compÁs

Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Rebote rectilíneo y parabólico sobre superficies

Alberto Antonio Tirado Sanabria

Rebote rectilíneo y parabólico sobre superficies

Alberto Antonio Tirado Sanabria

Rebote rectilíneo y parabólico sobre superficies

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Título original: Rebote rectilíneo y parabólico
sobre superficies
Primera edición: noviembre 2020

Guayaquil-Ecuador
Primera edición junio 2019.
Segunda edición noviembre 2020

Editado en Guayaquil - Ecuador

ISBN: 978-9942-33-315-5

Obra virtual, a ser permisada por el autor.
Impresión física de 50 ejemplares
En los talleres APERIOS
Enero 2021

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Cita.
Tirado. A (2020) Rebote rectilíneo y parabólico sobre superficies, Editorial Grupo Compás, Guayaquil Ecuador, 74 pag

Agradecimientos

A la Universidad de Guayaquil, por darme la oportunidad de ser profesor en sus aulas, poder dar a conocer mis investigaciones y propuestas didácticas para la enseñanza de la Física I y la Matemática I. A los docentes: Aníbal Trujillo Naranjo y Marco Varas flores, por sus observaciones y valiosos aportes.

A mi hija Ariadna Cristal por sus dibujos y colores, que le han dado una nota especial a esta obra. Así como el diseño y elaboración de la portada

Dedicatorias

A los profesores que me han acompañado, como colegas en el trabajo diario del hermoso proceso de enseñar y su pensada consecuencia: el aprendizaje del estudiante. Que esta obra los motive a cumplir las metas que se proponen.

A todos aquellos estudiantes que han compartido conmigo un salón de clases, por ser la razón de ser de la docencia, en la filosofía que defiendo: "Cada clase debe ser un acto inédito".

A mis hijas: Ariadna Cristal, Grecia Rubí y Bella Esmeralda, que me enseñan de lo que ellas aprenden, donde yo, aprendo de eso.

Indice

CAPITULO I 13
EL REBOTE PARABOLICO, SU DESARROLLO 13
TIPOLOGÍAS DE LOS REBOTES, DEDUCCIONES Y SITUACIONES 17
CAPITULO II 32
EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS POR TIPOLOGIA 32
CAPITULO III 61
ENSAYOS PARA VALIDAR ÁNGULOS DE REBOTES 61
A MANERA DE CIERRE DE LA OBRA 69
CONCLUSIONES ESPECÍFICAS 70
RECOMENDACIONES PUNTUALES 72
REFERENCIAS 73

PREFACIO

Esta la historia de este texto, inicia en el año 2004, poco antes de que naciera mi hija mayor, pensando sobre un problema cinemático en dos dimensiones: un movimiento parabólico en el plano, donde un aspersor de agua colocado sobre una inclinación recta, lanzaba el líquido hacia arriba y hacia debajo de la superficie; problema sencillo al sumar y restar el ángulo de la superficie con la del agua saliente del aspersor, se podía obtener el ángulo de los lanzamientos con respecto a al horizontal hacia arriba y para abajo respectivamente; luego se podía hallar la distancia total que este dispositivo cubrirá a lo largo de la pendiente. Pensé que si en vez de salir, que pasaría si el agua o cualquier cuerpo lanzado chocaran o llegaran a la inclinación en ese punto. Es decir, si ¿Un cuerpo asumido como partícula con características elásticas colisionara y rebotara sobre la recta inclinada? Investigué un poco, en los libros que manejaba descubriendo que el rebote parabólico solo se ejemplariza en casos especiales en rectas horizontales y verticales, como ejercicios puntuales de dificultad, sin desarrollo conceptual previo.

Realicé el problema con una pelota de goma sobre una tabla inclinada, con numerosos ensayos rústicos a visual, de lanzamientos y rebotes conseguidos, de donde deduje dos cosas iniciales

a) Se debe conocer la velocidad final de impacto para poder calcular el ángulo de incidencia, y luego descubrir el ángulo "instantáneo" del rebote que pueda ocurrir, (suposición cinemática aceptada en partículas).

b) Si la pelota se deja caer desde cierta altura, (la incidencia en vertical es de 90º), de donde se apreciaban tres situaciones: 1) El ángulo de rebote es positivo si la inclinación es menor a los 45º, 2) Este ángulo resulta cero grados, o rebote en horizontal, para una inclinación de 45º, y 3) Negativo o por debajo de la horizontal para una superficie inclinada superior a este ángulo notable.

Asumiendo que el impacto y el rebote no consumen tiempo (situación aceptada como instantánea), donde, de haber incluso pérdida de rapidez, no había pérdida de inclinación, por geometría básica deduje dos ecuaciones a mi entender sencillas pero poderosas para resolver estos problemas a este nivel

básico universitario, en colisiones de cuerpos elásticos sobre superficies inclinadas, en rebotes para abajo y en rebotes para arriba. A la fecha no he logrado unificar estos eventos en una sola ecuación por ser diferentes, que denomino: “En bajada” y “En subida”.
En los meses siguientes, cuando el tiempo o la disponibilidad lo permitía, realizaba experimentos controlados sobre inclinaciones, usando un “Plano Inclinado” para medir fricciones estáticas, cronómetro y papel carbón para registrar las marcas; seguidamente escribo un pequeño folleto, que entrego sin arbitraje en la biblioteca municipal de la ciudad de Barcelona, Estado Anzoátegui Venezuela. En el IV congreso científico de la Universidad de Oriente, expongo en la modalidad “Cartel”, mi descubrimiento e ideas sobre el rebote parabólico inclinado. La aceptación fue muy buena con comentarios positivos sobre este tema; un profesor comenta: “Que más interesante seria conocer también el rebote sobre una superficie curva”, porque algunas ondas de comunicación terminan rebotando de los cerros y obstáculos geográfico, donde muchas comunicaciones se interrumpen, a lo que respondo que sería difícil porque la colina, montaña u obstáculo geográfico, debe ser de relieve conocido o representado por una función del plano cartesiano.

Con la buena noticia de que los profesores contratados tenemos concurso de oposición, para ser ordinarios: Estudiar y presentar las pruebas de las cuales me hago docente de planta, con el trabajo posterior para ascender a la primera categoría de “Asistente”, más el inicio de la maestría: “Enseñanza de la Matemáticas Básicas” me consumen un par de años. En el 2006 retomo el trabajo sobre el “Rebote Parabólico”, realizando numerosos ensayos, con cuerpos esféricos en caída libre sobre una inclinación fija, que demuestran mis fórmulas con márgenes de error promedio del 5% y 4%, con picos máximo del 7%. De hecho, desde que deduje estas ecuaciones, las uso con mis estudiantes en las secciones de Física I, que me programan. Con problemas creado sobre rebotes parabólicos en diferentes inclinaciones. Más adelante por la casualidad de conocer que, la función derivada de una función es la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de esta última, se me ocurre la idea que ahora se puede deducir el rebote sobre una superficie curva, siempre y cuando esta superficie esté representada o se asuma por una función del plano cartesiano continua, porque tan simple que la recta tangente, es la recta inclinada del rebote en el punto de contacto.

En el V congreso científico de la Universidad de Oriente, expongo en la misma modalidad, el tema: "Rebote parabólico sobre una superficie curva conocida", variados docentes muestran interés en el hecho novedoso y sencillo, un maestro del bachillerato me dice que incluso se puede dar estos conocimientos en la cinemática de ese nivel. En ese Congreso otro docente me preguntó si yo había publicado estos hallazgos explicándome que luego de un arbitraje por expertos puedo publicar en una revista científica estas deducciones y ser reconocido como un "investigador", me recomienda ampliar estudios en la mecánica avanzada. Porque allí el conoce que existe el tema de colisiones.

Me dedico entonces a realizar una amplia investigación sobre el tema del rebote en general, cuando la labor diaria personal lo permite, empezando de nuevo por lo básico, leí y busqué el tema en todos los libros de física o mecánica clásica de la biblioteca central, donde solo encontré rebotes sobre rectas verticales y horizontales, como ejercicios propuestos únicos con las consideraciones idealizadas sencillas sobre los ángulos de rebote. Confirmando mi percepción inicial de que mi propuesta es inédita; luego en libros de Mecánica avanzada encontré el concepto de "Restitución" de toda colisión en función de las velocidades involucradas, valor que oscila entre "Cero y uno", (Casos extremos de colisiones perfecta inelástica y elásticas), estudié algunos problemas de rebote sobre superficies rectas inclinadas representadas por cuerpos, que se resuelven por "Cinética de la Partícula" y por la conservación de la energía mecánica. Es decir, si existe el rebote parabólico y se encuentra la dirección de salida del cuerpo con fórmulas y temas que se enseñan a mediados de la carrera de ingeniería mecánica. Donde por lo general son unidades que estando en los contenidos de estos libros, no se dan en los programas de asignaturas profesionales en las carreras de ingeniería, por su complejidad.

Entonces mi propuesta nivel básico es única, como se confirma en los libros a estos niveles, por no existir. Para términos del año 2009 escribo unas 15 páginas, (solo del rebote sobre una recta inclinada), donde ahora se respalda las deducciones con los resultados de los experimentos controlados que realice, donde se acuña una ecuación generalizada del ángulo de rebote, ya deducida de los eventos en toda colisión; sin ánimos de contar una larga historia, donde tuve muchas dificultades para publicar esta investigación como artículo, (historia que relato en otro trabajo como análisis filosófico en una crítica constructiva al mundo actual de las publicaciones y de quienes se dedican a administrarla).

No es sino hasta el 2014 cuando entrego una actualizada versión del "Rebote rectilíneo y parabólico sobre una superficie recta inclinada" en la universidad donde realizo el doctorado en educación, junto a otros tres artículos de temas diversos, sobre didáctica y gráfica de funciones matemáticas; para mediados del 2015, responden, con la aprobación de los cuatro artículos, que pronto saldrán en una versión de la revista: "Ciencia y Educación". En el año 2016 me entero de que la revista cerró su administración por diversos motivos, y todos los artículos aprobados quedaron sin ser publicados.

En diciembre viajo al Ecuador, para conversaciones con la Universidad de Guayaquil, por medio de talleres de formación docente en Matemática y Física. Logro una contratación en mayo del 2018, en un tercer viaje a este país, para el mes de marzo me contacto, con la revista "Paradigma" de la UPEL, la cual acepta publicar el artículo del rebote allí, emigrado de la otra revista de esa misma universidad, es el volumen 34, N° 1 de junio 2018; páginas 112-124.

Seguidamente envió mi segundo artículo: "Rebote parabólico sobre una superficie curva conocida", a la revista "Alternativas" en la Universidad Católica de Santiago de Guayaquil; el cual es aceptado y publicado en esa revista en diciembre de 2018. Volumen 19 N° 3; páginas 31-36. Además, coloco la primera publicación en mi GOOGLE académico. Hasta la fecha aparece en segundo lugar con sobre las 100 visitas y consultas, sobre el bello e interesante tema del rebote parabólico sobre superficies conocidas.

En julio del 2019 logro la tercera publicación sobre el tema del rebote parabólico, en esta oportunidad como recopilación de experimentos controlados del rebote en esferas de diferentes tamaños y constituciones, sobre superficies rectas horizontales e inclinadas, ensayos de laboratorio realizado junto al profesor Gustavo García, nuevamente en la revista "Paradigma" de la UPEL, volumen XL, (40), N° 1, página 218. Con los tres artículos publicados, decido hacer una compilación textual, con la "Editorial Académica Española", a finales del año 2019, luego para una mejor validación como obra contacto al grupo "Compas", para la publicación arbitrada de este texto en segunda edición.

Preliminares del tema del rebote

El rebote parabólico aquí desarrollado, consiste en ecuaciones geométricas sencillas que dan apertura a una gama de posibilidades con aplicaciones en la cinemática clásica, el Cálculo diferencial y la gráfica de relaciones en el plano, además puede tener aplicaciones y soluciones a situaciones actuales sobre todo lo relacionado a una colisión entre un cuerpo contra una superficie: Desde problemas en Física I, sistemas de ecuaciones en el plano de intercepción entre funciones algebraicas o trascendentes. En este texto se desarrolla el rebote parabólico de un cuerpo asumido como partícula, que, al chocar con una superficie considerada sólida, rebota de la misma en un movimiento parabólico consecuente por efecto de la gravedad terrestre siempre presente, como avance, porque en la actualidad solo se estudia cuando la superficie de contacto es una recta vertical u horizontal, en donde se invierte una de las componentes de la velocidad, sin asumir pérdida de rapidez por el choque ni pérdida de inclinación, como idealizaciones.

Este texto, abarca el rebote parabólico con una superficie recta inclinada y contra una superficie curva representada por una función conocida, ejercicios resueltos como ejemplos, ejercicios propuestos con sus respuestas, en el mejor posible orden de dificultad; así como los resultados de dos experimentos controlados seleccionados, para confirmar o validar las ecuaciones propuestas. Se agrega un cierre conclusivo y recomendaciones generales sobre la utilidad en el "uso" de estos avances en la mecánica clásica, tanto para el bachillerato, para la universidad, como en la vida diaria. La frase clave es: "Deducción del ángulo con la horizontal", de un cuerpo que rebota sobre una superficie conocida.

En el lanzamiento de proyectiles el cuerpo describe un movimiento parabólico cóncavo hacia abajo, (llamado convexo), por efecto del campo gravitacional terrestre donde la trayectoria ocurrirá en el tiempo de vuelo de la partícula; en este caso el estudio actual del desplazamiento se hace de forma paramétrica; es decir, por eje coordenado con funciones vectoriales por dimensión en relación con el tiempo.

Los movimiento de los cuerpos en líneas rectas y en planos asumidos como movimientos: Circular y parabólico ha sido estudiados desde la antigüedad por egipcios y griegos, entre otros, pero es el científico italiano Galileo Galilei (1564–1642) el primero en establecer modelos idealizados con aceleración constante, de la gravedad terrestre, él fue el primero en formular las ecuaciones básicas en el movimiento que denominó "Caída libre", al dejar caer diferentes objetos desde la torre inclinada de Pisa, contabilizando los tiempos, con los latidos de su corazón. La cinemática como parte de la mecánica clásica es una ciencia nacida de las mediciones del tiempo a finales del siglo XVII y sus ecuaciones se deducen con el estudio de las "áreas" al graficar las magnitudes de: aceleración constante, velocidad y posición en relación con el tiempo, descritas en el denominado método gráfico, (que demuestra la relación matemática por integración de estas magnitudes. En 1971 el astronauta David Scout dejo caer un martillo y una pluma sobre la superficie lunar, donde ambos llegaron al suelo simultáneamente, demostrando que están bajo la acción de un campo de aceleración constante, con fricciones despreciables; (Sears / Zemansky 1999).

En una colisión se producirán fuerzas impulsivas de un cuerpo sobre otro, por la 3era Ley de Newton, si el contacto se realiza bajo el esquema de sistema aislado (fuerzas externas despreciables), entonces el vector momento lineal total se conserva: $\vec{P}_F = \vec{P}_o \;\; \rightarrow \;\; \boxed{\overrightarrow{\Delta p} = 0}$

Luego se habla de "Coeficiente de restitución (**e**)", que denota el porcentaje de rapidez conservado en el rebote; (Berr / Russel 2010) y (Meriam Kraige 2007). Valor entre [0 y 1], que dice que para un valor cero los cuerpos en la colisión permanecen "juntos" o enganchados por las deformaciones del contacto o por seguir la dirección del choque, (colisión inelástica perfecta), con un valor de 1, es una colisión sin pérdida de energía cinética, (choque elástico), estos valores se obtienen de la fórmula: **e** = (V_{f2} – V_{f1}) / (V_{02} – V_{01}). Para dos cuerpos que choquen.

La situación física de un rebote es cuando un cuerpo, con dimensiones y de suficiente cohesión interna para no absorber toda la fuerza impulsiva, choca con una superficie de masa muy superior, (1), donde la masa del cuerpo es ínfima con respecto a esta, de tal forma que la misma conserva su reposo en el impacto; en consecuencia, para este caso la ecuación de restitución queda como: **e** = V_{f2} / V_{02}. Donde en la realidad el cuerpo rebota con tendencia a girar y vibrar en torno a su centro de masa, (lo que influye en el ángulo de salida con respecto a la horizontal), haciendo que este no sea solo dependiente del ángulo de entrada en el choque), situación que se desprecia al asumir el cuerpo como partícula en un contacto con la superficie puntual. Es decir, la consideración idealizada muy cercana a la realidad es el hecho que la magnitud del ángulo de incidencia con respecto a la superficie de choque será igual a la magnitud del ángulo de salida con respecto a la misma superficie recta, en el rebote.

En este trabajo se exponen las deducciones de ecuaciones que permiten conocer la dirección del movimiento del rebote de una partícula en un choque elástico o inelásticos con pérdida de rapidez sin pérdida de inclinación, en las situaciones de: rebote rectilíneo, rebote parabólico sobre una línea recta horizontal, vertical, inclinada y sobre una curva conocida; el trabajo plantea la posibilidad de incluir estos contenidos en el programa de la cátedra de Física I. Además de las situaciones inéditas de descubrir el encuentro o cruce entre funciones algebraicas y trascendentes, (de solo solución grafica o por algoritmos de aproximación), así como el arco total desplazado, son situaciones posibles en las asignaturas de: Cálculo Integral o incluso en los Métodos Numéricos.

La deducción de la dirección de salida de una partícula que rebota sobre una línea recta inclinada o sobre una curva conocida, son cálculos inéditos en la cinemática, generando un compás de datos e incógnitas que invitan al estudiante como al docente, al cálculo en los estudios básicos de: a) el alcance total después de cada rebote sobre una recta horizontal, vertical o inclinada. b) el cambio en la dirección de la velocidad, con su posible pérdida de rapidez en cada rebote que ocurra. c) el uso de técnicas numéricas con gráficas de relaciones para hallar los puntos de corte entre funciones algebraicas y transcendentes, y d) la integración para conocer de arcos de curva desplazados por el vuelo de la partícula en los casos de rebote sobre una superficie curva representada por una función conocida; es decir es un trabajo académico que genera y amplia conocimientos en temas fundamentales de la Física y la Mecánica universitaria

El trabajo ha sido realizado en función de lograr el aprendizaje a través de la práctica en la resolución de variadas situaciones ilustrativas de las tipologías especificadas de rebote de una partícula en una y dos dimensiones, con problemas resueltos y propuestos con la respectiva solución.

CAPITULO I

EL REBOTE PARABOLICO, SU DESARROLLO

Antecedentes

Son pocos los trabajos realizados en referencia al rebote parabólico de una partícula sobre una superficie dada, en los textos de mecánica clásica o Física para ingenieros, así como de Mecánica Racional en su parte de dinámica. Solo se muestran a manera de ejemplos particulares sin desarrollo conceptual, el rebote sobre una superficie recta horizontal y vertical, sin existir el tema en sus índices analíticos; el rebote parabólico ha sido desarrollado por el autor desde el año 2004: Aplicado en clases a sus estudiantes, en congresos nacionales, en numerosos talleres a docentes, y expresado en tres publicaciones de revistas científicas recientes, como se menciona en el prefacio.

En estas publicaciones el objetivo general, es el de ampliar la aplicación cinemática en el movimiento en el plano de una partícula, con la capacidad de rebotar, en movimientos parabólicos bajo la influencia del campo gravitacional, a la vez de abrir el debate de sus aplicaciones en general. Este trabajo reúne el contenido de estas publicaciones agregando una gama de ejemplos y ejercicios de aplicaciones en las materias de: Física I, Matemática II y Mecánica universitarias; así como los resultados en dos experimentos controlados del rebote de una esfera de hierro en una superficie recta horizontal de fórmica, y de una esfera plástica sobre una superficie recta inclinada de metal, como validaciones a las situaciones asumidas.

Definiciones necesarias

El lector debe estar en conocimiento de los conceptos básicos de la cinemática clásica, así como de conceptos desarrollados en referencia a la situación del rebote parabólico o lineal de una partícula sobre una superficie dada representada por una recta o por una curva conocida. Luego el movimiento parabólico como la “Mezcla” de un movimiento horizontal constante y una cinemática vertical libre, se define paramétrico por eje coordenado en función del tiempo, con las condiciones siguientes

Que la aceleración $\vec{a}_x$ en el eje "X", es constante igual a cero (movimiento horizontal uniforme), la aceleración $\vec{a}_y$ en el eje "Y", es constante con valor de la gravedad terrestre y no se considera la fricción del aire (movimiento vertical libre), sus ecuaciones son

Ecu. 1 $\boxed{\vec{Xf} = \vec{Xo} + \vec{Vox}\,.t}$ **Ecu. 2** $\boxed{\vec{Vf}_Y = \vec{Voy} + \vec{g}t}$

Ecu. 3 $\boxed{\vec{Yf} = \vec{Yo} + \vec{Vo}_y\,.t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2}$ **Ecu. 4** $\boxed{\vec{V}_{fy}^{\,2} = \vec{V}_{0y}^{\,2} + 2\vec{g}\,(\Delta Y)}$

Ecu. 5 $\boxed{\text{Tmax} = \frac{-\boldsymbol{Vo_y}}{\boldsymbol{\vec{g}}}}$ → T_{max} = $\frac{\boldsymbol{Vo_y}}{\boldsymbol{9.8}}$ (S. Internacional), con T_{Max} = $\frac{Vo_y}{32{,}2}$ (S. Ingles). Solo para velocidades iniciales positivas: verticalmente hacia arriba.

En el siguiente esquema, figura (1), se muestra un típico lanzamiento de un proyectil, con una velocidad inicial de componente en los ejes positiva, primer cuadrante, el ángulo Φ con la horizontal en el punto "A" o punto del lanzamiento, su movimiento en los puntos "B", "C" y "D" donde regresa a la altura de lanzamiento, culminando luego en el piso referencial.

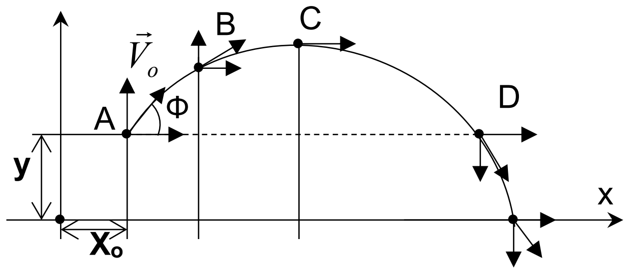


Figura 1: diferentes puntos de interés en un lanzamiento parabólico.

Dónde: $\boxed{\vec{Vo} = \vec{Vo}\,x + \vec{Voy}}$ Como el vector velocidad inicial. **Ecu. 6**

Y $\boxed{\vec{Vf} = \overrightarrow{Vf_x} + \vec{V}f_y}$ Como Vector velocidad final a cualquier tiempo. **Ecu. 7**

El ángulo en cualquier punto, con la horizontal será $Tan^{-1}(V_y / V_x)$. **Ecu. 8**

Siendo la rapidez, el escalar módulo de la velocidad, en cualquier instante.

Alcance horizontal: Distancia en línea recta horizontal desde el lanzamiento de la partícula hasta su nuevo contacto con la superficie, el cual se logra en el tiempo de vuelo, o tiempo en que la partícula permanece en el aire, con una trayectoria simétrica[1], este alcance tiene por relación

$$R = \frac{\vec{V}o^2 Sen(2\Phi)}{|\vec{g}|} \qquad \textbf{Ecu. 9}$$

Alcance por la inclinación: Distancia en línea recta representada por un segmento de la inclinación desde un primer rebote partícula hasta su nuevo contacto sobre ella. Este alcance no tiene su correspondiente fórmula particular, más adelante se hacen deducciones, a partir de cada situación cinemática especifica.

Alcance por la curva: Como la distancia en arco a través de la curva representada por una función continua[2], desde un primer rebote de la partícula hasta su nuevo contacto sobre ella; este alcance usa la ecuación del "Arco de una función" como aplicación de la integral definida.

Ángulos característicos en el rebote: Como simbología en este trabajo se utilizarán las siguientes letras del alfabeto griego para denotar los ángulos que intervienen y caracterizaran al movimiento parabólico, con sus posibles rebotes de una superficie sólida[3].

<u>Con respecto a la horizontal son</u>

Φ: Ángulo de todo lanzamiento parabólico, (Fi).

---

[1] En el texto: "Física I, Mecánica clásica para estudiantes de ingeniería". 2da edición; (Tirado 2015), se denomina a este tiempo de vuelo, "Exacto o Simétrico". Con $Y = Y_0$.

[2] Más adelante se aclara en el tema del rebote parabólico sobre una superficie curva, no exige que la función que la representa sea continua o monótona.

[3] Simbología necesaria de identificación de cada ángulo, que se mantendrá en la obra.

β: Ángulo de incidencia con respecto a la horizontal, donde choca la partícula que representa al cuerpo, (Vita).

α: Ángulo del rebote o dirección de salida después del contacto, con respecto a la horizontal (Alpha).

θ: Ángulo de la inclinación en donde ocurre el contacto, (Tita).

<u>Con respecto a la superficie de choque son</u>

γ: Ángulo aceptado como común, (Gamma). Del antes y después del rebote, en referencia a la superficie de contacto. Aceptación ideal para las situaciones de la física clásica, (ver figura 2 siguiente).

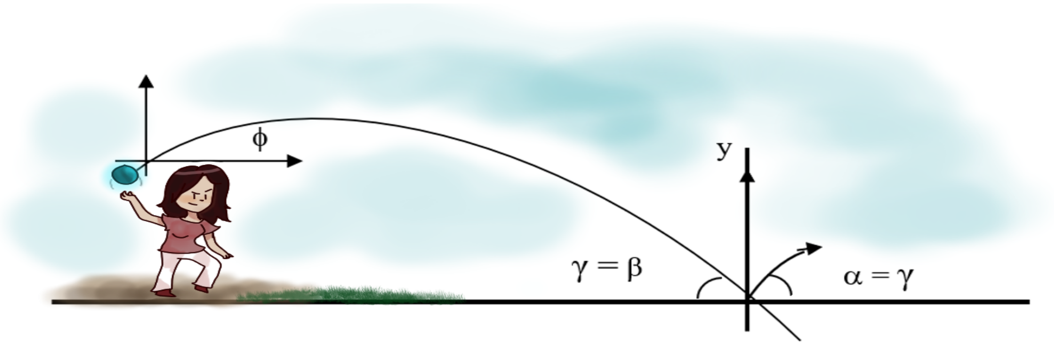


Figura 2: (Ángulos de un lanzamiento y rebote, caso horizontal con θ = 0°).

Coeficiente de restitución: Magnitud obtenida con el cociente de las velocidades relativas, al final y al inicio de una colisión,

e = $\frac{Vf1 - Vf2}{V01 - V02}$.

Este valor oscila entre cero, ("Cuerpos juntos" llamada colisión inelástica perfecta) y la unidad, o colisión elástica sin pérdida de rapideces. Donde se asume la conservación de la energía cinética. El denominador nunca se anula, en vista que las velocidades iniciales para que puede existir colisión deben ser o tener componentes opuestas.

Colisión: Evento entre dos o más cuerpos que entran en "contacto" en una fracción de tiempo, en donde existirá transmisión de fuerzas impulsivas.

Cuerpo que rebota: Como todo cuerpo considerado partícula o toda onda en cualquier medio que entren en colisión con una superficie dada, con capacidad de rebotar.
Rapidez: Escalar definido como el módulo del vector velocidad, en cualquier punto de su trayectoria, de dimensión distancia entre tiempo.
Rebote: Tipología de colisión donde un cuerpo que choca con una superficie impenetrable de masa considerablemente mayor, de tal forma que la transmisión de fuerza del cuerpo no afecta el reposo de la superficie y en consecuencia el cuerpo invierte el total o parte de su velocidad de incidencia, Aquí no se cumple la conservación del momento lineal. El cambio en las componentes de la velocidad nunca es proporcional, haciendo que haya diferencia en el ángulo de salida, salvo en los casos que se asuma como rebote elástico, donde la restitución es: **e** = $\frac{Vf1}{V01}$.
Tiempo de vuelo: Tiempo en que una partícula que es lanzada o que rebota de una superficie, permanece en el aire o en vuelo, bajo el campo gravitacional terrestre. Se considera tiempo de vuelo exacto o simétrico, cuando la altura de lanzamiento es igual a la altura de contacto con la superficie, y solo en este caso se toma como: dos veces el tiempo máximo.
Tiempo máximo: Tiempo en alcanzar la altura máxima de todo lanzamiento vertical o parabólico, donde la componente vertical de la velocidad inicial fue positiva.
Velocidad: Vector que indica las componentes por eje coordenado de distancia entre tiempo, de toda partícula en movimiento, en cualquier punto de su trayectoria.

TIPOLOGÍAS DE LOS REBOTES, DEDUCCIONES Y SITUACIONES

Como se ha dicho, el aporte al conocimiento de este trabajo radica en descubrir el ángulo de salida de un evento conocido como "Rebote" en diferentes circunstancias y con la siempre idealización de que los ángulos de incidencia y del rebote se conserva con respecto a la superficie; es decir, en el ínfimo contacto no hay deslizamientos ni giros apreciables en el cuerpo, que se asume para realizar estas deducciones, (procedimiento característico de la

Física clásica), cuando por ejemplo se considera la aceleración constante para poder realizar la formulación en la cinemática rectilínea[4]. Postura con bastante cercanía a la realidad, como veremos más adelante en los ensayos realizados para validar las fórmulas del rebote; donde incluso se pueden hacer "cambios" en datos de las innumerables situaciones posibles, con fines didácticos y de ejercitación, como apertura para la práctica en general del movimiento en el plano.

A continuación, las tipologías de rebotes, desde lo más básico y conocido, hasta las deducciones propuestas con ejemplos resueltos y ejercicios propuestos con su solución.

a) Rebotes en una dimensión sobre una recta, "Rectilíneos"

Es el rebote que continua por la misma recta de su incidencia, caso típico cuando se deja caer una pelota de goma desde una altura sobre un piso horizontal, incidencia y rebote al mismo ángulo de 90°, con evidente pérdida de rapidez por la energía disipada en el impacto; de hecho, si se observa bien, por lo general la pelota no retorna por la vertical; confirmando que la perdida de rapidez involucra, en la realidad del mundo, una pérdida de ángulo de elevación. Otro ejemplo ocurre si hacemos rodar un cuerpo esférico con fricción estática por rodamiento sobre un piso horizontal, y este rebota de la pared vertical contra la que choca, típico juego de niños, o el caso de las bolas de "Pool" en un juego de mesa, cuando la pelota rebota de la banda[5]. Interesante es que se puede asumir cambios angulares en la incidencia y en el rebote consecuente, además de pérdidas de rapidez, como datos o incógnitas de estas colisiones, en situaciones o problemas planteados.

b) Rebote parabólico sobre la recta horizontal

El término o incidencia de un vuelo parabólico típico que colisione contra un piso horizontal, los ejemplos más comunes son el balón de futbol al rebotar en el

---

[4] Fórmulas de aceleración, velocidad y posición de un cuerpo que se mueve en la horizontal o en la vertical.

[5] Todos estos como problemas y situaciones posibles, a estudiar en el bachillerato en general.

campo y la pelota de béisbol bateada o lanzada[6]; en ambos casos, la pérdida de rapidez por el rebote conduce a una menor elevación. Situación estudiada en este último deporte, cuando un "Campo" (Field), lanza la bola a la "Casa" (Home), para sacar a un jugador que corre por la gloria de anotar, se sabe que un vuelo directo demora mucho más tiempo que un par de vuelos parabólicos con un rebote intermedio. De hecho, suele ocurrir que las componentes de la velocidad de la pelota al rebotar cambian, donde la V_y disminuye sustancialmente por su inversión y la V_x tiende a conservarse e incluso a aumentar, por efecto de la conservación del ímpetu, si el sistema se considera aislado; pero siempre con pérdida de rapidez total como realidad, donde aun así la pelota llega a destino, en menor tiempo. (Esquema en la figura 3).

β = **α**, El ángulo se conserva, se puede asumir así, en un rebote sobre una superficie recta horizontal de ocurrencia de derecha a izquierda y/o viceversa, (Eje X); la velocidad de rebote en "x", conserva su dirección y la velocidad de rebote en "y", invierte su sentido. En estudios reales se sabe que ambas pierden valor, pero la componente V_y pierde más. Esta disminución en la rapidez del vector velocidad final o de impacto, es lo que implica una pérdida de elevación en el consecuente rebote.

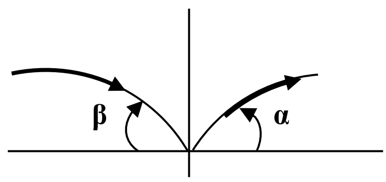


Figura 3: La componente vertical de la velocidad invierte su sentido, "Rebote sobre la horizontal".

c) Rebote parabólico sobre la recta vertical

La colisión ahora ocurre contra una pared vertical; este caso es la situación del llamado juego "Pelota de Pared"[7] entre dos o más personas, donde el

[6] Único ejemplo planteado sin resolver ni respuestas como rebote parabólico, con la horizontal, en el texto Serway, 4ta edición de 1999. Página 96, problema 16. Donde no se considera la altura inicial del lanzamiento.

[7] Ejemplo recordado como único rebote parabólico con la vertical, problema 104 en el texto de Tipler/Mosca. 2006. Quinta edición. Pp 76-77.

"lanzador" cercano al muro, busca el mejor o más escondido rebote posible, contra él jugador que debe tomar la pelota. (Ver figura 4). Aquí la componente de la velocidad con mayor pérdida es la V_x por invertir su sentido y puede ocurrir que la V_y gane valor, pero siempre con pérdida en el módulo de la velocidad total o rapidez. Recordando que el ángulo de la velocidad en cualquier tiempo de la trayectoria se calcula por tangente inversa de las componentes de la velocidad.

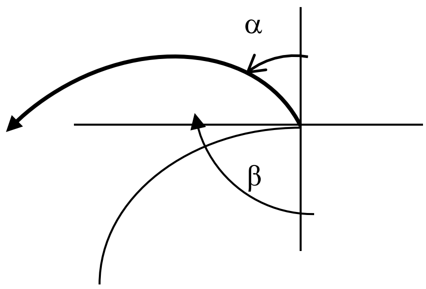


Figura 4: La componente horizontal de la velocidad se invierte, "Rebote sobre una superficie vertical".

β = **α**, El ángulo se acepta que se conserva en un rebote sobre una superficie lineal recta vertical, de ocurrencia de arriba hacia abajo y/o viceversa, con respecto a la vertical (Eje Y); la velocidad final en la horizontal invierte su dirección después del rebote y la velocidad final en la vertical puede o no conservar su sentido, dependiendo del ángulo "Vita" de incidencia, con la horizontal. En estas dos tipologías de rebote, se pueden considerar incluso, en situaciones a plantear como problemas y ejemplos a resolver, una independencia de la relación que exista entre la pérdida rapidez y la inclinación; es decir se pueden plantear situaciones con pérdida de rapidez y conservación de la inclinación, perdida de inclinación sin pérdida de rapidez, o ambas[8]. Luego es correcto pensar que el cuerpo que rebota en toda tipología pierde rapidez por la energía disipada en: el ruido que produce todo impacto, las posibles deformaciones, en los deslizamientos o vibraciones durante el tiempo ínfimo de contacto, (cuerpo con dimensiones).

[8] Problemas para desarrollar en el básico Universitario.

d) Rebote parabólico sobre una recta inclinada, "Bajada"

Como primera deducción de aporte, una simplicidad geométrica que permite descubrir o continuar resolviendo movimientos parabólicos consecuentes de rebotes previos, en superficies rectas inclinadas.

El cuerpo al rebotar incide sobre la inclinación, a un ángulo "**γ**" con respecto a esta, el cual se asume como "igual" en el rebote con respecto a la inclinación "**θ**". (Ver figuras 5 y 6 siguientes)[9], donde él ángulo de incidencia con respecto a la horizontal denominado con la letra griega beta "β", se obtiene por la tangente inversa de los componentes del vector velocidad final cuando hace contacto con la superficie: **$\gamma = \beta - \theta$,** luego al trasladar esta relación hacia el lado del rebote, se puede obtener el ángulo con respecto a la horizontal, esto es: **$\alpha = \gamma - \theta$.** De estas dos relaciones se obtiene la fórmula para obtener la dirección de salida o rebote, con respecto a la horizontal

($\alpha = \beta - 2\theta$) Ecu. 10

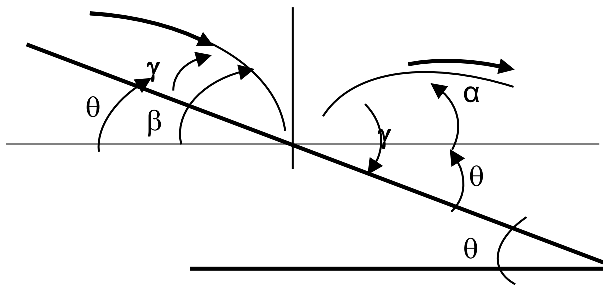


Figura 5: Rebote parabólico: "hacia abajo" sobre una recta inclinada

e) Rebote parabólico sobre una recta inclinada en "Subida"

En este caso similar el ángulo de la incidencia o choque del cuerpo con la superficie se obtiene con la relación de ángulos: **$\gamma = \beta + \theta$,** luego al trasladar esta relación hacia el lado del rebote se puede obtener el ángulo "**α**" del rebote con respecto a la referencia horizontal: **$\alpha = \gamma + \theta$.**

De estas dos relaciones se obtiene la fórmula para la dirección de salida con respecto a la horizontal, del movimiento parabólico hacia arriba en un rebote inclinado.

[9] Rebote parabólico sobre una recta inclinada, (Tirado 2018).

$$(\alpha = \beta + 2\theta) \quad \textbf{Ecu. 11.}$$

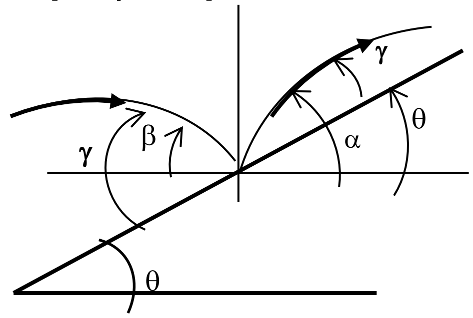


Figura 6: Rebote parabólico: “hacia arriba” sobre una recta inclinada.

Estas dos ecuaciones permiten el cálculo de variables cinemáticas nuevas como: Vector velocidad final, ángulo de incidencia, distancia total desplazada, tiempo total de vuelo y otros estudios de un movimiento parabólico que sea resultante de uno o varios rebotes sobre una superficie recta inclinada, a nivel de la Física inicial en el básico universitario. Siempre que se establezcan las consideraciones iníciales siempre indicadas: Que sea una partícula y el rebote se asume como elástico o con pérdida de rapidez, pero sin pérdida de inclinación, (proporción igual entre las componentes vectoriales: (V_y y V_x).

La inversión de la componente vertical o la anulación de una de las componentes de la velocidad dependerá del ángulo de incidencia “β**”,** el cual se calcula por la dirección de la velocidad en el tiempo de contacto con la superficie; donde el ángulo se rebote “α” depende del ángulo de incidencia y del ángulo de la superficie “θ ” (inclinación del de contacto)[10].

Las ecuaciones propuestas 10 y 11, son deducciones realizadas bajo la idealización propuesta de que el ángulo de incidencia y del rebote, con respecto a la inclinación “**γ”** es igual; sin considerar las fricciones por la colisión, donde el ángulo de rebote se vea afectado por el coeficiente de restitución **“e”**, como se señala en el tema de “Choques” del capítulo “Cinética de la partícula, método de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento”; textos de “Mecánica para Ingenieros, Dinámica”. Es decir, las ecuaciones expuestas en este trabajo pueden ser, en su enseñanza en la Física básica,

[10] Ejercicios posibles en clases de Física I

introductorias a los estudios posteriores de cinética de una partícula y la conservación de la cantidad de movimiento.

De hecho, será igual, al de un análisis de este nivel con el coeficiente de restitución igual a la unidad: **e = 1**, choque elástico, es importante y siempre acotar que las situaciones ideales son comunes en la Física clásica, como se ha dicho; entre las más conocidas están: La aceleración constante, en la cinemática, luego los coeficientes de fricción contantes y nulos, las cuerdas de conexión sin masa e indeformables, las poleas sin masa ni fricciones internas y los cuerpos asumidos como partículas, en la dinámica clásica.

f) Situaciones posibles en el rebote sobre una inclinación

1) La rapidez de incidencia por lo general no se conserva, existiendo pérdida de energía por la deformación y recuperación del cuerpo y del ruido que se produce, (choque plástico o inelástico). Entonces se pueden considerar problemas con rapidez de rebote menor, sin pérdida de inclinación y/o con pérdida de inclinación de dato, sin pérdida de rapidez. Entre muchas posibilidades a considerar y ejemplarizar.

2) Si se deja caer un cuerpo sobre una inclinación entonces el valor de "Beta" es noventa grados, $\beta = 90°$. Si la inclinación es igual a 45° "Alpha" será nulo, $\alpha = 0°$, Si la inclinación es menor a 45° "$\boldsymbol{\alpha}$" será positivo, y si la inclinación es mayor a 45° "Alpha" será negativo $\alpha < 0°$, rebote por debajo de la horizontal. Esta última situación posible se ilustra en la figura 7.

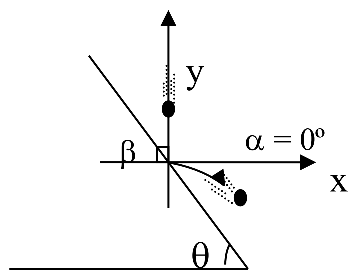


Figura 7: Rebote en caída libre. ($\beta = 90°$), y θ mayor a los 45º.

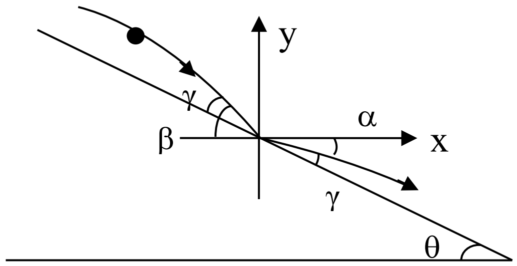


Figura 8: Rebote de salida, por debajo de la horizontal.

3) En un lanzamiento hacia abajo puede ocurrir que el ángulo de salida "Alfa" después del rebote sea negativo. (Ver figura 8). El ángulo: $\alpha < 0º$. Lo que implica que el siguiente movimiento es por debajo de la horizontal. Similar al tercer caso anterior.

4) En un lanzamiento "Hacia arriba" puede ocurrir que el ángulo de incidencia este por debajo de la horizontal, el cuerpo no ha alcanzado su altura máxima cuando choca con la inclinación, $\beta < 0º$, la componente vertical de la velocidad conservará su sentido en el rebote. (Ver figura 9).

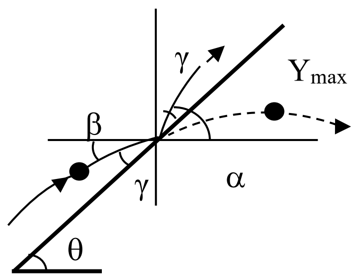


Figura 9: Rebote con la incidencia por debajo de la horizontal.

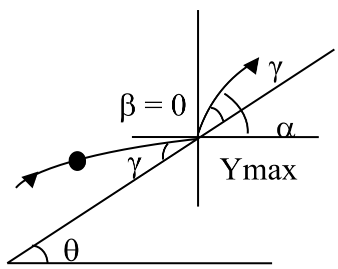


Figura 10: Rebote "Hacia arriba" con el ángulo de incidencia a 0° grados.

5) En un lanzamiento hacia arriba donde el cuerpo incida sobre la inclinación a cero grados, justo en el instante que alcanza su altura máxima, Vy = 0, donde el ángulo de incidencia es $\beta = 0º$, y el rebote dependerá de la inclinación Tita. (Ver figura 10).

6) Si el ángulo de incidencia "Beta" es mayor o igual que cero, $\beta \geq 0°$. La inclinación tiene un ángulo igual o superior a los 45°. (Ver figura 11). El cuerpo puede rebotar verticalmente o en un movimiento parabólico "de regreso"; es decir "Alfa" es mayor a los noventa grados, $\alpha > 90°$, y la componentes horizontal y vertical, de la velocidad se invierten.

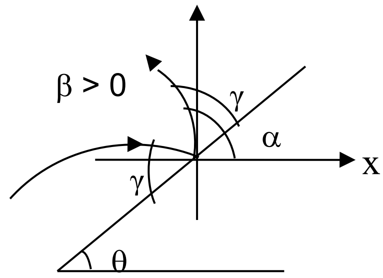


Figura 11: Rebote "Hacia arriba" con ángulo mayor a los 90º.

g) Rebote parabólico sobre una superficie curva conocida

Esta situación se genera a partir de necesidades y situaciones como: ¿Sera posible hacer estudios de rebote parabólicos sobre superficies curvas? La respuesta está, en que para el encuentro o colisión del movimiento parabólico con una superficie curva se debe considerar dos aspectos

a) La superficie debe estar representada por una función del plano cartesiano conocida y derivable[11].

b) las ecuaciones paramétricas típicas del movimiento parabólico en el plano deben expresarse en la función parábola de la partícula; es decir se extrae el parámetro "Tiempo" y se expresa como una función y = f(x), a partir de las ecuaciones por cada eje coordenado, esto es

1) Eje horizontal: $V_{fx} = V_{ox}$; $\quad X = X_o + V_{ox} t$

2) Eje vertical: $V_{fy} = V_{oy} + gt$; $\quad Y = Y_o + V_{oy} t + \frac{1}{2} g t^2$

2) Ecuación de la parábola, expresada como la siguiente función del plano

[11] La función no tiene que ser monótona, e incluso no necesariamente continua, como se verá más adelante.

$$Y = Y_o + (X - X_0).Tan\phi + \frac{1}{2}\left(\frac{g(X - X_0)^2.Sec^2\phi}{V_o^2}\right)$$ Del lanzamiento parabólico.

$$Y = Y_o + (X - X_0)Tan\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{g(X - X_0)^2.Sec^2\alpha}{V_o^2}\right)$$ Del rebote parabólico.

Formula que representa la parábola convexa, con un máximo único o parábola cóncava hacia abajo, característica de todo movimiento parabólico terrestre con la gravedad como el vector g = -9.8j m/s^2 o -32,2j p/s^2.

Ecuación que se simplifica un poco cuando el lanzamiento a un ángulo **ϕ,** para el caso de un rebote con inclinación **α**, ocurre desde un origen : (X_0; Y_0) = (0; 0). Luego si el objeto lanzado rebota de la superficie de tal forma que no exista deslizamiento o rotación del mismo; el tiempo de contacto sea muy pequeño o ínfimo, y el choque se considere aproximadamente elástico, entonces el ángulo de salida del rebote sobre la superficie curva "**α**", será igual al usado en las ecuaciones 10 u 11, una vez se calcula el ángulo "**θ**", de la pendiente de la recta tangente a la superficie en el punto de contacto, por derivación de su fórmula, (punto común).

Con el ángulo "**β**" de incidencia es que se conoce la velocidad de la partícula al hacer contacto con la superficie, donde se encuentran las fórmulas del plano: del movimiento parabólico de la partícula, con la ecuación de la superficie[12].

Siendo este último dato, el más difícil de hallar, cuando se igualan funciones de ecuaciones algebraicas compuestas con trascendentes, donde se acude al método: "Grafica de relaciones", para poder hallar dichas intersecciones o con la resolución, por algoritmos reductores del llamado método de Newton-Rapson[13]. Para un solo contacto o varios rebotes sobre la superficie curva[14].

---

[12] Problemas y ejercicios para plantear, en Física III de existir en el pensum, o en Dinámica. Toda vez que el estudiante tenga la noción de la derivada y la gráfica de relaciones, (haber aprobado la primera Matemática universitaria).

[13] Método para encontrar soluciones algebraicas en polinomios por algoritmos de aproximación.

[14] Ejercicios aplicables a la Matemática IV, o en los llamados métodos numéricos.

La figura 12 ilustra un rebote con "**β**" en caída libre a 90°, como ejercicio de ejemplo inicial, (desarrollado aquí como ilustración), sobre la superficie representada por la función logarítmica: y = Ln(x), en el punto común de primer contacto: $X_0 = 2$; es decir, con f´(2) = 1/2 de pendiente, el ángulo de la inclinación en el contacto es: θ = $Tan^{-1}(0{,}5) = 26{,}57°$, entonces el ángulo de rebote "**α**", del movimiento parabólico consecuente se calcula con la ecuación 10, (rebote sobre una recta hacia abajo), esto es

α = 90° - 2(26,57°) = 36,86° ~ 37°.

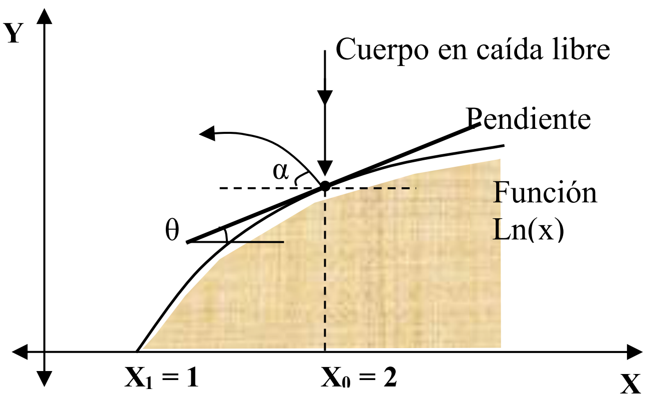


Figura 12: ángulo de la inclinación: $\theta = Tan(Y'(X_1))$ y el ángulo de rebote como: α = β - 2θ.

La ecuación del nuevo movimiento parabólico en cualquier sistema de medición será a partir del punto (2; 0,7) en metros o pies, como

$$Y = 0{,}7 - (X-2)Tan(37°) - \frac{\left(4{,}9(X-2)^2 Sec^2(37°)\right)}{V_o^2}$$

Sistema internacional, g = 9,8 m/s².

$$Y = 0{,}7 - (X-2)Tan(37°) - \frac{\left(16{,}1(X-2)^2 Sec^2(37°)\right)}{V_o^2}$$

Sistema inglés, g = 32,2 p/s².

Conocida o dada la rapidez de impacto, la velocidad del rebote con el ángulo calculado se calcula vectorialmente en sus componentes a eje coordenado, con el signo respectivo según se plantea o dibuje el problema; en este caso con la velocidad en la horizontal negativa, es que produce que el segundo término de la ecuación de la parábola sea negativo.[15]
Seguidamente se verifica si el cuerpo y la superficie curva, vuelven a coincidir en un nuevo contacto[16], por igualación de la nueva parábola con la superficie dada. O la partícula colisiona contra cualquier otra superficie o inclinación; de hecho, a partir de la ecuación general se pueden usar las ecuaciones paramétricas por eje coordenados para otros o cualquieras cálculos requeridos. Luego para un próximo rebote se sigue la secuencia usada, lo que genera u origina dos casos de solución matemática diferente, cuando se busca igualar las ecuaciones del rebote parabólico con la ecuación representativa de la superficie curva.
Caso 1) La nueva ecuación parabólica del cuerpo que rebota y la ecuación que representa la curva, no tiene solución, es decir no se encuentran de nuevo, caso visual del ejemplo anterior, lo que implica que no existirá un nuevo contacto entre ambas y por ende no ocurrirá un nuevo rebote. Recordando que el primer contacto puede ser desde un movimiento parabólico o caída libre, previo.
Caso 2) La solución de la igualdad de la ecuación potencial parabólica con una ecuación de la superficie curva, sea esta algebraica o trascendente, permite encontrar el nuevo punto de contacto, el nuevo ángulo de rebote y la nueva ecuación parabólica del cuerpo que rebota.
Ver figura 13 siguiente: Que inicia con una caída libre sobre una superficie representada por la función continua del primer cuadrante: y = $\sqrt{X}$ radical, desde un primer punto X_0, con un segundo contacto en X_1.

[15] El signo negativo en el segundo término surge de que el movimiento es a la izquierda.
[16] Aceptando que la función superficie no necesariamente debe ser continua, porque la ecuación parabólica del cuerpo que rebota puede "Volar" a través de la discontinuidad, sea esta esencial, por intervalo o puntual.

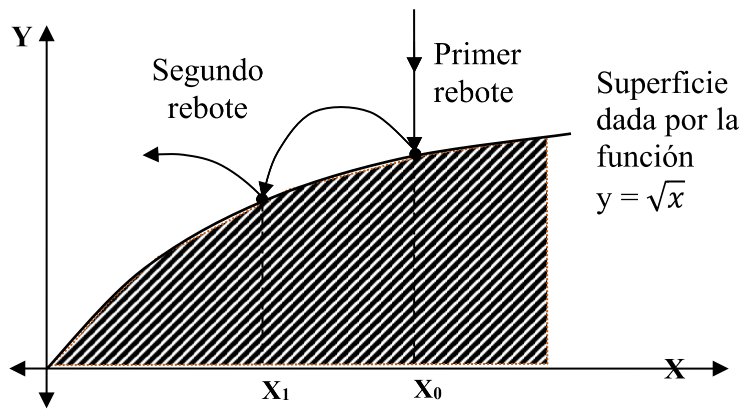


Figura 13: El cuerpo que rebota regresa a la superficie curva, en el punto X_1

Luego si se conocen los dos puntos de contacto en el eje "X" entre el cuerpo que rebota y regresa a la superficie curva, entonces se puede conocer el "Arco de curva" desplazado por el cuerpo sobre su "Vuelo" sobre la superficie conocida y representada por una función del plano[17]. Ver esta posibilidad en la siguiente figura 14.

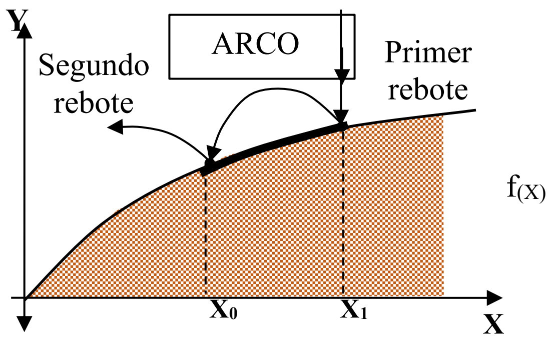


Figura 14: Arco desplazado por el cuerpo, después de dos rebotes sobre la superficie: y = $\sqrt{x}$.

[17] Ejercicios posibles para desarrollar en la Matemática II, llamada Cálculo Integral, sobre aplicaciones de la integral definida, denominada "Arco de curva": $ARCO = \int_{X_0}^{X_1} \sqrt{1 + (F_X')^2}$. Este cálculo, si exige que la función sea continua, para este vuelo del rebote parabólico.

h) Situaciones posibles en el rebote sobre una superficie curva

1) En un lanzamiento hacia arriba puede ocurrir que el ángulo de incidencia este por debajo de la horizontal, (figura 15); el cuerpo no ha alcanzado su altura máxima cuando choca con la curva, entonces el ángulo “Beta” es negativo (β < 0).

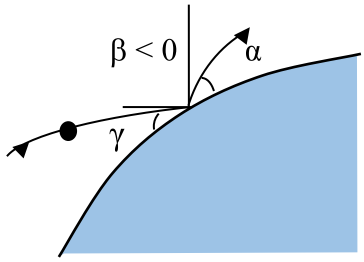


Figura 15: Rebote “Hacia arriba” con el ángulo de incidencia por debajo de “X”.

2) En un lanzamiento hacia arriba donde el cuerpo incide sobre la curva a cero grados justo en el instante que alcanza su altura máxima, entonces el ángulo “Beta” de incidencia será igual a cero (β = 0).

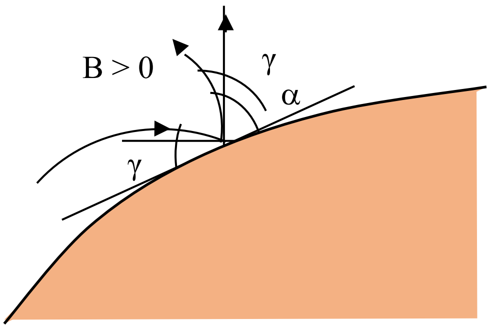


Figura 16: Rebote vertical o de “Retorno” con el ángulo de incidencia por encima de la horizontal.

3) Si el ángulo de incidencia “Beta” es mayor o igual que cero, y la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de contacto es igual o superior a los 45°, el cuerpo puede rebotar exactamente vertical o en un movimiento parabólico “de regreso” con respecto a su lanzamiento inicial. (Figura 16).

4) En un lanzamiento hacia abajo puede ocurrir que el ángulo de salida "Alfa" después del rebote sea negativo ($\alpha < 0$), lo que implica que el siguiente movimiento parabólico es por debajo de la horizontal; es decir "α" es un ángulo medido en sentido horario. (Figura 17)[18].

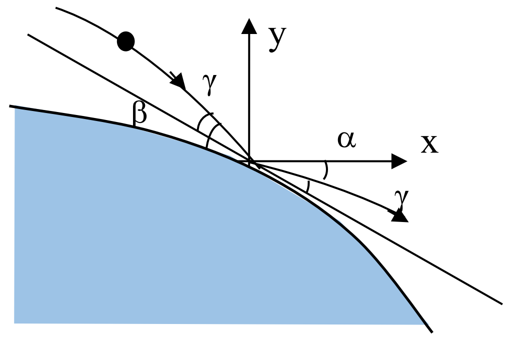


Figura 17: Rebote "Hacia abajo" con ángulo por debajo de la horizontal.

[18] Entre las cuatro más interesantes, de muchas posibles y similares al rebote parabólico sobre una superficie recta inclinada.

CAPITULO II

EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS POR TIPOLOGIA

1) Rebote rectilíneo de una partícula sobre una superficie recta

Si en el juego típico infantil, una pelota de goma que rueda por un piso choca contra una pared que está dispuesta normal o perpendicular con la trayectoria de choque, entonces la pelota rebota en el mismo ángulo de incidencia de 90° con respecto a la pared, y la rapidez de salida estará condicionada a la rapidez de choque, las energías disipadas por el ruido, el calor disipado y las deformaciones internas del cuerpo que rebota, sin afectar la dirección de salida, la cuál será solo dependiente de la dirección o ángulo de contacto; datos y situaciones que se pueden variar.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1.1: Una niña de preescolar lanza una pelota de goma rodando por un piso horizontal, esta golpea la pared a 2 metros y regresa a la niña en una posición a 18 Cms. de donde fue lanzada, (figura 18). Calcular el ángulo de incidencia a la pared.

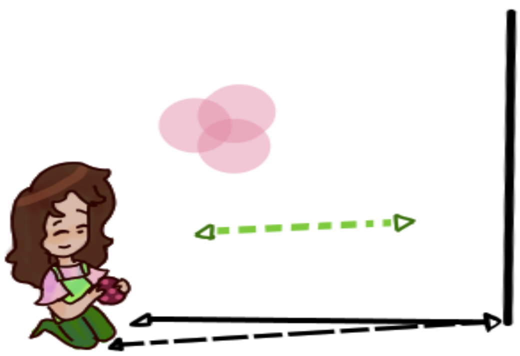


Figura 18: Juego infantil de pelota-pared.

Respuesta: El problema es una simple relación de trigonométrica al considerar un triángulo isósceles en la trayectoria de la pelota y de la igualdad en los ángulos de incidencia y rebote.

La altura del triángulo es de 2 metros y su base de 0,18 metros, donde está la niña, por lo que el ángulo interno en el punto de impacto de cada triángulo rectángulo que resulte de dividir exactamente el triángulo isósceles es

$Tan^{-1}(0{,}09/2) = 2{,}58°$. La pelota golpea la pared a 87,42°.

Ejercicio 1.2: Del ejemplo 1.1 anterior, considere que la pelota es lanzada a una rapidez de 1,4 m/s. En el choque pierde un 20% de su rapidez, sin afectar el ángulo de rebote. Calcule el tiempo total del recorrido de la pelota.

Respuesta: Los recorridos de la pelota son dos de 2,074 metros cada uno, hipotenusa de cada triángulo rectángulo que conforma el triángulo descrito por la pelota, entonces el recorrido de incidencia se hace en un tiempo de llegar a la pared de: $T_1 = 2{,}074/1{,}4 = 1{,}48$ s. El de rebote a menor rapidez será de: 1,85 s. Para un total de 3,33 segundos.

Ejercicio 1.3: Del ejemplo 1.2. Calcule el tiempo total de recorrido si en todo el trayecto actúa un coeficiente de roce estático por rodamiento de 0,015 y la masa de la pelota es "m" gramos.

Respuesta: El coeficiente de roce implica una frenada constante en la pelota sobre un piso horizontal por efecto de la fricción estática: $F_E = m(a_E)$. Esto significa que: $F_E = m.g.0{,}015$. Entonces la aceleración de frenado constante es: 0,147 m/s^2. El tiempo en el recorrido de incidencia se calcula cinemáticamente: $2{,}074 = 0 + 1{,}4(t) - 0{,}0735(t)^2$, con un resultado 1,62 s. En el recorrido del rebote con la relación: $2{,}074 = 1{,}12(t) - 0{,}0735(t)^2$, incluyendo la perdida de rapidez de la pelota del 20%, con un resultado de 2,15 s. Para hacer un total de 3,77 segundos.

Ejercicio 1.4: Una bola de "Pool" choca a 8 m/s, y 22° de la banda de una extraña mesa con buchacas como las indicadas, en donde pierde un 15% de su rapidez. (Ver figura 19). Si entra a ese hueco en 0,13 segundos. Calcular a que distancia perpendicular de la banda está, esa meta.

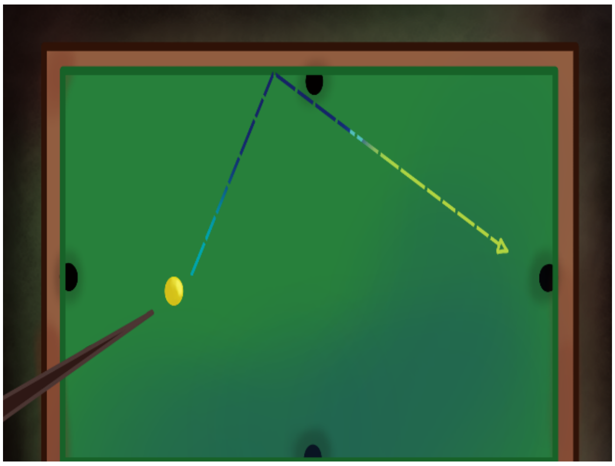


Figura 19: Juego de mesa con bolas duras.

Respuesta

V_f = (8Cos22°i - 8Sen22°k) m/s = (7,418i - 3k) m/s. Choque.

Luego la velocidad de rebote: V_r = (6,305i + 2,547k) m/s. (Pérdida del 15%)

En 0,13 segundos la componente de la velocidad, perpendicular a la banda de contacto inicial o paralela a la siguiente banda, desplaza una distancia en metros de: 2,547x0,13 = 0,3312. (33,12 Centímetros).

Ejercicio 1.5: Del ejemplo anterior, número 1.4, considera que la bola, además de perder rapidez, pierde 5° de inclinación al rebotar, con respecto a la banda; es decir rebota más pegada a esta, y calcule en que tiempo desplaza con la horizontal, 50 Centímetros.

Respuesta: El ángulo de incidencia es de 22° y el ángulo del rebote es de 17° con una rapidez de 6,8 m/s; el vector velocidad de rebote será ahora de: V_r = (6,503i – 1,988k) m/s. Luego para recorrer 0,5 metros se requiere un tiempo de: T = 0,5/1,99 = 0,25 segundos

Ejercicios propuestos, con respuesta

Ejercicio 1.6: Una bola de "Pool" choca a 7,5 m/s a 82° de la banda, en donde pierde un 22% de su rapidez, si la velocidad de rebote es el siguiente vector: V_r = (1,316i + 5,7k) m/s, diga que ángulo de inclinación se pierde con la banda. **Respuesta 5°.**

Ejercicio 1.7: Un balón o pelota inflada se deja caer desde una altura de 1,6 metros de un piso horizontal y luego de rebotar alcanza una altura máxima de 1,5 metros, (figura 20). Cuanta rapidez porcentual se pierde en el rebote.

Respuesta: 6,25%.

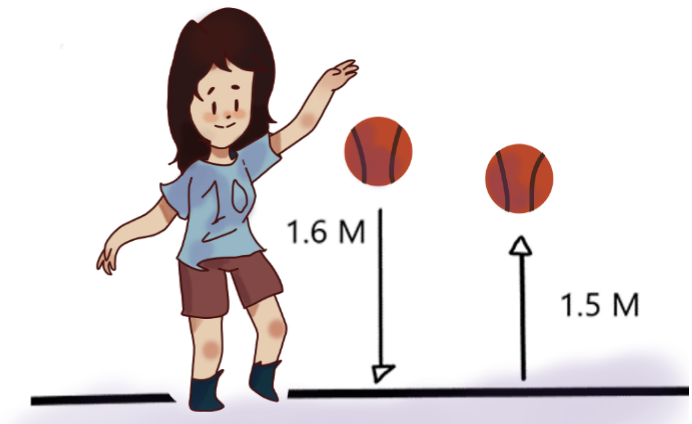


Figura 20: Rebote vertical, con pérdida de rapidez.

Ejercicio 1.8: Un balón de plástico cae desde el reposo rodando 3 metros por una inclinación de 30° y de coeficiente de roce estático por rodamiento de 0,12. (Figura 21). Choca con un borde al final de la inclinación, en una incidencia a 65° de este. Calcular la rapidez de choque y que distancia máxima se aleja del borde, en el rebote, si pierde la mitad de su rapidez.

Respuesta: V_C = 4,826 m/s. 0,616 M.

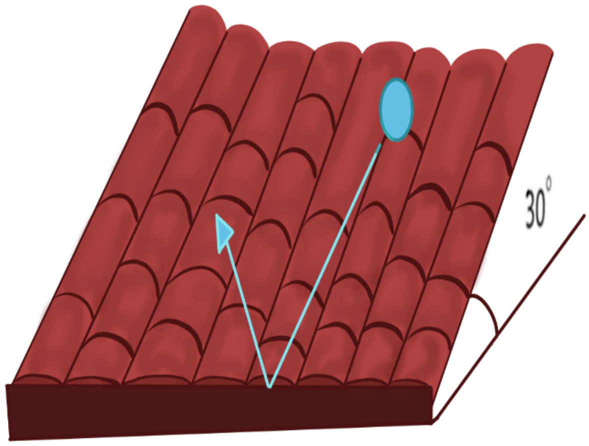


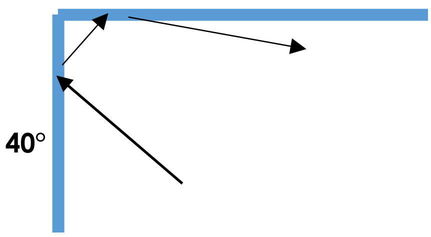
Figura 21: Rebote de un balón que cae, al rodar.

Ejercicio 1.9: Del ejercicio 1.8 considere que el balón no pierde rapidez al chocar con el piso, pero logra la altura máxima de 1,5 metros por tener pérdida de inclinación. Calcule el ángulo de rebote con respecto al borde, y el vector velocidad de rebote.

Respuesta: θ_R = 45°. (Pérdida de inclinación de 20°).

V_r = (3,41i + 3,41j) m/s.

Ejercicio 1.10: Una canica rueda por un piso a 7,5 m/s cuando golpea contra dos paredes en una esquina de 90° entre las paredes, si incide a 40° de la primera pared. (Ver esquema siguiente). Calcule el vector velocidad del segundo rebote, si en cada colisión pierde 20% de su rapidez y 6° de inclinación.



Respuesta: V_{r2} = (4,24i - 2,25j) m/s.

2) Rebote parabólico sobre una superficie recta horizontal o vertical.

Ejercicios Resueltos

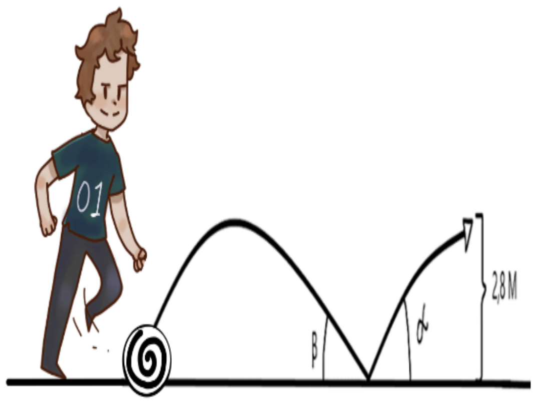


Figura 22: Balón pateado sobre la horizontal.

Ejercicio 2.1: Un jugador de futbol patea un balón en un campo plano a una velocidad de (15i + 10j) m/s. Si el balón rebota del piso sin perder rapidez. Calcule a que distancia horizontal y en ascenso el balón logra los 2,8 metros de altura en su rebote, medido desde el jugador. (Ver figura 22).

Respuesta: El balón sale 18,03 m/s con una elevación de 33,70°. Logrando un primer alcance de: $R = (18{,}03)^2 \text{Sen}(67{,}4°)/9{,}8 = 30{,}62$ metros.

Como el balón no pierde rapidez en el rebote, entonces continua su movimiento con velocidad de (15i + 10j) m/s.

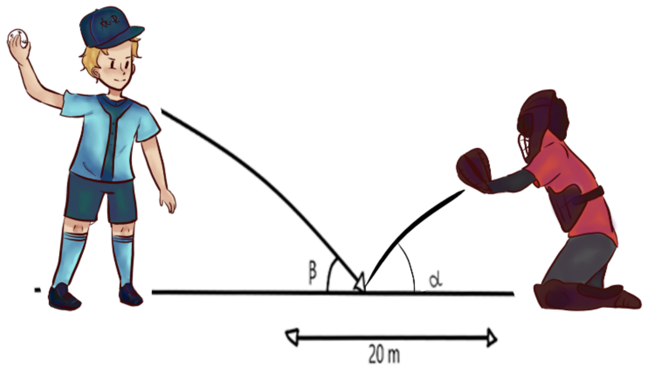
Luego la altura de 2,8 metros en el rebote se logra en dos tiempos, de la relación: $2{,}8 = 10(t) - 4{,}9(t)^2$. Que tiene como resultado los tiempos de: 0,335 y 1,706 segundos, (subiendo y bajando).

La distancia horizontal para el primero es: $X = 15(0{,}335) = 5{,}025$ metros.

Es decir, el balón logra los 2,8 metros de altura después de rebotar, a los 35,65 metros horizontales del jugador.

Ejercicio 2.2: Un campo derecho, lanza una pelota de béisbol en un movimiento parabólico, esta golpea el piso a 20 metros del receptor con velocidad de incidencia: (20i – 14j) m/s. (Figura 23). Si la pelota rebota con rapidez de 15 m/s. Calcular en que tiempo después del rebote llega a la casa, "Home", y que altura tiene, cuando es atrapada.

Figura 23: Pelota que rebota sobre la horizontal.



Respuesta: El ángulo de incidencia es $Tan^{-1}(-14/20) = -35°$, es decir de 325° con la horizontal, o 35° con la horizontal en sentido horario en el tercer cuadrante, con la rapidez de salida de 15 m/s. La velocidad del rebote es de: (12,287i + 8,604j) m/s. (Ángulo conservado).

El tiempo en alcanzar el "Home" es de: 20 = 12,287(t) → t = 1,628 segundos.

La altura en ese momento es: $Y = 0 + 8{,}604(1{,}628) - 4{,}9(1{,}628)^2 = 1{,}02$ M. (Quizás muy alta para poder hacer el "Fuera").

Ejercicio 2.3: Un campo central, toma la pelota y quiere alcanzar el "home" ubicado a 55 metros de su posición; si quiere que la pelota realice un solo vuelo en donde alcance la distancia máxima horizontal, (despreciando la altura inicial del lanzamiento). Calcule la velocidad inicial y el tiempo de vuelo, luego si realiza un lanzamiento con un ángulo de la mitad del primer lanzamiento e igual rapidez de tal forma que la pelota realice un rebote en donde pierde un 30% de su rapidez. Calcule el tiempo total en llegar a "Casa" bajo ambos esquemas y compare.

Respuesta: Como los 55 metros es la distancia de alcance máximo, vuelo simétrico, entonces el lanzamiento debe ser a 45° y la rapidez inicial se calcula como: $55 = Vo^2.Sen(2\Phi)/g$ → $55(9{,}8) = Vo^2Sen(90°)$. → $V_0 = 23{,}22$ m/s. Entonces este vector es: $(16,42i + 16,42j)$ m/s. El tiempo de vuelo es exacto o simétrico, cuando $Y = Yo$: $t = (2)(16,42)/9,8 = 3,35$ segundos. (Primer esquema).

Ahora si el lanzamiento es a 22,5° con la horizontal, el vector velocidad inicial resulta como: $23,22(Cos22,5i + Sen22,5j) = (21,453i + 8,886j)$ m/s.

Y el primer alcance, antes del rebote, es de

$R = (23,22)^2.Sen(45)/9,8 = 38,90$ metros. (Faltan 16,1 metros para la "Casa".

En un tiempo simétrico t_1 de: $(2)(8,886)/9,8 = 1,814$ segundos.

Luego la pelota al rebotar y perder un 30% de su rapidez quedando en 16,25 m/s con un ángulo de salida de 22,5° igual al de incidencia, considerando las condiciones iníciales, entonces el vector velocidad en el rebote es de $16,25(Cos22,5i + Sen22,5j)$. $Vr = (15,01i + 6,22j)$ m/s.

El tiempo en recorrer los (55 – 38,9) metros restantes, para que la pelota llegue a la casa, (Home), se calcula como: $16,1 = 15,01(t_2)$.

Es decir, en: 1,073 segundos. En ese tiempo su altura cuando llega al diamante se calcula por la relación: $Y = 0 + 6,22(1,073) – 4,9(1,073)^2$. Que da 1,033 metros.

Es decir, el tiempo total en que la pelota recorre los 55 metros con un rebote en su recorrido es de: **t_T = 2,887 segundos**. Menor al esquema de un solo vuelo total, a pesar de que se pierde rapidez en el rebote, solo que aquí la pelota llega a destino, con una altura de 103,3 centímetros de alto.

<u>Ejercicio 2.4:</u> Del problema anterior, ejemplo 2.3, considere que la pelota que llega al "Home", después del rebote, lo hace a altura cero iguales a la del vuelo mayor a 45°, entonces estime a que ángulo debe lanzarse para que bajo esta condición realice un rebote y cubra la distancia de 55 metros totales, en dos vuelos simétricos o exactos, y en qué tiempo total lo realiza.

Respuesta: En el primer vuelo de la pelota, considerando una altura inicial despreciable, se cubre una distancia de: $d_1 = Vo^2.Sen(2\Phi)/g$.

Si la pelota pierde un 30% de su rapidez al rebotar, sin perder inclinación, entonces la segunda distancia es: $d_2 = (0,49)\ Vo^2.Sen(2\propto)/g$.

Con $(\propto = \Phi)$. Angulo de lanzamiento igual al rebote.

Como la suma de las distancias debe cubrir la distancia de 55 metros y la rapidez inicial de 22,23 m/s. Con la pérdida en el rebote. Entonces queda la relación 55 = $(22{,}23)^2$.Sen(2Φ)/g + $(15{,}56)^2$.Sen(2Φ)/g. El resultado del ángulo es de: **23,527°**, para llegar a destino, al ras del suelo[19].

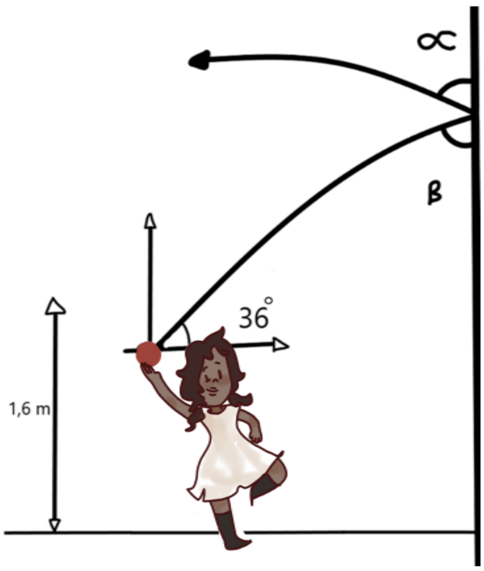


Figura 24: Juego "Pelota de pared", en rebote hacia arriba.

Ejercicio 2.5: Una joven ubicada a una distancia horizontal de una pared vertical. (Figura 24), lanza una pelota de goma desde los 1,6 metros de alto a velocidad de 16 m/s con 36° de inclinación, si la pelota llega a la pared en 0,8 segundos y rebota sin perder rapidez. Calcular: Vector velocidad de rebote y la altura de la pelota cuando pasa exactamente sobre la muchacha en su vuelo.

Respuesta: El vector velocidad del lanzamiento es: (12,94i + 9,4j) m/s. Luego la pared está a una distancia de: X = 12,94(0,8) = 10,352 metros; y la velocidad de contacto con la pared, a ese tiempo, es: (12,94i +1,56j) m/s. (Acción de la gravedad en ese tiempo). Al rebotar y no perder rapidez la pelota sale con: (-12,94i + 1,56j) m/s. (Invirtiendo solo la componente horizontal); desde una altura, calculada como: Y = 1,6 + 9,4(0,8) – 4,9$(0{,}8)^2$ = 12,256 metros, en la pared.
Con la misma rapidez horizontal, la pelota pasará por la posición de la niña en otros 0,8 segundos, su altura es: Y = 12,556 + 1,56(0,8) – 4,9$(0{,}8)^2$. Que da como

19 ¿Puede un jugador profesional por experiencia, lograr estos resultados, en el instante de un juego? Estudio interesante si se incluyen estas fórmulas en las prácticas; es decir que, en función de la distancia estimada el jugador realiza su lanzamiento a ángulo. Aceptada su rapidez y perdida en el rebote.

resultado los 10,37 metros; es decir a 8,77 metros de la altura de lanzamiento. (Un vuelo interesante).

Ejercicios propuestos, con respuesta

Ejercicio 2.6: Rehaga el problema anterior, ejemplo 2.5, con el hecho lógico que la pelota pierda el 16% de su rapidez, que se disipa como energía por concepto de ruido y deformaciones internas en la goma, al rebotar.

Respuesta: Vr = (-10,87i + 1,31j) m/s.

La pelota pasa a 8,53 Metros. (6,93 metros por encima de la joven).

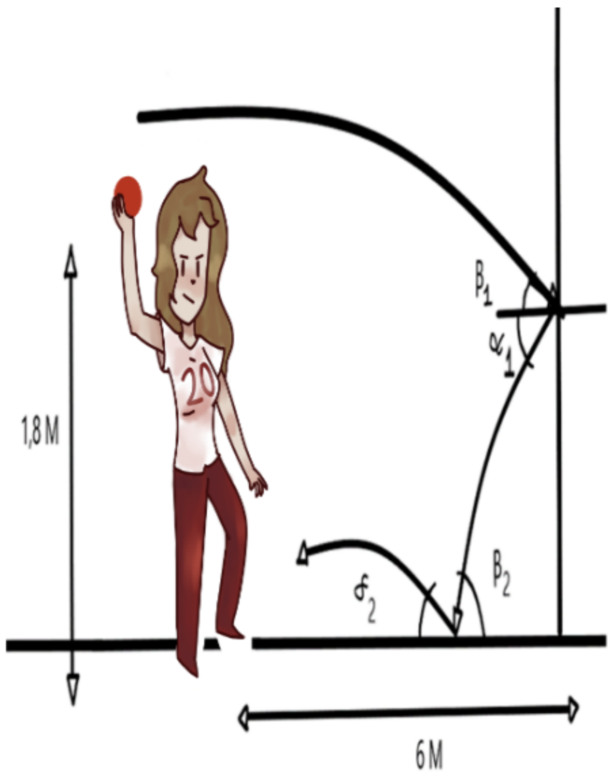
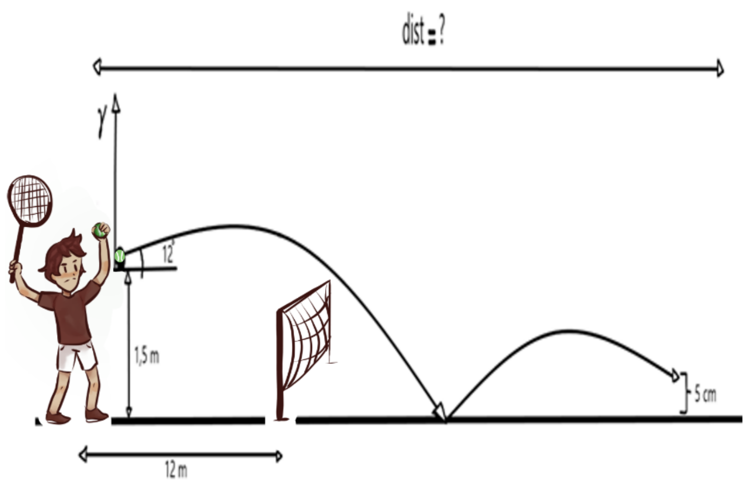


Figura 25: Pelota de pared, en rebote hacia abajo.

Ejercicio 2.7: Una joven lanza una pelota de goma horizontalmente contra una pared, desde los 1,8 metros de altura, ubicada a 6 metros horizontales, con rapidez de 18 m/s. (Figura 25). Si la pelota rebota de la pared hacia abajo, y luego rebota del piso, perdiendo un 17% de su rapidez en cada rebote. Calcule a que altura la joven atrapa la pelota cuando regresa a su posición.

Respuesta: A 0,5 M.

Figura 26: Saque de tenis, recepción a 5 Cms.



Ejercicio 2.8: Una pelota de tenis es golpeada con una raqueta, desde los 1,5 metros de altura a una rapidez de 60 Km/h con 12° de inclinación. (Figura 26), si el jugador está ubicado a 12 metros de la red la cual tiene una altura de un metro. Calcule a que distancia de esta, cae la pelota. Luego si en el rebote contra el piso la pelota de tenis pierde un 30% de su rapidez, a que distancia horizontal desde que rebota del piso, la golpea el otro jugador si el contacto se realiza a 5 centímetros de altura en descenso.

Respuestas: 4,466 m. 10,357 m.

Ejercicio 2.9: Una golfista golpea una pelota de golf y cubre una distancia horizontal de "X" metros, a un ángulo de 45°, si desea cubrir esa misma distancia de tal forma que la pelota realice un rebote y llegue al piso exactamente, (figura 27). Calcule a que inclinación debe golpear la pelota si esta pierde la mitad de su rapidez en el rebote.

Respuesta: 26,565°.

Figura 27: Posibles vuelos de una pelota de Golf, al ser golpeada.

Ejercicio 2.10: Que porcentaje de pérdida, en la rapidez de rebote de la pelota de golf, del problema (2.9), debe ocurrir para que los tiempos en el vuelo a 45º y con un rebote, ¿Sean iguales?

Respuesta: 58,114%. (e = 0,4189)[20].

Resumen para resolver problemas del rebote 1 y 2.

1. Realizar un dibujo esquemático de la situación planteada: Del cuerpo, de la superficie de choque, así como el número de rebotes.
2. Establecer el origen coordenado o identificarlo si está preestablecido.
3. Usar las ecuaciones cinemáticas en una o dos dimensiones para descubrir la o las relaciones que contengan las incógnitas, vectoriales o escalares del problema, de incidencia o de rebote, por eje coordenado.
4. Considerar las situaciones donde existen: a) Pérdida de rapidez por fricciones, cinéticas o estáticas por rodamiento, b) Pérdidas de inclinación, c) ambas.
5. Resolver para descubrir las incógnitas con el uso del algebra básica, considerando la relación entre los ángulos y rapideces de incidencia y de rebote.

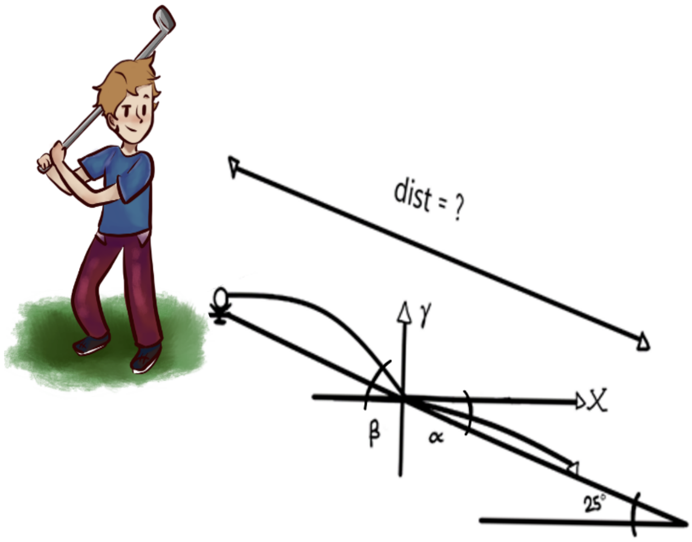
[20] Sería interesante diseñar tablas que relacionen las pérdidas de rapideces para un primer rebote, con el ángulo de elevación, en diferentes actividades deportivas. Conocidas la velocidad inicial, la distancia deseada y por supuesto las características del cuerpo que rebota.

3) Rebote parabólico sobre una superficie recta inclinada.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 3.1: Una pelota de golf es golpeada horizontalmente a 12 m/s desde una cima de inclinación de 25º; después de rebotar en la misma en donde conserva su rapidez de incidencia. (Ver figura 28). Hallar el vector velocidad de rebote y la distancia total recorrida por la pendiente hasta un segundo contacto.

Figura 28: Lanzamiento horizontal desde una cima.



Respuesta: Las relaciones cinemáticas en los ejes, con el dato del triángulo de 25º de la inclinación son

$d_1.Cos(25) = 12t_1$ en la horizontal.

$0 = d_1.Sen(25) – 4{,}9t_1^2$ en la vertical. ($Vo_y = 0$).

De estas relaciones se obtiene: $t_1 = 1{,}142$ segundos. Y $d_1 = 15{,}12$ metros.

Luego la velocidad de incidencia en el rebote es: $Vf_1 = (12i – 11{,}19j)$ m/s, con ángulo $\beta = - 43{,}01°$, (velocidad final del primer vuelo), este se toma positivo por considerar el rebote en el siguiente cuadrante del plano. Luego por la ecuación **10** el ángulo de salida o rebote es: $\boldsymbol{\alpha = 43{,}01 – 2(25) = - 7°}$. (Rebote por debajo de la horizontal, la componente vertical mantiene su sentido, pero disminuye sustancialmente). Entonces el siguiente movimiento parabólico es: $d_2.Cos25 = 12Cos(7)t_2$. En la horizontal. Y

$0 = d_2.Sen25 – 11{,}19.Sen(7)t_2 – 4{,}9t_2^2$ en la vertical.

De estas relaciones se obtiene: $t_2 = 0{,}855$ segundos. Y $d_2 = 11{,}238$ metros.

La pelota de golf desplaza una distancia total, en línea recta por la inclinación, de 26,36 metros después de un rebote parabólico y regresar a la superficie inclinada, en un tiempo total de 2 segundos.

Ejercicio 3.2: Del problema anterior, ejemplo 3.1, rehágalo si la pelota de Golf es lanzada a los mismos 12 m/s, pero con 12° de inclinación.

Respuesta: Las relaciones cinemáticas en los ejes con los datos del triángulo de 25° y de la velocidad inicial es: $d_1.Cos25 = 11,74t$ en la horizontal.

$0 = d_1.Sen25 + 2,5t_1 - 4,9t_1^2$ en la vertical.

De estas relaciones se obtiene: $t_1 = 1,626$ segundos. Y $d_1 = 21,07$ metros.

Luego la velocidad de incidencia en el rebote es: $Vf = (11,74i - 13,44j)$ m/s, con ángulo de incidencia $\beta = -48,85°$, pero al rebotar e invertir la componente vertical de la velocidad, se toma positivo para usar la ecuación **10**, luego el ángulo de salida o de rebote con la inclinación es

$\alpha = 48,85 - 2(25) = -1,15°$, (de nuevo por debajo de la horizontal).

El rebote es: $d_2.Cos25 = 11,74Cos(1,15)t_2$. Y

$0 = d_2.Sen25 - 13,44Sen(1,15)t_2 - 4,9t_2^2$

De estas relaciones se obtiene: $t_2 = 1,06$ segundos. Y una $d_2 = 13,75$ metros. En esta oportunidad La pelota de golf desplaza una distancia total, en línea recta por la inclinación de 34,824 metros después de un rebote parabólico con retorno, en un tiempo total de 2,686 segundos.

Ejercicio 3.3: Se patea un balón desde la parte baja de una colina que forma una línea recta inclinada en 15° con la horizontal, a una rapidez inicial de 15 m/s. y a un ángulo de 35° con respecto a la inclinación. (Figura 29). Hallar la distancia total que desplazada el balón por la colina después del primer rebote considerando que el balón conserva su rapidez (choque elástico).

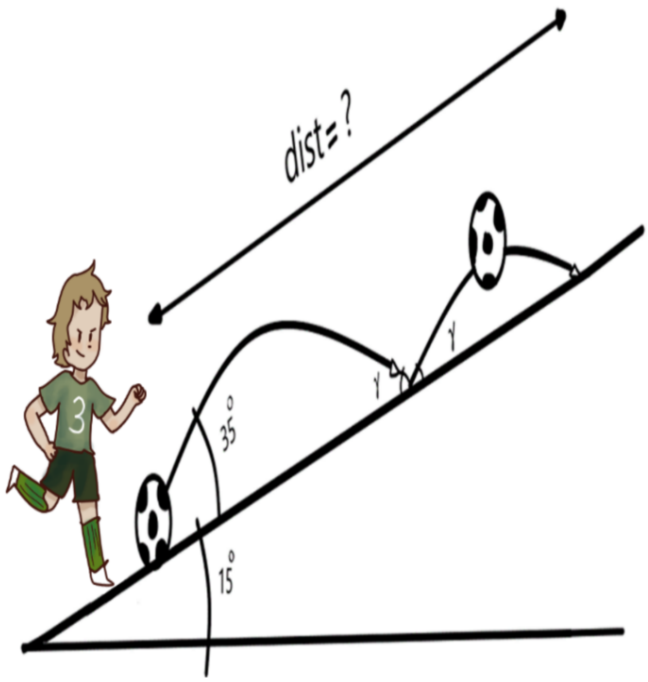


Figura 29: Pelota de futbol pateada, sobre una inclinación.

Respuesta: Primer movimiento parabólico: Vo = Vox + Voy.

$\Rightarrow$ Vo = (9,642i + 11,491j) m/s.

Análisis horizontal: d_1.Cos(15) = 9,642.t_1.

Análisis Vertical: d_1.Sen(15) = 11,491.t_1 - 4,9.t_1^2

De estas dos relaciones se tiene: d_1 = 13,46 metros. En un tiempo 1,818 s. Segundo movimiento parabólico (después del rebote); la rapidez inicial del rebote será igual a la rapidez final de incidencia sobre la colina antes del rebote, con una velocidad de: V_f = (9,642i - 6,324j) $\Rightarrow$ Rapidez de 11,53 m/s. a - 33,26° con la horizontal.

Luego con: β = 33,26°, por la ecuación **11**. Se obtiene α **=** 63,26°.

El rebote será a velocidad: V_R = (5,188i + 10,297j) m/s.

Análisis horizontal: d_2.Cos(15) = 5,188.t_2

Análisis Vertical: d_2.Sen(15) = 10,297.t_2 - 4,9t_2^2

De estas relaciones se obtiene la distancia: d_2 = 9,76 m.

En un tiempo repetido de: t_2 = 1,818 segundos. Se concluye que el balón desplaza una distancia total por la colina, luego de un rebote, de: 23,22 metros en un tiempo total de 3,636 segundos.

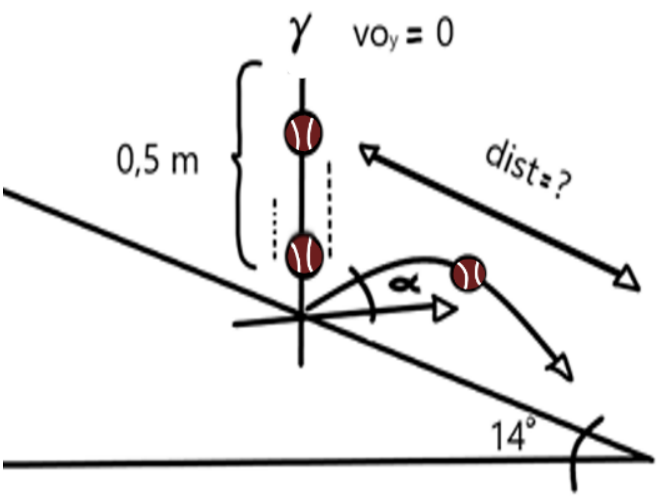


Figura 30: Caída libre sobre una inclinación.

Ejercicio 3.4: Un cuerpo con capacidad de rebotar se deja caer, desde una altura de 50 centímetros, por encima de una rampa de aluminio inclinada en 14°. (Figura 30). Si se sabe que el cuerpo pierde la mitad de su rapidez en el rebote. Calcular a que distancia por la rampa hace contacto nuevamente.

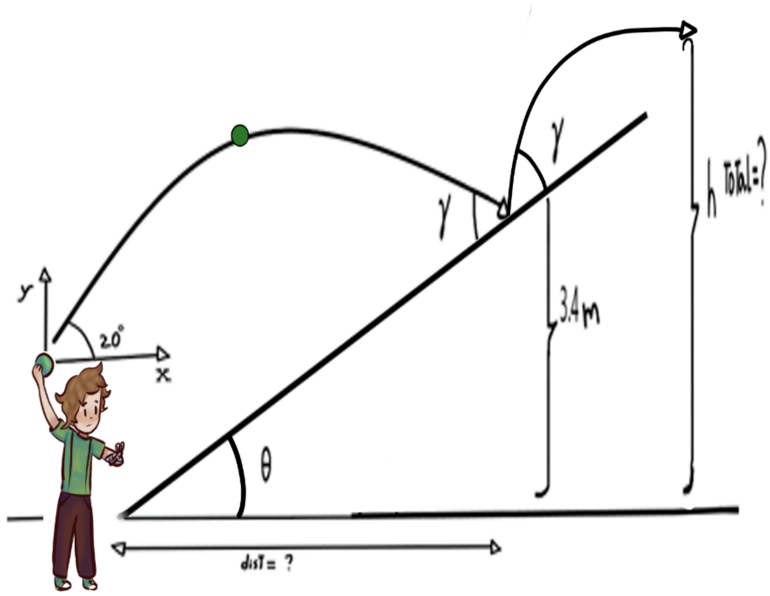
Respuesta: La rapidez de contacto con la superficie es: V_f^2 = 2(9,8).(0,5). Vf_1 = 3,13 m/s. Con un ángulo de incidencia, con respecto a la horizontal, de β = 90°. Luego el ángulo de rebote es: $\alpha = 90 - 2(14°) = 62°$ con la horizontal. (Ecuación 10). A una rapidez de rebote media de: 1,565 m/s la velocidad es: Vr = (0,735i + 1,382j) m/s. El análisis parabólico por la rampa en cada eje queda como

$d.Cos(14) = 0,735(t)$.

$0 = d.Sen(14) + 1,382(t) - 4,9(t)^2$.

Con resultados: d = 0,242 m. (24,2 centímetros). En un tiempo de vuelo de: t = 0,3194 segundos.

Figura 31: Rebote en subida, sobre una inclinación.



Ejercicio 3.5: Un joven lanza una piedra a 20 m/s, con 20° de inclinación, desde una altura de 1,4 metros hacia un muro de concreto inclinado. (Figura 31). Si la piedra hace contacto en descenso en un punto que está a dos metros de la altura del lanzamiento, (total 3,4 m). Calcular a que distancia horizontal del contacto con el muro se lanza la piedra y que altura máxima alcanza esta, después de rebotar contra el muro de concreto si continúa su avance parabólico ascendente sin pérdida de rapidez.

Respuesta: El análisis del eje "y" parabólico es

$3,4 = 1,4 + 20Sen(20)t_1 - 4,9(t_1)^2$.

Y los tiempos resultantes son: 0,417 y 0,979 segundos.

Tomando el mayor con la piedra en descenso, el análisis del eje "x" es

X = 20Cos(20)(0,979). → La piedra fue lanzada desde los 18,40 metros horizontales del contacto. Estos resultados permiten conocer a inclinación del muro, como: $\theta = Tan^{-1}(3,4/18,4) = 10,47°$.

El vector velocidad de contacto de la piedra contra el muro es

Vf = (18,794i – 2,754j) m/s. Con Vfx constante y Vfy en descenso.

Este vector indica un ángulo de incidencia β = - 8,337° con la horizontal. (Se toma positivo por efecto del rebote). A una rapidez de 19 m/s.

El ángulo de rebote es

α = 8,336 + 2(10,47°) = 29,28°. Ecuación 11.

La velocidad de rebote sin pérdida de rapidez es: Vr = (16,57i + 9,29j) m/s.

La altura total que alcanza la piedra, usando la ecuación de altura máxima es: $h = 3{,}4 + (9{,}29)^2/19{,}6 = 7{,}805$ m.

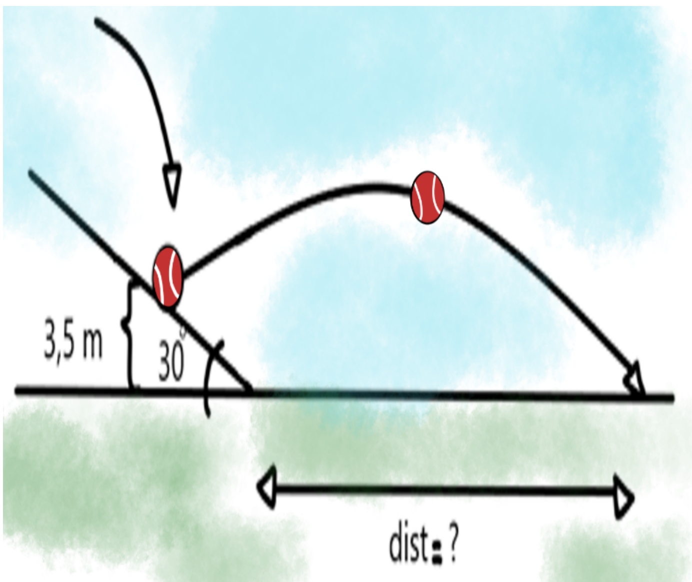
Ejercicio 3.6: Del problema anterior número 3.5, que inclinación tendría el muro de tal forma que la piedra rebote exactamente hacia arriba, es decir no tenga componente horizontal en la velocidad de rebote, y que altura máxima lograría la piedra, si en este esquema pierde la mitad de su rapidez.

Respuesta: Con el ángulo de incidencia: β = 8,337° y deseando que el rebote sea de: α = 90°. De la ecuación 11, se tiene θ = (90° - 8,336°)/2 = 40,832°.

El muro debe tener 40,832° de inclinación para que la piedra rebote verticalmente hacia arriba. La velocidad de rebote sin pérdida de rapidez seria: Vr = 19j m/s. La nueva altura total alcanzada se calcula como

$h = 3{,}4 + (9{,}5)^2/19{,}6.$ = 8,01 metros.

Figura 32: Incidencia y rebote parabólico.



Ejercicio 3.7: Una esfera de metal se lanza contra una inclinación de 30°, que continua en un piso horizontal. Esta golpea a velocidad: (5i –16j) m/s. En un punto de altura 3,5 metros. (Figura 32). Calcule la distancia por el piso donde la esfera hace nuevamente contacto si esta pierde el 30% de su rapidez, en el rebote.

Respuesta: El ángulo de incidencia es: $\beta = Tan^{-1}(-16/5) = -72,65°$. Recordar que el ángulo de incidencia se toma positivo para las ecuaciones 10 y 11.

Entonces el ángulo del rebote es: $\alpha = 72,65 - 2(30°) = 12,65°$. "Hacia abajo".

La rapidez de rebote es 70% de 16,763 m/s (11,734 m/s rapidez de contacto).

Y la velocidad de rebote será: Vr = (11,45i + 2,57j) m/s.

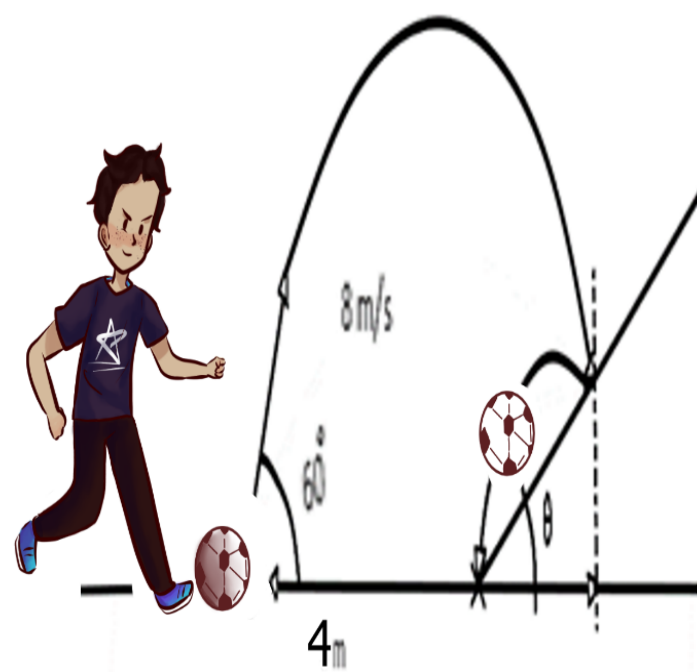
La esfera llega al piso horizontal en un tiempo calculado de

$0 = 3,5 + 2,57(t_1) - 4,9(t_1)^2. \rightarrow t_1 = 1,147$ segundos.

El avance horizontal a este tiempo es: X = 11,45(1,147) = 13,13 metros.

La distancia por el piso horizontal es: 13,13 – 3,5 / Tan(30) = 7,07 metros.

Figura 33: Rebote parabólico de regreso inclinado.



Ejercicio 3.8: Se lanza un balón a 8 m/s e inclinación 60°, desde un piso horizontal a 3 metros de una pared inclinada, como se indica. (Figura 33), si el balón golpea la pared a 4 metros horizontales en total. Calcule el punto de contacto, la inclinación de la pared y que porcentaje de perdida de rapidez, tendrá el balón, si al rebotar hacia abajo llega a la base de la pared.

Respuesta: El tiempo en que el balón llega a la pared se obtiene de

$4 = 8Cos60(t_1)$. El tiempo es: $t_1 = 1$ segundo. Luego la altura de contacto es

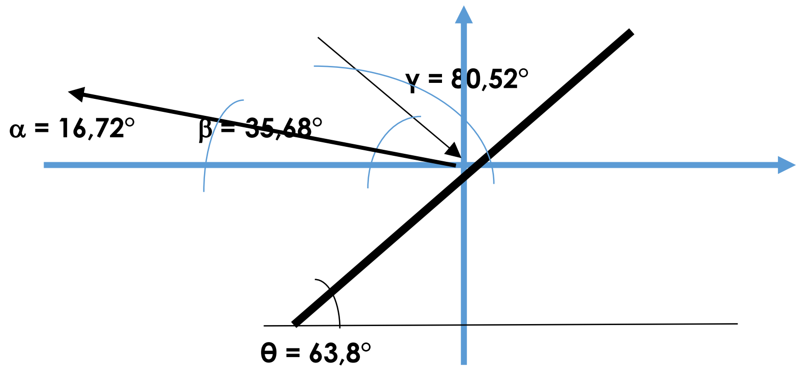
$Y = 0 + 8Sen60(1) - 4,9(1)^2$. Y = 2,03 metros. El ángulo de la pared se obtiene por la relación: $Tan^{-1}(2,03/1) \rightarrow$ **θ = 63,8°.**

La velocidad de contacto es: Vf_1 = (4i – 2,872j) m/s. (Balón cayendo).

Con un ángulo: $\beta = Tan^{-1}(-2,872/4) = -35,676°$. Con rapidez de: 4,924 m/s.

Un estudio particular para la situación en donde hay inversión de ambas componentes de la velocidad, descubre que el ángulo de la incidencia con la inclinación, lado arriba es: $\gamma = (90 - \beta) + (90 - \theta) = 80{,}524°$.

Luego el ángulo de rebote con respecto a la horizontal resulta, que este ángulo es igual en el rebote con el lado abajo como: $\alpha = \gamma - \theta$. Obteniéndose un valor por encima de la horizontal de: $\alpha = (80{,}52 - 63{,}80) = 16{,}72°$. (Ver grafica).



La lógica para obtener este resultado es que se evoluciona la ecuación 11, en: $\alpha = 180 + \beta - 2\theta$. Lo que significa una ampliación de esta ecuación ante una situación donde se invierte el componente horizontal de la velocidad, y el ángulo de la inclinación de contacto es superior a los 45°.

Continuando, con el ejercicio, si el balón debe llegar a la base de la inclinación entonces

$0 = 2{,}03 + Vr.Sen16{,}72(t_2) - 4{,}9(t_2)^2$. Análisis parabólico de la vertical.

$-1 = VrCos16{,}72(t_2)$. Análisis parabólico de la horizontal.

De aquí, se obtiene la rapidez de rebote: Vr = 1,51 m/s. en: $t_2 = 0{,}7$ segundos.

La pérdida de rapidez en el rebote debe ser de: $(1 - (1{,}51/4{,}924))x100)$. Un **69,25%.**

<u>Ejercicio 3.9:</u> Una pequeña y maciza pelota plástica se deja caer sobre una superficie recta inclinada en un ángulo θ, si la pelota golpea la superficie a rapidez de 10 m/s, desplazando por la superficie de 1,7 metros. Calcule el ángulo de la inclinación, si en el rebote no hay pérdida de rapidez.

Respuesta: Los análisis por eje coordenado en el movimiento parabólico de rebote son respectiva y paramétricamente por ejes como

$1{,}7\cos\theta = 10\cos\alpha(t)$. Horizontal

$0 = 1{,}7\operatorname{Sen}\theta + 10\operatorname{Sen}\alpha(t) - 4{,}9(t)^2$. Vertical

Con la relación **10**, entre α y θ como: $\alpha = 90° - 2\theta$. Se tiene por eje coordenado

$1{,}7\cos\theta = 10.\cos(90 - 2\theta)(t)$.

$0 = 1{,}7\operatorname{Sen}\theta + 10.\operatorname{Sen}(90 - 2\theta)\ (t) - 4{,}9(t)^2$.

Al resolver las identidades trigonométricas, la relación en la horizontal es

$1{,}7\cos\theta = 10\operatorname{Sen}(2\theta)(t)$. $\rightarrow$ $1{,}7\cos\theta = 20\cos\theta\operatorname{Sen}\theta(t)$.

Con el despeje del seno: $\operatorname{Sen}\theta = (1{,}7 / 20t)$. **(1).**

En la vertical: $0 = 1{,}7\operatorname{Sen}\theta - 10\cos(2\theta)\ (t) - 4{,}9(t)^2$ $\rightarrow$

$0 = 1{,}7\operatorname{Sen}\theta - 10[\cos^2(\theta) - \operatorname{Sen}^2(\theta)].(t) - 4{,}9(t)^2$. Con el cambio trigonométrico

$0 = 1{,}7\operatorname{Sen}\theta - 10[1 - 2.\operatorname{Sen}^2(\theta)]\ (t) - 4{,}9(t)^2$. $\rightarrow$

$0 = 1{,}7\operatorname{Sen}\theta - 10(t) + 20\operatorname{Sen}^2(\theta)(t) - 4{,}9(t)^2$. **(2).**

Al sustituir **(1)** en **(2),** se tiene

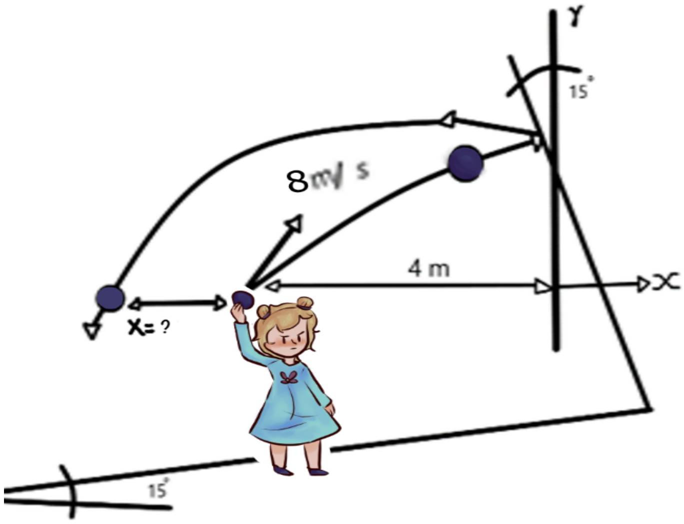
$0 = (1{,}7)^2/20.t - 10(t) + (1{,}7)^2/20.t - 4{,}9(t)^2$ $\rightarrow$

$0 = 2{,}89/10t - 10(t)^2 - 4{,}9(t)^2$

$0 = -\ 4{,}9(t)^3 - 10(t)^2 + 0{,}289$. Una ecuación cúbica cuya solución es de dos tiempos negativos y un tiempo en 0,1635 s.

Este valor en la relación **(1)** indica que el ángulo de la inclinación donde rebota la pelota plástica es de: $\theta = 31{,}32°$.

Figura 34: Rebote sobre una pared inclinada.



<u>Ejercicio 3.10:</u> Una pelota de goma se lanza contra una pared, perpendicular a un piso que está inclinado en 15°, con velocidad de (8i + 16j) m/s. Como se indica en la figura 34. Si la pelota pierde el 10% de rapidez en el contacto y rebote, calcule la distancia horizontal por detrás y a la altura de la lanzadora por donde "pasa" la pelota.

Respuesta: El tiempo del primer vuelo se obtiene por

$4 = 8t_1. \rightarrow t_1 = 0{,}50$ s.

La altura que gana la pelota es: $Y = 0 + 16(0{,}5) - 4{,}9(0{,}5)^2$.

Con resultado de 6,77 m.

Por la pared inclinada la distancia de contacto (6,77)Cos15 = 6,54 m.

A velocidad: $V_f = (8i + 11{,}1j)$ m/s. Efecto de la gravedad en el primer vuelo.

Son 13,68 m/s. A un ángulo con la horizontal de: $\beta = 54{,}22°$.

Un análisis del contacto indica $\gamma = (90° - \beta) + \theta$.

$\gamma = (90° - 54{,}219) + 15 = 50{,}78°$.

Donde el ángulo del rebote con la horizontal es: $\alpha = 90° - (\gamma + \theta)$.

$\alpha = 90° - (50{,}78 + 15) = 24{,}22°$.

Al sustituir landa "γ" en la relación de alfa "α" se obtiene la conocida relación de: $\beta - 2\theta$, para el rebote parabólico en descenso.

Se concluye en este análisis que a pesar de que la pelota rebota y continúa ascendiendo, solo invirtiendo la componente horizontal de la velocidad, se aplica la relación 10 en vez de la 11, por efecto de que la pared está inclinada en el segundo cuadrante del plano.

Luego, con un 10% de perdida, el rebote es: $V_r = (0{,}90)(13{,}68) = 12{,}31$ m/s. Este vector a 24,22° de inclinación es: $V_r = (-11{,}23i + 5{,}05j)$ m/s.

La pelota para regresar a la altura de lanzamiento, lo hace en un tiempo obtenido de la siguiente relación: $0 = 6{,}77 + 5{,}05(t_2) - 4{,}9(t_2)^2$.

→ Tiempo = 1,8 segundos.

Luego la distancia horizontal: X = 11,23(1,8) = 20,214 metros. Finalmente, la distancia solicitada, (por detrás de la lanzadora), es de **16,214** metros.

Ejercicios propuestos, con respuesta

<u>Ejercicio 3.11:</u> Rehacer el ejercicio 3.4. Si la rampa de aluminio tiene una inclinación de 45°.

Respuesta: 0,707 m. (70,7 Cms). En un vuelo de 0,32 s.

<u>Ejercicio 3.12:</u> Rehacer el ejercicio 3.3, si el balón al rebotar por la colina, pierde el 30% de su rapidez sin perder inclinación.

Respuesta: Distancia total 18,244 m. En un tiempo 3,09 s.

Ejercicio 3.13: Del ejercicio 3.7. Rehágalo, considerando que la esfera pierde ahora solo un 10% de rapidez, y 5° más de la inclinación calculada al rebotar, como efecto de deslizamiento. **Respuesta: 10,01 metros.**

Ejercicio 3.14: En un experimento de laboratorio una bola de plástico rebota contra una superficie sólida inclinada en θ grados; si se tiene la rapidez del rebote "V_r", y la distancia "d" por la inclinación donde la bola regresa a la superficie; encuentre la fórmula para el ángulo experimental de este rebote, con estos datos, (sin el tiempo de vuelo). Luego encuentre "α" para: θ = 15°, d = 35 Cms y Vr = 3 m/s. (Sistema internacional).

Respuesta: $\frac{g}{2}\left(\frac{dCos\theta}{Vr}\right)^2.Tan^2\alpha + dCos\theta.Tan\alpha + \left(dSen\theta + \frac{g}{2}\left(\frac{dCos\theta}{Vr}\right)^2\right) = 0.$[21]

Por ecuación cuadrática de la tangente, ofrece dos resultados posibles: α_1 = 79,73° y α_2 = -4,73°, (por debajo de la horizontal).

Ejercicio 3.15: Una esfera de vidrio (canica), de deja caer verticalmente sobre una superficie de madera inclinada, si esta rebota con velocidad medida en: (2i + 3j) p/s. Calcule el ángulo de la superficie de madera y la distancia "d" que la esfera desplaza por la inclinación.

Respuesta: θ = 16,85°. d = 0,4686 pies (5,623").

Resumen para resolver problemas del rebote sobre inclinación.

1. Realizar un dibujo esquemático de la situación planteada, del cuerpo y de la superficie de choque, así como del número de rebotes.
2. Establecer el origen coordenado o identificarlo si está preestablecido.
3. Usar las ecuaciones: 10 y 11, para determinar el ángulo de rebote.
4. Usar las ecuaciones cinemáticas para descubrir las relaciones que contengan las incógnitas del problema, por eje coordenado.
5. Resolver y responder lógicamente.

[21] Con la gravedad como un vector vertical hacia abajo de: -9,8j m/s^2 o -32,15j p /s^2

4) Rebote parabólico sobre una superficie curva.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.1: Se deja caer una pelota de golf sobre una superficie sólida, representada por la función transcendente Y = Ln (X), en el punto X_1 = 3 metros, desde 50 centímetros de alto. (Figura 35), si la pelota conserva su rapidez al rebotar. Hallar la distancia de arco que la pelota desplaza sobre la superficie hasta un siguiente punto X_2.

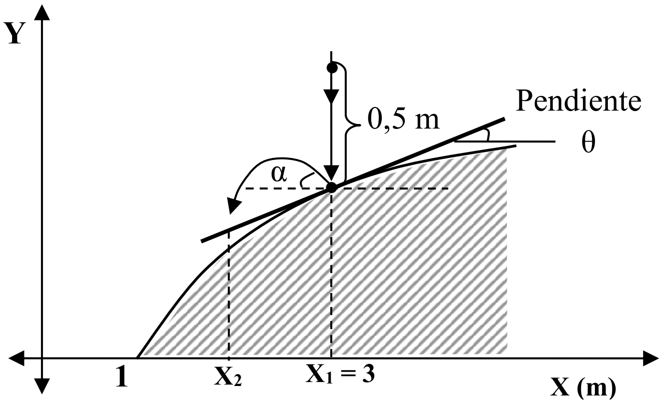


Figura 35: Caída libre sobre la superficie curva: y = Ln(x).

Respuesta: Velocidad del primer contacto: ${V_f}^2 = 0 + 2g(0{,}5) \Rightarrow V_f = -3{,}13\hat{j}$

En el punto X_1 = 3 m. Con rapidez de salida 3,13 m/s, (sin pérdida). La pendiente de la recta tangente a la curva, en "X_1" por la derivada de la función es: y' = 1/x. Pendiente: m = 0,3333. La inclinación de esta recta es de un ángulo de: θ = 18,435°.

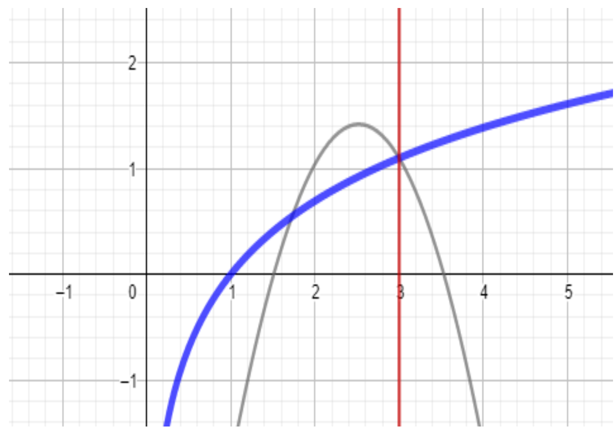
Luego el ángulo de salida o de rebote es: α = 90 - 2(18.435) = 53,13°.

La nueva ecuación parabólica del movimiento del cuerpo que rebota queda

$$Y = Ln(3) - (X-3)\,Tan(53{,}13º) - \left(\frac{4{,}9(X-3)^2(Sec^2(53{,}13º))}{(3{,}13)^2}\right)$$

$$Y = 1{,}099 - 1{,}333(X-3) - 1{,}389(x-3)^2$$

Cálculo del nuevo punto de contacto por igualación de la ecuación parabólica con la ecuación superficie. La solución es estrictamente geométrica y el nuevo punto es: **X_2 = 1,678 m**. Con el uso de la gráfica de relaciones, (ver figura 36, al lado donde se observa el "Cruce" entre la



superficie: Ln(x) en azul y la función rebote en gris); en adicional la incidencia de la caída libre del cuerpo que rebota en rojo. Luego el arco recorrido por el cuerpo en sus dos contactos con la superficie curva resulta de la integración de:

$$ARCO = \int_{1,678}^{3} \sqrt{1 + \left(Ln'(X)\right)^2}\, dX \;=\; \int_{1,678}^{3} \sqrt{1 + \frac{1}{X^2}}\, dX$$

La resolución de esta integral es: 2,835 - 1,388 = **1,448 m.**

<u>Ejercicio 4.2:</u> Se deja caer una esfera plástica en el punto X = 1,8 rad. Sobre una superficie representada por la función trigonométrica: y = Sen(x). Si la pelota rebota a rapidez de 3 m/s. Calcule el arco desplazado entre el primer y el segundo contacto con la superficie sinusoidal.

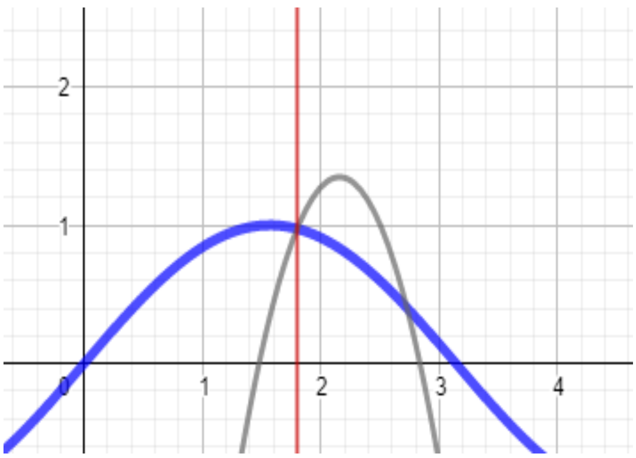
Respuesta: El ángulo de incidencia es: β = 90º, el punto de contacto es 1,8 radianes (103,14º). La recta tangente a la función Y = Sen(x) en este punto, tiene por pendiente lógicamente negativa: a = Cos(103,14º) = - 0,2273.

El ángulo de esta recta es: $\theta = Tan^{-1}(-0{,}2273) = -12{,}81°$. El ángulo del rebote es: $\alpha = 90° - 2(12{,}81) = 64{,}4°$. Tomando la inclinación con ángulo positivo. La parábola de este rebote parabólico, a rapidez de 3 m/s. Tendrá por ecuación:

$$Y = Sen(103{,}14) + (X - 1{,}8)Tan(64{,}4) - \left(\frac{4{,}9(X-1{,}8)^2(Sec^2(64{,}4))}{3^2}\right)$$

$$Y = 0{,}974 + 2{,}087(X - 1{,}8) - 2{,}916(x - 1{,}8)^2$$

Cálculo del nuevo punto de contacto por igualación de la ecuación parabólica con la ecuación superficie. (Figura 37 del lado, con el Sen(x), en azul y la función rebote en gris); en adicional la incidencia de la caída libre del cuerpo que rebota en rojo)[22]. La solución es estrictamente geométrica, con el nuevo



[22] Las gráficas siguientes tendrán por norma que la superficie es la línea gruesa en azul, el rebote parabólico será la línea gris, y la incidencia del cuerpo que rebota en rojo o verde.

punto de contacto: **X_2 = 2,73 rad**. (Confirmación por visión de la gráfica, figura 34). El arco de curva sale de: $ARCO = \int_{1,8}^{2,73} \sqrt{1+\left(Cos\left(X\right)\right)^2}\, dX.$

La distancia desplazada: **1,105 metros.**

<u>Ejercicio 4.3:</u> Una pelota golpea horizontalmente con rapidez de 6 m/s. Una superficie representada por la función radical: Y = $(x)^{1/3}$, en el primer cuadrante punto (1,1). Calcule donde ocurre el segundo contacto con la superficie, luego de un rebote parabólico sin pérdida de rapidez.

Respuesta: El ángulo de incidencia es: β = 0°.

La recta tangente a la función Y = $(x)^{1/3}$, tiene por pendiente:

a = $1/3(X)^{-2/3}$ en el punto, (1, 1), m = 0,3333. El ángulo de esta recta, con la horizontal es: $\theta = Tan^{-1}(0{,}3333) = 18{,}435°$.

El ángulo del rebote por la ecuación 11 es: $\alpha = 0 + 2(18{,}435) = 36{,}87°$.

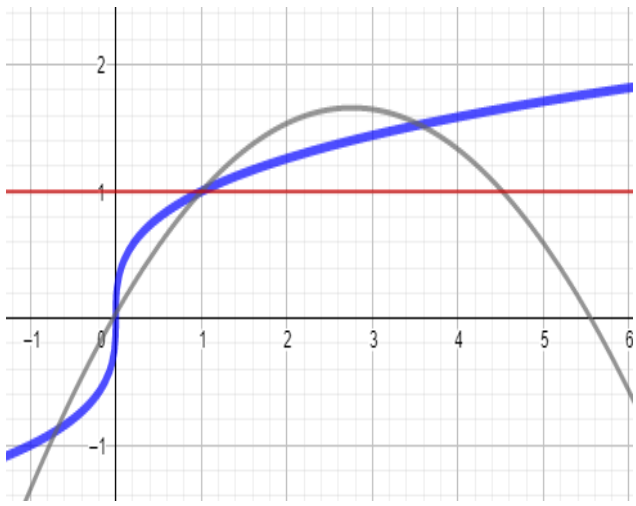
La velocidad de rebote a ese ángulo es: Vr = (4,8i + 3,6j) m/s.

La parábola de este rebote parabólico tendrá por ecuación

$$Y = 1 + (X-1)Tan(36{,}87) - \left(\frac{4{,}9(X-1)^2(Sec^2(36{,}87))}{6^2}\right)$$

$$Y = 1 + 0{,}75(X-1) - 0{,}213(x-1)^2$$

Cálculo del nuevo punto de contacto por igualación de la ecuación parabólica con la ecuación superficie. La solución es estrictamente por aproximación geométrica. (Figura 38 siguiente, donde se observa que el nuevo punto de contacto ocurre con la solución: $\sqrt[3]{x}$ = función parábola).



Esto es: **(X_2, Y_2) = (3,565; 1,506) m.**

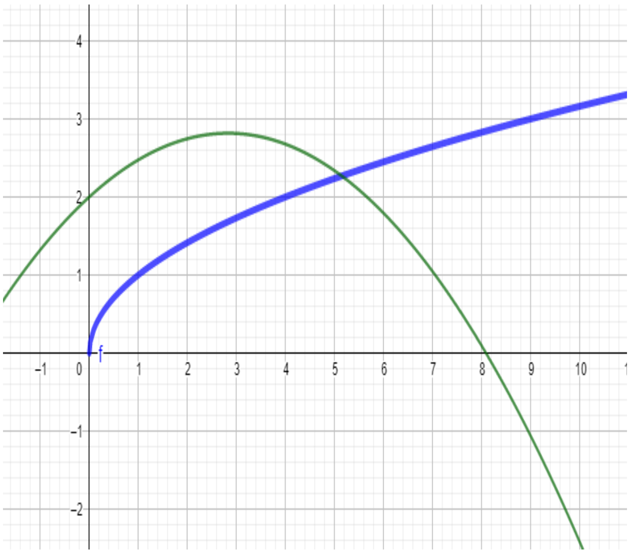
<u>Ejercicio 4.4:</u> Una piedra lanzada desde el punto (0, 2) metros, con rapidez de 8 m/s e inclinación 30° choca con una superficie solida representada por la función

radical: Y = $(x)^{1/2}$. Si la piedra pierde un 20% de su rapidez al rebotar. Calcule el arco desplazado por la piedra sobre la superficie hasta un segundo punto de contacto con ella, (X_2).

Respuesta: La parábola del lanzamiento antes de hacer contacto es

$$Y = 2 + (X)Tan(30) - \left(\frac{4{,}9(X)^2(Sec^2(30))}{64}\right) \rightarrow Y = 2 + 0{,}577(X) - 0{,}102(x)^2$$

El primer contacto se obtiene al igualar esta relación con la función radical: Y = $(x)^{1/2} = \sqrt{x}$. El resultado por técnica de aproximación gráfica, (figura 39, al lado). Es en su "Cruce": (X_1, Y_1) de: (5,25; 2,3). La recta tangente a la función, en ese punto, es de pendiente: m = $1/2(5{,}25)^{-1/2}$.



m = 0,2182. Con ángulo: θ = 12,31°. El tiempo de vuelo del lanzamiento: 5,25 = 8Cos30°(t). → t = 0,758 s.

La velocidad de contacto: V_f = (6,93i – 3,43j) m/s. Módulo de 7,73 m/s. Con el efecto de la gravedad sobre la velocidad vertical en ese tiempo.

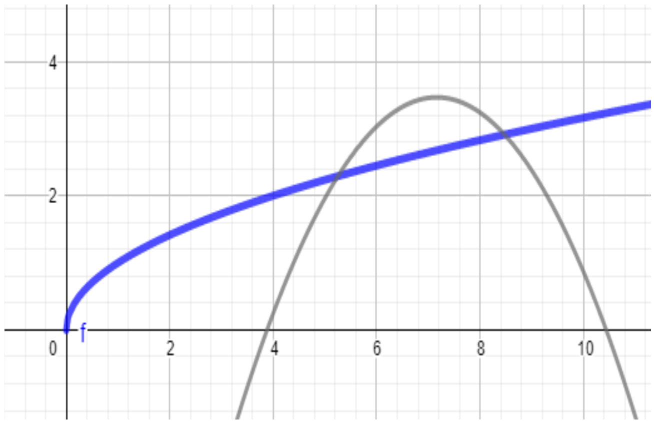
El ángulo de incidencia tomado positivo es: β = Tan^{-1}(3,43/6,93). β = 26,33°.

Por la ecuación 11, el ángulo del rebote es: α = 26,33 + 2(12,31) = 50,95°. El vector velocidad de rebote con un 20% de pérdida: Vr = (3,98i + 4,8j) m/s. rapidez de 6,237 m/s. La parábola de este rebote es

$$Y = 2{,}3 + (X - 5{,}25)Tan(50{,}95) - \left(\frac{4{,}9(X - 5{,}25)^2(Sec^2(50{,}95))}{(6{,}237)^2}\right)$$

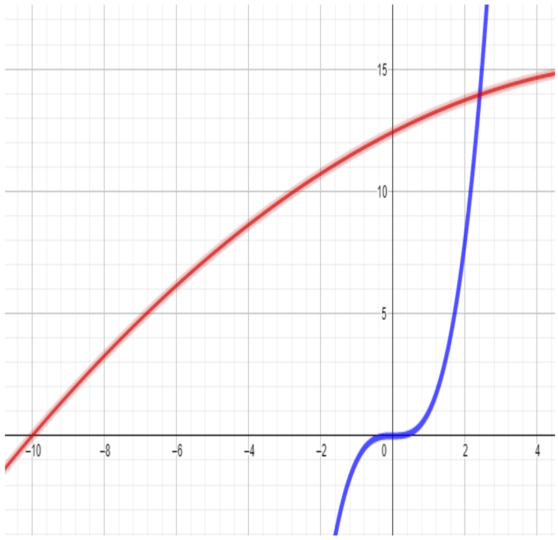
$$Y = 2{,}3 + 1{,}233(X - 5{,}25) - 0{,}3174(x - 5{,}25)^2$$

El segundo punto de contacto por igualación de esta ecuación parabólica con la ecuación superficie: y = $\sqrt{x}$. La solución es nuevamente por aproximación geométrica, (figura 40, siguiente). El nuevo punto de contacto es: X_2 = 8,54 m. El arco de curva desplazado



sale de la fórmula: $ARCO = \int_{5,25}^{8,54} \sqrt{1 + (1/4x)}\ dX.$ Esta distancia: **3,350 m.**

Ejercicio 4.5: Se golpea una pelota de beisbol desde el punto (-10; 0) metros a 20 m/s e inclinación 60°, la pelota choca con un montículo representado por la función cúbica: Y = X^3, como se indica en el dibujo, (figura 41, al lado). Si la pelota pierde el 50% de su rapidez al rebotar sobre el montículo. Calcule los puntos: del primer y segundo contacto con la superficie.



Respuesta: La parábola del lanzamiento antes de hacer contacto con la superficie es

$$Y = 0 + (X + 10)Tan(60) - \left(\frac{4{,}9(X + 10)^2(Sec^2(60))}{400}\right)$$

$$Y = 1{,}732(X + 10) - 0{,}049(x + 10)^2$$

El primer contacto se obtiene al igualar esta relación con Y = $(X)^3$.

El resultado por técnica de aproximación gráfica es: X_1 = 2,42; Y_1 = 14,17.

La recta tangente a la función Y = $(X)^3$. En el punto, tiene por pendiente

m = $F'(X_1) = 3(2{,}42)^2$ = 17,46.

El ángulo de esta recta es: $\theta = Tan^{-1}(17{,}46)$ = 86,74°.

El tiempo de vuelo del lanzamiento: 2,42 + 10 = 20Cos60°(t) → t = 1,242 s.

El vector velocidad de contacto es: Vf = (10i + 5,15j) m/s. La pelota de beisbol aún está subiendo, (no ha alcanzado su altura máxima).

Rapidez del contacto es: 11,248 m/s. Y la del rebote de: 5,624 m/s. A un ángulo de: $\beta = Tan^{-1}(5,15/10) = 27,248°$.

Un análisis del contacto indica que $\gamma = \theta - \beta$.

$\gamma = (86,74° - 27,248) = 59,492°$.

El ángulo del rebote es: $\alpha = 180° - (\gamma + \theta)$.

$\alpha = 180° - (59,492 + 86,74) = 33,768°$. Al sustituir "γ" en la relación de "α", se obtiene que entonces: $\alpha = 180 + \beta - 2\theta$.

La lógica para obtener este resultado transforma la ecuación 10, en la relación: $\alpha = 180 + \beta - 2\theta$. (Similar explicación en el ejercicio 3.8).

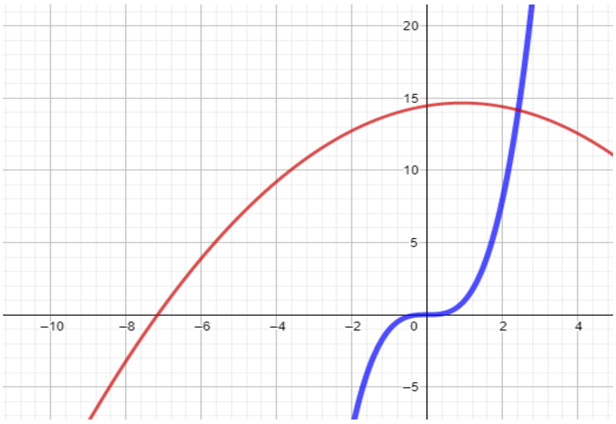
El vector velocidad rebote es: $\alpha = 33,768°$. Es Vr = (-4,675i + 3,126j) m/s.

La parábola de este rebote parabólico tendrá por ecuación

$$Y = 14,17 - (X - 2,42)Tan(33,77) - \left(\frac{4,9(X - 2,42)^2(Sec^2(33,77))}{(5,624)^2}\right)$$

$$Y = 14,17 - 0,669(X - 2,42) - 0,224(x - 2,42)^2$$

El segundo punto de contacto por igualación de la ecuación parabólica con la ecuación de la superficie dice que la bola de beisbol no toca de nuevo a la superficie, primero regresa al piso referencial de lanzamiento, (ver figura 42, en estas líneas), al igualar la función rebote con: $y = x^3$); es decir un cruce de estas ecuaciones no ocurre.



Ejercicios propuestos, con respuesta

Ejercicio 4.6: Rehacer el ejercicio 4.1, si la pelota de Golf, cae sobre la superficie "Logaritmo Natural" en el punto $X_1 = 4$. Y pierde al rebotar un 30% de su rapidez de contacto. (Figura 43).

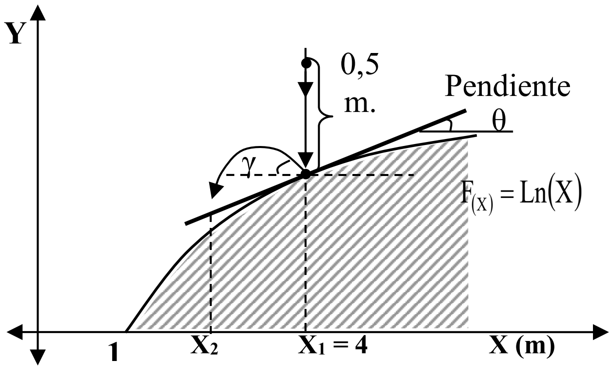


Figura 43: Caída libre en $X_1 = 4$, sobre la superficie: y = Ln(x).

Respuesta

Arco $\int_{3,536}^{4}(\sqrt{\frac{X^2+1}{X^2}})dx$ **= 0,48 m.**

Ejercicio 4.7: Del ejercicio propuesto anterior: 4.6, considere un segundo rebote sobre la superficie curva logaritmo natural, (un tercer contacto en X_3). Calcule el segundo "arco desplazado", si en este segundo rebote la pelota vuelve a perder 30% de rapidez.

Respuesta: Arco $\int_{3,048}^{3,536}(\sqrt{\frac{X^2+1}{X^2}})dx$ **= 0,51 metros**[23]**.**

Ejercicio 4.8: Rehacer el 4.2, si la superficie de contacto es: y = Cos(x).

Respuesta: Arco $\int_{1,8}^{3,01}(\sqrt{1 + Sen^2(x)})dx$ **= 1,455 metros.**

Ejercicio 4.9: Del ejercicio 4.3, encuentre el contacto parabólico con la superficie "Raíz Cúbica". Si la pelota lanzada choca a velocidad de (5i -2j) m/s en el punto X = ½. Adicionalmente encuentre el arco desplazado.

Respuesta: Punto (1,65; 1,18). Arco $\int_{0,5}^{1,645}(\sqrt{1+\frac{1}{9.\sqrt[3]{x^4}}^{2}})dx$ **= 1,212 m.**

Ejercicio 4.10: Del ejercicio 4.4, si la piedra lanzada desde el punto (0, 2), se hace ahora a 60°, en un vuelo parabólico sobre la superficie "Raíz Cuadrada", sin

[23] Mayor arco, porque en vista que avanzamos por la superficie de esta función trascendente se incrementa su curvatura, hasta una pendiente con tendencia infinita en el x = 1, (recta vertical).

pérdida de rapidez en el rebote. Calcule el nuevo arco desplazado hasta el segundo contacto.

Respuesta: Arco $\int_{5,454}^{6,966}\left(\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\right)dx$ **= 1,542 metros.**

Resumen para resolver problemas del rebote sobre una curva.

1. Realizar un dibujo esquemático de la situación planteada, del cuerpo y de la superficie de choque, con el número de rebotes. (Grafica con un software matemático).
2. Establecer el origen coordenado o identificarlo si está preestablecido.
3. Expresar la parábola o el primer vuelo que representa el movimiento de incidencia y realizar su gráfica, junto a la gráfica de la función que representa la superficie.
4. En el punto de contacto, dibujar la recta tangente a la superficie, y calcular su inclinación, por la derivada del punto.
5. Usar las ecuaciones: 10 y 11, (con sus posibles ampliaciones), según sea el caso, para calcular el ángulo de rebote Alpha: "".
6. Con "**α**" y el primer punto de contacto, expresar la parábola del nuevo movimiento parabólico de rebote, para determinar un nuevo punto de contacto, de existir. (Algoritmo a seguir con el paso número 3), para siguientes cálculos.
7. Resolver, por integración definida, el cálculo del arco desplazado o las incógnitas solicitadas en cada movimiento.

CAPITULO III

ENSAYOS PARA VALIDAR ÁNGULOS DE REBOTES

Descripción

Para visualizar comprender y calcular ángulos de rebotes en diferentes situaciones de ensayos en experimentos controlados, se hace necesario conocer primero la "real" pérdida de rapidez por la colisión y rebote de cuerpos esféricos contra superficies dadas, usando esferas metálicas, plásticas o de cualquier otro material que produzca un rebote apreciable sobre una superficie sólida horizontal dispuesta. Ensayo realizado por altura inicial de una caída libre en comparación por la altura final lograda; es decir no se usa ecuaciones cinemáticas con el tiempo por ser esta variable más vulnerable de medir, en vista de que a cortos tiempos influye notablemente la reacción humana, en los resultados.

Esquema inicial

Se dejan caer variadas esferas de: Hierros, plástico y goma de diferentes diámetros y masas, desde los 50 centímetros, sobre superficies horizontales de madera sólida y de hierro; de donde se obtiene por medida de alturas el porcentaje de la pérdida de rapidez del cuerpo asumido como partícula por efecto de la colisión y rebote. (Figura 44).

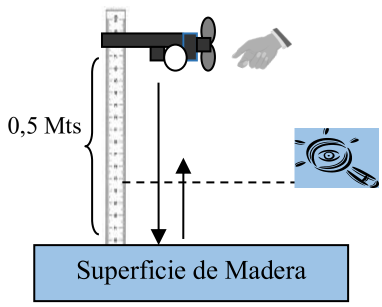


Figura 44: Ensayo de caída libre con su rebote.

Los resultados se tabulan a continuación, (ver las siguientes tablas I y II), donde se describe: La esfera usada con su masa, las alturas: inicial y final del rebote, con la estimación del porcentaje de pérdida de rapidez por el rebote; valor obtenido por cálculos con el coeficiente de restitución[24].

[24] Coeficiente de restitución, $e = V_f / V_0$, del cuerpo que rebota.

El procedimiento es el de dejar caer la esfera, con un dispositivo de ajuste, y calcular la rapidez de contacto con la superficie, asumiendo una caída libre vertical, común para todas las esferas liberadas desde el reposo con valor de: $V_f = (2*9,8*0,5)^{1/2} = 3,13$ m/s. Luego al medir visualmente la altura que alcanza la esfera en el rebote, (asumiendo que la desviación sea despreciable), se calcula la rapidez de rebote y su porcentaje de perdida de la rapidez respectiva.

Tabla I: sobre superficie de madera

Esfera	Masa	Altura i.	Altura r.	% perdida m/s
Hierro	18,82 Grs.	0,50 m.	0,265 m.	27,26 %
Hierro	28,14 Grs.	0,50 m.	0,22 m.	37,26 %
Plástico	8,45 Grs.	0,50 m.	0,30 m.	22,54 %

Tabla II: sobre superficie de hierro

Esfera	Masa	Altura i.	Altura r.	% perdida m/s
Plástico	1,98 Grs.	0,50 m.	0,13 m.	48,88 %
Plástico	6,09 Grs.	0,50 m.	0,15 m.	45,22 %
Goma	10,37 Grs.	0,50 m.	0,23 m.	32,18 %

Una vez conocida con suficiente realidad la pérdida de rapidez por rebotar en estas superficies dadas, se procede con dos experimentos para validar las deducciones del ángulo de rebote, a saber

1) Sobre una superficie recta horizontal, conocido y aceptado en la mecánica clásica donde ocurre que el ángulo de incidencia sea igual al del rebote, esto es: $\boldsymbol{\beta = \alpha}$.

2) Sobre una superficie recta inclinada, para validar la ecuación 10 propuesta. Recordando que en su esencia se basa en la aceptación anterior.

La idea es comparar la realidad ocurrida en el laboratorio con los resultados de las ecuaciones aceptadas y propuestas, en el bello y poco estudiado tema del rebote parabólico, como un real avance en el conocimiento de la cinemática en la actualidad.

Experimento 1: Rebote parabólico sobre la horizontal

Descripción y esquema

Con un mecanismo de lanzamiento de proyectiles sobre una superficie horizontal, mesa de madera con papeles de huellas para impactos, (llamado papel de seguimiento de trayectoria punto a punto), se lanza horizontalmente la esfera de hierro escogida N° 1, (18,82 gramos), desde una altura de 0,28 metros, (28 centímetros). La esfera sale a una rapidez 2,7 m/s, dada y conocida del lanzador, por un dispositivo electrónico.

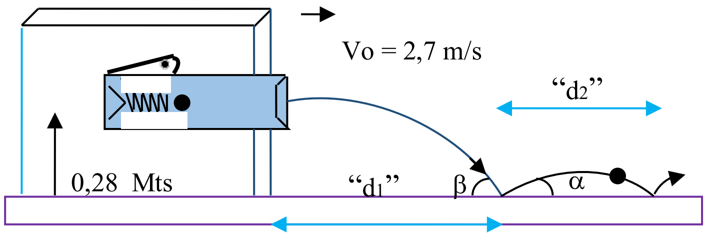


Figura 45: Esquema de un lanzamiento horizontal, con su rebote sobre el plano.

En su primer vuelo la esfera golpea la mesa, donde por cinemática básica se puede calcular el ángulo de incidencia por su velocidad final en el punto que marca su caída, de distancia horizontal "d_1"; luego rebota de la mesa, en donde pierde el 27,26% de su rapidez. (Figura 45 en estas líneas), para cubrir un segundo "Vuelo exacto o simétrico" de alcance horizontal.

El objetivo del experimento es el determinar que los ángulos de incidencia y rebote sobre una línea recta horizontal son similares y se puedan asumir como iguales, en la mecánica clásica, (Física I).

Cálculos

Tiempo del primer vuelo: $0 = 0{,}28 – 4{,}9(t_1)^2 \rightarrow t_1 = 0{,}239$ segundos, se evita usar cronómetros por el error apreciable de la reacción humana, como se ha mencionado; es decir, se usan ecuaciones cinemáticas para calcular los tiempos de vuelo. Este tiempo será igual en todos los ensayos debido a que la altura de 28 centímetros se mantiene fija con el mismo lanzador de proyectiles, en igual enganche de su lanzador.

Luego con la velocidad final vertical de: $V_{fy} = 0 - 9{,}8(0{,}239) = -2{,}342$ m/s. La velocidad final del primer contacto es: $V_f = (2{,}7i – 2{,}342j)$ m/s. Rapidez de 3,574 m/s, valores que se puede confirmar con mínimo error, al usar el valor de la distancia d_1, observada; el ángulo de incidencia es de 40,939°.

Considerando la pérdida de rapidez porcentual calculada previamente en un 27,26%, en ambas componentes de la velocidad de forma proporcional, la velocidad de rebote en la esfera N° 1 es: $V_r = (1{,}964i + 1{,}704j)$ m/s. Rapidez de 2,6 m/s.

La ecuación de alcance para un tiempo de vuelo exacto es por cinemática de: $R = V_0^2 Sen(2\alpha)/g$. Con la medición de la segunda distancia "d_2", medida y observada sobre la mesa, se obtiene el ángulo del rebote y se compara con el de incidencia. Validación: **$\beta = \alpha$**.

Ensayos

Se realizan 10 lanzamientos y se obtienen los resultados que se tabulan en la tabla III, donde el primer valor obtenido del ángulo de rebote, conocida la distancia "d_2" es de 68 centímetros; es decir, calculado según la siguiente fórmula: $0{,}68 = (2{,}6)^2.Sen(2\alpha)/9{,}8$. Como: $\alpha_1 = 40{,}16°$.

Resultado solo inferior en 0,78°, al valor que se "asume" en la Física clásica, para rebotes parabólicos sobre superficies rectas horizontales. Veamos los siguientes

Tabla III: Resultados para 10 ensayos de rebote sobre una horizontal.

Ensayo	Ángulo "β" común, de incidencia	Distancia (d_2)	Ángulo del rebote, con la horizontal "α"
01	40,94°	0,680	40,16°
02	40,94°	0,678	39,69°
03	40,94°	0,681	40,42°
04	40,94°	0,680	40,16°
05	40,94°	0,679	39,92°
06	40,94°	0,681	40,42°
07	40,94°	0,680	40,16°
08	40,94°	0,681	40,42°
09	40,94°	0,680	40,16°
10	40,94°	0,678	39,69°

Análisis de los resultados del experimento 1

El ángulo de rebote es cercano al ángulo que generalmente se asume como igual, la diferencia máxima es de 1,25°. Con promedio y error absoluto de: (40,12 ± 0,21)°; es decir, la expresión de resultados en su holgura mayor de error absoluto queda cercano al valor de incidencia, (por debajo en 0,61° o sea un 1,49% de error). Interesante que algunos ensayos repiten el resultado dando validez al mismo.

Entonces, se puede concluir que es aceptable, la situación de que los ángulos de incidencia y de rebote son iguales, en una superficie recta horizontal; como estrategia de resolución de problemas y situaciones de rebotes sobre rectas horizontales y verticales.

Todos los ángulos de rebote son menores al de la incidencia, confirmando la siempre existente pérdida de inclinación en la realidad, por la obvia pérdida de rapidez en el impacto y rebote; generalmente debido a que no solo la componente vertical es la que pierde más rapidez por invertir su sentido, sino que suele ocurrir que incluso con pérdida de rapidez general, la componente horizontal gana rapidez, ocasionando la lógica pérdida de inclinación para un rebote sobre la horizontal.

Esto posiblemente debido a que, en el contacto, la esfera tiende a girar sobre su centro de masa o incluso a resbalar en las centésimas de segundo de la colisión, con la superficie recta horizontal representada por el mesón de madera; afirmaciones que quedan fuera de lugar, al considerar el cuerpo que rebota como partícula, y porque precisamente el contacto en toda colisión ocurre en centésimas de segundo; es decir sin dar tiempo a considerar la afección de estas fuerzas externas[25].

[25] Como se ha mencionado en el rebote parabólico sobre una recta horizontal; apartado "b" página 19.

Experimento 2: Rebote parabólico sobre una recta inclinada

Descripción y esquema

Con un soporte universal se deja caer, desde una altura de 50 centímetros, (0,5 metros), una esfera plástica de 1,98 gramos, (N° 1 de la tabla 2), sobre una superficie metálica inclinada en 12°, la esfera golpea la superficie a 3,13 m/s con un ángulo de incidencia en caída vertical libre de: $\beta = 90°$. (Ver figura 46).

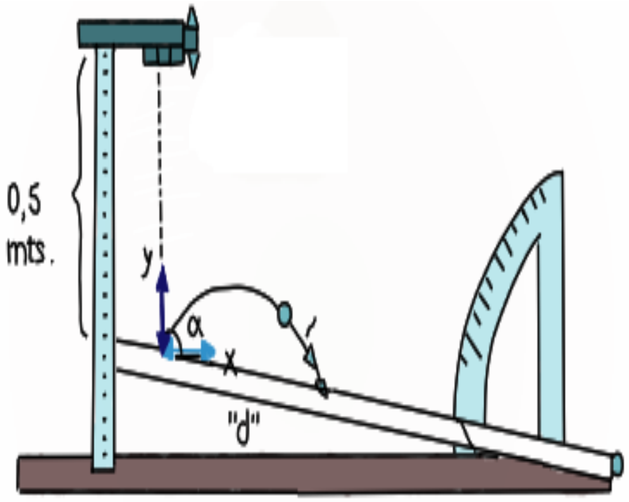


Figura 46: Esquema de una caída libre, sobre una inclinación.

En su vuelo parabólico de rebote, con un porcentaje de perdida de la rapidez estimado en 48,88%, (tabla II), la esfera hace contacto nuevamente con la superficie inclinada, como se muestra en la figura y se puede medir está distancia por las huellas que deje sobre la misma, por efecto de colocar papel de marcas sobre la superficie inclinada.

Con los datos de: la distancia desplazada por la inclinación y la rapidez de rebote, se calcula el ángulo del rebote con respecto a la horizontal, formula especifica deducida más adelante; es decir, el objetivo del experimento es determinar que el ángulo de rebote cumple con la relación 10, usada en este trabajo. El procedimiento para seguir es que, se suelta la esfera del soporte universal, la cual golpea la inclinación o superficie inclinada y rebota con rapidez de 1,6 m/s, (pérdida ya calculada).

Con este dato y el de la distancia "d" se calcula el ángulo de rebote por formulas cinemáticas de una realidad, y se compara con el resultado que sugiere la ecuación 10 propuesta. Ver situación similar, de este experimento en el ejercicio 3.4 resuelto, para una superficie recta inclinada en 14°; solo que aquí, conocida la distancia desplazada y la rapidez del rebote, se calcula el ángulo Alpha "α", por ecuación cuadrática de la tangente, (ejercicio propuesto 3,14).

Cálculos

Las ecuaciones cinemáticas de esta situación son

$dCos(12) = VrCos(\alpha).t \quad 0 = dSen(12) + VrSen(\alpha) - 4{,}9(t)^2$.

De donde se obtiene la parábola

$0 = dSen(12) + dCos(12)Tan(\alpha) - 4{,}9(dCos(12) / VrCos(\alpha))^2$.

Está relación en función de la tangente del ángulo "α" queda como

$-4{,}9\left(\frac{d.Cos(12)}{Vr^2}\right)^2 Tan^2(\alpha) + dCos(12)Tan(\alpha) + (dSen(12) - 4{,}9(\frac{d.Cos(12)}{Vr^2})^2) = 0.$

Ensayos

Se realizan 10 ensayos, donde la primera distancia es: d_1 = 22,4 Cms. Entonces la relación queda: $-0{,}0919Tan^2(\alpha) + 0{,}2191Tan(\alpha) - 0{,}0453$. Ecuación cuadrática que da como resultados: α_1 = 65,23º y α_2 = 12,88º. De este resultado se toma el vuelo mayor, porque a 12,88º la esfera estaría rebotando, casi al "Ras" de la inclinación, lo cual no es posible ni lógico, por lo observado en el experimento, donde la esfera plástica realiza un vuelo apreciable convexo, tipo máximo[26].

En la siguiente tabla se expresan estos resultados, con el número de ensayo, el ángulo de incidencia común de 90º, (el más lógico a la hora de hacer este tipo de experimentaciones por su visión y condición aceptada en una caída libre, la distancia "d" obtenida en las marcas y por supuesto el resultado real calculado. (Ver tabla IV a continuación).

[26] Interesante siempre los resultados de las ecuaciones matemáticas, como solución a cualquier ecuación, y la interpretación o uso lógico que se asumen en otras ciencias, como en este caso para la Física I.

Tabla IV: 10 rebotes sobre superficie inclinada[27].

Ensayo	Ángulo "β" común.	Distancia "d" (m.)	Ángulo de rebote, "α"
01	90°	0,2240	65,23°
02	90°	0,2220	65,17°
03	90°	0,2175	65,97°
04	90°	0,2170	65,04°
05	90°	0,2215	65,46°
06	90°	0,2270	64,70°
07	90°	0,2270	64,70°
08	90°	0,2215	65,46°
09	90°	0,2215	65,46°
10	90°	0,2220	65,17°

Análisis de los resultados del experimento 2

Según la ecuación 10, el ángulo de rebote es: $\alpha = 90° - 2(12°) = 66°$. Con los resultados obtenidos, el ángulo de rebote sobre una recta inclinada está muy cercano a este valor, con una diferencia máxima de: 1,30°. El ángulo promedio con su error absoluto: $\alpha = (65{,}24 \pm 0{,}25)$; es decir, la expresión de resultados en su holgura mayor de error absoluto queda cercano al valor de incidencia, (por debajo en 0,51° o sea un 0,77% de error). Entonces es válido usar la ecuación propuesta, para el rebote recto inclinado "Hacia abajo".

Este resultado es similar al de la superficie horizontal, todos los ángulos de rebote están por debajo del ángulo de la ecuación 10, por la lógica de la pérdida de inclinación en todo rebote, por existir pérdida de rapidez variable por ejes.

Sin embargo, es una ecuación válida para la resolución de ejercicios, como los resueltos y propuestos vistos, en las situaciones expresadas en el mundo de la cinemática clásica en dos dimensiones.

[27] Las tablas III y IV, son tomadas de numerosos ensayos realizados por el autor, Y en su publicación en colaboración con el profesor Gustavo García, (Tirado García 2019).

A MANERA DE CIERRE DE LA OBRA

La consideración principal asumida en este trabajo es el hecho que la magnitud del ángulo de incidencia con respecto a la superficie de choque será igual a la magnitud del ángulo de salida con respecto a la misma superficie, denotándose con la letra griega, Gamma: "γ", cuando el cuerpo que rebota se acepta como una partícula, (Mecánica Clásica). El rebote es un evento común en la naturaleza de las colisiones, y es escasamente estudiado en las situaciones cinemáticas en una y dos dimensiones; solo cuando la superficie de contacto es una línea recta horizontal o vertical, en ejemplos puntuales y hasta únicos en literaturas de Física conocidas.

En este trabajo se hacen estudios en esas tipologías de rebotes, además se amplía en las situaciones de: rebote rectilíneo, rebote parabólico sobre una línea recta inclinada y sobre una curva representada por una función conocida. Adicionalmente se confirman los resultados por medio de experimentos controlados y se realizan recomendaciones sobre el tema del rebote de una partícula para ser incluidos, en sus diferentes versiones, en las asignaturas de: Físicas, en las mecánicas racionales o avanzadas, y en contenidos programáticos de las matemáticas que incluyan la gráfica de relaciones y las aplicaciones de la integral definida; es decir como una recomendación didáctica de utilidad. Todo esto en el marco de las diferentes mallas o pensum de estudios, de las diferentes carreras universitarias en universidades, que incluyan asignaturas con los contenidos del movimiento en el plano.

Es por ello que las ecuaciones desarrolladas en este trabajo para el cálculo de la dirección, que sigue un cuerpo después de un rebote sobre una superficie lineal recta o curva, denotado con la letra griega, alfa: "α", representan una apertura de opciones para el estudio de las variables y las constantes, que caracterizan el movimiento rectilíneo y parabólico de un cuerpo; es decir situaciones que generan un abanico de nuevos datos e incógnitas a utilizar en el particular estudio del rebote de una partícula.

CONCLUSIONES ESPECÍFICAS

1) Los ángulos de rebote, calculados en las diferentes situaciones planteadas en este trabajo, parten de la consideración de que el cuerpo no deslice ni rote, en el tiempo ínfimo de contacto con la superficie; en consecuencia, el ángulo de incidencia y de rebote llamado aquí Gamma, con respecto a la superficie de choque es común e igual, deducción del experimento I.

2) No obstante se realizan ejercicios donde se asumen perdidas de rapidez sin pedida de inclinación, perdida de inclinación sin pérdida de rapidez y donde ocurren ambas situaciones.

3) La afirmación primera, es perfectamente válida a la hora de utilizar ecuaciones cinemáticas y dinámicas de la Física clásica, que sabemos son cercanas a la realidad, más no reales, pero suficientes para la toma de decisiones y el desarrollo de las ecuaciones; ejemplos de esto son: las aceleraciones contantes, las masas y fricciones despreciables en determinadas superficies y poleas, así como los cuerpos asumidos como partículas, en la primera Física universitaria.

4) En el experimento controlado I, se determinó que el ángulo calculado, tendría una diferencia máxima con respecto al ángulo de choque y rebote del 3,15%, sobre una superficie horizontal, en un cuerpo representado por una esfera de hierro de 18,82 gramos, con más del 27% de pérdida de rapidez.

5) En el experimento controlado II, se determinó la validez de la ecuación 10 propuesta, con un margen de error máximo del 1,97%, en un cuerpo representado por una esfera plástica de 1,98 gramos de masa y pérdida de rapidez del casi el 49%.

6) En la diferencia experimental entre los ángulos de incidencia y de rebote, sobre cualquier superficie, siempre ocurre que el primero es mayor, por la obvia pérdida de rapidez del cuerpo que rebota, que ocasiona cambios en la

inclinación de salida, situación digna de estudiarse con mayor profundidad, en trabajos consecuentes.

7) El estudio del rebote parabólico de un cuerpo, sobre una superficie curva representada por una función conocida, es una consecuencia del estudio del rebote parabólico sobre una recta inclinada, al incluir las ecuaciones 10 y 11 desarrolladas con las aplicaciones matemáticas de: La derivada de la función evaluada en el punto de contacto, el cruce entre graficas de relaciones algebraicas o trascendentes, y la integración definida. Con la nota de interés que la "Función superficie" no necesariamente debe ser monótona o continua, pues el rebote parabólico puede encontrarla en un nuevo contacto, luego de "volar" sobre una discontinuidad esencial o evitable.

8) Las aplicaciones de las ecuaciones deducidas en este trabajo para la dirección de salida, con respecto a la horizontal, del rebote sobre cualquier superficie, pueden resultar de interés en el mundo de la ingeniería en general, debido a que muchos elementos se pueden asumir como partículas: cuerpos rígidos, fluidos, la luz y diferentes ondas; así como en la vida diaria y el mundo deportivo profesional, de tal forma que nuevos planteamientos en situaciones dadas y puntuales, pueden motivar al desarrollo de fórmulas específicas.

9) Recordando que las situaciones ideales son comunes y se asumen como tal, en las ciencias clásicas por su "cercanía" a la realidad. De hecho, algunos ejemplos involucran actividades deportivas comunes donde podría surgir el debate de utilidad de cálculos previos o tabulaciones específicas, para mejorar: Tiempos, rapideces, distancias y puntos de aciertos; entre muchos otros. En la observancia de colisiones y rebotes de pelotas y balones.

RECOMENDACIONES PUNTUALES

1) Se recomienda ampliar el contenido de la cátedra de Física I o primera Física universitaria, en las carreras que incluyan el tema de la cinemática en una y dos dimensiones, al incluir las situaciones del rebote rectilíneo y parabólico sobre superficies: horizontales, verticales e inclinadas.

2) Se recomienda ampliar el contenido de la cátedra de Física II, III o de las llamadas Mecánicas Racionales, en las carreras que contengan estas asignaturas en sus mallas o similares, al incluir la situación del rebote parabólico sobre una superficie curva, como introducción o comparación con la cinética de la partícula, subtema de las colisiones.

3) Se recomienda realizar experimentos más exactos, que incluyan sensores electrónicos para el cálculo de los tiempos de contacto, para obtener quizás, mejores resultados de validación de las ecuaciones 10 y 11 propuestas; así como mecanismos que incluyan superficies rectas verticales, inclinadas y diferentes curvas, representadas por funciones del plano derivables.

4) En sentido de lo anterior, cabe la propuesta para el desarrollo de equipos de laboratorio específicos, mecanismos básicos para demostrar y comparar resultados en colisiones controladas, con objetos conocidos. A desarrollar por empresas que comercializan estos productos, para escuelas y universidades.

5) Entre las nuevas situaciones de estudio planteadas, se recomienda ampliar investigaciones sobre la deducción de relaciones, en donde la incógnita sea: el ángulo de la inclinación de la recta o la pendiente de la recta tangente a la curva, de las superficies de contacto, partiendo de la base que se conoce la distancia o el arco desplazado por el cuerpo que rebota; entre otras. En ese sentido se recomienda ampliar ejercicios del rebote parabólico en general y sobre una superficie curva, donde las funciones representativas sean no monótonas y discontinuas.

REFERENCIAS

Berr, F., Johnston E. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros*, *Dinámica*. Novena edición. Editorial Mc. Graw Hill. México. 168 – 175.

Meriam J., Kraige L. (2007). *"Dinámica, Mecánica para ingenieros"*. Tercera edición. Editorial Reverte, S.A. Barcelona. España, 187-198.

Purcell, E., Varberg, D., Rigdon, S. (2001). *Calculo*. Octava edición. Prentice Hall. México.

Sears, F., Zemansky, M., Young, H. (1999). *Física, volumen I*. Novena edición. Editorial Addison Wesley. México. 68 – 75.

Serway, R. (1999). *Física, Tomo I.* Cuarta edición. Editorial Mc Graw Hill. Ciudad de México. 77 – 84 y 95 – 97.

Tipler, P., Mosca, G. (2006). *Física*, *volumem 1*. Quinta edición. Editorial Mc Graw Hill. México. 76 – 77.

Tirado, A. (2015). "Física I, *mecánica clásica para estudiantes de ingeniería*". Segunda edición. Universidad de Oriente. Imprenta universitaria.

_____ (2018). "*El rebote parabólico, sobre una superficie recta inclinada*". Revista: "Paradigma". Vol. 30. N° 1. 112. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay. Venezuela.

_____ (2018). "*Rebote parabólico sobre una superficie curva conocida*". Revista "Alternativas". Volumen 19 N° 3; páginas 31-36. Universidad Católica de Santiago de Guayaquil.

Tirado, A., García, R. (2019). "Validación de las ecuaciones del rebote parabólico sobre una línea recta horizontal e inclinada, por medio de experimentos controlados en el laboratorio de Física I". Revista: "Paradigma". volumen XL, (40), N° 1, página 218. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay. Venezuela.

Alberto Antonio Tirado Sanabria

Profesor universitario en Física y Matemáticas básica. Con 22 años de experiencia en Venezuela y Ecuador. Coordinador del área de Física y sus Laboratorios. Máster en educación, mención enseñanza de la matemática básica. Doctor en educación, con título en trámites administrativos. Autor de variadas publicaciones.

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

ISBN: 978-9942-33-315-5
9 789942 333155

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica