costo del combustible para transporte y calefacción, o quizá los alimentos que proporcionan la energía que nuestro cuerpo necesita para llevar a cabo sus procesos vitales y poder trabajar.
Aunque estas nociones no definen realmente el trabajo ni la energía, nos guían en la dirección correcta, el trabajo y la energía están íntimamente relacionados.
En la física como en la vida cotidiana, cuando algo tiene energía, puede efectuar trabajo.
Por ejemplo, el agua que se precipita por las compuertas de una presa, tiene energía cinética, y esta energía permite al agua efectuar el trabajo de impulsar una turbina o un dínamo para generar electricidad. En cambio, es imposible efectuar trabajo sin energía.

La energía se la encuentra en varias formas: energía mecánica, química, eléctrica, calorífica, nuclear, etc.

Podría haber una transformación de una forma de energía en otra; pero como característica importante es que se *conserva* la cantidad total de energía, es decir, nunca cambia o altera en su cantidad.

Esto lo hace tan útil el concepto de energía, cuando una cantidad que puede medirse físicamente se conserva, no solo nos permite entender mejor la naturaleza, sino que casi siempre nos permite enfrentar problemas prácticos desde otro enfoque.

Trabajo efectuado por una fuerza constante

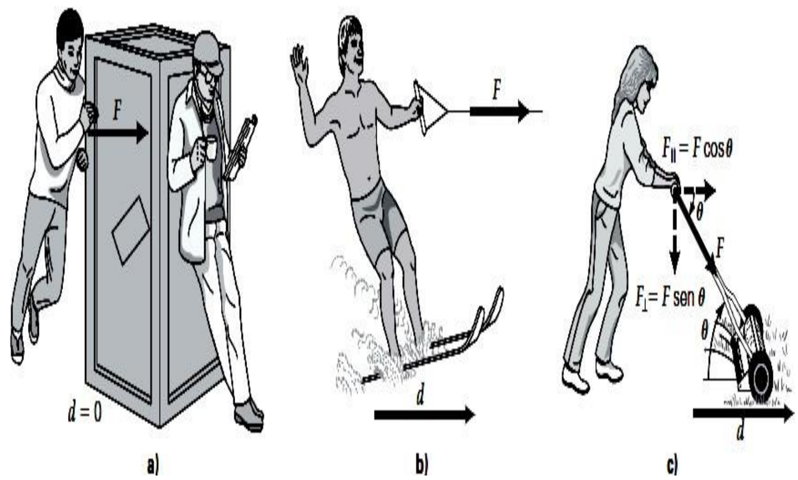
En física el *trabajo* tiene un significado específico. Mecánicamente, el trabajo implica fuerza y desplazamiento, y usamos la palabra *trabajo* para describir cuantitativamente, que se obtiene cuando una fuerza mueve un objeto hasta cierta distancia. En el caso más sencillo de una fuerza *constante* que actúa sobre un objeto, el trabajo se define como sigue:

Definición: El **trabajo** efectuado por una fuerza constante que actúa sobre un objeto es igual al producto de las magnitudes del desplazamiento y el componente de la fuerza paralelo a ese desplazamiento.

Para una fuerza constante *F* que actúa *en la misma dirección* que el desplazamiento *d* el trabajo (*W*) se define como el producto de sus magnitudes: $W = F.d$

Gráfico N°. 53 Trabajo en física

Trabajo efectuado por una fuerza constante: el producto de las magnitudes del componente paralelo de la fuerza y el desplazamiento *a)* Si no hay desplazamiento, no se efectúa trabajo: $W = 0$. *b)* Para una fuerza constante en la dirección del desplazamiento, $W = Fd$. *c)* Para una fuerza constante angulada respecto al desplazamiento, $W = (F \cos \theta)d$.



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Obs. 1: En general, lo único que efectúa trabajo es una fuerza, o *componente* de fuerza, paralela a la línea de movimiento o desplazamiento horizontal o vertical del objeto. Es decir, si la fuerza actúa con un ángulo ϴ con respecto al desplazamiento del objeto, $F_{||} = F \cos \theta$

Ejemplo 1.- Un libro que cae, la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad (sin considerar la resistencia del aire), que es igual en magnitud al peso del libro: F = w = mg.

El desplazamiento es en la misma dirección que la fuerza (ϴ = 0°) y tiene una magnitud de

d = 3.0 m, así que el trabajo efectuado por la gravedad es positivo porque la fuerza y el desplazamiento están en la misma dirección.

$$W = F(\cos 0°)d = (mg)d = (1.5\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(3.0\ \text{m}) = +44\ \text{J}$$

Unidad del trabajo el Joule: 1 Joule = 1 J = kg m^2/s^2

Obs. 2: Si efectuamos trabajo en sentido contrario a la gravedad, la magnitud del trabajo tendría signo negativo.

Obs. 3: En algunos ejercicios relacionados o que se resuelven en éste capítulo involucran fuerza de rozamiento: Cinético y estático; como consecuencia de éstas fuerzas se tienen coeficientes: Cinético y estático. Estos coeficientes son producto del rozamiento que se produce entre superficies de los cuerpos.

La fuerza de rozamiento, es una fuerza de sentido contrario al movimiento, hay que indicar que es una fuerza que trata o se opone al movimiento del cuerpo.

La fuerza de rozamiento de manera general en un plano horizontal está dada por: $f_r = \mu N$

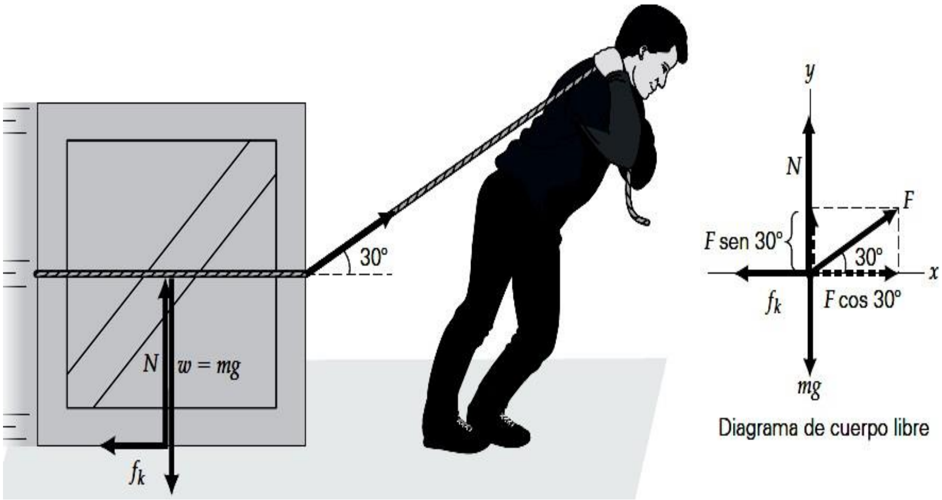
Siendo: Coeficiente cinético o estático: μ

Fuerza normal: N

Obs. 4: La fuerza normal N, es una fuerza perpendicular a la superficie de contacto y de sentido contrario a las fuerzas que actúan sobre algún cuerpo.

Ejemplo 2 (Jerry, Buffa, & Lou, 2007).- Un trabajador hala un cajón de madera de 40.0 kg con una cuerda, como se ilustra en Gráfico N°. 66. El coeficiente de fricción cinética (de deslizamiento) entre el cajón y el piso es 0.550. Si el mueve el cajón con una velocidad constante una distancia de 7.00 m. ¿Cuánto trabajo se realiza?

Gráfico N°. 54 Ejemplo 2 de Trabajo



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento. Lo mejor que se puede hacer en este tipo de problemas es dibujar un diagrama de cuerpo libre. Para determinar el trabajo, debe conocerse la fuerza *F*.

Solución:

Dado:

m = 40,0 kg

µk = 0.550

d = 7,0 m

ɵ = 30°

Encuentre: *W* (el trabajo realizado al mover 7,0 m el cajón) Entonces, al sumar las fuerzas en las direcciones x y Y:

$$\Sigma F_x = F\cos 30° - f_k = F\cos 30° - \mu_k N = ma_x = 0$$

$$\Sigma F_y = N + F\,\text{sen}\,30° - mg = ma_y = 0$$

Para encontrar **F**, en la segunda ecuación debe despejarse **N**, que después se sustituye en la primera ecuación.

$$N = mg - F \text{ sen } 30^\circ$$

$$F \cos 30^\circ - \mu_k(mg - F \text{ sen } 30^\circ) = 0$$

$$F = \frac{\mu_k mg}{(\cos 30^\circ + \mu_k \text{ sen } 30^\circ)} = \frac{(0.550)(40.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{(0.866) + (0.550)(0.500)]} = 189 \text{ N}$$

Unidad de fuerza el Newton: 1 Newton = 1 N = kg m/s^2

$$W = F(\cos 30^\circ)d = (189 \text{ N})(0.866)(7.00 \text{ m}) = 1.15 \times 10^3 \text{ J}$$

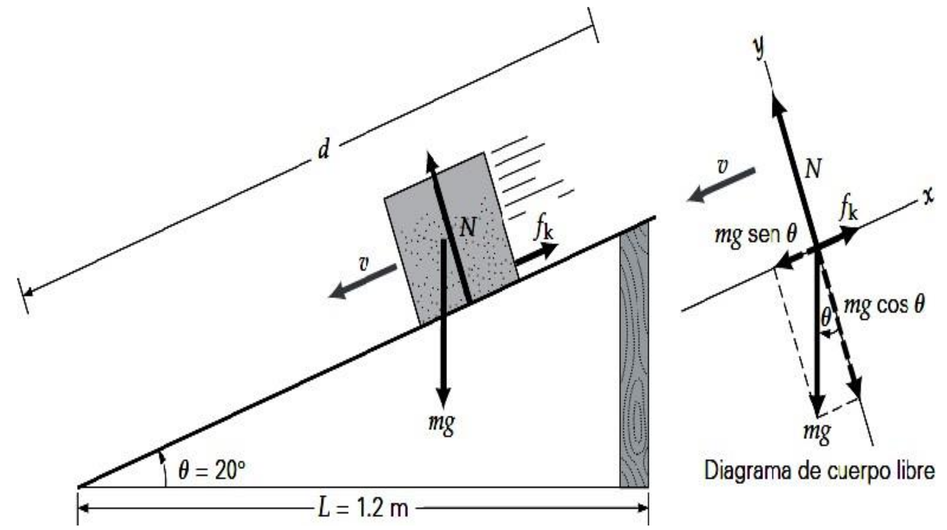
Unidad del trabajo el Joule: 1 Joule = 1 J = kg m^2/s^2

Obs. 5: El ***trabajo total o neto*** es el trabajo efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre el objeto; se lo obtiene mediante la suma escalar de todas las cantidades de trabajo efectuadas por las componentes paralelas al sentido del movimiento del cuerpo.

Obs. 6: La fuerza de fricción estática no efectúa trabajo, porque no realiza movimiento ni desplazamiento alguno.

Ejemplo 3 (Jerry, Buffa, & Lou, 2007). - Un bloque de 0,75 kg se desliza con velocidad uniforme bajando por un plano inclinado de 20°. a) ¿Cuánto trabajo efectúa la fuerza de fricción sobre el bloque mientras se desliza la longitud total del plano? *b)* ¿Que trabajo neto se efectúa sobre el bloque? c) Comente el trabajo neto efectuado si el ángulo del plano se ajusta de manera que el bloque acelere al bajar.

Gráfico N°. 55 Ejemplo 3 de Trabajo



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento

Usando trigonometría obtenemos la longitud del plano, reduciéndose a calcular la fuerza de fricción.

El trabajo neto es la suma de todo el trabajo efectuado por las fuerzas individuales, puesto que el bloque tiene velocidad uniforme o constante, la fuerza neta que actúa sobre él es cero.

Si hay aceleración, entra en juego la segunda ley de Newton $\sum F = m.a$ que implica una fuerza neta, por lo que habrá trabajo neto.

Solución:

Es importante plantear explícitamente lo que se busca. Datos:

m = 0,75 kg

θ = 20° L = 1,2 m

Encontrar:

W_f : Trabajo realizado sobre el bloque por la fricción

W_{neto} : Trabajo neto sobre el bloque

W: Comentar el trabajo neto con el bloque acelerado

Vemos que solo dos fuerzas efectúan trabajo, porque solo dos son paralelas al movimiento: f_k la fuerza de fricción cinética, y la componente del peso del bloque en el eje X *mg* senθ que actúa paralelo al plano. La fuerza normal *N* y *mg* cosθ; el componente del peso del bloque que actúa perpendicular al plano, y la N no efectúan trabajo sobre el bloque, porque no hay desplazamiento en sentido vertical según el problema.

Primero calculamos el trabajo efectuado por la fuerza de fricción:

$$W_f = f_k(\cos 180°)d = -f_k d = -\mu_k N d$$

El ángulo de 180° indica que la fuerza de fricción cinética producida por el movimiento y el desplazamiento tienen direcciones opuestas. En tales casos es común escribir $W_f = f_k \cdot d$ directamente, pues la fricción cinética se opone al movimiento. La distancia d que el bloque se desliza se obtiene usando trigonometría. Como el cosθ = L/d

d = L/cosθ

Como no tenemos el valor del coeficiente cinético procederemos a utilizar: $W = -f_k \cdot d$

f_k = mg senθ

$$W_f = -f_k d = -(mg \operatorname{sen}\theta)\left(\frac{L}{\cos\theta}\right) = -mgL \tan 20°$$

$$= -(0.75\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})(1.2\ \mathrm{m})(0.364) = -3.2\ \mathrm{J}$$

Para obtener el trabajo neto, se requiere calcular el trabajo efectuado por la gravedad y sumarlo al resultado del inciso a). Puesto que la componente del peso en X del sistema cartesiano de referencia F|| es una fuerza paralela a la gravedad (la gravedad no ejerce fuerza de manera oblicua, es decir de acuerdo a un ángulo arbitrario que nosotros decidamos; en éste caso es coincidente con la componente del peso en el sentido de X, para **cada instante** que el cuerpo se desplaza hacia abajo) no es más que mg senθ, entonces:

$$W_g = F_{\parallel}d = (mg \text{ sen } \theta)\left(\frac{L}{\cos \theta}\right) = mgL \tan 20° = +3.2 \text{ J}$$

el cálculo es el mismo que en el inciso *a*, a excepción del signo. Entonces,

$$W_{\text{neto}} = W_g + W_f = +3.2 \text{ J} + (-3.2 \text{ J}) = 0$$

El trabajo es una cantidad escalar, así que usamos una suma escalar para calcular el trabajo neto, recordemos que según los datos del problema en el cuerpo las únicas fuerzas que actúan son el peso y el rozamiento por el deslizamiento.

Si el bloque se acelera por la gravedad, al bajar el plano; por la segunda ley de Newton que nos indica que Fneta = mg senθ - f_k = ma.

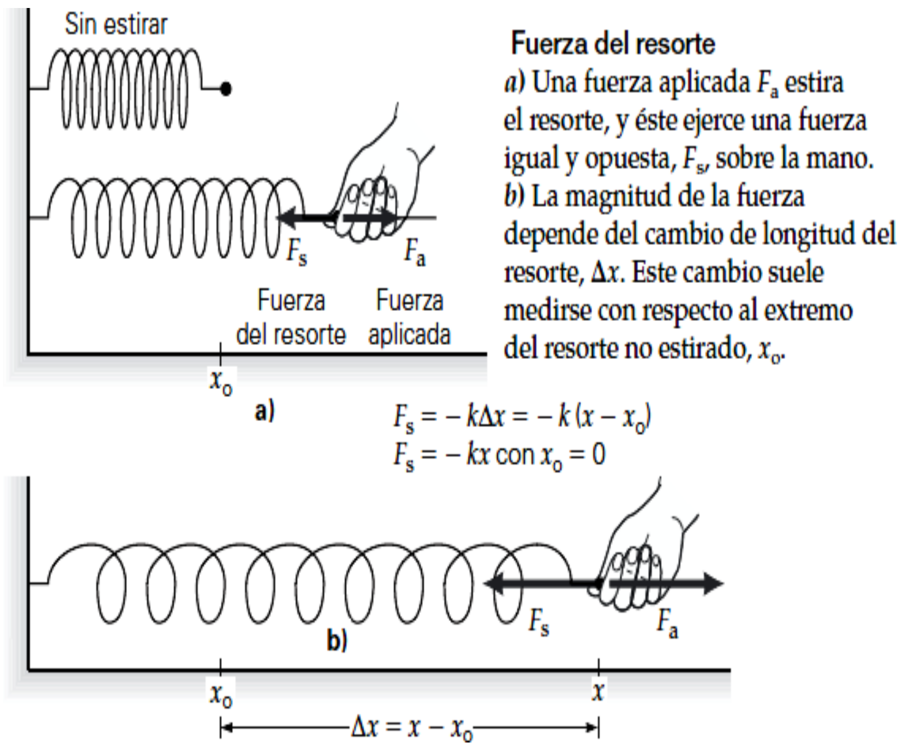
El componente de la fuerza gravitacional que en éste caso es la componente en X del peso (mg senθ) es mayor que la fuerza de fricción fk que se le opone al movimiento de deslizamiento del cuerpo hacia abajo, y se efectúa un trabajo neto = 0 sobre el bloque.

Si el ángulo θ es mayor que 20° el $|W_g| > |W_f|$ porque la fk < mg senθ; en el caso de que $|W_g| < |W_f|$ eso implica que el ángulo θ es menor que 20° y fk > mg senθ.

Trabajo efectuado por una fuerza variable

Según (Jerry, Buffa, & Lou, 2007) una fuerza variable que si efectúa trabajo se ilustra en Gráfico N°. 68, donde observamos que una fuerza aplicada F_a que estira un resorte. Conforme el resorte se estira o comprime, su fuerza de restauración que se opone al estiramiento o a la compresión se vuelve cada vez mayor, y es preciso aplicar una fuerza más grande. Para la mayoría de los resortes, la fuerza del resorte es directamente proporcional al cambio de longitud del resorte respecto a su longitud sin estiramiento.

Gráfico N°. 56 Fuerza del resorte



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

En forma de ecuación:

$$F_s = -k\Delta x = -k(x - x_0)$$

Si x0 = 0: F_s = -kx es la fuerza del resorte ideal, se le denomina Ley de Hooke x representa la distancia que se estiro o comprimió el resorte, respecto a su longitud no estirada. Es evidente que la fuerza varia cuando x cambia. Diremos entonces que la fuerza es función de la posición.

La k de esta expresión es una constante de proporcionalidad y suele llamarse constante de resorte o constante de fuerza. Cuanto mayor sea el valor de k, más rígido o más fuerte será el resorte.

La unidad para *k* es: newton/metro (N/m)

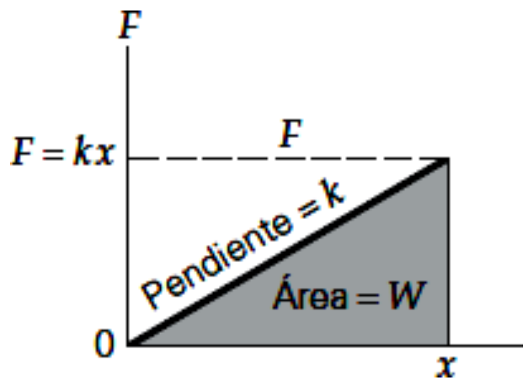
El signo menos indica que la fuerza del resorte actúa en dirección opuesta al desplazamiento cuando el resorte se estira o se comprime.

La fórmula de Hooke para la fuerza del resorte se cumple solo para resortes ideales, es una relación lineal entre fuerza y desplazamiento dentro de ciertos límites.

Si un resorte se estira más allá de cierto punto, su ***límite elástico***, se deformará permanentemente y dejará de ser válida la relación lineal.

En el gráfico a continuación se muestra F vs x, una pendiente rectilínea = k, con

F = kx, donde F es la fuerza aplicada al realizar el trabajo de estirar el resorte.



El trabajo es el área bajo la curva F vs x, que tiene la forma de un triángulo con área sombreada.

$$\text{área} = W = \tfrac{1}{2}(\text{altura} \times \text{base})$$

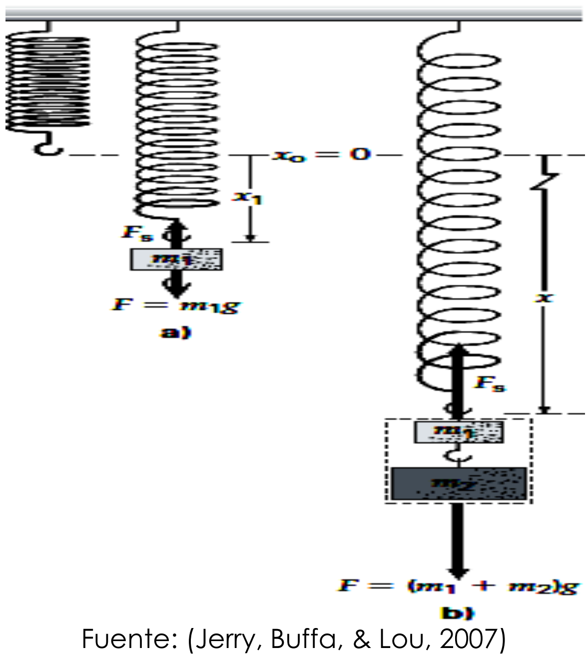
$$W = \tfrac{1}{2}Fx = \tfrac{1}{2}(kx)x = \tfrac{1}{2}kx^2$$

W es el trabajo realizado por la fuerza aplicada al resorte para estirarlo o comprimirlo desde
$x_0 = 0$ hasta una distancia x.

Ejemplo tomado de (Jerry, Buffa, & Lou, 2007):

Una masa de 0,15 kg se une a un resorte vertical y cuelga en reposo hasta una distancia de
4,6 cm respecto a su posición original (Gráfico N°. 69). Otra masa de 0,50 kg se cuelga de la primera masa y se deja que baje hasta una nueva posición de equilibrio. ¿Qué extensión total tiene el resorte? (Desprecie la masa del resorte.)

Gráfico N°. 57 Trabajo efectuado por resorte



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento. Para determinar el valor de *k* en un caso específico, necesitamos conocer la fuerza del resorte y la distancia que este se estira o se comprime.

Solución:

Los datos son:

$m_1 = 0{,}15$ kg

$x_1 = 4{,}6$ cm $= 0{,}046$ m

$m_2 = 0{,}50$ kg

Encuentre: x (la distancia del estiramiento del resorte)

La distancia total de estiramiento está dada por $x = F/k$, donde F es la fuerza aplicada, que en este caso es el peso de la masa suspendida del resorte.

Podemos averiguar el valor de k a partir de los datos de la suspensión de m_1 y el desplazamiento resultante x_1.

Como se observa en Gráfico N°. 69a, la magnitud de la fuerza del peso y de la fuerza restauradora del resorte son iguales, porque la aceleración a = 0, así que podemos igualarlas:

$F_S = k\,x_1 = m_1\,g$

$$k = \frac{m_1 g}{x_1} = \frac{(0.15\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})}{0.046\ \mathrm{m}} = 32\ \mathrm{N/m}$$

Teniendo k, se puede obtener la extensión total del resorte a partir de la situación de fuerzas equilibradas.

$F_S = (m_1 + m_2)\ g = kx$ despejando x se tiene:

$$x = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = \frac{(0.15\ \text{kg} + 0.50\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)}{32\ \text{N/m}} = 0.20\ \text{m}\ (\text{o}\ 20\ \text{cm})$$

El teorema trabajo-energía

Según (Jerry, Buffa, & Lou, 2007):

Energía cinética

Básicamente, el trabajo es algo que se hace ***sobre*** los objetos, en tanto que la energía es algo que los objetos ***tienen*** la capacidad para efectuar trabajo.

Una forma de energía que está íntimamente asociada con el trabajo es la *energía cinética.*

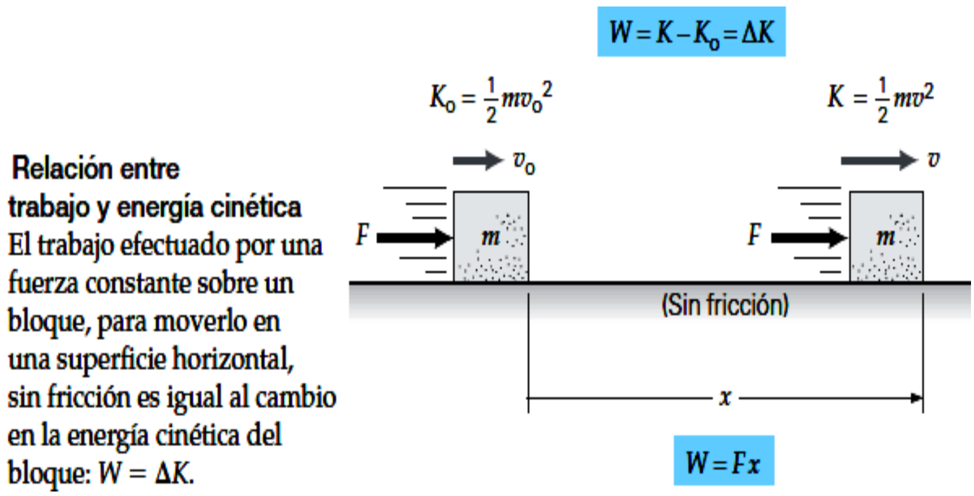
Considérese un objeto en reposo sobre una superficie sin fricción en el cual una fuerza horizontal actúa sobre el objeto poniéndolo en movimiento. ¿Por la fuerza aplicada se efectúa trabajo sobre el objeto, pero a donde se va el trabajo, por decirlo de alguna manera? Respondiendo que se va al objeto, cuando se lo pone en movimiento, es decir por la modificación de sus condiciones ***cinéticas***.

En virtud de su movimiento, decimos que el objeto ha ganado ***energía cinética***, que lo hace capaz de efectuar trabajo.

Para una fuerza constante que efectúa trabajo sobre un objeto en movimiento, la fuerza efectúa una cantidad de trabajo $W = Fx$.

Sin embargo, ¿qué efectos cinemáticos tiene? La fuerza hace que el objeto acelere.

Gráfico N°. 58 Trabajo - Energía cinética



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

De la ecuación se tiene:

$$v^2 = v_o^2 + 2ax \text{ (con } x_o = 0) \qquad a = \frac{v^2 - v_o^2}{2x}$$

donde v0 podría o no ser cero. En la segunda ley de Newton y sustituimos en ella la aceleración *a* tendremos:

$$F = ma = m\left(\frac{v^2 - v_o^2}{2x}\right)$$

$$W = Fx = m\left(\frac{v^2 - v_o^2}{2x}\right)x$$

$$= \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_o^2$$

Definiendo entonces la energía cinética (K) como:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \textit{(energía cinética)}$$

Unidad SI de energía: joule (J)

En términos de energía cinética, el trabajo se lo puede establecer de la siguiente manera:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = K - K_o = \Delta K$$

$$W = \Delta K$$

Sobre entendiéndose que ***W es el trabajo neto si dos o más fuerzas actúan sobre el objeto.***

A esta ecuación $W = \Delta K$ se la conoce como el: **teorema trabajo - energía**.

Entonces *el trabajo neto es el efectuado sobre un cuerpo por todas las fuerzas que actúan* sobre él y es igual al cambio de la energía cinética del cuerpo.

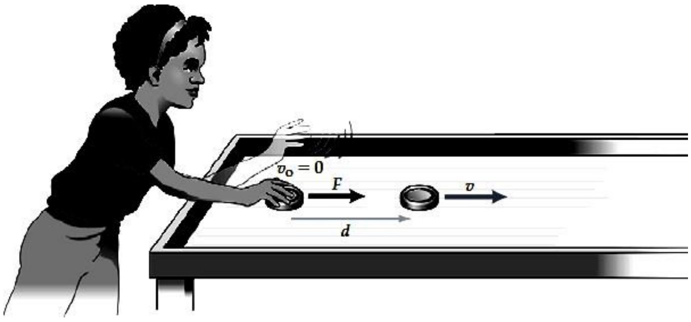
Tanto el trabajo como la energía tienen como unidad al joule, y ambos (trabajo y la energía) son cantidades escalares.

Hay que tener presente que el teorema trabajo - energía ($W = \Delta K$) es válido por lo general para fuerzas variables.

Los ejercicios a continuación son tomados de (Jerry, Buffa, & Lou, 2007):

Ejemplo 1.- Una jugadora en la Gráfico N°. 71 empuja un disco de 0,25 kg que inicialmente está en reposo, de manera que una fuerza horizontal constante de 6,0 N actúa sobre él durante una distancia de 0,50 m. (Despreciaremos la fricción.) *a*) Que energía cinética y rapidez tiene el disco cuando se deja de aplicar la fuerza? *¿b) Cuánto trabajo se requeriría para detener el disco?*

Gráfico N°. 59 Trabajo - Energía cinética



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento. Aplicando el teorema trabajo – energía podemos calcular el trabajo efectuado, conoceremos el cambio de energía cinética, y viceversa.
Solución:

Datos:
m = 0,25 kg F = 6,0 N
d = 0,50 m
v0 = 0 m/s Encuentre:
Energía cinética: K
Rapidez: v
Trabajo para detener el disco o tejo: W

El trabajo efectuado sobre el disco, por la fuerza *F* que aplica la jugadora es

$$W = Fd = (6.0\ \mathrm{N})(0.50\ \mathrm{m}) = +3.0\ \mathrm{J}$$

Entonces, por el teorema trabajo - energía, obtenemos:

$$W = \Delta K = K - K_o = +3.0\ \mathrm{J}$$

Por otro lado, $K_o = \frac{1}{2}mv_o^2 = 0$**, porque** $v_o = 0$**, así que**

$$K = 3.0\ \mathrm{J}$$

Se puede calcular la rapidez ya que:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(3.0\ \mathrm{J})}{0.25\ \mathrm{kg}}} = 4.9\ \mathrm{m/s}$$

El trabajo requerido para detener el disco es igual a la energía cinética del mismo, es decir la cantidad de energía que debemos quitarle al tejo para detener su movimiento.
Para confirmar esta igualdad, básicamente efectuamos el cálculo anterior al revés, con
v_0 =4.9 m/s y v = 0:

$$W = K - K_o = 0 - K_o = -\frac{1}{2}mv_o^2 = -\frac{1}{2}(0.25\ \mathrm{kg})(4.9\ \mathrm{m/s})^2 = -3.0\ \mathrm{J}$$

El signo menos indica que el disco pierde energía al frenarse. El trabajo que se efectúa contra el movimiento del disco en la realidad en este caso específico, es la fuerza de fricción que es opuesta a la dirección del movimiento.

Ejemplo 2.- En un juego de futbol americano, un guardia de 140 kg corre con una rapidez de 4,0 m/s, y un defensivo profundo libre de 70 kg se mueve a 8,0 m/s. En esta situación, ¿es correcto decir que a) ambos jugadores tienen la misma energía cinética? *b*) ¿Que el defensivo profundo tiene el doble de energía cinética que el guardia? *c) ¿Que el guardia tiene el doble de energía cinética que el defensivo profundo? d*) ¿Que el defensivo profundo tiene cuatro veces más energía cinética que el guardia?

Razonamiento y respuesta. La energía cinética de un cuerpo depende tanto de su masa como de su rapidez. Se podría pensar que, al tener la mitad de la masa, pero el doble de la velocidad, el defensivo profundo tendría la misma energía cinética que el guardia, pero no es así.

En la relación:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

La energía cinética es directamente proporcional a la masa, pero también es proporcional al *cuadrado* de la rapidez. Por lo tanto, reducir la masa a la mitad disminuiría la energía cinética a la mitad; por lo tanto, si los dos jugadores tuvieran la misma rapidez, el defensivo profundo tendría la mitad de la energía cinética que el guardia.

Sin embargo, un aumento al doble de la rapidez aumenta la energía cinética no al doble, sino en un factor de 2^2, es decir, 4. Por lo tanto, el defensivo profundo, con la mitad de la masa, pero el doble de la rapidez, tendría (½)x4 = 2 veces más energía cinética que el guardia, así que la respuesta es *b*.

Note que para contestar esta pregunta no fue necesario calcular la energía cinética de ningún jugador. No obstante, podemos hacerlo para verificar nuestras conclusiones:

$$K_{\text{def. prof.}} = \frac{1}{2}m_s v_s^2 = \frac{1}{2}(70\ \text{kg})(8.0\ \text{m/s})^2 = 2.2 \times 10^3\ \text{J}$$

$$K_{\text{guardia}} = \frac{1}{2}m_g v_g^2 = \frac{1}{2}(140\ \text{kg})(4.0\ \text{m/s})^2 = 1.1 \times 10^3\ \text{J}$$

Esto demuestra lo afirmado

Ejemplo 3.- Un automóvil que viaja a 5,0 m/s aumenta su rapidez a 10 m/s, con un incremento de energía cinética que requiere un trabajo W_1. Luego, la rapidez del automóvil aumenta de 10 m/s a 15 m/s, para lo cual requiere un trabajo adicional W_2. ¿Cuál de estas relaciones es válida al comparar las dos cantidades de trabajo? a) $W_1 > W_2$; b) $W_1 = W_2$; $W_2 > W_1$.

Razonamiento y respuesta:

Por el teorema trabajo - energía, relaciona el trabajo efectuado sobre el automóvil con el cambio en su energía cinética.

Puesto que en ambos casos hay el mismo incremento de rapidez (Δv = 5.0 m/s), parecería que la respuesta es *b*.

Sin embargo, no hay que olvidar que el trabajo es igual al *cambio* en la energía cinética, en lo cual interviene

$$v_2^2 - v_1^2, \textit{no } (\Delta v)^2 = (v_2 - v_1)^2.$$

Por lo tanto, cuanto mayor sea la rapidez de un objeto, mayor será su energía cinética, y esperaríamos que la *diferencia* de energía cinética al cambiar de rapidez por el trabajo requerido para cambiar de rapidez, sea mayor para una rapidez más alta, si Δv es la misma. Por consiguiente, *c* es la respuesta.

Lo importante es que los valores de Δv son iguales, pero se requiere más trabajo para aumentar la energía cinética de un objeto a una rapidez más alta.

Energía potencial

Un objeto en movimiento tiene energía cinética, sin embargo, el objeto este o no en movimiento, podría tener otra forma de energía debido a su ***posición***, llamada energía potencial (U).

Como su nombre sugiere, un objeto con energía potencial tiene *potencial* para efectuar trabajo. Se considera entonces que la energía potencial es un trabajo almacenado, igual que la energía cinética.

En el caso de resortes, cabe señalar que la cantidad de trabajo efectuada depende del grado de compresión o estiramiento (x). Dado que se efectúa trabajo, hay un *cambio* en la energía potencial del resorte (ΔU), igual al trabajo efectuado *por la fuerza aplicada* para comprimir o estirar el resorte:

$$W = \Delta U = U - U_o = \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{2}kx_o^2$$

Así, con $x_0 = 0$ y $U_0 = 0$, como suele tomarse por conveniencia, la *energía potencial de un resorte* es:

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \textit{(energía potencial de un resorte)}$$

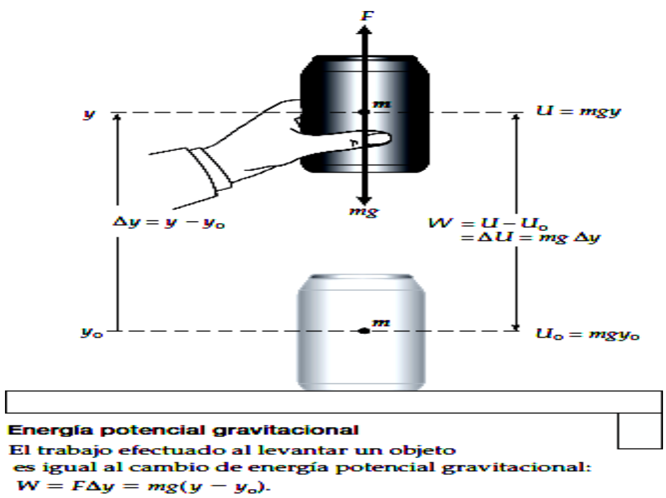
Unidad SI de energía: joule (J)

La forma más común de energía potencial es la energía potencial gravitacional.

En este caso, la ***posición*** se refiere a la ***altura*** de un objeto sobre cierto punto de referencia, digamos el piso o el suelo. Supongamos que un objeto de masa *m* se levanta una distancia Δy (Gráfico N°. 72). Se efectúa trabajo contra la fuerza de gravedad, y se necesita una fuerza aplicada al menos igual al peso del objeto para levantarlo: F = w = mg.

Entonces, el trabajo efectuado es igual al cambio de energía potencial, si expresamos esta relación en forma de ecuación, dado que no hay un cambio total de energía cinética, tenemos trabajo efectuado por la fuerza externa = cambio de energía potencial gravitacional

Gráfico N°. 60 Energía gravitacional



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

$$W = F\Delta y = mg(y - y_0) = mgy - mgy_0 = \Delta U = U - U_0$$

Donde y es coordenada vertical y, eligiendo $y_0 = 0$ y $U_0 = 0$, la **energía potencial gravitacional** es

$$U = mgy$$

Unidad SI de energía: joule (J)

La ecuación $U = mgy$ representa la energía potencial gravitacional cerca de la superficie terrestre, donde la gravedad $g = 9{,}8\ m/s^2$ se considera constante.

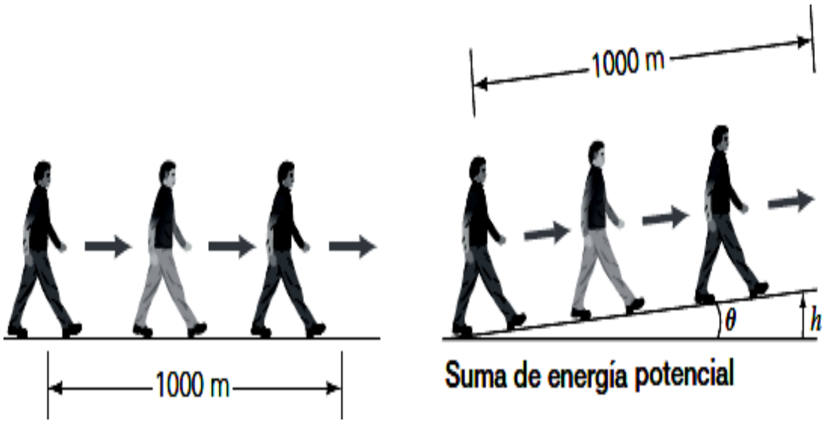
Obs.: La energía potencial gravitacional es ***independiente de la trayectoria***.
Esto significa que solo se considera un cambio en la altura Δh (o Δy), **más no en la trayectoria que sigue el cambio de altura**.

Un objeto podría recorrer muchas trayectorias que lleven a la misma Δh, pero la energía potencial no depende del camino recorrido o trayectoria.

Los ejemplos de energía potencial a continuación fueron tomados de (Jerry, Buffa, & Lou, 2007):

Ejemplo 1: Para caminar 1000 m a nivel del suelo, una persona de 60 kg necesita gastar cerca de 1.0×10^5 J de energía. Cuál será la energía total requerida si la caminata se extiende otros 1000 m por un sendero inclinado 5°, como se ilustra en Gráfico N°. 73?

Gráfico N°. 61 Ejemplo 1 de energía potencial



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento. Para caminar 1000 m adicionales se requieren 1.0 x 10^5 J *más* la energía adicional por realizar trabajo en contra de la gravedad al caminar por la pendiente. En la figura se observa que el incremento en la altura es *h* = *d* senθ.

Solución. -

Datos:

m = 60 kg

E_0 = 1.0 x 10^5 J para caminar por 1000 m

θ = 5°

d = 1000 m en cada parte del trayecto

Encontrar: La energía total gastada

La energía adicional gastada al subir por la pendiente es igual a la energía potencial gravitacional ganada.

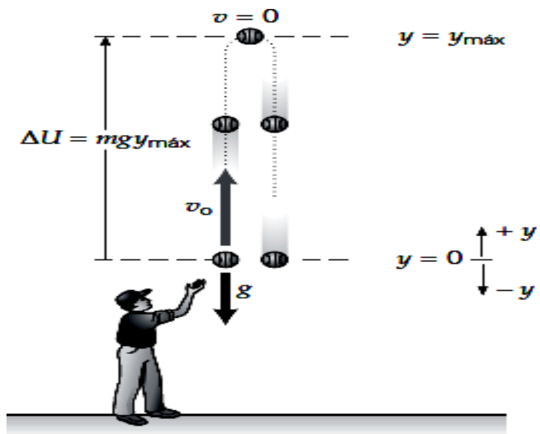
$$\Delta U = mgh = (60\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(1000\ \text{m})\ \text{sen}\ 5.0° = 5.1 \times 10^4\ \text{J}$$

Entonces, la energía total gastada en la caminata de 2000 m es:

$$\text{Total } E = 2E_o + \Delta U = 2(1.0 \times 10^5 \text{ J}) + 0.51 \times 10^5 \text{ J} = 2.5 \times 10^5 \text{ J}$$

Ejemplo 2: Una pelota de 0,50 kg se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s. *a*) Como cambia la energía cinética de la pelota entre el punto de partida y su altura máxima? *¿b) Como cambia la energía potencial de la pelota entre el punto de partida y su altura máxima?* (Desprecie la resistencia del aire.)

Gráfico N°. 62 Ejemplo 2 de energía potencial



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou

Razonamiento:

Se pierde energía cinética y se gana energía potencial gravitacional a medida que la pelota sube.

Solución.

Datos:

m = 0,50 kg v0 = 10 m/s a = g

Encontrar:

ΔK (cambio de energía cinética)

ΔU (cambio de energía potencial entre $y0$ y $y$máx)

Para calcular el *cambio* de energía cinética, primero calculamos la energía cinética en cada punto. Conocemos la velocidad inicial, v_0, y sabemos que, en la altura máxima, $v = 0$ y, por lo tanto, la energía cinética $K = 0$. Entonces,

$$\Delta K = K - K_o = 0 - K_o = -\tfrac{1}{2}mv_o^2 = -\tfrac{1}{2}(0.50\ \text{kg})(10\ \text{m/s})^2 = -25\ \text{J}$$

Es decir, la pelota pierde 25 J de energía cinética cuando se efectúa trabajo en contra del sentido de la fuerza de gravedad.

Para obtener el cambio de energía potencial, necesitamos conocer la altura de la pelota sobre su punto de partida, cuando $v = 0$.

Utilizamos la ecuación:

$$v^2 = v_o^2 - 2gy$$

Con: $y_0 = 0$ y $v = 0$ para obtener $y_{máx}$

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{(10\ \text{m/s})^2}{2(9.8\ \text{m/s}^2)} = 5.1\ \text{m}$$

Luego, con $y_0 = 0$ y $U_0 = 0$,

$$\Delta U = U = mgy_{\text{máx}} = (0.50\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(5.1\ \text{m}) = +25\ \text{J}$$

La energía potencial aumenta en 25 J, como es obvio la energía cinética se transformó en energía potencial gravitatoria.

Conservación de la energía

Según (Jerry, Buffa, & Lou, 2007):

Se puede plantear la **ley de conservación de la energía total** de la siguiente manera:
La energía total de un sistema aislado siempre se conserva.
Dentro de un sistema, la energía podría convertirse de una forma a otra, pero la cantidad total de todas las formas de energía es constante: no cambia.

La energía total nunca puede crearse ni destruirse. La energía depende de fuerzas conservativas y no conservativas; para lo cual revisemos unos ejemplos para establecer su diferencia.

En el caso de la fuerza gravitacional ***conservativa*** durante un viaje redondo (con redondo se refiere a que sin importar la trayectoria que se tome, se regrese al punto de origen), la fuerza y el desplazamiento a veces tienen la misma dirección con lo que la fuerza efectúa trabajo positivo y a veces tienen direcciones opuestas, la fuerza efectúa trabajo negativo.

Por ejemplo, en caso de la caída del libro al suelo para luego ser recogido y colocado otra vez en la mesa. Se tiene trabajo positivo y negativo, entonces el trabajo total efectuado por la gravedad puede ser cero.

En el caso de una fuerza ***no conservativa*** como la fricción cinética, que siempre se opone al movimiento o tiene dirección opuesta al desplazamiento, el trabajo total efectuado en un viaje redondo *nunca* puede ser cero y siempre será negativo indicando con esto que se pierde energía.

Sin embargo, no siempre las fuerzas no conservativas quitan energía a un sistema, al contrario, a menudo aplicamos fuerzas de empuje o tracción no conservativas, que aumentan energía de un sistema, cuando empujamos un automóvil averiado.

Conservación de la energía mecánica total

La idea de fuerza conservativa nos permite extender la conservación de la energía al caso especial de la energía mecánica, lo cual permite analizar muchas situaciones físicas. La suma de las energías cinética y potencial se denomina **energía mecánica total**:

$$\underset{\substack{\text{energía}\\\text{mecánica}\\\text{total}}}{E} \;\underset{=}{=}\; \underset{\substack{\text{energía}\\\text{cinética}}}{K} \;\underset{+}{+}\; \underset{\substack{\text{energía}\\\text{potencial}}}{U}$$

En un **sistema conservativo** las fuerzas conservativas son las que efectúan trabajo, la energía mecánica total es constante, es decir se conserva:

Sustituyendo: E y E_0 en la ecuación de la energía mecánica total: $E = E_0$

Esto me indica que la energía mecánica total en cualquier posición o ubicación es igual a la energía mecánica total inicial, es decir es constante.

$$K + U = K_o + U_o$$

Reemplazando por sus definiciones se tiene:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mv_o^2 + U_o$$

A esta expresión matemática que se le conoce como:

Ley de conservación de la energía mecánica

En un sistema conservativo, la suma de todos los tipos de energía cinética y potencial es constante, y equivale a la energía mecánica total del sistema.
En un sistema conservativo, las energías cinética y potencial podrían cambiar, pero su suma siempre será constante.

Reagrupando las energías de: K + U = K0 + U0 se tiene:

$$(K - K_o) + (U - U_o) = 0$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad \textit{(para un sistema conservativo)}$$

Esta expresión nos dice que, si hay una disminución en la energía potencial, la energía cinética deberá aumentar en la misma cantidad para que la suma de los cambios sea cero.

En un sistema no conservativo, por lo general se pierde energía mecánica, por ejemplo, en forma de calor por la fricción, así que $\Delta K + \Delta U < 0$. Sin embargo, hay que tener en cuenta, que una fuerza no conservativa como es el empuje o la tracción podría añadir energía a un sistema o no tener efecto alguno.
Los ejemplos de energía potencial a continuación fueron tomados de (Jerry, Buffa, & Lou, 2007):

Ejemplo 1: Un pintor en un andamio deja caer una lata de pintura de 1,50 kg desde una altura de 6,00 m. *a*) Que energía cinética tiene la lata cuando está a una altura de 4,00 m?
b) Con qué rapidez llegara la lata al suelo? (La resistencia del aire es insignificante.)

Razonamiento:
La energía mecánica total se conserva porque la fuerza

conservativa de la gravedad actúa sobre el sistema que es la lata. Se puede calcular la energía mecánica inicial total, y la energía potencial disminuye conforme aumenta la energía cinética y la rapidez.

Solución.

Datos:

m = 1,50 kg

y_0 = 6,0 m

y = 4,0 m

v_0 = 6,0 m

Encontrar:

K (energía cinética en y = 4,0 m)

v (rapidez justo antes de llegar al suelo)

Es preferible calcular primero la energía mecánica total de la lata, pues esta cantidad se conserva durante la caída de la lata. En un principio, con v_0 = 0 m/s, la energía mecánica total de la lata es exclusivamente energía potencial. Consideramos el suelo como el punto de referencia cero, entonces:

$$E = K_o + U_o = 0 + mgy_o = (1.50\ \mathrm{kg})(9.80\ \mathrm{m/s^2})(6.00\ \mathrm{m}) = 88.2\ \mathrm{J}$$

Recordar que la energía mecánica es constante en cualquier posición. La relación *E* = *K* + *U*

se sigue cumpliendo durante la caída de la lata.

Reacomodando los términos de la ecuación, *K*= *E* – *U* podemos también calcular *U* en

y = 4.00 m:

$$K = E - U = E - mgy = 88.2\ \mathrm{J} - (1.50\ \mathrm{kg})(9.80\ \mathrm{m/s^2})(4.00\ \mathrm{m}) = 29.4\ \mathrm{J}$$

Otra forma de calcular la energía cinética es considerando el cambio correspondiente a la perdida de energía potencial, ΔU.

Toda la energía potencial que se haya perdido se habrá ganado como energía cinética:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$(K - K_o) + (U - U_o) = (K - K_o) + (mgy - mgy_o) = 0$$

Con $K_o = 0$ (porque $v_o = 0$), obtenemos

$$K = mg(y_o - y) = (1.50\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(6.00\ \text{m} - 4.00\ \text{m}) = 29.4\ \text{J}$$

Justo antes de que la lata toque o choque con el suelo en donde: y = 0, U = 0, toda su energía mecánica en éste caso la energía potencial se transforma en energía cinética:

$$E = K = \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(88.2\ \text{J})}{1.50\ \text{kg}}} = 10.8\ \text{m/s}$$

$$|\Delta K| = |\Delta U|$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgy$$

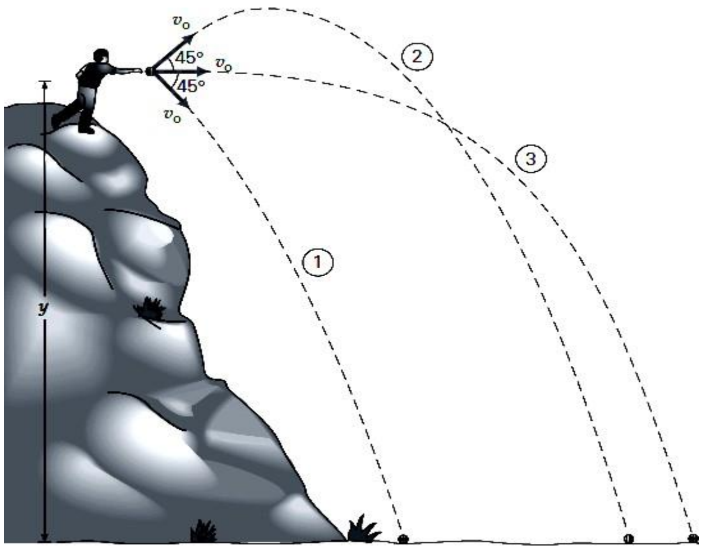
$$v = \sqrt{2gy}$$

También obtenemos este resultado con la ecuación cinemática: $v^2 = v_0^2 + 2gy$ $v^2 = 2gy$, con $v_0 = 0$ y $y_0 = 0$.

Ejemplo 2: Tres pelotas de igual masa m se proyectan con la misma rapidez en diferentes direcciones, como se muestra en Gráfico N°. 75. Si se desprecia la resistencia del aire, que pelota

se esperaría que tuviera mayor rapidez al llegar al suelo: *a*) la pelota 1; *b*) la pelota 2;
la pelota 3; *d*) todas las pelotas tienen la misma rapidez?

Gráfico N°. 63 Ejemplo 2 de energía potencial



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento y respuesta:

Todas las pelotas tienen la misma energía cinética inicial:

$$K_o = \frac{1}{2}mv_o^2.$$

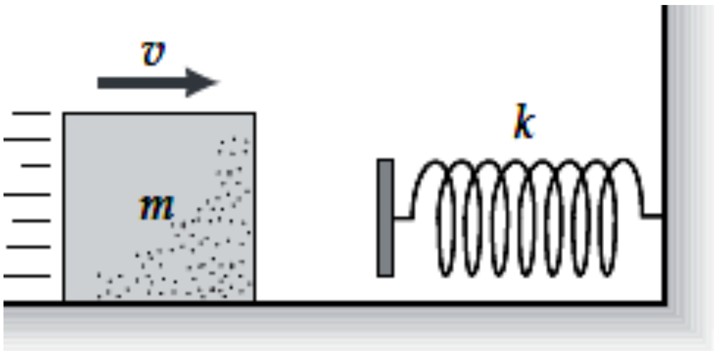
La energía es una cantidad escalar, y la diferencia en la dirección de proyección no causa diferencia en la energía cinética. Sea cual fuere su trayectoria, en última instancia todas las pelotas descienden una distancia *y* relativa a su punto de partida común, así que todas pierden la misma cantidad de energía potencial. *U* es energía de posición *y*, por lo tanto, es independiente de la trayectoria.

Por la ley de conservación de la energía mecánica, la cantidad de energía potencial que cada pelota pierde es igual a la cantidad de energía cinética que gana. Puesto que

todas las pelotas inician con la misma cantidad de energía cinética, y todas ganan la misma cantidad de energía cinética, por lo tanto, las tres tendrán la misma energía cinética justo antes de golpear el suelo.
Esto significa que todas tienen la misma rapidez, entonces la respuesta es *d*).

Observe que, las pelotas 1 y 2 se proyectan con un Angulo de 45° este factor no importa. El cambio de energía potencial es independiente de la trayectoria, así que es independiente del ángulo de proyección. La distancia vertical entre el punto de partida y el suelo es la misma (*y*) para proyectiles que se lanzan con cualquier ángulo. La rapidez con que hacen impacto es la misma, el *tiempo* que las pelotas tardan en llegar al suelo es diferente.
Ejemplo 3: Un bloque de 0,30 kg que se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción con una rapidez de 2,5 m/s, como se muestra en Gráfico N°. 76, choca con un resorte ligero, cuya constante de resorte es de 3,0 x 10^3 N/m. *a*) Calcule la energía mecánica total del sistema. *b*) Que energía cinética K_1 tiene el bloque cuando el resorte se ha comprimido una distancia x_1 = 1.0 cm? (Suponga que no se pierde energía en el choque.)

Gráfico N°. 64 Energía mecánica de un resorte



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento:

En un principio, la energía mecánica total es exclusivamente cinética.

La energía total es la misma que en el inciso *a*, pero ahora se divide en energía cinética y energía potencial del resorte

Datos:

m = 0,30 kg

x1 = 1.0 cm = 0.010 m

k = 3.0 * 10^3 N/m

v0 = 2.5 m/s Encontrar:

E (energía mecánica total)

*K*1 (energía cinética)

Antes de que el bloque haga contacto con el resorte, la energía mecánica total del sistema está en forma de energía cinética; por lo tanto:

$$E = K_o = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}(0.30\ \mathrm{kg})(2.5\ \mathrm{m/s})^2 = 0.94\ \mathrm{J}$$

Puesto que el sistema es conservativo porque no pierde energía mecánica, dicha cantidad es la energía mecánica total en todo momento.

Cuando el resorte se comprime una distancia x1, gana energía potencial

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad E = K_1 + U_1 = K_1 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

Despejando *K*1, se tiene:

$$K_1 = E - \frac{1}{2}kx_1^2 = 0.94\ \mathrm{J} - \frac{1}{2}(3.0 \times 10^3\ \mathrm{N/m})(0.010\ \mathrm{m})^2 = 0.94\ \mathrm{J} - 0.15\ \mathrm{J} = 0.79\ \mathrm{J}$$

Energía total y fuerzas no conservativas

Las fuerzas conservativas y las no conservativas pueden efectuar trabajo sobre objetos; cuando algunas fuerzas no conservativas efectúan trabajo, no se conserva la energía mecánica total perdiendo energía mecánica a través del trabajo efectuado por fuerzas no conservativas, como por ejemplo la fricción.

Usaremos la energía total para averiguar cuanta energía se perdió en el trabajo efectuado por una fuerza no conservativa.

Supóngase que un objeto tiene inicialmente energía mecánica y que fuerzas no conservativas efectúan un trabajo W_{nc} sobre él. Partiendo del teorema trabajo-energía:

$$W = \Delta K = K - K_o$$

el trabajo neto (W) podría efectuarse tanto con fuerzas conservativas W_c como por fuerzas no conservativas W_{nc}, así que:

$$W_c + W_{nc} = K - K_o$$

Recordemos, que el trabajo efectuado por fuerzas conservativas es igual a $-\Delta U$, es decir,
$W_{nc} = U_0 - U$ y la ecuación $W_c + W_{nc} = K - K_0$ se convierte entonces en:

$$\begin{aligned} W_{nc} &= K - K_o - (U_o - U) \\ &= (K + U) - (K_o + U_o) \end{aligned}$$

$$\boxed{W_{nc} = E - E_o = \Delta E}$$

Entonces el trabajo efectuado por las fuerzas no conservativas que actúan sobre un sistema es igual al cambio de energía mecánica. Cabe señalar que, en el caso de fuerzas disipadoras,

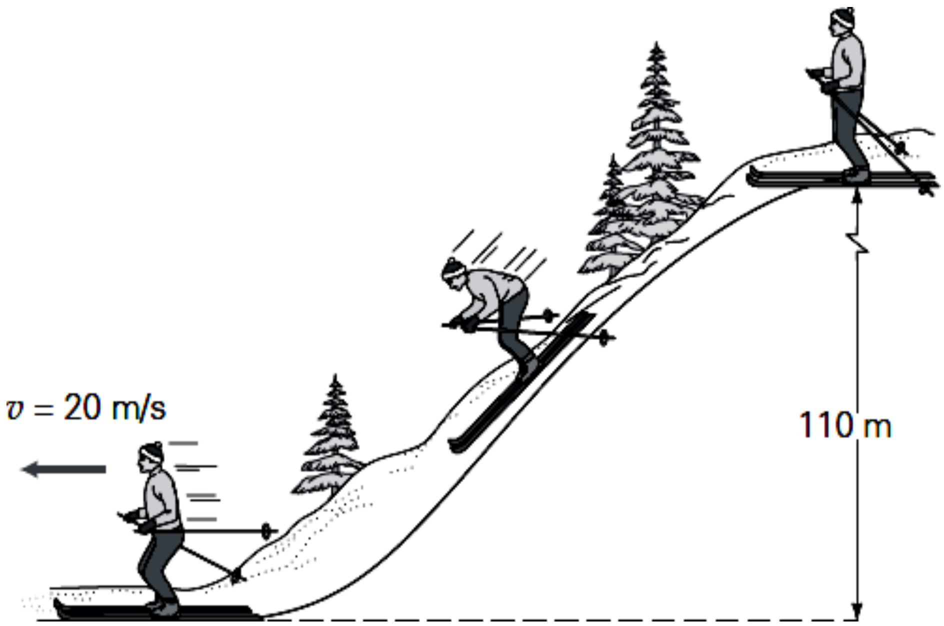
$E_0 > E$. Por lo tanto, el cambio es negativo e indica una disminución de la energía mecánica.

Esta condición coincide en cuanto al signo con W_{nc} que, en el caso de la fricción, también sería negativo.

Los ejemplos a continuación fueron tomados de (Jerry, Buffa, & Lou, 2007):

Ejemplo 1: Un esquiador con una masa de 80 kg parte del reposo en la cima de una pendiente y baja esquiando desde una altura de 110 m (Gráfico N°. 77). La rapidez del esquiador en la base de la pendiente es de 20 m/s. *a*) Demuestre que el sistema no es conservativo. *b*) Cuanto trabajo efectúa la fuerza no conservativa de la fricción?

Gráfico N°. 65 Ejemplo 1, Trabajo de fuerzas no conservativas



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento:

Si el sistema es no conservativo, entonces $E_0 \neq E$ *siendo* posible calcular estas cantidades.

No podemos determinar el trabajo a partir de consideraciones de fuerza - distancia, pero $W_{nc} = E - E_0 = \Delta E$

Solución

Datos:

m = 80 kg v_0 = 0 m/s v = 20 m/s y_0 = 110 m

Encontrar:

Demostrar que E no se conserva

W_{nc} trabajo efectuado por la fricción

Si el sistema es conservativo, la energía mecánica total es constante. Tomando $U_0 = 0$ en la base de la cuesta, vemos que la energía inicial en la cima es:

$$E_o = U = mgy_o = (80\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(110\text{ m}) = 8.6 \times 10^4\text{ J}$$

Luego la energía en la base de la cuesta es:

$$E = K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(80\text{ kg})(20\text{ m/s})^2 = 1.6 \times 10^4\text{ J}$$

Por lo tanto, $E_0 \neq E$, entonces que el sistema no es conservativo. El trabajo efectuado por la fuerza de fricción, que no es conservativa, es igual al cambio de energía mecánica, es decir, la cantidad de energía mecánica perdida es:

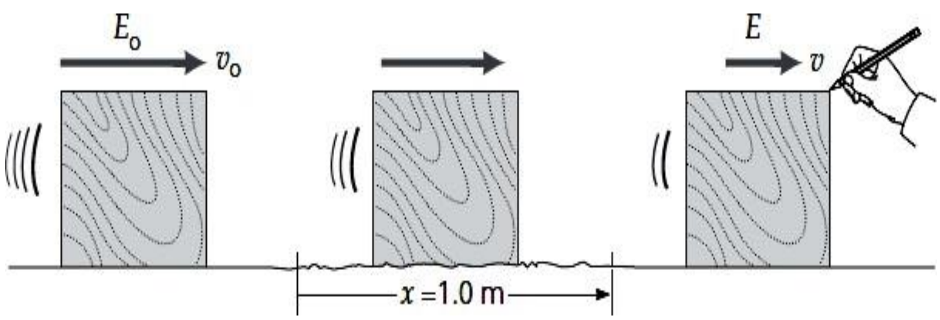
$W_{nc} = E - E_0 = \Delta E$

$$W_{nc} = E - E_o = (1.6 \times 10^4\ \mathrm{J}) - (8.6 \times 10^4\ \mathrm{J}) = -7.0 \times 10^4\ \mathrm{J}$$

Esta cantidad es más del 80% de la energía inicial.

Ejemplo 2: Un bloque de 0,75 kg se desliza por una superficie sin fricción con una rapidez de 2.0 m/s. Luego se desliza sobre un área áspera de 1,0 m de longitud y continua por otra superficie sin fricción. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie áspera es de 0.17. ¿Qué rapidez tiene el bloque después de pasar por la superficie áspera? (Gráfico N°. 78)

Gráfico N°. 66 Ejemplo 2, Trabajo no conservativo, zona áspera



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento:

Calcular la rapidez final implica el uso de ecuaciones de M.R.U.V. en las que interviene la energía cinética.

Obtendremos la energía cinética final usando la conservación de la energía *total*.

Las energías inicial y final son energía cinética, pues no hay cambio de energía potencial gravitacional.

Solución.

Datos:

m = 0,75 kg

μk = 0,17

$v_0 = 2{,}0$ m/s

$x = 1{,}0$ m

Encontrar: v (rapidez final del bloque)

Para este sistema no conservativo tenemos, por la ecuación

$W_{nc} = E - E_0 = K - K_0$

En el área áspera, el bloque pierde energía debido al trabajo efectuado contra la fricción (Wnc):

$$W_{nc} = -f_k x = -\mu_k N x = -\mu_k m g x$$

Entonces, reacomodando la ecuación de energía $W_{nc} = E - E_0$

$$K = K_o + W_{nc}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_o^2 - \mu_k m g x$$

$= K - K_0$ y desarrollando términos, se tiene:

Después de simplificar m:

$$v = \sqrt{v_o^2 - 2\mu_k g x} = \sqrt{(2.0\ \mathrm{m/s})^2 - 2(0.17)(9.8\ \mathrm{m/s^2})(1.0\ \mathrm{m})} = 0.82\ \mathrm{m/s}$$

No se requirió de la masa del bloque. También, es fácil demostrar que el bloque perdió más del 80% de su energía por la fricción.

Obs.: En un sistema no conservativo, la *energía total:* $W_{nc} = E - E_0 = \Delta E$

no la energía mecánica total:

$$\underset{\substack{\textit{energía}\\ \textit{mecánica}\\ \textit{total}}}{E} = \underset{\substack{\textit{energía}\\ \textit{cinética}}}{K} + \underset{\substack{\textit{energía}\\ \textit{potencial}}}{U}$$

Siempre se conserva incluidas las formas no mecánicas de energía, como el calor; pero no toda esta disponible para efectuar trabajo mecánico.

En un sistema conservativo, se obtiene lo que se aporta, por decirlo de alguna manera. Es decir, si efectuamos trabajo sobre el sistema, la energía transferida estará disponible para efectuar trabajo. Hay que tener presente que los sistemas conservativos son idealizaciones, porque hasta cierto punto todos los sistemas reales son no conservativos.

Potencia

Según (Jerry, Buffa, & Lou, 2007):

Por lo regular no solo nos interesa la cantidad de trabajo efectuado, sino también cuanto tiempo tarda en realizarse; es decir, la rapidez con que se efectúa.

La rapidez con que se efectúa trabajo se llama potencia

La potencia media es el trabajo realizado dividido entre el tiempo que tomo realizarlo, es decir, el trabajo por unidad de tiempo:

$$\overline{P} = \frac{W}{t}$$

Si el trabajo efectuado por una fuerza constante de magnitud *F* que actúa mientras un objeto tiene un desplazamiento paralelo de magnitud *d*, entonces la potencia se la escribirá:

$$\overline{P} = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = F\left(\frac{d}{t}\right) = F\overline{v}$$

Unidad SI de potencia: J/s o watt (W)

$\bar{v}$ es la magnitud de la velocidad media; si la velocidad es constante entonces:

$$\overline{P} \doteq \dot{P} = Fv.$$

Si la fuerza y el desplazamiento no tienen la misma dirección:

$$\overline{P} = \frac{F(\cos\theta)d}{t} = F\overline{v}\cos\theta$$

θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

Entre las unidades más utilizadas para la potencia están: 1 J/s = 1 watt (W)

Para potencia eléctrica es el *kilowatt* (kW) Caballo de fuerza: 1 hp = 550 ft. lb/s = 746 W

La potencia nos dice con qué rapidez se está efectuando trabajo o con qué rapidez se está transfiriendo energía.

Por ejemplo, la potencia de un motor suele especificarse en caballos de fuerza. Un motor de hp puede efectuar cierta cantidad de trabajo en la mitad del tiempo que tardaría en efectuarlo un motor de 1 hp, o puede efectuar el doble del trabajo en el mismo tiempo.

Es decir, un motor de 2 hp es dos veces más potente que uno de 1 hp.

Ejemplo 1 (Jerry, Buffa, & Lou, 2007): Una grúa como la que se muestra en Gráfico N°. 79 levanta una carga de 1.0 tonelada métrica una distancia vertical de 25 m en 9,0 s con velocidad constante. ¿Cuánto trabajo útil efectúa la grúa cada segundo?

Gráfico N°. 67 Ejemplo 1 Potencia

Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento:

El trabajo útil efectuado por cada segundo es la potencia generada, es la cantidad que debemos obtener.

Solución:

Datos:

m = 1,0 ton métrica = 1,0 * 10^3 kg = 1000 kg

y = 25 m t = 9,0 s

Encontrar:

W sobre segundo (= potencia, *P*)

Como la carga se mueve c $\bar{P} = P$ ocidad constante,

El trabajo se efectúa contra la gravedad, entonces la *F* = *mg*

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = \frac{mgy}{t}$$
$$= \frac{(1.0 \times 10^3\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})(25\ \mathrm{m})}{9.0\ \mathrm{s}} = 2.7 \times 10^4\ \mathrm{W}\ (\mathrm{o}\ 27\ \mathrm{kW})$$

la grúa efectuó 2.7 x 10^4 J de trabajo cada segundo. Otra alternativa de calcular la potencia sería:

Con la magnitud de la velocidad *v* = *d*/*t* = 25 m/9.0 s = 2.8 m/s, se podría calcular la potencia:

$$P = Fv$$

$$P = (1*10\text{^}3)kg*(9{,}8\ m/s\text{^}2)*(2{,}8\ m/s) = 27.440\ J/s$$
$$27.440\ W$$
$$27{,}440\ kW$$

Eficiencia

Toda máquina, simple o compleja, que efectúa trabajo tiene piezas mecánicas que se mueven, por lo que una parte de la energía aportada siempre se pierde por la fricción entre las piezas o alguna otra causa, quizá en forma de sonido.

Por ello, no todo el aporte de energía se invierte en realizar trabajo útil.

Entonces, la eficiencia mecánica es una medida de lo que obtenemos a cambio de lo que aportamos, es decir, el trabajo *útil* producido en comparación con la energía aportada.

La **eficiencia, ε,** se da como una fracción (o porcentaje):

$$\varepsilon = \frac{\text{trabajo producido}}{\text{energía aportada}} (\times 100\%) = \frac{W_{\text{sale}}}{E_{\text{entra}}} (\times 100\%)$$

Eficiencia: ε es adimensional, no tiene unidad.

Por ejemplo, si una maquina recibe 100 J de energía y produce 40 J de trabajo, su eficiencia es:

$$\varepsilon = \frac{W_{\text{sale}}}{E_{\text{entra}}} = \frac{40\ \text{J}}{100\ \text{J}} = 0.40\ (\times 100\%) = 40\%$$

Implicando que el 60% de la energía suministrada o aportada se pierde, consecuentemente no nos sirve el trabajo que efectúa la máquina, para lo que se requiera.

Si dividimos cada término (numerador y denominador) de la expresión dada inicialmente de la eficiencia, tendremos la eficiencia en términos de potencia:

$$\varepsilon = \frac{P_{\text{sale}}}{P_{\text{entra}}} (\times 100\%)$$

Ejemplo (Jerry, Buffa, & Lou, 2007): El motor de un taladro eléctrico con una eficiencia del 80% tiene un consumo de potencia de 600 W. ¿Cuánto trabajo útil efectúa el taladro en 30 s?

Solución:

ε = 80% = 0,80 Pin = 600 W

t = 30 s Encontrar:

*W*sale (trabajo producido)

$$\varepsilon = \frac{P_{\text{sale}}}{P_{\text{entra}}} (\times 100\%)$$

$$P_{\text{sale}} = \varepsilon P_{\text{entra}} = (0.80)(600\text{ W}) = 4.8 \times 10^2\text{ W}$$

$$P_{\text{sale}} = W_{\text{sale}}/t \qquad W_{\text{sale}} = P_{\text{sale}}t = (4.8 \times 10^2\text{ W})(30\text{ s}) = 1.4 \times 10^4\text{ J}$$

CAPÍTULO VI
ELECTROSTÁTICA
ELECTRICIDAD

La electricidad es un término genérico que describe los fenómenos asociados con la electricidad doméstica. Pero, en realidad implica el estudio de la interacción entre objetos eléctricamente cargados. Según (Pérez, 2015):

Carca eléctrica

La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia definida como la masa. La materia está constituida por unidades pequeñas llamadas moléculas y las moléculas constituidas por átomos, los cuales a su vez están formados por neutrones que no tienen carga eléctrica, protones y electrones, que tienen carga eléctrica igual en magnitud, pero de signos diferentes: Positiva y negativa respectivamente.

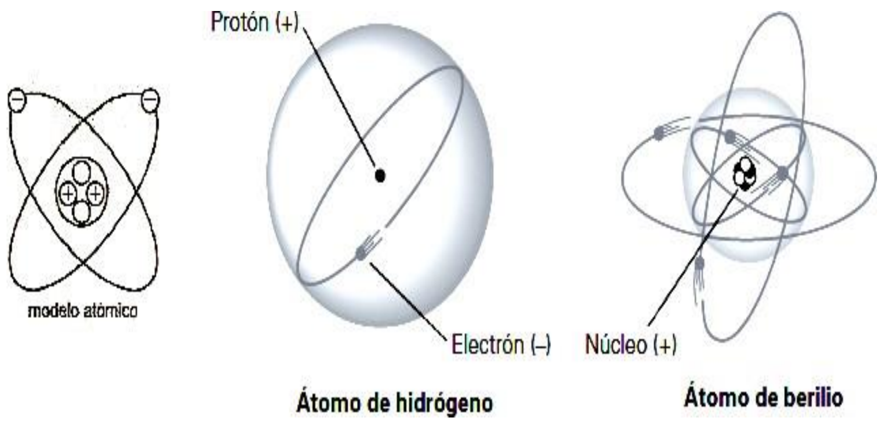
La carga eléctrica de un cuerpo macroscópico está dada por la diferencia entre el número de protones y electrones que existen en él.

Un cuerpo es eléctricamente neutro, si el número de protones es igual al número de electrones, cargado positivamente si tiene exceso de protones; cargado negativamente si tiene exceso de electrones.

Todo átomo Gráfico N°. 80, tiene dos zonas bien definidas: el núcleo y la nube electrónica. En el núcleo se encuentran los neutrones y protones.

En la nube electrónica se encuentran los electrones, girando alrededor del núcleo en órbitas elípticas.

Gráfico N°. 68 El átomo



Fuente: (Pérez, 2015)

Carga elemental (E)

La carga mínima existente se le denomina carga elemental, que posee partículas elementales son los electrones y protones. Las cargas de las partículas elementales solo se diferencian por su

$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C   C = Es la unidad de carga, denominado

Partícula	*Carga eléctrica**	*Masa**
Electrón	-1.602×10^{-19} C	$m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg
Protón	$+1.602 \times 10^{-19}$ C	$m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg
Neutrón	0	$m_n = 1.675 \times 10^{-27}$ kg

Cuantificación de la carga

Todo cuerpo, molécula o átomo puede ganar o perder un número entero de electrones, por lo tanto, la carga de todo sistema de cuerpos es múltiplo de la carga elemental.

$$\boxed{q = n \times e}$$

Donde:

n: n = 1, 2, 3, 4, 5, …. la carga se presenta solo en múltiplos enteros de la carga electrónica fundamental o elemental.

e: carga elemental

q: carga del cuerpo o sistema de cuerpos.

Ejemplo (Jerry, Buffa, & Lou, 2007): Usted arrastra los pies sobre un piso alfombrado en un día seco y la alfombra adquiere una carga positiva neta.

a) ¿Usted tendrá 1) una deficiencia o 2) un exceso de electrones?, b) Si la carga adquirida tiene una magnitud de 2.15 nC, ¿Cuántos electrones se transfirieron?

Razonamiento conceptual. *a*) Como la alfombra tiene una carga positiva neta inicialmente antes de que usted arrastre los pies sobre ella, debe haber perdido electrones y usted debe haberlos ganado. Entonces, su carga es negativa, indicando que hay un exceso de electrones; la respuesta correcta es la 2.

Razonamiento cuantitativo y solución. Conociendo la carga en un electrón, es posible cuantificar el exceso de electrones. Exprese la carga en Coulomb y encuentre la cantidad de electrones transferidos.

$$\begin{aligned} q_c &= +(2.15\,\text{nC})\left(\frac{10^{-9}\,\text{C}}{1\,\text{nC}}\right) \\ &= +2.15 \times 10^{-9}\,\text{C} \\ q_e &= -1.60 \times 10^{-19}\,\text{C} \end{aligned}$$

La carga neta en usted es:

$$q = -q_c = -2.15 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

$$n = \frac{q}{q_e} = \frac{-2.15 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}}{-1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C/electrones}} = 1.34 \times 10^{10}\ \mathrm{electrones}$$

Las cargas netas, en situaciones cotidianas, por lo general implican números enormes de electrones, en éste caso es más de 13 mil millones de electrones, ya que la carga de cada electrón es muy pequeña.

Ley de conservación de la carga eléctrica

Se dice que un sistema de cargas eléctricas, es eléctricamente aislado cuando sobre el sistema elegido no ingresan ni salen cargas, y además no interactúan con cuerpos cargados que se encuentran fuera del sistema elegido.

La suma algebraica de las cargas eléctricas de los cuerpos o partículas que forman un sistema eléctricamente aislado no varía cualesquiera que sean los procesos que ocurran en dicho sistema.

$$\boxed{\sum q_{\text{Inicial}} = \sum q_{\text{Final}}}$$

En todo sistema aislado eléctricamente, la carga neta es constante: $\sum q$ = Constante

Electrostática

La electrostática estudia la interacción y las propiedades de los sistemas de cargas eléctricas en reposo relativo.

Ley cualitativa

Las cargas eléctricas del mismo signo se repelen y cargas de signos diferentes se atraen. Fuerzas eléctricas:

Ley cuantitativa (Ley de Coulomb)

La *fuerza de interacción* en el vacío de dos cuerpos puntuales cargados en reposo es directamente proporcional al producto de los módulos de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

$$F = k\left(\frac{q_1 q_2}{d^2}\right)$$

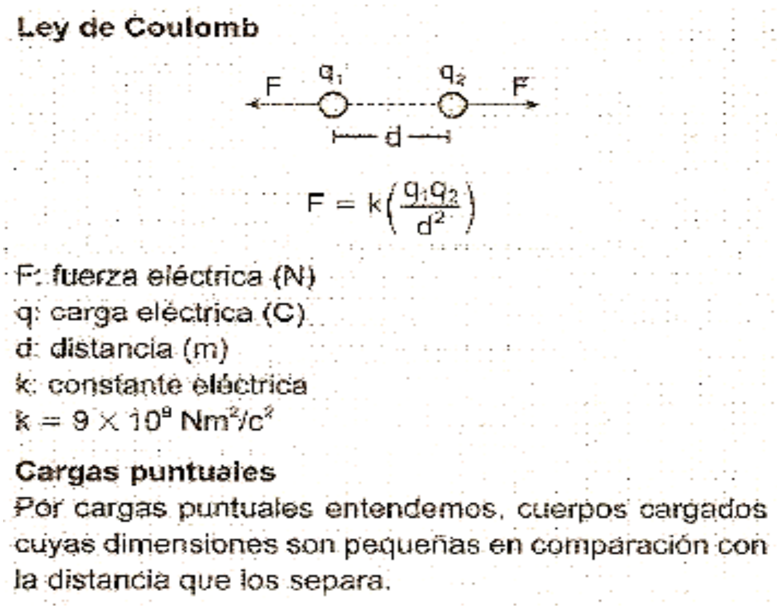
La constante eléctrica k es el Sistema Internacional (SI) se puede escribir en la siguiente forma:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\ Nm^2C^{-2}$$

La magnitud ε0 (e es una letra griega que se lee épsilon), se denomina constante eléctrica, su valor es:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2}$$

Resumen:


Ley de Coulomb

$$F = k\left(\frac{q_1 q_2}{d^2}\right)$$

F: fuerza eléctrica (N)
q: carga eléctrica (C)
d: distancia (m)
k: constante eléctrica
$k = 9 \times 10^9$ Nm²/c²

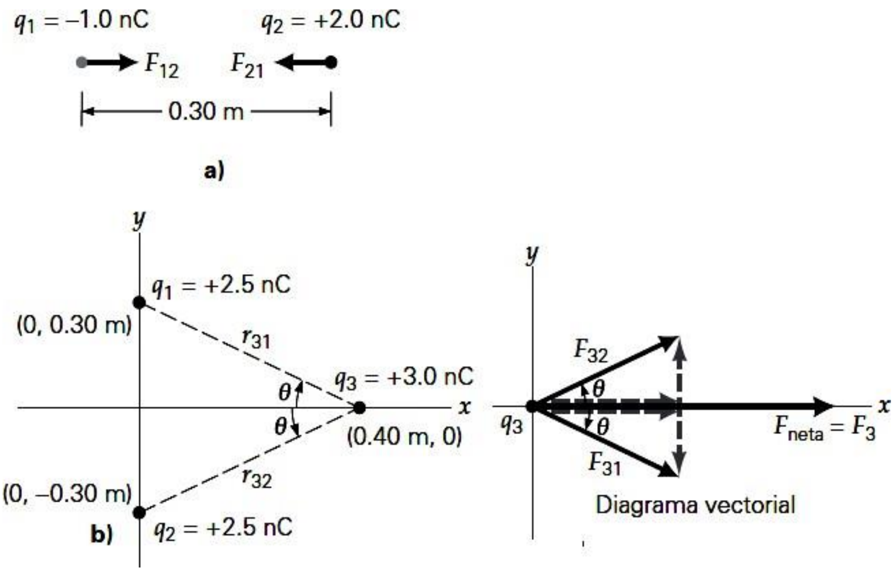
Cargas puntuales

Por cargas puntuales entendemos, cuerpos cargados cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia que los separa.

Ejemplo (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

a) Dos cargas puntuales de -1,0 nC y -2,0 nC están separadas 0,30 m (Gráfico Nº. 81a). ¿Cuál es la fuerza eléctrica sobre cada partícula? *b*) En Gráfico Nº. 81b se ilustra una configuración de tres cargas. ¿Cuál es la fuerza electrostática sobre *q*3?

Gráfico Nº. 69 Ejemplo sobre Ley de Coulomb



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento:

Sumar fuerzas eléctricas no es muy diferente que sumar cualquier otro tipo de fuerzas. La única diferencia aquí es que usamos la Ley de Coulomb para calcular sus *magnitudes*.

Solo se trata de calcular componentes. *a*) Para las dos cargas puntuales, usamos la ley de Coulomb, considerando que las fuerzas son atractivas por ser cargas opuestas. *b*) Se debe usar componentes para sumar vectorialmente las dos fuerzas que actúan sobre *q*3 debidas a *q*1 y *q*2. Se puede encontrar ϴ a partir de las distancias entre cargas. Este ángulo es necesario para calcular los componentes *x* e *y* de la fuerza resultante.

Solución:

Se transforman los datos en nanocoulomb a coulomb:

$$a)\quad q_1 = -(1.0\,\text{nC})\left(\frac{10^{-9}\,\text{C}}{1\,\text{nC}}\right) = -1.0\times10^{-9}\,\text{C}$$

$$q_2 = +(2.0\,\text{nC})\left(\frac{10^{-9}\,\text{C}}{1\,\text{nC}}\right) = +2.0\times10^{-9}\,\text{C}$$

$$r = 0.30\,\text{m}$$

Encuentre: *a*) $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$

b) $\vec{F}_3$

b) Los datos en Gráfico N°. 81b, convertimos las cargas a coulomb como en *a*.

La magnitud de la fuerza se calcula utilizando la ley de Coulomb, que actúa sobre cada carga puntual:

$$F_{12} = F_{21} = \frac{kq_1q_2}{r^2} = \frac{(9.00\times10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.0\times10^{-9}\,\text{C})(2.0\times10^{-9}\,\text{C})}{(0.30\,\text{m})^2}$$
$$= 0.20\times10^{-6}\,\text{N} = 0.20\,\mu\text{N}$$

La ley de Coulomb permite obtener solo la magnitud de la fuerza. Sin embargo, como las cargas son de signo contrario, las fuerzas se atraen.

b) Las fuerzas **F**31 y **F**32 deben sumarse vectorialmente, usando trigonometría y las componentes en x e y de las dos fuerzas, para encontrar la fuerza neta **F**3. Como todas las cargas son positivas, las fuerzas son repulsivas, como se ilustra en el diagrama vectorial de Gráfico N°. 81b. Como *q*1 = *q*2 y las cargas son equidistantes de *q*3, se infiere que **F**31 y **F**32 tienen igual magnitud. Mire que en el gráfico **r**31 = **r**32 = 0,50 m, por ser triángulo isósceles.

$$F_{32} = \frac{kq_2q_3}{r_{32}^2} = \frac{(9.00 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(2.5 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(3.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(0.50\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 0.27 \times 10^{-6}\ \mathrm{N} = 0.27\ \mu\mathrm{N}$$

Tomando en cuenta las direcciones de las componentes de **F**31 y **F**32, y que por simetría las componentes en *y* de los vectores se cancelan por ser iguales en magnitud. Entonces, la fuerza neta **F**3 sobre la carga *q*3 actúa a lo largo del eje *x* positivo y tiene una magnitud de:

$$F_3 = F_{31_x} + F_{32_x} = 2\,F_{31_x}$$

F31 = **F**32

El ángulo ɵ se determina a partir de los triángulos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.30\ \mathrm{m}}{0.40\ \mathrm{m}}\right) = 37^{\circ}$$

Entonces **F**3, tiene una magnitud de:

$$F_3 = 2\,F_{31_x} = 2\,F_{32}\cos\theta$$
$$= 2(0.27\ \mu\mathrm{N})\cos 37^{\circ} = 0.43\ \mu\mathrm{N}$$

Fenómenos de electrización

Es el fenómeno por el cual los cuerpos pueden cargarse positiva o negativamente por defecto o por exceso de electrones.

Las formas de electrización son los siguientes:

Por frotamiento

Si a uno de los dos cuerpos que se frota pierde electrones y se carga positivamente, el otro gana electrones y se carga negativamente. Por ejemplo, la frotación de una varilla de vidrio con un paño de seda, el vidrio resulta cargado positivamente y el paño de seda negativamente.

Por contacto

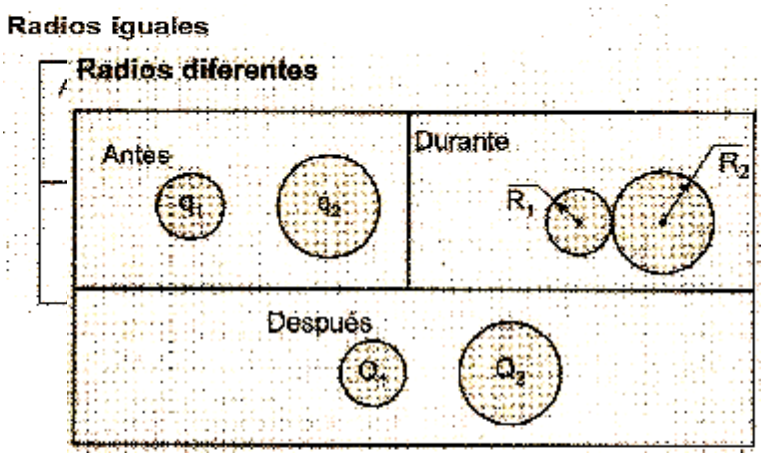
Cuando dos cuerpos conductores se ponen en contacto, por lo menos uno de ellos cargado; se establece una transferencia de cargas entre los cuerpos debido a una diferencia de potencial entre las superficies de ambos cuerpos conductores, el flujo de cargas cesa cuando las superficies de ambos cuerpos alcanzan el mismo potencial eléctrico.

Cuando dos cuerpos esféricos de igual radio cargados con $q1$ y $q2$ son puestos en contacto, se establece un flujo de

$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

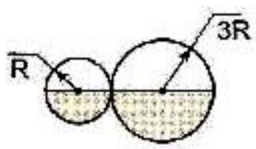
electrones, al final las esferas se reparten las cargas equitativamente cada uno con carga Q.

Cuando dos esferas conductoras de radios R1 y R2 cargadas



con $q1$ y $q2$ son puestas en contacto, las cargas se redistribuyen en las superficies esféricas en forma proporcional al cuadrado de los radios respectivos, de modo que la carga total se conserva. Si la carga final en cada esfera es Q1 y Q2 respectivamente, y por el principio de conservación de las cargas se tiene:

Ejemplo (Pérez, 2015): Se tiene una esfera cargada con 180 µC se pone en contacto con otra esfera de carga 120 µC cuyo radio es el triple que la anterior. Hallar la carga de las esferas después del contacto.



Resolución:
Después del contacto, la carga almacenada por cada esfera es directamente proporcional al cuadrado del radio de curvatura.

$$\frac{q}{R^2} = \frac{Q}{(3R)^2} \Rightarrow Q = 9q$$

Del principio de conservación de las cargas eléctricas: ∑qInicial = ∑qFinal

180 + 120 = q + Q

180 + 120 = q + 9q

300 = 10q

q = 30 µC Q = 270 µC

Campo eléctrico

Toda carga eléctrica altera las propiedades del espacio que le rodea, el mismo que adquiere una sensibilidad eléctrica que se pone de manifiesto cuando otra carga ingresa a esta región.

Llamamos campo eléctrico a la región del espacio que rodea a toda carga eléctrica, lugar en el cual deja sentir su efecto sobre o tras partículas cargadas. El campo eléctrico es un agente transmisor de fuerzas.

Intensidad del campo eléctrico (E)

Es una magnitud física vectorial, que sirve para describir el campo eléctrico. Su valor se define como la fuerza eléctrica resultante que actúa por cada unidad de carga positiva en un punto del campo.

Gráfico N°. 70 Campo eléctrico

Fuente: (Pérez, 2015)

Se representa por un vector que tienen la misma dirección y sentido que la fuerza eléctrica resultante. Para detectar el campo se utiliza una carga positiva puntual de prueba (+q0).

Esta carga de prueba, están pequeña que su presencia no provoca un cambio en el campo que se investiga, es decir +q0 no distorsiona el campo que se estudia con su ayuda.

Tenemos una carga Q creadora del campo en estudio y una carga puntual de prueba +q0.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Y la ley de Coulomb:

$$F = k\left(\frac{q_0 Q}{d^2}\right)$$

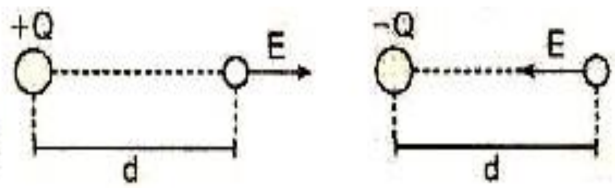
Se tiene la magnitud escalar del campo eléctrico:

$$E = k\left(\frac{Q}{d^2}\right)$$

Carga creadora: Se observa que el sentido del vector campo eléctrico **E**, depende del signo de la carga creadora del campo Q.

$$E = k\left(\frac{Q}{d^2}\right)$$

$\vec{E}$, se mide en: N/C



En la fórmula, no se reemplaza el signo de la carga creadora Q.

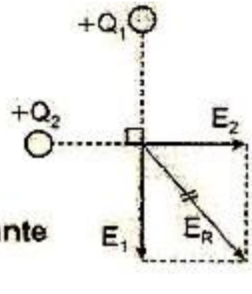
Principio de superposición de los campos

Si en un punto del espacio varía las partículas cargadas, éstas crean campos eléctricos cuyas intensidades son: **E1, E2, E3**, la intensidad resultante es la suma vectorial de las intensidades parciales:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$E_R = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

Campo Resultante



Líneas de fuerza

Las líneas de fuerza representan gráficamente a un campo eléctrico. Salen de las cargas positivas e ingresan a las cargas negativas.

Las líneas de fuerza son líneas continuas, no se cortan entre sí, debido a la unicidad del campo en un punto. La intensidad del campo **E** en un punto se representa por un vector tangente a la línea de fuerza.

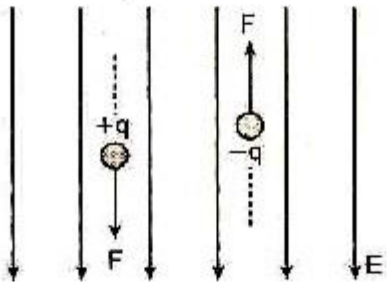
La densidad de las líneas de fuerza es mayor en las proximidades de los cuerpos cargados, donde la intensidad del campo también es mayor.

Campo eléctrico homogéneo

Se llama campo homogéneo o uniforme a un campo eléctrico cuya intensidad es igual en todos los puntos del espacio y se representa mediante líneas de fuerza paralelas.

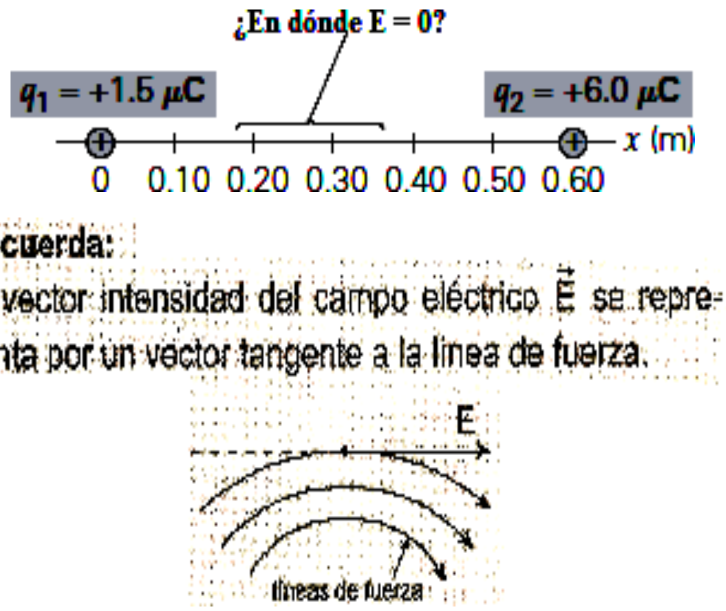
Toda carga q dentro del campo homogéneo experimenta una fuerza cuya dirección es paralela a las líneas de fuerza y su módulo es:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$$



Ejemplo 1 (Jerry, Buffa, & Lou, 2007): Dos cargas puntuales se encuentran sobre el eje x, como se ilustra en Gráfico N°. 83. Identifique todos los lugares en el eje donde el campo eléctrico es cero.

Gráfico N°. 71 Ejemplo 1 Sobre campo eléctrico



Fuente: (Jerry, Buffa, & Lou, 2007)

Razonamiento:

Cada carga puntual genera su propio campo. Por el principio de superposición, el campo eléctrico es la suma vectorial de los dos campos generados por q1 y q2. Estamos buscando los lugares donde estos campos son iguales pero opuestos, de manera que se cancelen y den un campo eléctrico *total* o *neto* de cero.

Solución:

Comenzamos por especificar el lugar a localizar como una distancia x a partir de q1 que se ubica en x = 0 y por convertir las cargas de microcoulomb a coulomb, por estandarización.

Dado: $d = 0.60$ m (distancia entre las cargas)
$q_1 = +1.5\,\mu C = +1.5 \times 10^{-6}$ C
$q_2 = +6.0\,\mu C = +6.0 \times 10^{-6}$ C

Encontrar: x [el lugar o lugares donde E es cero]

Como ambas cargas son positivas, sus campos apuntan hacia la derecha en todos los lugares a la derecha de q2. Por consiguiente, los campos no se cancelan en esa región a la derecha de la carga q1. De manera similar, a la izquierda de q1, ambos campos apuntan hacia la izquierda y no se cancelan.

La única posibilidad de cancelación se da *entre* las cargas. En esa región, los dos campos se cancelarán si sus magnitudes son iguales, porque están en direcciones opuestas. Al igualar las magnitudes y despejar x:

$$E_1 = E_2 \qquad \text{o} \qquad \frac{kq_1}{x^2} = \frac{kq_2}{(d-x)^2}$$

Al reordenar esta expresión y cancelar la constante *k*, se obtiene:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{(q_2/q_1)}{(d-x)^2}$$

Con $q_2/q_1 = 4$, se saca la raíz cuadrada de ambos lados:

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{q_2/q_1}{(d-x)^2}} = \sqrt{\frac{4}{(d-x)^2}} \quad \text{o} \quad \frac{1}{x} = \frac{2}{d-x}$$

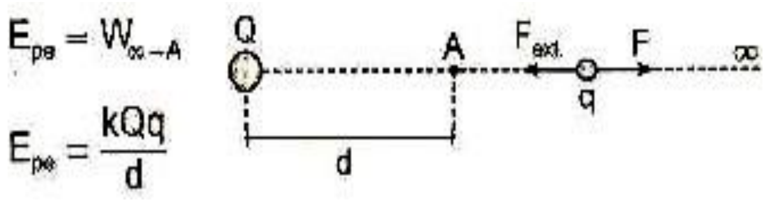
Resolviendo: x = *d*/3 = 0,60 m/3 = 0,20 m.

El resultado indica que el campo eléctrico está más cerca de q1 tiene sentido desde el

punto de vista físico. Como q2 es la carga más grande, para que los dos campos sean iguales en magnitud, el lugar debe estar más cerca de q1.

Energía potencial de interacción eléctrica

La energía potencial de interacción eléctrica (Epe) entre dos cargas puntuales q y Q se define como el trabajo realizado por un agente externo para trasladar uno de los cuerpos desde el infinito lentamente, hasta ser un sistema casi estático, hasta un punto A del campo eléctrico generado por el otro cuerpo.

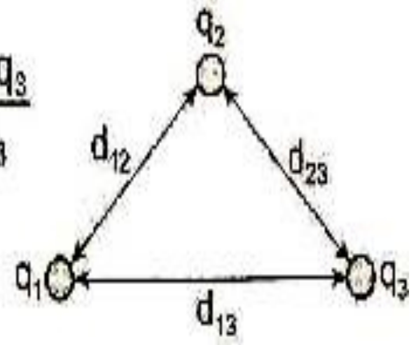


En el movimiento casi estático o en equilibrio de la carga eléctrica q la fuerza externa es igual en módulo a la fuerza eléctrica que realiza un trabajo negativo al de la fuerza opuesta al movimiento o positivo de la fuerza en favor del movimiento, por esta razón la energía potencial de interacción eléctrica puede ser positivo o negativo dependiendo del signo de las cargas eléctricas. En la fórmula se reemplaza el signo de las cargas q y Q.

Sistema de cargas eléctricas

Para la energía potencial de interacción eléctrica para un sistema de tres cuerpos, los términos del segundo miembro se consiguen mediante la combinación de tres elementos agrupados de dos en dos.

$$E_{pe}^{sistema} = \frac{kq_1q_2}{d_{12}} + \frac{kq_1q_3}{d_{13}} + \frac{kq_2q_3}{d_{23}}$$



Energía potencial

Se llama energía potencial a la parte de la energía de un sistema mecánico que solo depende de su configuración o posición mutua de todas las partículas o puntos materiales del sistema y de sus posiciones en el campo de potencial externo (gravitatorio, eléctrico, magnético y otros).

Formas de energía potencial: Energía potencial gravitatoria, energía potencial elástica, energía potencial de interacción gravitatoria, energía potencial de interacción eléctrica, energía potencial eléctrica, energía potencial hidrostática y otros.

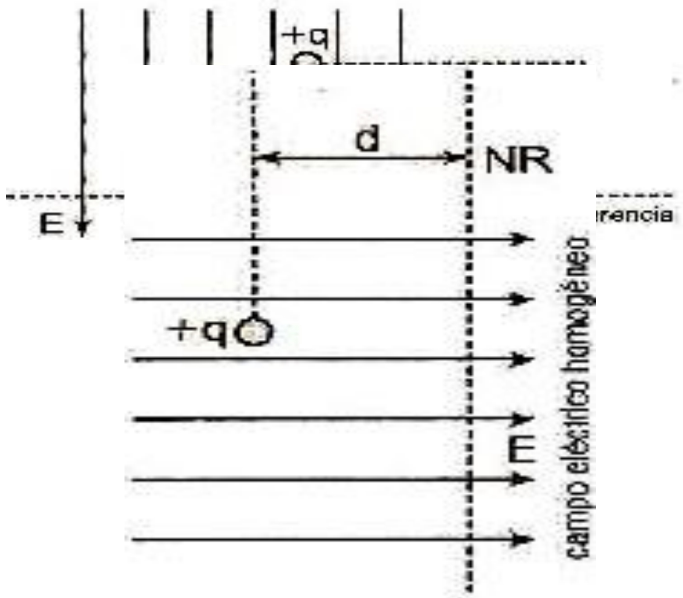
Energía potencial eléctrica

Es una magnitud física escalar definida como la capacidad que tiene una partícula cargada eléctricamente para realizar trabajo mecánico en virtud a la posición dentro del campo eléctrico homogéneo **E** respecto de un sistema de referencia arbitrariamente elegida.

Su valor es igual al producto de la magnitud de la carga q por la intensidad del campo eléctrico homogéneo **E** y por la distancia (análoga con la altura) entre dos líneas equipotenciales que contiene a los puntos elegidos.

En la fórmula se reemplaza el signo de la carga eléctrica, por

$$E_{pe} = qEd$$



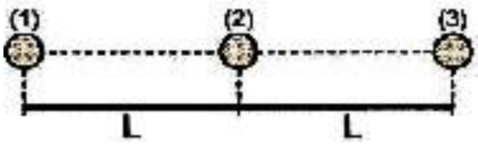
consiguiente, la energía potencial eléctrica puede ser positiva, negativa o nula.

Convencionalmente la energía potencial eléctrica será nula en el punto que se encuentra sobre el nivel de referencia. Ep0=0.

La línea de referencia o nivel de referencia se traza en forma arbitraria, siempre perpendicular a las líneas de fuerza que representan al campo eléctrico homogéneo.

Las líneas de fuerza se desplazan en el sentido de mayor a menor potencial eléctrico.

Ejemplos a continuación son tomados de (Pérez, 2015):
Ejemplo 1: En el gráfico que se muestra, determinar la energía potencial de interacción eléctrica del sistema de cargas eléctricas, de magnitud Q cada una.



Resolución:
La energía potencial de interacción eléctrica del sistema:

$$E_{P(sistema)} = E_{p(1-2)} + E_{p(1-3)} + E_{p(2-3)}$$
$$E_{P(sistema)} = k\frac{QQ}{L} + k\frac{QQ}{2L} + k\frac{QQ}{L}$$
$$\therefore E_{P(sistema)} = \frac{5}{2}\left(\frac{kQ^2}{L}\right)$$

Ejemplo 2: Se tienen dos cargas eléctricas puntuales de magnitud 40 y 50 μC, separados una distancia de 5cm. Hallar la energía potencial de interacción eléctrica del sistema.

Resolución:

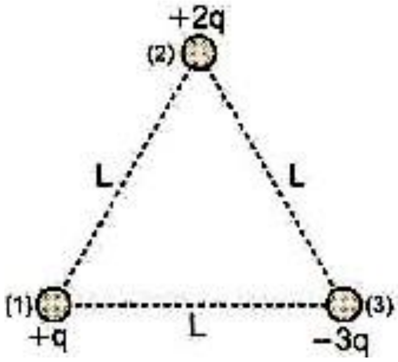
La energía potencial de interacción del sistema:

$$E_p = k\frac{q_1q_2}{d} \Rightarrow E_p = (9\times10^9)\frac{(4\times10^{-5})(5\times10^{-5})}{5\times10^{-2}}$$

$$\therefore E_p = 360\ J$$

Ejemplo 3: Determinar la energía de interacción del sistema de cargas puntuales, situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado L.

Resolución:



La energía potencial de interacción eléctrica del sistema, es igual al trabajo realizado por un agente externo para llevar desde el infinito hasta los vértices del triángulo, las cargas son: +q; +2q; -3q

Su valor se determina mediante la fórmula (1), donde se considera el signo de las cargas:

$$d_{12} = d_{13} = d_{23} = L$$

$$E_p = k\left(\frac{q_1q_2}{d_{12}} + \frac{q_1q_3}{d_{13}} + \frac{q_2q_3}{d_{23}}\right) \qquad ...(1)$$

Reemplazando valores y signos en (1):

$$E_p = \frac{kq^2}{L}(2-3-6) \Rightarrow E_p = -7\frac{kq^2}{L}$$

Potencial eléctrico

Se lo define como el trabajo realizado por un agente externo contra el campo eléctrico, por cada unidad de carga positiva, para trasladar a velocidad constante desde el infinito hasta un cierto punto A dentro del campo. Sea Q la carga creadora o generadora del campo eléctrico. Es una magnitud física escalar.

$$\textbf{Potencial eléctrico} = \frac{\textbf{trabajo}}{\textbf{carga}}$$

$$\boxed{V_A = \frac{W_{\infty \to A}}{q}} \qquad \textbf{(1)}$$

El trabajo realizado por el agente externo es:

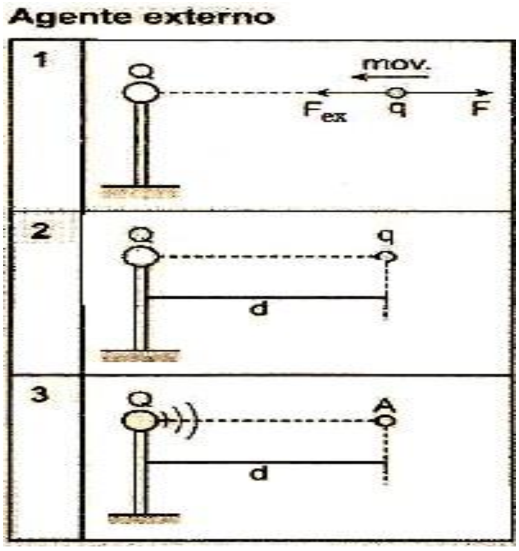
$$\boxed{W_{\infty \to A} = k\left(\frac{Qq}{d}\right)} \qquad \textbf{(2)}$$

Reemplazando (2) en (1), se tiene:

$$\boxed{V_A = k\left(\frac{Q}{q}\right)}$$

El potencial eléctrico en el punto A es directamente proporcional a la magnitud de la carga Q e inversamente proporcional a la distancia d entre la carga generadora y el punto A. En la fórmula se reemplaza el signo de la carga generadora. El potencial eléctrico se mide en *volt* (V).

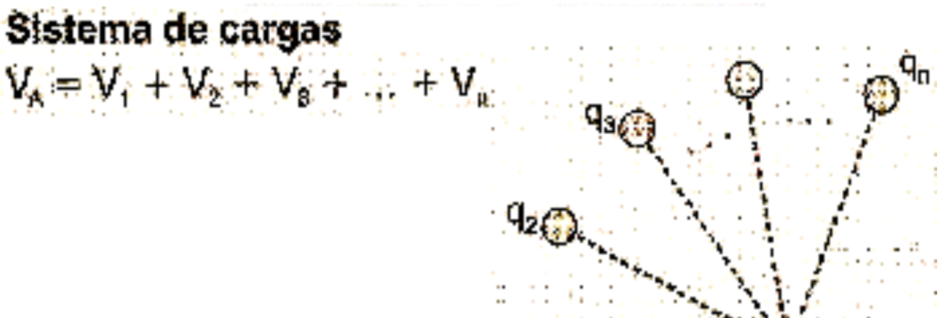
$$1\ volt = \frac{1\ joule}{1\ coulomb} \Rightarrow 1\ \text{V} = \frac{1\text{J}}{\text{C}}$$



El potencial en A puede ser positivo o negativo, dependiendo del signo de la carga creadora Q.

Potencial eléctrico debido a un sistema de carcas

El potencial eléctrico resultante en el punto A debido a un sistema de cargas puntuales, es igual a la suma algebraica de los potenciales parciales: V_1, V_2, V_3, V_4, ..., V_n.



Diferencia de potencial

Su valor se define como el trabajo realizado por un agente externo sobre cada unidad de carga para trasladar a velocidad constante desde un punto inicial A a otro final B dentro del campo eléctrico.

$$\boxed{V_B - V_A = V_{BA}} \qquad \boxed{V_{BA} = \frac{W_{A \to B}}{q}}$$

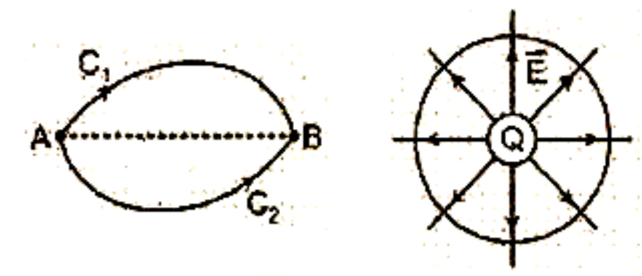
La diferencia de potencial suele llamarse tensión. El sentido de las líneas de fuerza es tal que se dirigen de mayor a menor potencial eléctrico.

El trabajo realizado por el agente externo (F_{ex}) para trasladar la carga q en un punto inicial A hasta otro final B es igual al producto de la magnitud de la carga que se lleva por la diferencia de potencial final e inicial.

$$\boxed{W_{A \to B} = q(V_B - V_A)}$$

El trabajo realizado sobre la carga q desde A hasta B es independiente del camino o trayectoria que se sigue, dependiendo sólo del potencial inicial y final.

Trabajo contra el campo eléctrico



El trabajo de A hasta B es independiente de los caminos C_1 y C_2.

Superficies equipotenciales

Se denomina así a aquel lugar geométrico constituido por puntos de igual potencial eléctrico.

Las superficies equipotenciales se caracterizan por ser perpendiculares a las líneas de fuerza.

El trabajo realizado para trasladar una carga del punto A hasta el punto B, que pertenecen a la misma superficie equipotencial, es igual a cero.
Trabajo nulo: Si: $V_A = V_B \quad \rightarrow W_{A \rightarrow B} = 0$

En el caso del campo homogéneo las líneas de fuerza son paralelas por consiguiente las superficies equipotenciales también son paralelas representadas por líneas punteadas.

La intensidad del campo eléctrico está dirigida en el sentido que disminuye el potencial eléctrico.

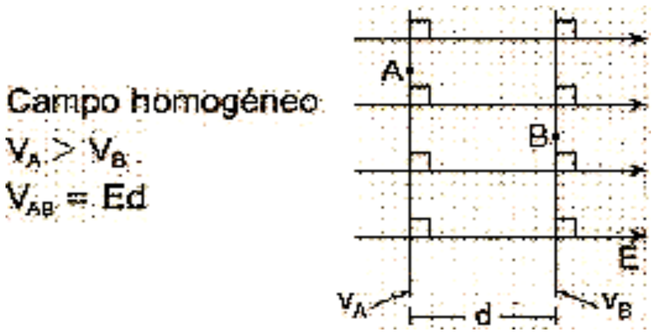
Relación entre potencial y campo
La diferencia de potencial entre dos puntos A y B dentro de un campo homogéneo E, es igual al producto de la distancia d por la intensidad de campo E.

Donde d es la distancia entre dos superficies equipotenciales que contienen a los puntos A y B respectivamente.

$$\boxed{V_A > V_B}$$

$$\boxed{V_{AB} = Ed}$$

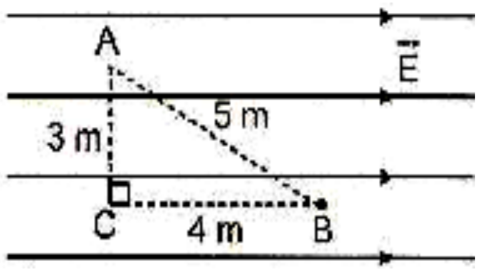
La unidad de la intensidad de campo **E** es voltio/metro (V/m).



Los siguientes ejemplos fueron tomados de (Pérez, 2015):

Ejemplo1: En el gráfico a continuación se muestra un campo eléctrico homogéneo de intensidad E=500 kN/C (=500000 N/C), representado mediante líneas de fuerza hacia la derecha. Determinar el trabajo realizado por un agente externo para trasladar una carga

q = 50 μC, desde la posición A hasta B siguiendo como trayectoria la hipotenusa del triángulo rectángulo.



Resolución:

Los puntos A y C se encuentran a igual potencial eléctrico $V_A=V_C$, además la diferencia de potencial entre los puntos B y C es:

$$V_B < V_C \; ; \; (V_B - V_C) = -Ed$$

$$\Rightarrow V_B - V_C = (500\,000)(4) = -2 \times 10^6 \text{ voltios}$$

$$\text{Luego: } V_B - V_A = -2 \times 10^6 \text{ voltios}$$

El trabajo realizado contra el campo eléctrico es independiente del camino seguido, solo interesa el potencial inicial (A) y final (B):

$$W_{A \to B}^{Ext} = q(V_B - V_A) = (50 \times 10^{-6})(-2 \times 10^{6})$$
$$\Rightarrow \; W_{A \to B}^{Ext.} = -100 \text{ J}$$

Luego, el trabajo realizado por el agente externo es igual a -100 J, significando que el agente externo se opone al movimiento de la carga q.

Glosario del módulo

Torque: Se denomina así, al giro que se produce en los cuerpos al aplicar
una fuerza en un punto dado.

Miscelánea: Conjunto de ejercicios de aplicación variados.

Mapa mental: Es la estructuración de ideas en un diagrama o dibujo.

Análisis: Se comprende cómo identificar las partes de un todo, separándolos y examinándolos para comprender sus principios fundamentales.

Magnitud: Según (Pérez, 2000), es todo aquello que es susceptible a ser
medido y que se puede percibir por algún medio.

Referencias Bibliográficas

Bedford, A., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería. Estática.* México: Pearson Educación. Beer, F., Johnston, E. R., Mazurek, D. F., & Eisenberg, E. R. (2010). *Mecánica Vectorial Para Ingenieros*
– Estática. México: McGraw - Hill/Interamericana Editores, S.A. De C.V.

Bueche, F. J., & Hecht, E. (2007). *Física General.* México: The McGraw-Hill Companies, Inc. Cuéllar, J. A. (2015). *Física I.* México, D.F.: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V. Gamio Arisnabarreta, L. E. (2015). *Estática Teoría y Aplicaciones.* Lima: Macro EIRL. Gutiérrez, C. (2015). *Física general.* México: MacGrawHill.

Hewitt, P. G. (2007). *Física conceptual.* México: Pearson Educación. Jerry, W., Buffa, A., & Lou, B. (2007). *Física.* México: Pearson Educación.

Medina G., H. (2009). *Física 1.* Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Pérez T., W. L. (2007). *Compendio de física para estudiantes preuniversitarios.* Lima: Oso Blanco S.A.C.

Pérez, W. T. (2015). *Física: Teoría y Práctica.* Lima: San Marcos E. I. R. L.

ISBN: 978-9942-33-258-5

INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO CORPORATIVO

EDWARDS DEMING®

saber qué hacer y cómo hacerlo

compÁs

Grupo de capacitación e investigación pedagógica