INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Ángel Iván Torres Quijije
Leonardo Santiago Vinces Llaguno

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Universidad Técnica Estatal de Quevedo
1984
Ecuador

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Ángel Iván Torres Quijije
Leonardo Santiago Vinces Llaguno

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Grupo de capacitación e investigación pedagógica

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

© Ángel Iván Torres Quijije
Leonardo Santiago Vinces Llaguno
Universidad Técnica Estatal de Quevedo

Una obra de relevancia producto del 8va. Congreso Internacional de sociedad tecnología e información Publicado por acuerdo con los autores.

Editado en Guayaquil - Ecuador

ISBN: 978-9942-33-399-5

Cita.
Torres, A., Vinces, L. (2021) INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL. Editorial Grupo Compás.

Contenido

Prefacio

La matemática es una ciencia esencialmente relacional, estudia las relaciones entre objetos matemáticos, pero al mismo tiempo es sistemática, es decir tiene organización en el sentido de tener forma y estructura y regirse por leyes, es una ciencia formal, razón por la cual la validación de sus principios implica su demostración; su estudio, por tanto, contribuye al desarrollo del pensamiento formal en cada uno de los estudiantes en su etapa de formación.

El cálculo proporciona a ingenieros y tecnólogos conocimientos necesarios para operar y aplicar funciones matemáticas con variable real en el planteamiento y solución de situaciones prácticas que llegan a presentarse en su ejercicio profesional. La diferenciación, se considera un eje fundamental para el planteamiento y desarrollo de conceptos que permiten entender y asimilar conocimientos de casi todas las áreas de la ingeniería y la tecnología aplicada, especialmente la física, para finalmente abordar temáticas generales del saber específico en el campo profesional.

El dominio de cálculo infinitesimal también permite que el estudiante empiece a relacional y dar explicación a ciertos fenómenos que acontecen a su alrededor como la velocidad de un vehículo, razón de cambio, esbozar gráficas de ciertas funciones que permiten predecir el comportamiento de algún fenómeno como el crecimiento o decrecimiento poblacional, entre otras aplicaciones de gran utilidad en el desempeño profesional.

Además, permite adquirir las destrezas necesarias para continuar la preparación de los estudiantes en otras asignaturas relacionadas con el dominio matemático que permitirán plantear modelos matemáticos que permitan el estudio de comportamiento de casos de estudio de conformidad a cada una de las profesiones de interés para plantear las soluciones con sus posibles consecuencias.

Los Autores

Introducción

El libro Introducción al cálculo Diferencial está desarrollado para ser empleado en el curso inicial del cálculo infinitesimal destinado a estudiantes que empiezan sus estudios de tercer nivel en el área de las ingenierías y profesiones que requieran del cálculo en su etapa de formación profesional. El objetivo de este texto es conseguir que el alumno/a domine el cálculo diferencial, herramienta básica en todas las ramas de la ciencia y la tecnología, fortaleciendo el dominio de las matemáticas que es requisito en cada una de las carreras de formación profesional con mayor énfasis en las ingenierías como son: eléctrica, mecánica, telemática, industrial, agroindustrias, entre otras que ofertan las instituciones de educación superior del país como la Universidad Técnica Estatal de Quevedo a través de la Facultad de Ciencia de la Ingeniería.

Sin abandonar el rigor formal en la exposición, se ha procurado hacer asequible cada tema mediante ejemplos prácticos empleado un gran número de ejercicios resueltos y dejando otros propuestos para cumplir con el proceso de aprendizaje en un intento de que los estudiantes rompan con su rol habitual de espectadores-oyentes, cumplidores de actividades mecanicistas, y consigan una dinámica nueva de trabajo.

Para el estudio del contenido de este texto no se presupone ningún conocimiento previo de cálculo, motivo por el cual se empieza con análisis de los axiomas de campo y orden haciéndolo asequible a todos los alumnos/as desde el primer momento. Es decir, un estudiante con interés puede seguir las explicaciones con facilidad. Se han incluido las demostraciones básicas de aquellos resultados considerados formativos y que desarrollan la capacidad de razonamiento lógico y de análisis crítico.

Los ejercicios resueltos en este libro como los resueltos en las aulas de clase junto a los alumnos podrán ser validados a través de herramientas informáticas como lo es “MATLAB” o “Wolfram Mathematica”, que poseen herramientas intuitivas para la solución y validación de problemas relacionados con el cálculo, además cada sección finaliza con una lista de ejercicios propuesto que ayudará a cimentar los conocimientos adquiridos, además servirá como instrumento de evaluación del proceso de aprendizaje de cada capítulo.

Capítulo I. Funciones reales

Las matemáticas forman parte de nuestra vida cotidiana, motivo por el cual existe un campo amplio de aplicación siendo uno de este la creación de modelos matemático que permitan satisfacer la necesidad de comprender, analizar e interpretar fenómenos que suceden en nuestro entorno. Antes de dar inicio al cálculo diferencial, se hará un análisis de las funciones reales empezando por el conjunto de los números reales en los que se estudiaran los axiomas de campo y de orden, propiedades del valor absoluto, intervalos, las desigualdades o también llamadas inecuaciones y el álgebra de funciones.

1.1. Conjunto de números reales

Una de las herramientas de las matemáticas es el cálculo y esta basa su estudio en dominio del conjunto de los números reales, motivo por el cual de relevancia empezar analizando axiomas y propiedades de los números reales, empezando por el conjunto de los números más sencillos, los cuales permiten contar personas, animales, cosas, etc. y son los números naturales representado por **N** y definido por:

$$\boldsymbol{N} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \ldots.\}$$

Si a este conjunto de los números reales le incorporamos los numero negativos y el cero, obtenemos en conjunto de los números enteros representados por **Z** y definido por:

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots; -\mathbf{2}; -\mathbf{1}; \mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}; \ldots.\}$$

Para ciertas magnitudes como longitud, peso, velocidad, entre otras el conjunto de los números enteros no es suficiente para expresar su precisión y es necesario el uso del conjunto de los números racionales representado por **Q** y definido por:

$$\boldsymbol{Q} = \{\ldots\ldots -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \ldots\ldots..\}$$

Considerando la gran cantidad de posibilidades que presentan el conjunto de los números racionales, los antiguos griegos alrededor del siglo V a. C. demostraron que no son suficientes y dieron paso al conjunto de los números irracionales, representados por **I** y definido por:

$$\boldsymbol{I} = \{\ldots.; \sqrt{\mathbf{2}}; \sqrt{\mathbf{3}}; \boldsymbol{\pi}; \ldots\ldots\}$$

Considerando la unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales con sus negativos e incluyendo el cero, como lo indica la figura 1 se conoce como el conjunto de los números reales, representados por $\boldsymbol{R}$, definido por:

$$\boldsymbol{R} = \{\dots.; -; \mathbf{-1}; \mathbf{0}; \sqrt{\mathbf{2}}; \sqrt{\mathbf{3}}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \boldsymbol{\pi}; \dots\dots\}$$

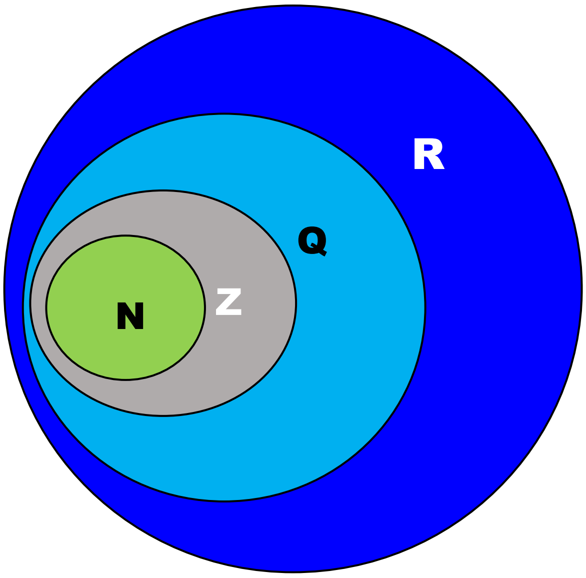


Figura 1: Conjunto Numérico

La Recta de los Reales. Es una representación de un conjunto de puntos sobre una línea recta en el que se representa el cero en el centro de la recta llamada origen, a lado derecho los números positivos y en el lado izquierdo los números negativos, como lo ilustra la figura 2, y en ambos extremos se incluyen fechas que indican que se extiende hasta el infinito positivo e infinito negativo.

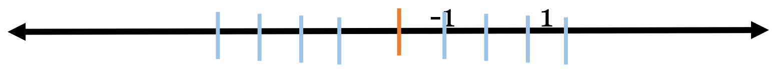


Figura 2: Recta de los Reales

1.2. Axiomas

Los axiomas son considerados un principio lógico sobre el que se construye una teoría, y podemos tener axiomas de identidad, de campo y de orden como los descritos a continuación:

1.2.1. Axiomas de identidad

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}$$

Dicha expresión matemática se lee para todo x, y, z que pertenece al conjunto de los números reales, se tiene los siguientes axiomas de identidad:

- Reflexivo: $x = x$
- Simétrico: $si\ x = y, \rightarrow y = x$
- Transitivo: si $x = y, además\ y = z, \rightarrow x = z$

1.2.1.1.Axiomas de campo para la suma

- Clausurativo: $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, \rightarrow x + y \in \mathbb{R}$
- Asociativo: $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}, \rightarrow (x + y) + z = x + (y + Z)$
- Conmutativo: $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, \rightarrow x + y = y + x$

- Existencia del neutro aditivo: $(\exists\, a \in \mathbb{R}) \rightarrow x + a = a + x = x$, por lo tanto, a = 0
- Existencia del inverso aditivo: $(\forall\, x \in \mathbb{R})(\exists\, a \in \mathbb{R}) \rightarrow x + y = y + x = a$, por lo tanto, a = 0

1.2.1.2. *Axiomas de campo para el producto*

- Clausurativo: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \rightarrow x * y \in \mathbb{R}$
- Asociativo: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$
- Conmutativo: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \rightarrow x * y = y * x$
- Existencia del neutro multiplicativo: $(\exists\, a \in \mathbb{R}) \rightarrow x * a = a * x = x$, por lo tanto, a = 1
- Existencia del inverso multiplicativo: $(\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})(\exists\, a \in \mathbb{R}) \rightarrow x * y = y * x = a$, por lo tanto, a = 1 y **x** pertenece al conjunto de los reales excluido el cero.

La propiedad distributiva permite relacionar la suma con el producto, por lo tanto

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \rightarrow x * (y + z) = x * y + x * z$$

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \rightarrow (x + y) * z = x * z + y * z$$

1.2.1.3. Propiedades de campo

- Ley conmutativa: $x + y = y + x$; $x * y = y * x$

  2+3 = 3+2; (2)(3)=(3)(2)

  5 = 5 ; 6 = 6

- Ley asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$;

  $(x * y) + z = x * (y * z)$

  2 + (3 + 5) = (2+3)+5; 2*3)5=2(3*5)

  2 + 8 = 5 + 5 6 * 5 =2 *15

  10 = 10 30 = 30

- Ley distributiva: $x * (y + z) = x * y + x * z$

  2(3 + 5) = 2*3 + 2*5

  2 * 8 = 6 + 10

  16 = 16

- Elementos neutros: $x + 0 = x$; $x * (1) = x$

  2 + 0 = 2 2 * 1 = 2

- Inversos: $x + (-x) = 0$; $x * (x^{-1}) = 1$

$2 + (-2) = 0 \qquad 2\,(2^{-1}) = 2(^1/_2) = 1$

1.2.2. Axiomas de orden

Los axiomas de orden son importantes porque permiten identificar números positivos y negativos, y estos son considerados un subconjunto del conjunto de los números reales, estos son denotados por $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ que satisfacen los siguientes axiomas:

- $(\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+) \rightarrow (x + y \in \mathbb{R}^+) \quad \wedge \quad (x * y \in \mathbb{R}^+)$
- $(\forall\, x \in \mathbb{R}^+)$, para todo x que pertenece al conjunto de los reales positivos, solo puede cumplir una de las siguientes condiciones:
    - $x \in \mathbb{R}^+$
    - $-x \in \mathbb{R}^+$
    - $x = 0$

A partir de ahora el lector está en la capacidad de determinar cuándo un número es mayor o menor que otro, para esto, sean x, y dos números que pertenecen al conjunto de los números reales. Un número real x es menor que y, se notara $x < y$, en consecuencia $(x - y \in \mathbb{R}^+)$.

Si un número real y es mayor que $x, se\ nota\ y > x$

Ademes, existen cuatro símbolos que permiten establecer la relación que existen entre números, y estos son:

- $<$, el cual se lee, ***menor que***
- $>$, el cual se lee, ***mayor que***
- $\leq$, el cual se lee, ***menor o igual que***
- $\geq$, el cual se lee, ***mayor o igual que***

Teorema. Un teorema es un enunciado que debe ser verdadero o falso (pero no pueden ser ambos), que tienen que deducirse lógicamente de las definiciones, de los axiomas o de otros teoremas. A este proceso se la llama demostración.

Teorema: Sea x, un número que pertenece al conjunto de los números reales cumple:

- $x > 0$, si y solo si x es un numero positivo
- $x < 0$, si y solo si x es un numero negativo
- $x > 0$, si y solo si $-x < 0$
- $x < 0$, si y solo si $-x > 0$

Teorema: Sea x, y, z, w, números que pertenecen al conjunto de los números reales, se cumple:

- Si $(x < y) \land (y < z) \rightarrow x < z$
- Si $(x < y) \rightarrow x + z < y + z$
- Si $(x < y) \land (z < w) \rightarrow x + z < y + w$
- Si $(x < y) \land (\mathrm{z} > 0) \rightarrow \mathrm{x} * \mathrm{z} < \mathrm{y} * \mathrm{z}$
- Si $(x < y) \land (\mathrm{z} < 0) \rightarrow \mathrm{x} * \mathrm{z} > \mathrm{y} * \mathrm{z}$
- Si $(0 < x < y) \land (0 < \mathrm{z} < \mathrm{w}) \rightarrow o < x * z < y * w$

Teorema: Sea x, y, z, w, números que pertenecen al conjunto de los números reales, se cumple:

- Si $(x > y) \land (y > z) \rightarrow x > z$
- Si $(x > y) \rightarrow x + z > y + z$
- Si $(x > y) \land (z > w) \rightarrow x + z > y + w$
- Si $(x > y) \land (\mathrm{z} > 0) \rightarrow \mathrm{x} * \mathrm{z} > \mathrm{y} * \mathrm{z}$
- Si $(x > y) \land (\mathrm{z} < 0) \rightarrow \mathrm{x} * \mathrm{z} < \mathrm{y} * \mathrm{z}$
- Si $(x > y > 0) \land (\mathrm{z} > \mathrm{w} > 0) \rightarrow x * z > y * w > 0$

1.2.2.1. Propiedades de los axiomas de orden

Tricotomía:

$\boldsymbol{x < y}$	$\boldsymbol{x = y}$	$\boldsymbol{x > y}$
2 < 5	**2 = 5**	**2 > 5**

Transitividad:

$x < y \quad \wedge \quad y < z \quad \rightarrow \quad x < z$

2 < 5 ∧ 5 < 9 → 2 < 9

Aditiva:

$x < y \quad \leftrightarrow \quad x + z < y + z$

2 < 5 ↔ 2 + 3 < 5 + 3

5 < 8

Multiplicativa:

$x < y \quad \wedge \quad z > 0 \quad \rightarrow \quad x * z < y * z$

2 < 5 ∧ 8 > 0 → 2*8< 5*8

16 < 40

$x < y \quad \wedge \quad z < 0 \quad \rightarrow \quad x * z > y * z$

2 < 5 ∧ -8 < 0 → 2(-8) > 5(-8)

-16 > -40

1.3. Valor absoluto

El valor absoluto es considerado como la distancia que existe desde el origen (el cero en la recta de los números reales) a cualquier otro punto, ya sea hacia la izquierda o derecha. No existen distancias negativas; se denota mediante $|x|$ y se define como:

$$\forall x \in \mathbb{R}), |x| \geq 0$$

Teorema: Para todo x, que pertenece al conjunto de los números reales, se cumple:

- $|x| = 0$, si y solo si $x = 0$
- $|x|^2 = x^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

Teorema: Para todo a, x, b, que pertenecen al conjunto de los números reales, donde $b > 0$, se cumple:

- $|x| \leq b$, si y solo si $-b \leq x \leq b$
- $|x - a| \leq b$, si y solo si $-b \leq x - a \leq b$
- $|x| \geq b$, si y solo si $x \leq -b$, o $x \geq b$

Propiedades del valor absoluto.

- $|ab| = |a| * |b|$

$|(2)(-3)| = |2| * |-3| = 2 * 3 = 6$

- $|a/b| = |a|/|b|$

$|-4/2| = |-4|/|2| = 4/2 = 2$

- $|a + b| < |a| + |b|$

$|-3 + 2| < |-3| + |2|$

- $|a - b| > ||a| - |b||$

$|2 - 3| > ||2| - |3||$

1.4. Ecuaciones

Dentro del área de las matemáticas al termino ecuaciones hace referencia a la relación de dos expresiones algebraicas, y la relación está dada por el singo de igualdad "=", y a esas expresiones se las llama miembros de la ecuación, además las expresiones algebraicas tendrán números e incógnitas relacionadas entre sí por operaciones matemáticas.

1.5. Intervalos

Los intervalos son subconjunto de los números reales, empleados en matemáticas para identificar un conjunto de valores que puede tomar una determinada variable de una ecuación o representar dominio o recorridos de funciones reales los cuales representa los valores que puede tomar la o las variables independientes de una función y los valores que pueda tomar la variable dependiente de la función. Los Intervalos pueden ser intervalos cerrados, intervalos abiertos o intervalos semiabiertos que son representados como un segmento de recta en la recta de los números reales

1.5.1. Intervalos cerrados

Los Intervalos cerrados son aquellos conjuntos en los cuales incluyen sus valores extremos y son representados por los números extremos entre corchetes y de forma geométrica se incluyen dos pequeños círculos rellenos para indicar que son intervalos cerrados.

$$-5 \leq x \leq 10$$

$$[-5,10]$$

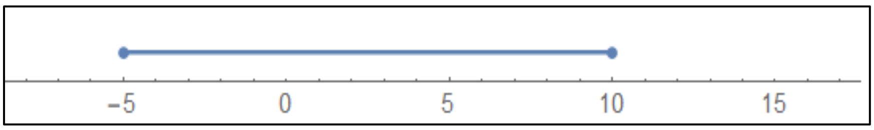


Figura 3: Intervalo Cerrado

1.5.2. Intervalos abiertos

Los Intervalos cerrados son aquellos conjuntos en los cuales incluyen sus valores extremos y son representados por los números extremos entre corchetes invertidos o entre paréntesis y de forma geométrica se incluyen dos pequeños círculos sin relleno para indicar que son intervalos cerrados.

$$-5 < x < 10$$

$$(-5,10)$$

$$]-5,10[$$

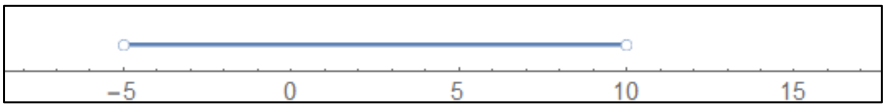


Figura 4: Intervalo Cerrado

1.5.3. Intervalos semiabiertos

Los Intervalos cerrados son aquellos conjuntos en los cuales incluyen uno de sus dos valores extremos representados por un corchete y del extremo que es considerado con el corchete invertido o un paréntesis

$$-5 < x \leq 10$$

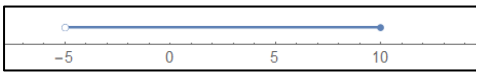
$$(-5,10]$$

$$]-5,10]$$

$-5 \leq x < 10$

$[-5,10[$

$[-5,10)$



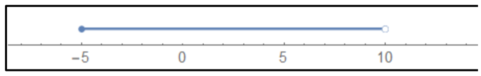


Figura 5: Intervalos Semiabiertos

1.6. Desigualdades

Desigualdad: Es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

Inecuación: Es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas. Las inecuaciones también se llaman **Desigualdades Condicionales.**

Ejemplo: La desigualdad $2x - 3 > x + 5$ es una inecuación porque tiene la incógnita x.

Es condicional, porque es cierta para cualquier valor de x mayor que 8, pero es falsa si x es menor o igual que 8.

Propiedades fundamentales:

- Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$

- Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$
- Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $a * c > b * c$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
- Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $a * c < b * c$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Inecuaciones simultaneas. Son inecuaciones que tienen soluciones comunes.

Ejemplo: ¿Para qué valores de x se verifican simultáneamente las inecuaciones $10x - 15 < 0$ y $5x > 3$?

Resolviendo las inecuaciones, la primera se cumple para $x < 3/2$, y la segunda, para $x > (3/5)$; por consiguiente, los valores mayores que $3/5$ y menores que $3/2$, verifican simultáneamente ambas inecuaciones.

Este resultado se escribe así: $3/5 < x < 3/2$

Ejemplo: Para qué valores de x se verifican la inecuación: $6x - 10 > 3x + 5$

Pasamos los términos semejantes de un lado: $6x - 3x > 5 + 10$

Reduciendo términos queda: $3x > 15$

Despejando x: $x > 15/3$

Haciendo la división obtenemos: $x > 5$

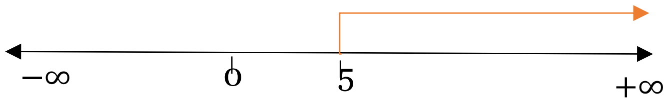


Figura 6: Intervalo de solución

El intervalo de solución es $(5, \infty)$, que también se lo puede escribir como: $]5, \infty[$

Ejemplo: Resolver la desigualdad $x^2 - 5x - 6 > 0$

SOLUCION: Se factoriza el trinomio $(x - 6)(x + 1) > 0$

Se buscan los valores que hacen cero el producto. En este caso son 6 y -1, con estos valores se determinan los intervalos: $(-\infty, -1), (-1, 6), (6, \infty)$

Después se comprueba, sustituyendo un valor de cada intervalo en los factores, para determinar los signos de estos. Posteriormente se aplica la ley de los signos para el producto tomando como solución el intervalo o los intervalos que cumplen con la desigualdad.

a) Para el intervalo $(-\infty, -1)$

Se toma, por ejemplo, el valor de x = -4 y se sustituye en cada factor.

$(-4-6)(-4+1) = (-10)(-3) = 30$, para lo cual el producto es positivo

b) Para el intervalo $(-1, 6)$

Se toma un valor como el de $x = 0$ y se sustituye en los factores

$(0-6)(0+1) = (-6)(1) = -6$, el producto es negativo

c) Para el intervalo $(6, \infty)$

Se toma el valor de x, como $x = 7$ y se sustituye en cada factor

$(7-6)(7+1) = (1)(8) = 8$, para lo cual el producto es positivo

Los intervalos solución son aquellos en los cuales el producto es positivo, es decir, $(-\infty, -1) \cup (\mathbf{6}, \infty)$

Ejemplo: Resolver la desigualdad $\frac{2}{3x-6} < 0$

Solución: El numerador es positivo, entonces para que la desigualdad sea negativa (menor que cero) el denominador debe ser negativo, es decir: $3x - 6 < 0$

Despejando x queda $x < 6/3$ con lo cual se obtiene que $x < 2$, por lo tanto, el intervalo de solución es $(-\infty, 2)$.

Ejemplo: Resolver la desigualdad $\mathbf{1 \leq \frac{2x}{1-x}}$

$$1 - \frac{2x}{1-x} \leq 0$$

$$\frac{1-3x}{1-x} \leq 0$$

$$\begin{cases} 1 - 3x \leq 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \geq \frac{1}{3} \\ x < 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 1 - 3x \geq 0 \\ 1 - x < 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \leq \frac{1}{3} \\ x > 1 \end{matrix}$$

$$x \in \left[\frac{1}{3}, 1)\right[$$

Ejemplo: Resolver la desigualdad $\mathbf{3x^2 - 7x + 14 \geq 10}$

$$3\mathrm{x}^2 - 7\mathrm{x} + 14 - 10 \geq 0$$

$$3x^2 - 3x - 4x + 4 \geq 0$$

$$3x(x-1) - 4(x-1) \geq 0$$

$$(x-1)x(3x-4) \geq 0$$

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 3x - 4 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \geq 1 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ 3x - 4 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \leq 1 \\ x \leq \frac{4}{3} \end{matrix}$$

$$x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty)\right[$$

Ejemplo: Resolver la desigualdad $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{118-2x}} \geq \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3x+6}}$

$$\frac{1}{18-2x} \geq -\frac{1}{3x+6}$$

$$\frac{1}{18-2x} + \frac{1}{3x+6} \geq 0$$

$$\frac{3X + 6 + 18 - 2X}{(18-2X)X(3X+6)} \geq 0$$

$$\frac{X+24}{(18-2X)X(3X+6)} \geq 0$$

$$\begin{cases} X+24 \geq 0 \\ (18-2x)x(3x+6) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+24 \leq 0 \\ (18-2x)x(3x+6) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -24 \\ x \in \langle -2,9 \rangle \end{cases} \quad x \in \langle -2,9 \rangle$$

$$\begin{cases} x \leq -24 \\ x \in \langle -\infty,-2 \rangle \cup \langle 9,+\infty \rangle \end{cases}$$

$$x \in \langle -\infty,-24]$$

$$x \in \,]-\infty,-24] \cup \,]-2,9[$$

Ejemplo: Resolver $\frac{3}{2x+3} < \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x-2}}$

Solución: Se agrupan los términos en un solo miembro de la desigualdad y se realiza la operación indicada, obteniendo así: $\frac{3}{2x+3} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x-2}} < \mathbf{0}$

Sumando las fracciones tenemos:

$$\frac{3(x-2)-1(2x+3)}{(2x+3)(x-2)} < \mathbf{0} \Rightarrow \frac{3x-6-2x-3)}{(2x+3)(x-2)} < \mathbf{0} \Rightarrow \frac{x-9}{(2x+3)(x-2)} < \mathbf{0}$$

Se determinan los intervalos para analizar la desigualdad, de la siguiente manera: El denominador debe ser diferente de cero por tanto $x \neq -3/2$ y $x \neq 2$. Luego, el numerador se hace cero cuando $x = 9$, entonces los posibles intervalos solución son:

$$(-\infty, -3/2), (-3/2, 2), (2{,}9), (9, \infty)$$

Cuando se presentan varios intervalos es útil la metodología que se muestra en la siguiente tabla, es una de las formas de poder resolver una inecuación por medio de los signos entre los intervalos que se sacan, tomando valores entre los intervalos y verificando qué signos son los que quedan cuando se aplican en las ecuaciones que se obtienen al factorizar.

Tabla 1: posibles intervalos de solución

Intervalo	$(-\infty, -3$	$(-3/2, 2)$	$(2{,}9)$	$(9, \infty)$
$x-9$	-	-	-	+
$2x+3$	-	+	+	+

$x-2$	-	-	+	+
$\dfrac{x-9}{(2x+3)(x-2)}$	-	+	-	+

Como la condición de la desigualdad es los menores a cero, por lo tanto, la solución de la desigualdad es $(-\infty\,, -3/2)\; U\; (2{,}9)$

El valor absoluto de un número real x denotado por $|x|$ se define por:

$$|x| = \begin{cases} x\ si\ x\ >\ 0 \\ -x\ si\ x\ <\ 0 \\ 0\ si\ x\ =\ 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$|5|\ =\ 5$$

$$|-7|\ =\ -(-7)\ =\ 7$$

$$|\ -\ 1\,/\,9|\ =\ -(-\,1\,/\,9)\ =\ 1\,/\,9$$

$$|0.98\,|\ =\ 0.98$$

$$|\,0\,|\ =\ 0$$

Si x es un numero real y $a\ >\ 0,$ entonces:

a) $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$

b) $|x| > a \leftrightarrow x > a$ ó $x < -a$

Otra forma de ver el valor absoluto

a) $|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$

b) $|x| \geq a \leftrightarrow x \geq a \; o \; x \leq -a$

Ejemplo: Resolver $|x| = 7$

Por la definición de valor absoluto, tenemos: $x = 7$ o $x = -7$

Ejemplo: Resolver $|2x + 8| = 5$

$2x + 8 = 5$ ó $2x + 8 = -5$

$2x = 5 - 8$ ó $2x = -8 - 5$

$2x = -3$ ó $2x = -13$

$x = -3/2$ ó $x = -13/2$

Ejemplo: Resolver $|x - 1| = -5$

Como el valor absoluto nunca es negativo, esta ecuación no tiene solución.

Ejemplo: Resolver $|\mathbf{3x+15}| \geq \mathbf{10}$

$$3x+15 \geq 10, 3x+15 \geq 0$$

$$-(3x+15) \geq 10, 3x+15 < 0$$

$$x \geq -\frac{5}{3}, x \geq -5$$

$$x \leq -\frac{25}{3}, x < -5$$

$$x \in \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right\rangle$$

$$x \in \left\langle -\infty, -\frac{25}{3}\right]$$

$$x \in \left\langle -\infty, -\frac{25}{3}\right] \cup \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right\rangle$$

Ejemplo: Resolver $\mathbf{10} < |\boldsymbol{x}+\mathbf{5}|$

$$|x+5| > 10$$

$$x + 5 > 10, x + 5 \geq 0$$

$$-(x + 5) > 10, x + 5 < 0$$

$$x > 5, x \geq -5$$

$$x < -15, x < -5$$

$$x \in \langle 5, +\infty \rangle$$

$$x \in \langle -\infty, -15 \rangle$$

$$x \in \langle -\infty, -15 \rangle \cup \langle 5, +\infty \rangle$$

Ejemplo: Resolver $\boldsymbol{|2x + 3| < 10|x|}$

$$|2x + 3| - 10x|x| < 0$$

$$2x + 3 - 10x < 0, 2x + 3 \geq 0, x \geq 0$$

$$-(2x + 3) - 10x < 0, 2x + 3 \geq 0, x \geq 0$$

$$2x + 3 - 10x(-x) < 0, 2x + 3 \geq 0, x < 0$$

$$-(2x + 3) - 10x(-x) < 0, 2x + 3 < 0, x < 0$$

$$x > \frac{3}{8}, x \geq -\frac{3}{2}, x \geq 0$$

$$x > -\frac{1}{4}, x < -\frac{3}{2}, x \geq 0$$

$$x < -\frac{1}{4}, x \geq -\frac{3}{2}, x < 0$$

$$x < \frac{3}{8}, x < -\frac{3}{2}, x < 0$$

$x > \frac{3}{8}, x \in [0, +\infty\rangle$ $\quad$ $x \in \langle\frac{3}{8}, +\infty\rangle$

$x > -\frac{1}{4}, x \in \emptyset$ $\quad$ $x \in \emptyset$

$x < -\frac{1}{4}, x \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right\rangle$ $\quad$ $x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right\rangle$

$x < \frac{3}{8}, x \in \left\langle-\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle$ $\quad$ $x \in \langle-\infty, -\frac{3}{2}\rangle$

$$x \in \langle-\infty, -\frac{1}{4}\rangle \cup \langle\frac{3}{8}, +\infty\rangle$$

Ejemplo: Resolver $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 1$

$$\left|\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}\right| > 1, \mathrm{x} \neq -1$$

$$\frac{x-1}{x+1} > 1, \frac{x-1}{x+1} \geq 0$$

$$-\frac{x-1}{x+1} > 1, \frac{x-1}{x+1} < 0$$

$$x < -1, x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup [1, +\infty\rangle$$

$$x \in \langle -1,0\rangle, x \in \langle -1,1\rangle$$

$$x \in \langle -\infty, -1\rangle$$

$$x \in \langle -1,0\rangle$$

$$x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1,0\rangle$$

1.7. Ejercicios propuestos de desigualdades

Encontrar el conjunto de solución que satisfagan las siguientes desigualdades

1) $7x - 5 > 0$
2) $4x^2 - 8x + 4 \leq 1$
3) $x^2 - 2x \geq 1$
4) $3x - 5 < \frac{2}{x-2}$
5) $\frac{x-4}{x+3} > 2$
6) $\frac{x-2}{1-x} > x$
7) $x - 4 \leq \frac{1-7x}{5}$
8) $\frac{(x-7)(5-x)}{(x-2)} > 0$

9) $\frac{x^2+2x+1}{x-1} \leq x-4$

10) $\frac{x+4}{8-x} < -\frac{x-5}{1-x}$

11) $|x-9| > 3$

12) $|3-2x| > 5$

13) $|x^2-x-6| \geq 6$

14) $|25-9x^2| \geq 65$

15) $\left|\frac{3}{x-4}\right| > 2$

16) $\left|\frac{2-x}{7}\right| < 3$

17) $\left|\frac{x-8}{5-x}\right| < 2$

18) $\left|\frac{2-x}{x+1}\right| > \left|\frac{2}{x-5}\right|$

19) $\left|\frac{7}{3-x}\right| > \left|\frac{4}{1-x}\right|$

20) $\left|\frac{x+9}{3}\right| > \left|\frac{x+2}{7}\right|$

21) $-2 < x-3 < 10$

22) $5 > 2x+7 > -10$

23) $-9 < |x-5| > 12$

24) $5 > |x-5| > -12$

25) $-12 < |-x+12| > 1$

26) $4 > |-x-5| > -14$

27) $0 < \frac{x+3}{x-2} < 10$

28) $-4 > \frac{x-2}{-x+3} > -10$

29) $-2 < \left|\frac{-x-3}{2-x}\right| < 10$

30) $0 > \frac{-2x}{3+4x} > -8$

1.8. Algebra de funciones

El estudio de las funciones y sus gráficas ha sido de gran interés por la humanidad y se conoce que Descartes y Fermat estudiaron en profundidad las curvas y sus ecuaciones, y lograron despertar el interés de muchos matemáticos a lo largo del siglo XVII realizarán estudio hasta los estudios realizados por Newton y Leibniz que proporcionaron técnicas que permitían estudiar con las mismas herramientas los problemas de física y geometría. El cálculo diferencial e integral lograron un destacado desarrollo de las matemáticas con resultado que se publicaron durante los siglos XVIII y XIX.

El nombre de "función" proviene del matemático Leibniz, y su estudio sobre funciones fue estimulado por su interés geométrico de analizar, matemáticamente, los puntos de las curvas donde éstas alcanzan su máximo y su mínimo valor y dar un método general para determinar las rectas tangentes en estos puntos. Estos cálculos se realizan mediante el cálculo de las funciones derivadas y forman parte importante del cálculo diferencial.

1.8.1. Definición de función:

Es un tipo de relación (correspondencia) que existe entre dos variables, con la condición de que a cada valor de la variable independiente (Dominio) le corresponde un sólo valor de la variable dependiente (Rango).

Para construir una función es necesario tener dos conjuntos D y R y una regla de correspondencia, como se ilustra en el siguiente diagrama.

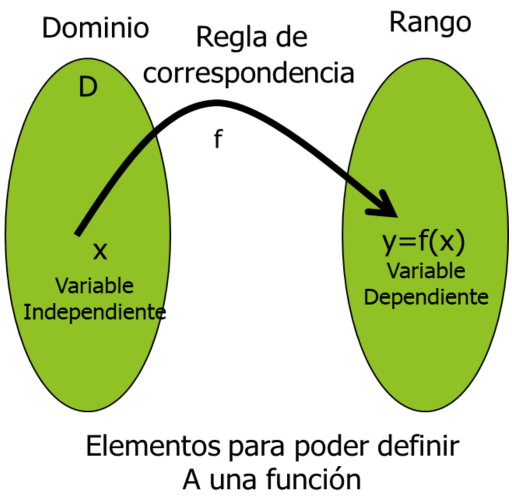


Figura 7: Definición de Función

1.8.2. Características de una función

- Dominio: Conjunto de valores que pueden asignarse a la variable independiente para los cuales la función existe o está definida.
- Rango: Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente en una función.
- Valores positivos y negativos:
- Ceros de la función o intersección con el eje “x”
- Intersección con el eje “y”
- Máximos y mínimos.
- Concavidad (Hacia arriba o hacia abajo)

- Asíntotas horizontales y verticales.

1.8.3. Clasificación de una función

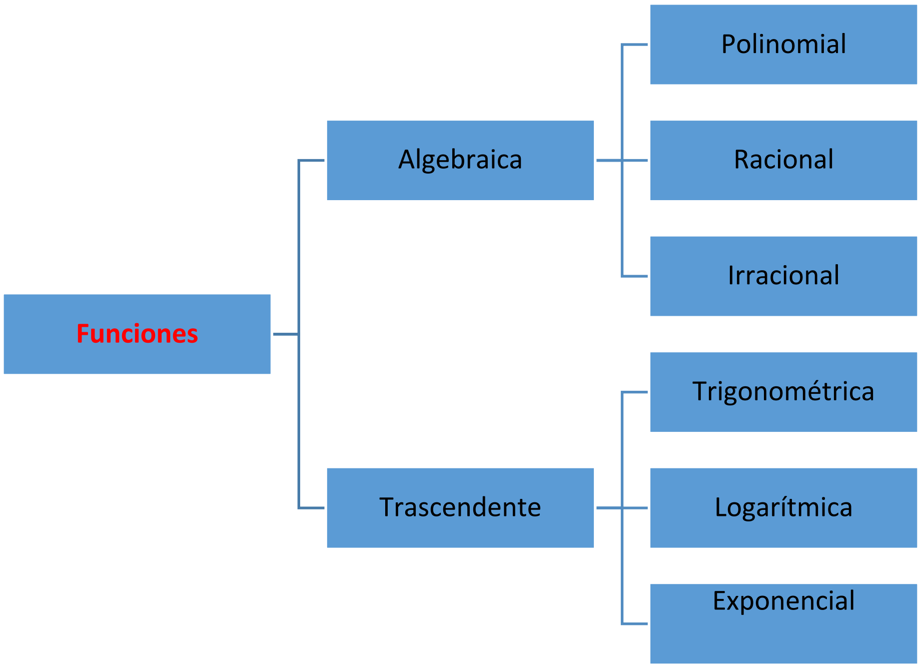


Figura 8: Clasificación de Funciones

1.8.3.1. Función algebraica.

Es aquella que puede expresarse como un número finito de sumas, diferencias, múltiplos, cocientes y radicales que contienen x. Algunos ejemplos son:

$$f(x) = (3x+2)+(5x-8)$$
$$g(x) = (x+2)-(x-6)$$

$$h(x)=\frac{(2x-3)}{(x^2+1)}$$
$$f(x)=(x^2-4x+2)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{x^2-4x+2}$$

Ejemplo: $\boldsymbol{Si\ f(x)=x^2-1}$ $\quad ; f(-5), f(-\sqrt{3}),\ f(3)\ y\quad f(6)$

$$f(-5)=(-5)^2-1=24$$

$$f(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^2-1=3-1=2$$

$$f(3)=(3)^2-1=8$$

$$f(6)=(6)^2-1=35$$

1.8.3.2. Función polinómica

Las funciones polinómicas o también llamadas polinomiales tienen la siguiente notación:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_0$$
$$con\ a_n\neq 0, y\ con\ coeficientes\ reale\ de\ grado\ n,$$

Ejemplo: $\boldsymbol{Si\ f(x)=2x^2+x}$ $\quad ; f(-5), f\left(-\frac{1}{2}\right),\ f(2)\ y\quad f(7)$

$$f(5)=2(-5)^2+5=2(25)+5=55$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2(-\frac{1}{2})^2 + \left(-\frac{1}{2}\ \right) = -2\left(\frac{1}{4}\ \right) + \left(-\frac{1}{2}\ \right) = -1$$

$$f(2) = 2(2)^2 + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$f(7) = 2(7)^2 + 7 = 105$$

1.8.3.3. Función racional

Es aquella que puede escribirse como el cociente de dos polinomios.

De modo específico, una función es racional si tiene la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}; \quad donde\, q(x) \neq 0$$

$$\text{Y} \;\; p(x), q(x) \;\; son \quad polinomios$$

Ejemplo: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{3x}{x^2+1}$ $\qquad f(-1), f(0),\ f(1)\ \ y \quad f\sqrt{(2)}$

$$f(-1) = \frac{3(-1)}{(1)^2+1} \;\; = \frac{-3}{2}$$

$$f(0) = \frac{3(0)}{(0)^2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f(1) = \frac{3(1)}{(1)^2 + 1} = \frac{3}{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{3(\sqrt{2})}{(\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{2}$$

Ejemplo: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2}{x^3-2}$; $f(-\sqrt{2}), f(-1), f(0)\ y\ f(\frac{1}{2})$

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2})^2}{(-\sqrt{2})^3 \ + 2} = \frac{2}{-2\sqrt{2} - 2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2}{(-1)^3 - 2} = \frac{1}{-3}$$

$$f(0) = \frac{(0)^2}{(0)^3 - 2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^3 - 2} = -\frac{2}{15}$$

Ejemplo: Encuentre el dominio de $f(x) = \frac{2x-5}{x(x-3)}$

$x(x-3) = 0$

$x = 3$

$x - 3 = 0$

$x - 3 + 3 = 3$

$x = 3$

$x = 0, 3$

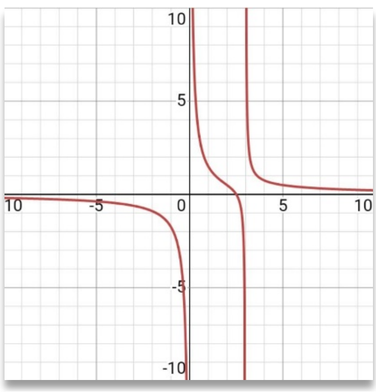


Figura 9: Gráfica de f(x)= (2x-5)/(x(x-3))

Dominio

$(-\infty, 0) \cup (0,3) \cup (3, \infty)$

$\{{}^{x}/_{x} \neq 0, 3\}$

Ejemplo: Encuentre el dominio de $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x^2-1}}$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 - 1 + 1 = 1$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = 1, -1$

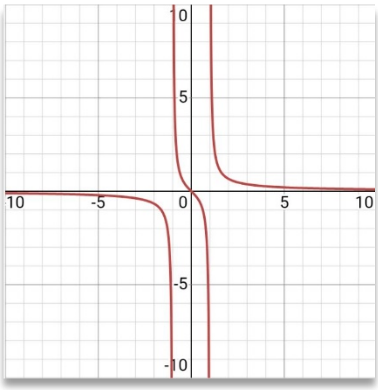


Figura 10: Gráfica de f(x)=x/(x^2-1)

Dominio

$(-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty)$

$\{{}^{x}/_{x} \neq 1, -1\}$

Ejemplo: Encuentre el dominio de $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2-10x+25}}$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$x^2 - 10x + 5^2 = 0$

$2ab = 2 * x * -5$

$2ab = -10x$

Trinomio cuadrado perfecto:

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

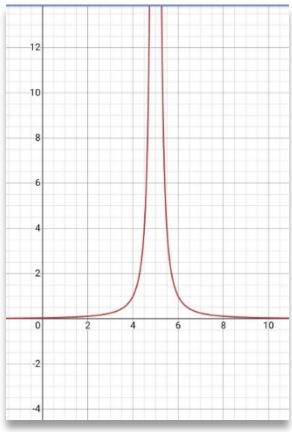


Figura 11: Gráfica de f(x)=1/(x^2-10x+25)

$a = x \quad b = 5$

$(x - 5)^2 = 0$

$x - 5 = 0$

$x - 5 + 5 = 5$

$x = 5$

Dominio

$(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$

$\{{}^{x}/_{x} \neq 5\}$

1.8.3.4. Función irracional

Las funciones irracionales son aquellas cuya expresión matemática $f(x)$ presenta un radical de la forma: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

Donde $g(x)$, es una función polinómica o una función del tipo racional, Además si n, es par el radical está definido para $g(x) \geq 0$; dato que se debe considerar para calcular el dominio de $f(x)$ que contenga un radical, es decir se debe imponer una condición al conjunto de partida del $f(x)$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{Si\ f(x)} = \sqrt{x+1} \qquad ; f(-1), f(0), \quad f(3) \ y \quad f(5)$$

$$f(-1) = \sqrt{(-1)+1} = 0$$

$$f(0) = \sqrt{(0)+1} = 1$$

$$f(3) = \sqrt{(3)+1} = 2$$

$$f(6) = \sqrt{(5)+1} = \sqrt{(6)}$$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{Si\ f(x)} = \sqrt{2x+4} \qquad ; f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), \quad f\left(\frac{5}{2}\right) \ y \quad f(4)$$

$$f(-\frac{1}{2})\left(\sqrt{2(-\frac{1}{2})+4}\right) = \sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2(\frac{1}{2}) + 1} = \sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{(\frac{5}{2}) + 1} = 3$$

$$f(4) = \sqrt{2(4) + 1} = \sqrt{(12)} = 2\sqrt{(3)}$$

Ejemplo: Encuentre el dominio de $f(x) = \sqrt{4x - 2}$

$$4x - 2 \geq 0$$

$$4x \geq 2$$

$$x \geq \frac{2}{4}$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

Dominio: $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$

Ejemplo: Encuentre el dominio de $f(x) = \sqrt{15 - 5x}$

$$0 \geq 15 - 5x$$

$$5x \geq 15$$

$$x \geq \frac{15}{3}$$

$$x \geq 3$$

Dominio: $[\mathbf{3}; \infty)$

1.8.3.5. Función trascendente

Son todas aquellas funciones que además de contener las operaciones aritméticas básicas, contienen los operadores trigonométricos, logarítmicos y exponenciales. Por ejemplo:

$$f(x) = 2sen(x) + 4$$
$$g(x) = \ln(x^2 + 1)$$
$$h(x) = 2^{x+1}$$

1.8.3.6. Formas de representar a una función

En forma de enunciado: Por ejemplo: El área de un círculo es igual a pi por su radio al cuadrado. Fórmula o Ecuación: $A = \pi * r^2$

Tabla 2: Tabulación de datos de una función

radio	Área
r_1	A_1
r_2	A_2
r_3	A_3
r_4	A_4
.	.
.	.
r_n	A_n

Formas de representar a una función:

a) Gráfica o geométrica:

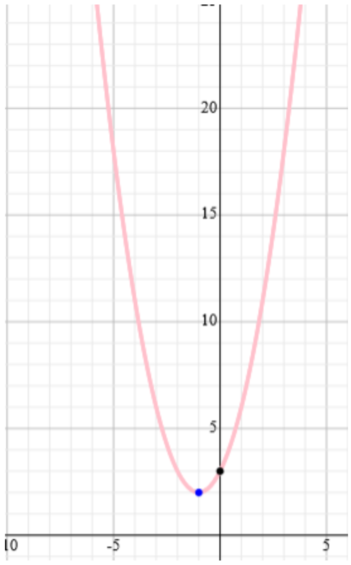


Figura 12: Representación Gráfica de Funciones

b) En forma de conjunto:

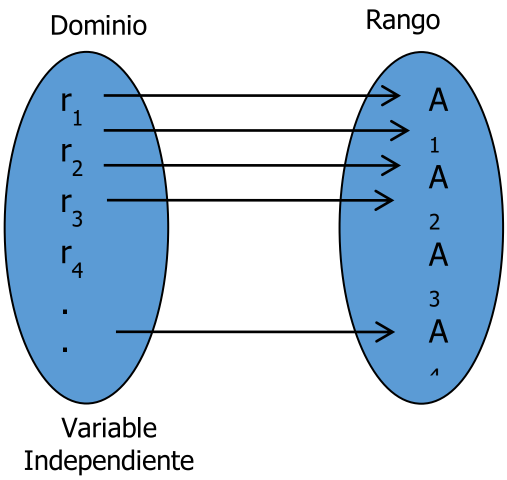


Figura 13: Representación de Funciones en forma de Conjuntos

1.8.4. Función lineal

Puede ser considerada como caso particular de función polinomial, las funciones lineales representan gráficamente una recta, y son de la forma $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es el valor de la ordenada al origen *o* la intersección con el eje "y".

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

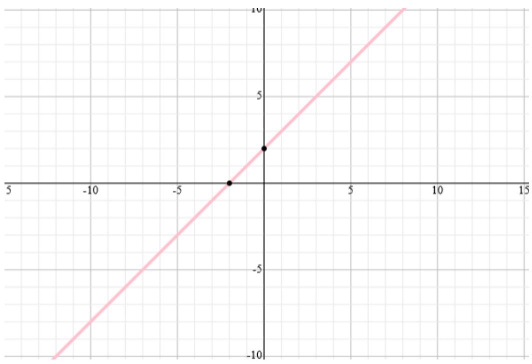


Figura 14: Función Lineal

1.8.5. Función constante:

Este tipo de función es un tipo de función lineal paralela al eje de las x.

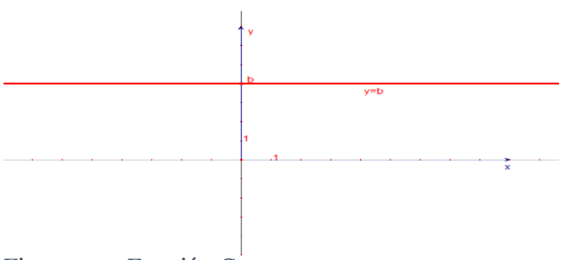


Figura 15: Función Constante

1.8.6. Función cuadrática

Es un caso particular de función polinómica también conocidas como funciones parabólicas, las funciones cuadráticas son aquellas cuya característica principal es que su grado máximo es 2 y son de la forma:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = ax^2 + bx + c \\
&donde\ a, b, c\ son\ números\ reales\ con\ a \neq 0 \\
&si\ b = 0\ \ o\ bien\ \ c = 0,\ entonces\ la\ \ función\ es\ incompleta \\
&y\ tiene\ la\ \ forma: \\
&f(x) = ax^2 + bx\ \ (función\ mixta) \\
&f(x) = ax^2 + c\ \ \ (función\ \ pura)
\end{aligned}
$$

1.8.7. Función exponencial.

Las funciones exponenciales generalmente tienen la forma:

$$f(x) = a^x$$

Dónde: a se le llama base y es una constante y x se le denomina exponente y es una variable. La definición de función exponencial exige que la base sea siempre positiva y diferente de uno.

El dominio de la función exponencial está formado por el conjunto de los números reales y su rango está representado por el conjunto de los números positivos. Con base en esto observamos las siguientes propiedades:

- ✓ La función existe para cualquier valor de x.
- ✓ En todos los casos la función pasa por un punto fijo $(0,1)$.
- ✓ Los valores de la función son siempre positivos para cualquier valor de x.
- ✓ La función siempre es creciente o decreciente (para cualquier valor de x) dependiendo de los valores de la base "a". La función es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$
- ✓ El eje x es una asíntota (hacia la izquierda si $a > 1$ y hacia la derecha si $a < 1$
- ✓ A continuación, se presentan algunas gráficas de funciones exponenciales:

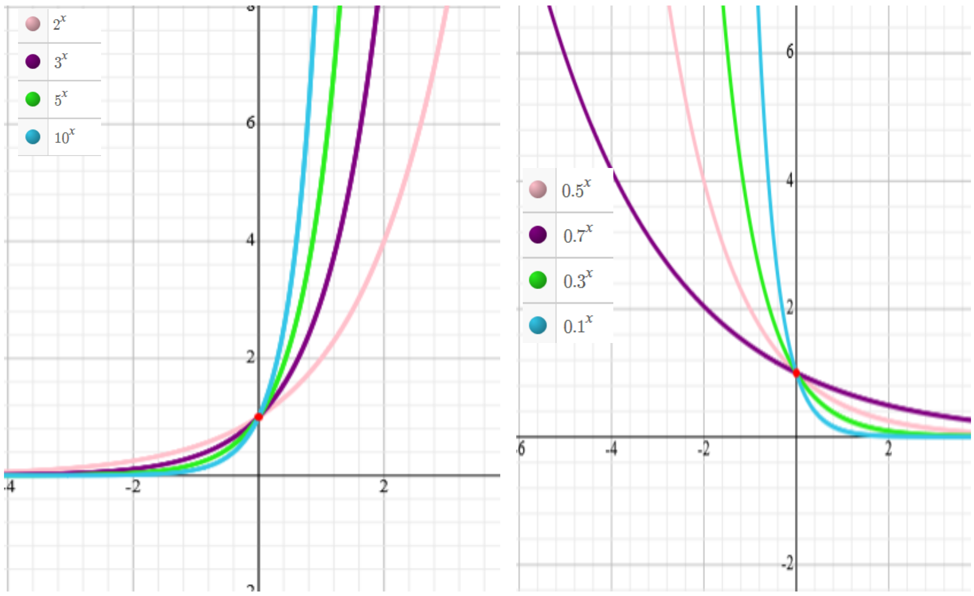


Figura 16: Función Exponencial

1.8.8. Función logarítmica.

La función logaritmo tiene la forma

$$y(x) = \log_a |x|,$$

Donde a se llama base y es un número real positivo distinto de uno. La función logaritmo de base se define como la inversa de la función exponencial, es decir; el logaritmo de base "a" de un número "x" es el exponente al cual debe elevarse la base "a" para obtener el mismo número "x".

$$y = \log_a |x| \Leftrightarrow a^y = x$$

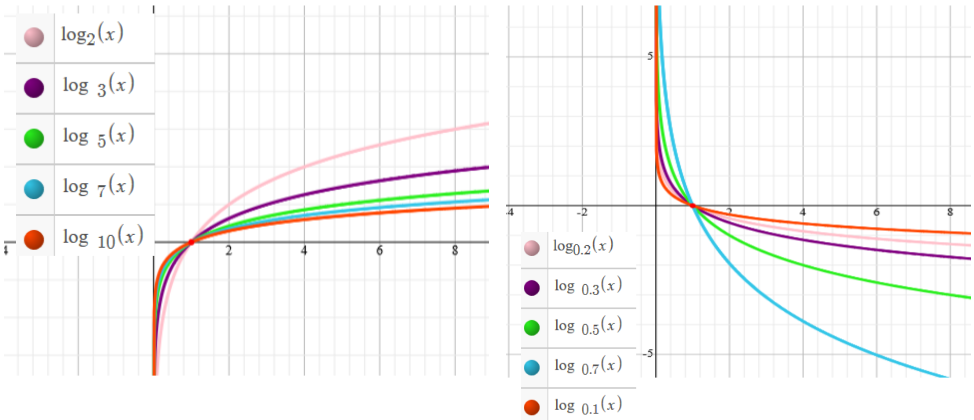


Figura 17: Función Logarítmica

Propiedades de la función logaritmo para $a > 1$

- ✓ Su dominio son todos los números reales positivos.
- ✓ Su rango son todos los números reales
- ✓ Son continuas y crecientes en todo su dominio.
- ✓ Su gráfica siempre pasa por el punto (1,0) y $(a, 1)$.
- ✓ El eje "y" es una asíntota vertical
- ✓ La función es negativa para valores de "x" menores que 1
- ✓ La función es positiva para valores de "x" mayores que 1

Propiedades de la función logaritmo, para $0 < a < 1$

- ✓ Su dominio son todos los números reales positivos.
- ✓ Su rango son todos los números reales
- ✓ Son continuas y decrecientes en todo su dominio.

- ✓ Su gráfica siempre pasa por el punto (1,0) y $(a, 1)$.
- ✓ El eje "y" es una asíntota vertical
- ✓ La función es negativa para valores de "x" mayores que 1
- ✓ La función es positiva para valores de "x" menores que 1

1.8.9. Operaciones de Funciones

1.8.9.1. Suma de funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real definidas en un mismo intervalo. Se llama suma de ambas funciones, y se representa por $f + g$, a la función definida por:

$$(f + g)8x) = f(x) + g(x)$$

1.8.9.2. Resta de funciones

Del mismo modo que se ha definido la suma de funciones, se define la resta de dos funciones reales de variable real f y g, como la función. Para que esto sea posible es necesario que f y g estén definidas en un mismo intervalo.

$$(f - g)8x) = f(x) - g(x)$$

1.8.9.3. Producto de funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real, y definidas en un mismo intervalo. Se llama función producto de f y g a la función definida por

$$(f * g)8x) = f(x) * g(x)$$

1.8.9.4. Cociente de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real, f y g, y definidas en un mismo intervalo, se llama función cociente de f y g a la función definida por (La función f/g está definida en todos los puntos en los que la función g no se anula.)

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo: Encuentre $\boldsymbol{f(x), f(2a), f(a^2), f(-5x), f(2a+1)\ f(x+h)}$

$f() = -2(()^2 + 3()$

$f(2a) = -2(2ª) + 3\ (2ª) = -2\ (4a^2) + 6ª$

$f(a^2) = -2(2a^2) + 3\ (2a^2) = 2(a^2) + 3a^2 = a^2(2a^2 + 3)$

$$f(-5x) = -2(-5x^2) + 3(-5x) = -2(25x^2) - 15x$$

$$= -50x^2 - 15x = x(-50x - 15)$$

$$f(2ª + 1) = -2(2a^2 + 1)^2 + 3(2ª + 1)$$

$$= -2(4a^4 + 4a^2 + 1) + 6ª + 3$$

$$= -8a^4 - 8a^2 + 6ª + 1$$

$$f(x + h) = -2(x + h)^2 + 3(x + h)$$

$$= -2(x^2 + 2xh + h^2) + 3x + 3h$$

$$= -2x^2 - 2h^2 - 4xh + 3h + 3x$$

1.8.10. Funciones trigonométricas

También llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, arco tangente, arco cotangente, arco secante y arco cosecante.

Tabla 3: Propiedades de las Funciones Trigonométricas

Función	***Abreviatura***	***Equivalencia en radianes***
Seno	sen	$sen(\alpha) = \frac{1}{\csc(\alpha)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos(\alpha)}{\cot(\alpha)}$
coseno	cos	$cos(\alpha) = \frac{1}{\sec(\alpha)} = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\tan(\alpha)}$
tangente	tan	$tan(\alpha) = \frac{1}{\cot(\alpha)} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
cotangente	cot	$cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos(\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)}$
secante	sec	$sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\tan(\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)}$
Cosecante	csc	$csc(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cot(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

1.8.10.1. Función seno

Se denomina función seno, y se denota por $f\ (x) = sen\ (x)$, a la aplicación de la razón trigonométrica seno a una variable independiente x expresada en radianes. La función seno es periódica, acotada y continua, y su dominio de definición es el conjunto de todos los números reales.

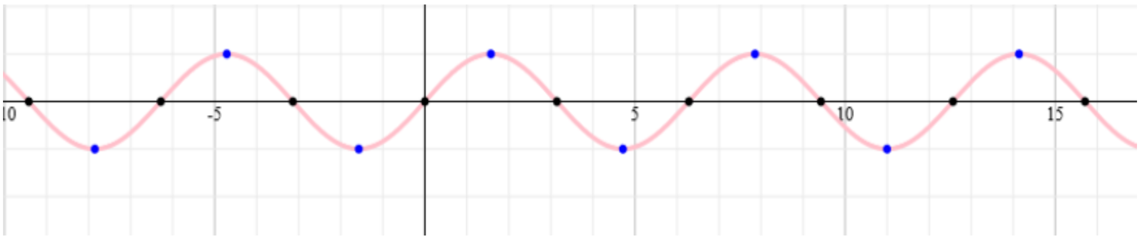


Figura 18: Función f (x) = sen (x),

- ✓ Dominio: R.
- ✓ Recorrido: $[-1, 1]$.
- ✓ El período de la función seno es 2π.
- ✓ La función $y = sen\ (x)$ es impar, ya que $sen(-x) = -sen(x)$, para todo $x \in R$.
- ✓ La gráfica de $y = sen\ x$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son:$x = (0 + \pi K)$ para todo número entero k.
- ✓ El valor máximo de $sen(x)$ es 1, y el mínimo valor es -1. La amplitud de la función $y = sen(x)$ es 2.
- ✓ Creciente $\ldots U(-\pi/2, \pi/2)\ U(\ 3\pi/2,5\pi/2)\ U\ldots$
- ✓ Decreciente $\ldots U(\pi/2,3\pi/2)\ U\ (5\pi/2,7\pi/2)\ U\ldots$
- ✓ Máximo $(\pi/2 + 2\pi k, 1)\ K \in Z$.
- ✓ Mínimo $(3\pi/2 + 2\pi k, -1\ K \in Z$.

1.8.10.2. Función coseno,

Se denota por $f\ (x) = cos\ (x)$, es la que resulta de aplicar la razón trigonométrica coseno a una variable independiente x expresada en radianes. Esta función es periódica, acotada y continua, y existe para todo el conjunto de los números reales.

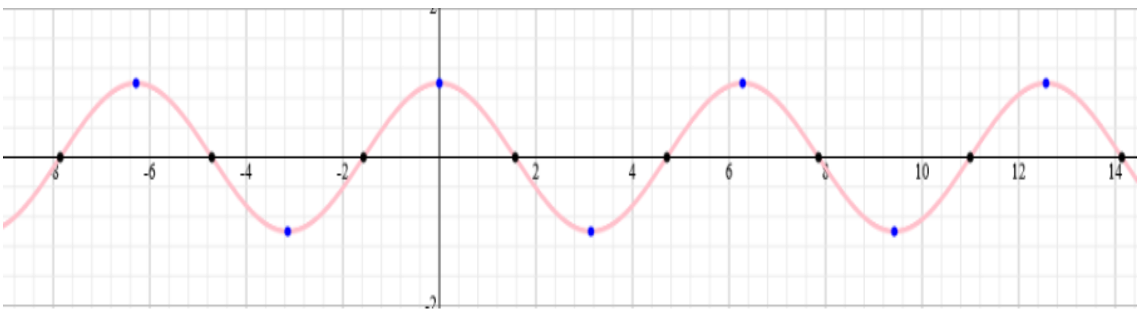


Figura 19: Función f (x) = cos (x),

- ✓ Dominio: R.
- ✓ Recorrido: $[-1, 1]$.
- ✓ Es una función periódica, y su período es 2π.
- ✓ La función $y = cos(x)$ es par, ya que $cos(-x) = cos(x)$, para todo $X \in R$.
- ✓ La gráfica de $y = cos(x)$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son $x = (\pi/2 + k)$.
- ✓ El valor máximo de $cos(x)$ es 1, y el valor mínimo valor es -1. La amplitud de la función $y = cos(x)$ es 2.

- ✓ Creciente $\ldots U(-\pi, 0)\ U\ (\pi, 2\pi)\ U \ldots$
- ✓ Decreciente $\ldots U(0, \pi)\ U\ (2\pi, 3\pi)\ U \ldots$
- ✓ Máximo $(2\pi k, 1)\ K \epsilon Z.$
- ✓ Mínimo $\{\pi(2k+1), -1\}\ K \epsilon Z.$

1.8.10.3. Función tangente

Se define función tangente de una variable numérica real a la que resulta de aplicar la razón trigonométrica tangente a los distintos valores de dicha variable. Esta función se expresa genéricamente como $f(x) = tan(x)$, siendo x la variable independiente expresada en radianes.

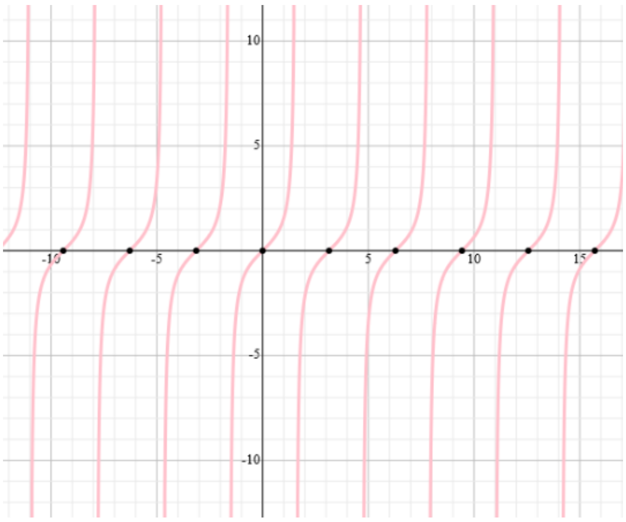


Figura 20: Función f (x) = tan (x),

- ✓ Dominio:$R - \{(2k + 1)\pi/2, K \in Z$
- ✓ Recorrido: R
- ✓ La función tangente es una función periódica, y su período es π.
- ✓ La función $y = tan(x)$ es una función impar, ya que $tan(-x) = -\tan(x)$.
- ✓ La gráfica de $y = tan(x)$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: $x = k\pi$, para todo número entero k.
- ✓ Creciente R.
- ✓ No tiene máximos ni mínimos

1.8.10.4. Función cotangente

Conocida también como función inversa de la tangente por ser

$Cotg(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

- ✓ Dominio $R - \{k\pi, K \in Z\}$.
- ✓ Recorrido R.
- ✓ Continuidad: Continua en $X \in R - \{\pi k, K \in Z\}$.
- ✓ Período:π.
- ✓ Decreciente en: R.
- ✓ No tiene máximos ni mínimos

- ✓ Función Impar: $cotg(-x) = -cotg(x)$.
- ✓ Intersecciones con el eje $X = \{\pi/2 + k\}$.

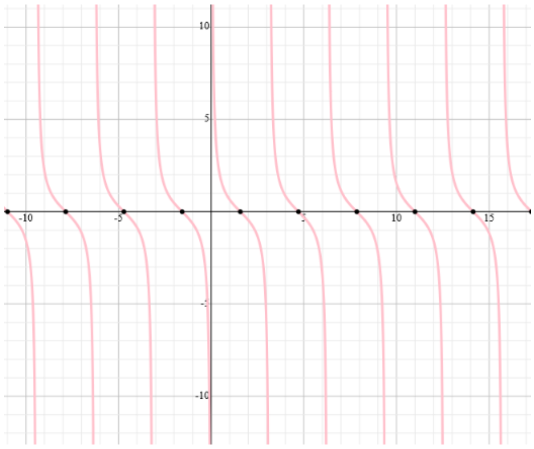


Figura 21:Función f (x) = cot (x),

1.8.10.5. Función secante

Conocida también como función inversa de la función coseno por ser

$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

- ✓ Dominio: $R - \{(2k + 1)\pi/2, K\in Z\}$.
- ✓ Recorrido: $(-\infty, -1]$ $Unión$ $[1, \infty)$.
- ✓ Período: 2π.
- ✓ Continuidad: Continua en $X\in R - \{(\pi/2 + K\pi)\}$.
- ✓ Creciente en: $\ldots U(0, \pi/2)\ U\ (\pi/2, \pi)\ U\ldots$
- ✓ Decreciente en: $\ldots U(\pi, 3\pi/2)\ U\ (3\pi/2, 2\pi)\ U\ldots$

- ✓ Máximos: $(2\pi k, -1)\ K\epsilon Z$.
- ✓ Mínimos: $\{\pi(k+1, -1)\} K\epsilon Z$.
- ✓ En una Función Par: $sec(-x) \ = \ sec(x)$.
- ✓ La gráfica no tiene intersecciones de corte con el eje x

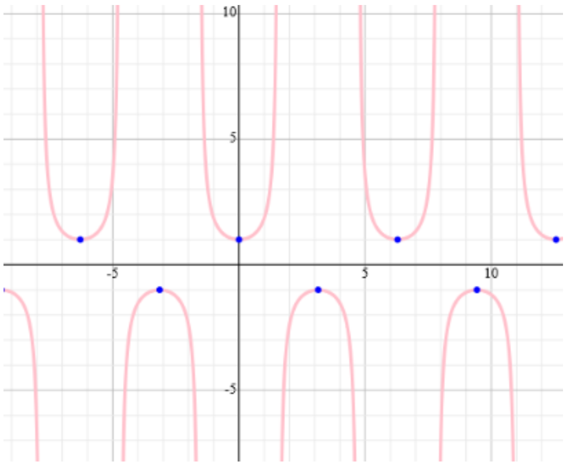


Figura 22: Función f (x) = sec (x),

1.8.10.6. Función cosecante

Conocida también como función inversa de la función seno por ser $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

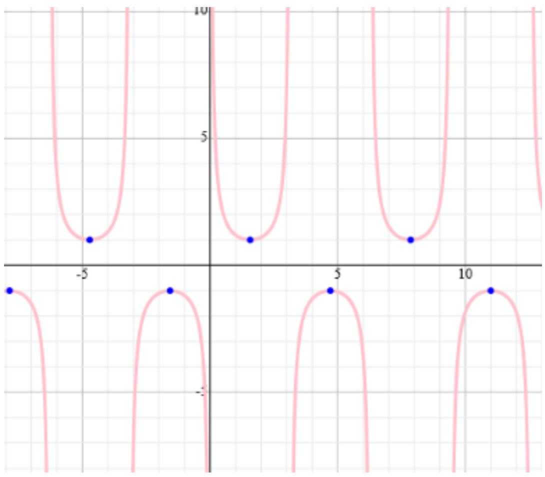


Figura 23: Función f (x) = csc (x),

- ✓ Dominio: $R - \{K\pi, K \in Z\}$.
- ✓ Recorrido: $(-\infty, -1]$ $Unión$ $[1, \infty)$.
- ✓ Período: 2π.
- ✓ Continuidad: Continua en $X \in R\ - \{\pi k, K \in Z\}$.
- ✓ Creciente en: $\ldots U(\pi/2, \pi)\ U\ (\pi, 3\pi/2)\ U \ldots$
- ✓ Decreciente en: $\ldots U(0, \pi/2)\ U\ (3\pi/2, 2\pi)\ U \ldots$
- ✓ Máximos: $(3\pi/2 + 2\pi k, -1)\ K \in Z$.
- ✓ Mínimos: $(\pi/2 + 2k, -1)\ K \in Z$.
- ✓ Es una Función Impar: $cosec(-x)\ =\ -cosec(x)$.
- ✓ La gráfica no tiene intersecciones de corte con el eje x

1.8.11. Funciones trigonométricas inversas

La gráfica de una función inyectiva y sobreyectiva y= f(x) y de su inversa $y = f^{-1}(x)$, tienen la característica de que si (a, b), es un punto de la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces el punto de coordenadas (b, a), es un punto de la gráfica de su inversa $y = f^{-1}(x)$ y que estos puntos (a, b), y (b, a), están situados simétricamente respecto a la gráfica de la recta $y = x$, esto es, que la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ es una reflexión de la gráfica de la función $y = f(x)$ respecto de la recta $y = x$.

Las funciones trigonométricas no son inyectivas, motivo por el cual se debe restringir su dominio para hacerlas biyectivas y poder definir su inversa como función. En la función y= $sen\,(x)$, su dominio y su rango $D =]-\infty, +\infty[$, es decir todo el conjunto de los números reales y el rango o recorrido de la función el conjunto cerrado desde -1 hasta 1, $R = [-1, +1]$, para que la inversa de esta función sea también una función, es necesario restringir su dominio $D = \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, conservando su rango $R = [-1, +1]$ y definiendo la inversa como $y = arcsen(x)$ se lee "función arco-seno de x" o también como $y = \sin^{-1}(x)$ se lee "función seno inverso de x", cuyas gráficas son:

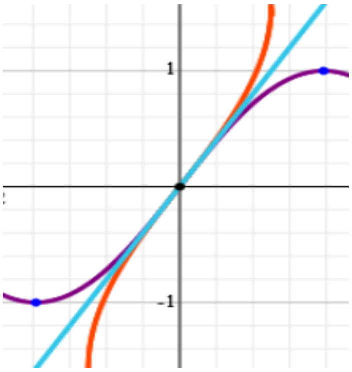


Figura 24: Función $f(x) = arcsen(x)$

La función $y = cos\ (x)$, su dominio y su rango $D =]-\infty, +\infty[$ es decir todo el conjunto de los números reales y el rango o recorrido de la función el conjunto cerrado desde -1 hasta 1 $R = [-1, +1]$, para que la inversa de esta función sea también una función, es necesario restringir su dominio $D = [0, +\pi]$, conservando su rango $R = [-1, +1]$ y definiendo la inversa como $y = arcos(x)$ se lee "función arco-coseno de x" o también como $y = \cos^{-1}(x)$ se lee "función coseno inverso de x", cuyas gráficas son:

Figura 25: Función f (x) = arcos(x)

1.9. Ejercicios propuestos de funciones reales

Encuentre el dominio y recorrido de las siguientes funciones reales:

1) $f(x) = 7x - 3$

2) $f(x) = 2x^2 - 28x + 49$

3) $f(x) = +28 - 3x - x^2$

4) $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 5)$

5) $f(x) = \frac{x-5}{x+2}$

6) $f(x) = \frac{2x-4}{7x+5}$

7) $f(x) = \frac{(x-4)(x+5)}{x-3}$

8) $f(x) = \frac{+28-3x-x^2}{(x-1)(x+2)(x-5)}$

9) $f(x) = |4 - 9x|$

10) $f(x) = |x^2 - 3x - 40|$

11) $f(x) = \left\lfloor \frac{4-x}{1-6x} \right\rfloor$

12) $f(x) = \left| \frac{(2-x)(3-x)}{x+4} \right|$

13) $f(x) = \left| \frac{x-4}{(2x+4)(x-1)} \right|$

14) $f(x) = \sqrt{x - 7}$

15) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 28x + 49}$

16) $f(x) = \sqrt{(x - 1)(x + 2)(x - 5)}$

17) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{x+4}}$

18) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-4}{7x+5}}$

19) $f(x) = e^{5-x}$

20) $f(x) = 3^{\frac{x-5}{x+2}}$

21) $f(x) = -10^{\sqrt{x-7}}$

22) $f(x) = \ln\left|\sqrt{x-7}\right|$

23) $f(x) = \ln(4-3x)$

24) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-4}{7x+5}\right)$

25) $f(x) = \ln\left(\frac{(x-4)(x+5)}{x-3}\right)$

26) $f(x) = \ln\left(\frac{3x-5}{(x+4)(x-5)}\right)$

27) $f(\theta) = 3\sin(2\theta - 45)$

28) $f(\theta) = \frac{1}{2}\csc(30 + 4\theta)$

29) $f(\theta) = \tan(2\theta) - \sin(4\theta)$

30) $f(x) = 4\sin^{-1}(135 - x)$

Capítulo II: Límites

En análisis de funciones es importante el análisis de límites haciendo énfasis en las funciones de variable reales por ser de interés para el estudio de continuidad y de diferenciación

Cuando los valores sucesivos que toma una variable independiente $\boldsymbol{x}$ se aproximan a un número $\boldsymbol{a}$**,** se dice que $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$ o que el **límite de** $\boldsymbol{x}$**,** es $\boldsymbol{a}$**,** lo cual se denota de la siguiente manera**.**

$\boldsymbol{x \to a}$ **se lee "x tiende a a"**

$Lim\, x = a$ se lee "Es límite de x es a"

Consideremos que x tome los siguientes valores:

X1 = 1.9

X2 = 1.99

X3 = 1.999

X4 = 1.9999

X5 = 1.99999

⁞ ⁞

X → 1 ó Lim x = 2

Sea f una función definida en todo número de algún intervalo abierto I que contenga a a, excepto posiblemente en el mismo número a mismo.

El límite de $f(x)$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$ es $\boldsymbol{L}$, y se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Por ejemplo, para hallar el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$

Podemos obtener valores de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, para valores de x que se aproximan a 1 sin ser nunca iguales a 1. En la tabla dada a continuación, observamos que el valor de $f(x)$ se aproxima a $1/2$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.9	0.5163	1.1	0.476
0.99	0.5025	1.01	0.4975
0.999	0.50025	1.001	0.49975
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0.5	1	0.5

Tabla 4: Evaluación cuando x tiende a 1 de f(x)

Definición: Al conjunto de todos los $x \in \mathcal{R}$, que pertenece al intervalo$]a-\delta, a+\delta[$, se denomina **entorno** o **vecindad** de $\boldsymbol{a}$**.** A $\boldsymbol{a}$, se le llama centro y a $\boldsymbol{\delta}$**,** el radio de la vecindad, y se le nota $\mathrm{N}(a,\delta)$

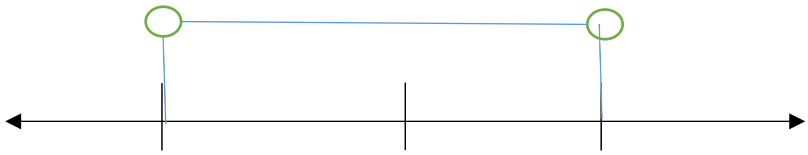


Figura 26: Entorno o Vecindad

$a - \delta$ a $a + \delta$

Definición: se le llama entorno reducido de centro $\boldsymbol{a}$ y de radio $\boldsymbol{\delta}$**,** se le nota $N^*(a, \delta)$

$$N^*(a, \delta) = {}^{N(a,\delta)}/_{a}$$

$$N^*(a, \delta) = {}^{]a-\delta,\, a+\delta[}/_{a}$$

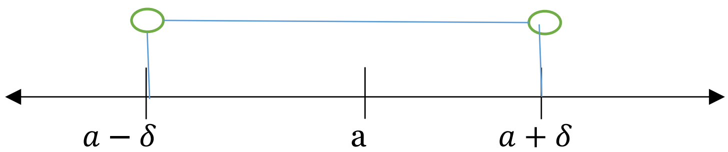


Figura 27: Radio y Centro del Entorno o Vecindad

Definición: sea f una función definida en todo punto de un intervalo abierto. El **Limite de $\boldsymbol{f}$ cuando tiende** a $\boldsymbol{a}$ es $\boldsymbol{L}$**,** si y solamente sí: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que para todo **x, si** $\mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \boldsymbol{\delta}$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

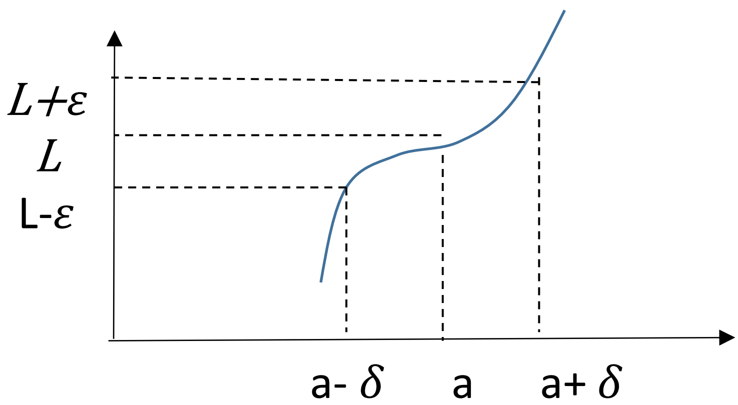


Figura 28: Definición Gráfica de Límite

Definición: Sea $f: A \rightarrow B$ una función ($A =]a, b[$ y B subconjunto de los reales), $a \in]\, b, c\, [$,

El límite de f cuando x tiende a (a) es L si y solamente si: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$,tal que ,para todo $x \epsilon N^*(a, \delta)$, entonces f$(x) \epsilon N^*(L, \varepsilon)$. El límite de f cuando x tiende a ***a*** es ***L*** , se representa :

$$\lim_{x \to a} F(x) = L.$$

Siempre que se trata con límites de una función f, ésta no necesariamente está definida en a.

Si $f: A \rightarrow B$ una función (A y B subconjuntos de los reales) entonces: $f(x) = L$, si y solamente si: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in N*(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in N(L, \varepsilon))$.

Si se encuentra que para todo ε, existe un δ, que cumple con la definición de límite y si existe un δ tal que $0 < \delta' < \delta$, entonces este es igualmente satisfactorio para el ε dado.

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = 3x - 2$. Usando la definición de límites, demuestre que: $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

Por lo tanto se debe probar que: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \varepsilon, 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon)$

Esta es una demostración de existencia ya que se tiene que encontrar un δ (que seguramente dependerá de ε), que con todos los ε cumpla la definición.

Para ello, se asume que $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$ y se trata de determinar el valor de δ. Esto es:

$$|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$$

$$|3x - 6| < \varepsilon$$

$$3|x-2| < \varepsilon$$

$$|x-2| < \varepsilon/3$$

Luego, se toma $\delta = \varepsilon/3$ y se prueba que cumple la definición.

$$|x-2| < \delta$$

$$|2x-4| < \varepsilon/3$$

$$3|x-2| < \varepsilon$$

$$|3x-6| < \varepsilon$$

$$|(3x-2)-4| < \varepsilon$$

$$|f(x) - 4| < \varepsilon$$

Por lo tanto: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \varepsilon, 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon)$. Con lo cual se ha demostrado que: $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

Ejemplo: Sea $f: R \Rightarrow R$ una función definida por $f(x) = x^2 - 4$. Usando la definición de límites, demuestre que: $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

Por lo tanto se debe probar que: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \varepsilon, 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon)$

$$\lceil x^2 - 4 \rceil - 0 < \varepsilon$$

$$|x-2|x+2| < \varepsilon$$

Ahora se mayoriza $|x + 2|$. Para lo cual se supone que:

$$|x - 2| < 2$$

$$-2 < x - 2 < 2$$

$$0 < x < 4$$

$$2 < x + 2 < 6$$

Luego, si $|x - 2| < 2$ entonces $|x + 2| < 6$

Nuevamente se toma la desigualdad: $|x - 2|x + 2| < \varepsilon$

$$|x - 2|4 < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|x - 2| < \delta$$

Por lo tanto: $\delta = \varepsilon/4$

Sea $\delta = min\left(2, \frac{\varepsilon}{4}\right)$. Comprobar que se cumple la definición. Si:: $\delta = \varepsilon/4$

$$|x - 1|4 < \delta$$

$$|x - 1| < \varepsilon/ 4$$

$$4|x - 1| < \varepsilon$$

$$\lceil x^2 - 4 \rceil < \varepsilon$$

$$|f(x) - 0| < \varepsilon$$

Por lo tanto: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\varepsilon, 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$

Ahora sí: $\delta = 2$

$$|x - 2| < \delta$$

$$|x - 2| < 2$$

$$|x - 2| < \varepsilon/4$$

$$4|x - 2| < \varepsilon$$

$$|x + 2|x - 2| < \varepsilon$$

$$|x^2 - 4| < \varepsilon$$

$$|f(x) - 0| < \varepsilon$$

Por lo tanto: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon)$

Con lo cual queda demostrado que: $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

2.1 Propiedades de los limites

Las propiedades de los límites son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja. Al tratarse de operaciones, también se le denomina álgebra de los límites.

Teorema: Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único.

Teorema: Sean $f: A \Rightarrow R$, $g: A \Rightarrow R$ funciones reales ($A \subset R$) tales que: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = k$, entonces:

a) $\lim_{x \to a}(f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \mathrm{g(x)} = \mathrm{L + K}$

b) $\lim_{x \to a}(\mathrm{f - g})(\mathrm{x}) = \lim_{x \to a} \mathrm{f(x)} - \lim_{x \to a} \mathrm{g(x)} = \mathrm{L - K}$

c) $\lim_{x \to a}(\mathrm{f * g})(\mathrm{x}) = \lim_{x \to a} \mathrm{f(x)} * \lim_{x \to a} \mathrm{g(x)} = \mathrm{L * K}$

d) si $K \neq 0$, entonces $\lim_{x \to a} ((\mathrm{f|}\ )/\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \frac{\lim_{n \to a} f(x)}{\lim_{n \to a} g(x)} = \frac{L}{K}$

Propiedad de la función constante: El límite de una función constante es esta misma constante siempre y cuando la constante esté definida para el punto analizado.

Teorema: Si $f(x) = K$ (función constante) entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = k$$

Propiedad del factor constante: En un límite de una constante multiplicada por una función se puede sacar la constante del límite sin que se afecte el resultado.

$$\lim_{x \to a}[k * f(x)] = k * \lim_{x \to a} f(x)$$

Teorema: $Si\ f(x) = x$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{x} = \mathrm{a}$

Teorema: Si $p(x)$ es una función polinomial entonces $\lim_{x \to a} p(x) =$ p(a)

Teorema: Si $f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in N$; entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

$$\text{Sí} \begin{cases} \boldsymbol{a > 0}, & \boldsymbol{n \epsilon N} \\ \boldsymbol{a \leq 0} & \boldsymbol{nimpar} \end{cases}$$

Teorema: Si $\lim_{x \to a} f(x) = k$ y $\sqrt[n]{f(x)}$, existen entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

$$\text{Sí} \begin{cases} \boldsymbol{F(x) > 0}, & \boldsymbol{n \epsilon N} \\ \boldsymbol{f(x) \leq 0} & \boldsymbol{nimpar} \end{cases}$$

Ejemplos: Obtener el límite indicado en cada uno de los problemas:

1. $\boldsymbol{\lim_{x \to -2} 5x + 24}$

$\lim_{x \to -2} 5x + 24$

$= 5(-2) + 24$

$= -10 + 24$

$= 14$

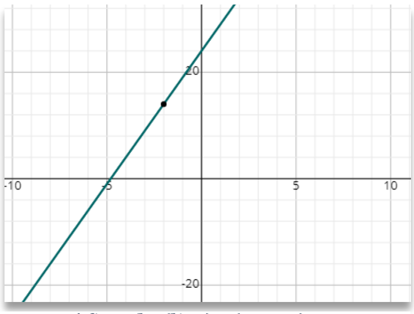


Figura 29: Gráfica de (lim)┬(x→-2) 5x+24

2. $\lim_{x \to 6} x + 54$

$\lim_{x \to 6} x + 54$

$= (6) + 54$

$= 60$

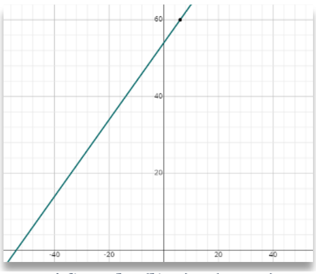


Figura 30: Gráfica de (lim)┬(x→6) 5x+24

3. $\lim_{x \to -5} (2x - 8)$

$\lim_{x \to -5} (2x - 8)$

$= 5(-2) - 8$

$= -10 - 8$

$= -18$

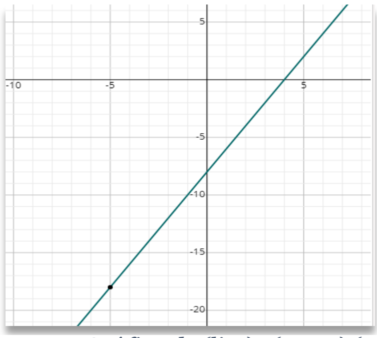


Figura 31: Gráfica de (lim)┬(x→-5) (2x-8)

4. $\lim_{x \to 2} (3x^2 + 8 - 1)$

$= 3(2)^2 + 8 - 1$

$= 12 + 8 - 1$

$= 20 - 1$

$= 19$

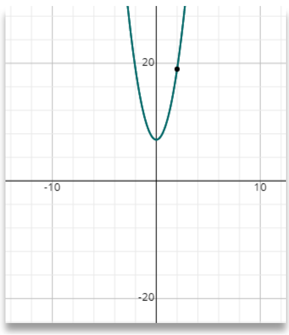


*Figura 32: Gráfica de (lim)┬(x→2) (3 〖x^2+8-1) 〗^*

5. $\boldsymbol{\lim_{x\to 2}(x^4 - 8x^3 - 2x^2 - 5x + 3)}$

$$\lim_{x\to 2}(x^4 - 8x^3 - 2x^2 - 5x + 3)$$

$$= (2)^4 - 8(2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 3$$

$$= 16 - 64 - 8 - 10 + 3$$

$$= -63$$

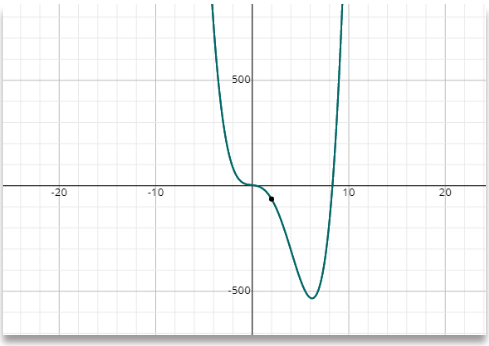


Figura 33: Gráfica de (lim)┬(x→2) (x^4-8x^3-2x^2-5x+3)

6. $\boldsymbol{\lim_{x\to 5}(6x^3 - 7x^2 + 3x - 2)}$

$$\lim_{x\to 5}(6x^3 - 7x^2 + 3x - 2)$$

$$= 6(5)^3 - 7(5)^2 + 3(5) - 2$$

$$= 750 - 175 + 15 - 2$$

$$= 588$$

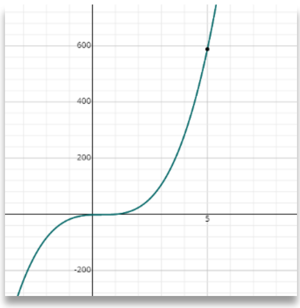


Figura 35: Gráfica de $\boldsymbol{\lim_{x\to 5}(6x^3 - 7x^2 + 3x - 2)}$

7. $\boldsymbol{\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+7x-2}{x^3+5}}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+7x-2}{x^3+5}$$

$$= \frac{2(3)^2 + 7(3) - 2}{(3)^3 + 5}$$

$$= \frac{18 + 21 - 2}{27 - 5}$$

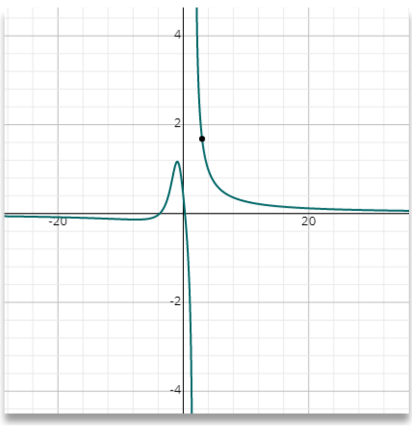


Figura 34: Gráfica de (lim)┬(x→3) (2x^2+7x-2)/(x^3+5)

$$= \frac{37}{22} = 1,68181$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^4+x^2-1}{x^6-2}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^6 - 2}$$

$$= \frac{(-3)^4 + (-3)^2 - 1}{(-3)^6 - 2}$$

$$= \frac{81 + 9 - 1}{729 - 2}$$

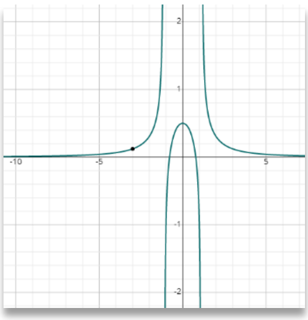


Figura 36: Gráfica de (lim)┬(x→-3) (x^4+x^2-1)/(x^6-2)

$$= \frac{89}{727} == 0.12242$$

8. $\boldsymbol{\lim_{x \to 7} \sqrt{8x - 2}}$

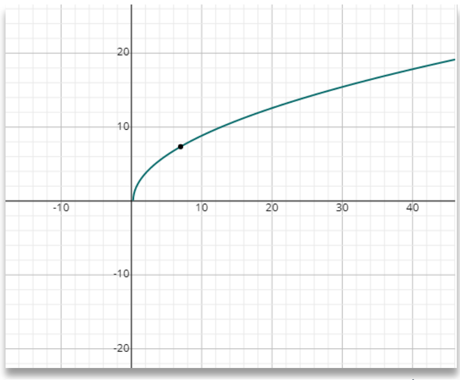


Figura 37: Gráfica de (lim)┬(x→7) √(8x-2)

$$\lim_{x \to 7} \sqrt{8x - 2}$$

$$= \sqrt{8(7) - 2}$$

$$= \sqrt{56 - 2}$$

$$= \sqrt{54}$$

$$= 3\sqrt{6}$$

9. $= 7,3484$

10. $\boldsymbol{\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{8x^2 - x + 13}}$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^2 - x + 13}$$

$$= \sqrt[3]{8(2)^2 - (2) + 13}$$

$$= \sqrt[3]{32 - 2 + 12}$$

$$= \sqrt[3]{30 + 12} = \sqrt[3]{43} = 3{,}503$$

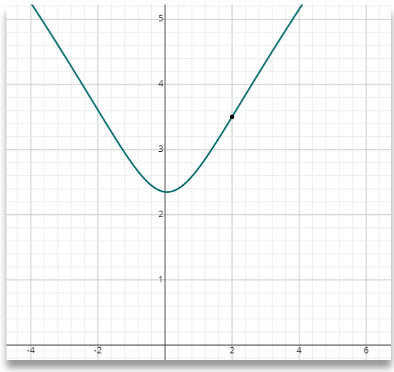


Figura 38: Gráfica de $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^2 - x + 13}$

11. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+27}{x+3}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3 + 27}{x + 3}$$

$$= \frac{(3)^3 + 27}{(3) + 3}$$

$$= \frac{27+27}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

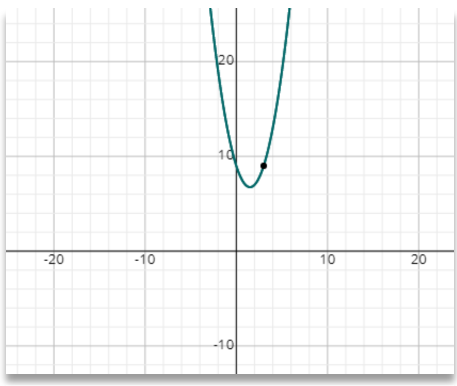


Figura 39: Gráfica de (lim)┬(x→3) (x^3+27)/(x+3)

2.2. Ejercicios propuestos de límites

Obtener el límite indicado en cada uno de los problemas:

1) $\lim_{x\to -2} 5\,x + 24$
2) $\lim_{x\to 6} x + 54$
3) $\lim_{x\to -5}(2x - 8)$
4) $\lim_{x\to 2}(3x^2 + 8x - 1)$
5) $\lim_{x\to 2}(x^4 - 8x^3 - 2x^2 - 5x +$

3)

6) $\lim_{x\to 5}(6x^3 - 7x^2 + 3x - 2)$

7) $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+7x-2}{x^3+5}$

8) $\lim_{x\to -3}\frac{x^4+x^2-1}{x^6-2}$

9) $\lim_{x\to 7}\sqrt[2]{8x-2}$

10) $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^2-x+3}$

11) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+27}{x+3}$

12) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

13) $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

14) $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{5x+2}-\sqrt[3]{64}}{x}$

15) $\lim_{x\to 7}[x^2(x-5)]$

16) $\lim_{x\to 3}\frac{4x^2-9x}{x+7}$

17) $\lim_{x\to 2}\sqrt{6x^2+1}$

18) $\lim_{x\to 7}(5x^2-13)$

19) $\lim_{x\to 5}(3x^2-6x+8)$

20) $\lim_{x\to -4}(2x^2+5x-22)$

21) $\lim_{x\to 8}\frac{5x^2-9x+22}{2x^2+7}$

22) $\lim_{x\to -6}\frac{4x^2-x}{3x^2-12x+20}$

23) $\lim_{x\to 9}\frac{4x^2-3x}{3x^2-12x+25}$

24) $\lim_{x\to -8}(6x^2+5x-36)$

25) $\lim_{x\to -5}\frac{x+1}{x^2-x-20} - \frac{x+4}{x^2-4x-5} + \frac{x+5}{x^2+5x+4}$

26) $\lim_{x\to -3}\frac{2x+1}{12x+8} - \frac{x^2}{6x^2+x-2} + \frac{2x}{16x-8}$

27) $\lim_{x\to 6}\frac{3x+2}{x^2+3x-10} - \frac{5x+1}{x^2+4x-5} + \frac{4x-1}{x^2-3x+2}$

28) $\lim_{ab\to 4,4}\frac{a-3}{20a+10} + \frac{2a+5}{40a+20} - \frac{4ab-1}{60a+30}$

29) $\lim_{x\to 3}\frac{x}{2x+2} - \frac{x+1}{3x-3} + \frac{x-1}{6x+6} - \frac{5}{18x-18}$

30) $\lim_{x\to 8} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 49} \times \frac{x^2 - x - 56}{x^2 + x - 20} \div \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 5}$

31) $\lim_{a\to 4} \frac{a^2 - 8a + 7}{a^2 - 11a + 30} \times \frac{a^2 - 36}{a^2 - 1} \div \frac{a^2 - a - 42}{a^2 - 4a - 5}$

32) $\lim_{x\to 9} \frac{8x^2 - 10x - 3}{6x^2 + 13x + 6} \times \frac{4x^2 - 9}{3x^2 + 2x} \div \frac{8x^2 + 14x + 3}{9x^2 + 12x + 4}$

33) $\lim_{mn\to 3,3} \frac{m^3 + 6m^2n + 9mn^2}{2m^2n + 7mn^2 + 3n^3} \times \frac{4m^2 - n^2}{8m^2 - 2mn - n^2} \div \frac{m^3 + 27n^3}{16m^2 + 8mn + n^2}$

34) $\lim_{a\to 2} \frac{a+1}{a-1} \times \frac{3a-3}{2a+2} \div \frac{a^2 + a}{a^2 + a - 2}$

Teorema: Sean f y g dos funciones que toman los mismos valores en el entorno reducido $N * (a, \delta 1)$ y si, $f(x)$ y $g(x)$ existen entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$(x).

Ejemplo: Calcular el límite de la función f definida por $f(x) = \frac{(x^2-9)}{(x-3)}$, cuando x tiende a 3

Solución: El dominio de f es todos los reales excepto el punto donde el denominador se hace cero, es decir sobre este dominio la función $f(x) = x + 3$. Esto es, solo en 3 no se da la igualdad. Entonces, usando el teorema anterior se calcula este límite.

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{(x^2-9)}{(x-3)}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{(x+3)}{1}=2(3)+3=8$$

2.3. Ejercicios propuestos de límites empleando propiedades

Obtener el límite indicado en cada uno de los problemas:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

5) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$

6) $\lim_{y\to -2}\frac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$

7) $\lim_{u\to -2}\frac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

9) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$

10) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

12) $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

14) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

15) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

16) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

17) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$

19) $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

20) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

21) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-6x+1\right)$

22) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x^2-2x+1\right)$

23) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-3x^3+x\right)$

24) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$

25) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$

26) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}\right)$

27) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$

28) $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4x+4}}$

29) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4}{-2x^4+3x^3-6}$

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2}$

31) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$

32) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^2-6x}$

33) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-x^2}{x^5+1}$

34) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x^5+x^2}{2x^2-1}$

35) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

36) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$

37) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt[3]{x^2+2}-x\right)$

38) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$

39) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

40) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$

41) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

42) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x-1}{2x-4}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

43) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

44) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

45) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\right)$

46) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3+1}\left(\sqrt{2x^5-2x}-\sqrt{2x^5}\right.\right.$

47) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right)\right)$

48) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-6x}-(x-3)}{x+3-\sqrt{x^2+6x}}$

49) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1}$

50) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+1)^3}{(x+3)^4}$

51) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$

52) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}$

53) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}$

54) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}$

55) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x-2}{x^2-4}-\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

56) $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

57) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

58) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

59) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

60) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

2.4. Límites laterales

Una función tiene límite si existen los dos límites laterales y éstos coinciden. El límite de una función $f(x)$ en a, si existe, este límite es único.

Se podrían dar valores a x cada vez más próximos a a por la izquierda o por la derecha. Obtendremos el límite lateral por la izquierda, al que llamaremos L_1 y/o el límite lateral por la derecha, al que llamaremos L_2.

Por lo tanto, para que exista el límite L de una función $f(x)$ en a, si existe, deben ser iguales el límite por la izquierda y el límite por la derecha, $L_1 = L_2$.

2.4.1. Límites laterales por la izquierda:

Se denomina límite por la izquierda (o límite lateral por la izquierda), al que llamaremos L_1 de una función $f(x)$ definida en el intervalo abierto (a, c) y en un punto a, a la imagen, o el valor que toma esa función, cuando el valor de la variable x se acerca mucho a a, siendo $x < a$. Se escribe: $\lim_{x \to a^-} L_1$

Definición. Sean la función real $f: A \to B$, donde los conjuntos A y B son subconjunto de los numero reales. El límite de f cuando x tiende a a por la izquierda es L, si y solamente si:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x < a, 0 < |a - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

El límite cuando x tiende a a por la izquierda se representa por:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

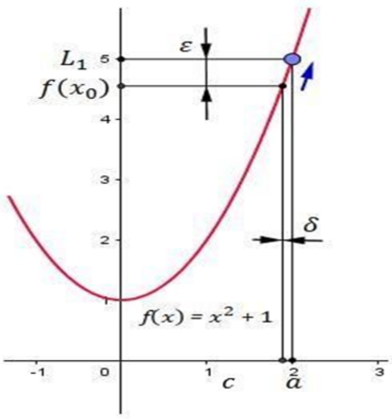


Figura 40: Gráfica limite lateral por izquierda

Veamos como los valores de x se aproximan a a por la izquierda (en el ejemplo de la tabla, $a^- = 2$) y, al mismo tiempo, la función $f(x)$, en este caso, se aproxima también por la izquierda al límite lateral por la izquierda, L_1.

Tabla 5: Evaluación cuando x tiende a 2 por izquierda

					L_1
x	1,9	1,99	1,999	1,9999	$\to 2^-$
$f(x) = x^2 + 1$	4,6100	4,9601	4,9960	4,9996	$\to 5$

2.4.2. Límites laterales por la derecha:

Se denomina límite por la derecha (o límite lateral por la derecha), al que llamaremos L_2 de una función $f(x)$ definida en el intervalo abierto (a, b) y en un punto a, al valor que toma esta función $f(x)$, cuando el valor de la variable x se acerca mucho a a, pero siendo $x > a$. Se escribe: $\lim_{x \to a^+} L_1$

Definición. Sean la función real $f: A \to B$, donde los conjuntos A y B son subconjunto de los numero reales. El límite de f cuando x tiende a a por la derecha es L, si y solamente si:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > a, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

El límite cuando x tiende a a por la derecha se representa por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

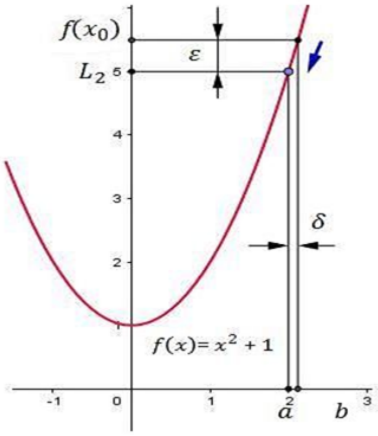


Figura 41: Gráfica Limite Lateral por derecha

Veamos como los valores de x se aproximan a a (en el ejemplo de la tabl $a^+ = 2$) por la derecha y, al mismo tiempo, la función $f(x)$ se aproxima por la derecha a L_2.

Tabla 6: Evaluación cuando x tiende a 2 por derecha

L_2					
$2^+ \leftarrow$	2,0001	2,001	2,01	2,1	***x***
$5 \leftarrow$	5,0004	5,0040	5,0401	5,4100	***f(x)***

Ejemplo: Sea una función real definida por: $f(x) = \begin{cases} +2, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$, calcular los limites laterales cuando x tiende a cero

Solución:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2) = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (+2) = +2$$

Teorema. Sean la función real $f: A \to B$, donde los conjuntos A y B son subconjunto de los numero reales. El $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si y solamente si:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo: Sea una función real definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \geq 2 \\ 2x - 4, & x < 2 \end{cases}$, calcular los limites laterales cuando x tiende a 2.

Solución:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 4) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x - 4) = 0$$

Como los limites laterales existen y son iguales, por lo tanto $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

Ejemplo: Sea una función real definida por: $f(x) = \frac{|x^2-4|}{2x-4}$, calcular el limites cuando x tiende a 2.

Solución: $f(x) = \frac{|x^2-4|}{2x-4} = f(x) = \frac{|(x-2)(x+2|}{2(x-2)} = \frac{|x-2||x+2|}{2(x-2)}$

$$|x-2| = \begin{cases} (x-2), & para\ x \geq 2 \\ -(x-2). & para\ x < 2 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} (x+2), & para\ x \geq -2 \\ -(x+2). & para\ x < -2 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to +2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2||x+2|}{2(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{2(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+2)}{2} = -2$$

$$\lim_{x \to +2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2||x+2|}{2(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x+2)}{2}$$

$$= +2$$

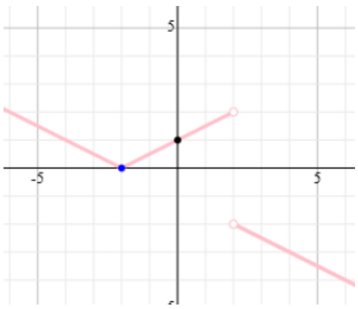


Figura 42: Gráfica de f(x)=|x^2-4|/(2x-4)

Como los limites laterales existen, pero NO son iguales, por lo tanto no existe el $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$

2.5. Límites al infinito

Definición. Sea una función real $f: A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq [b, +\infty[$, un subconjunto de los números reales, El límite f cuando x tiende a $+\infty$ es L si y solamente si:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, M > 0)(\forall x > M, \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

El límite de f cuando x tiende a $+\infty$, se representa mediante:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Definición. Sea una función real $f: A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq [-\infty, b[$, un subconjunto de los números reales, El límite f cuando x tiende a $-\infty$ es L si y solamente si:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, M < 0)(\forall x < M, \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

El límite de f cuando x tiende a $-\infty$, se representa mediante:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Teorema: sea $f(x) = k$, una función constante, entonces: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$

Teorema: sea $f(x) = k$, una función constante, entonces: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$

Teorema: Sí n cualquier entero positivo, entonces: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Teorema: Sí n cualquier entero positivo, entonces: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Ejercicios:

1) Calcular el $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4+5x^2+x-3}{x-3}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^4}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 5x + 1 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 5x + 1 - 0}{1 - 0} = +\infty$$

2) Calcular el $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3-5x^2+x-3}{x^3-2x-3}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} - \frac{3}{x^3}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^2}-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^2}-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-5*0+0-3*0}{1-2*0-3*0}=\frac{2-0+0-0}{1-0-0}=\frac{2}{1}=2$$

3) Calcular el $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+x}{3x^3+x+4}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - 4*0 + 0}{3 + 0 + 4*0} = \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} =$$

$$\frac{2}{3} = 0{,}6$$

4) Calcular el $\lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{x^3+3x+1}$

$$-4 \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^3}} =$$

$$= -4 \lim_{x\to\infty} \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}$$

$$= -4 \lim_{x\to\infty} \frac{0}{\lim_{x\to\infty} 1 + 3*0 + 0}$$

$$= -4 \lim_{x\to\infty} \left(\frac{0}{1 + 0 + 0}\right)$$

$$= -4 \left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

5) Calcular el $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-5}{x-4}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x} - \frac{2x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{4}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2 + \frac{5}{x}}{1 - \frac{4}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2 + 0}{1 - 0} = \infty$$

6) Calcular el $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+5}{4x^2-4}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{4 - \frac{4}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 4 - \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 5\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 4 + 4\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3 - 2 * 0 + 5 * 0}{4 - 4 * 0} =$$

$$= \frac{3 - 0 + 0}{4 - 0} = \frac{3}{4} = 0.75$$

7) Calcular el $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{4x^3-4x+4}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{4}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{4 - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3}} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to\infty} 4 - 4\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 4\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{0 - 0 + 0}{4 - 4 * 0 + 4 * 0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{0 - 0 + 0}{4 - 0 + 0} = \frac{0}{4} = 0$$

8) Calcular el $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{1+2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{2x}{x}} =$$

$$= \frac{x - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x - 0}{0 + 2} = \infty$$

9) Calcular el $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x(2 + \frac{3}{x})}{x(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}})} \right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{1+\sqrt[3]{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+3*0}{1+\sqrt[3]{0}}\right)=\frac{2}{1}$$

10) Calcular el $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{0}=0$$

11) Calcular el $\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$

$$5\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right)$$

$$=5\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right)$$

$$= 5 \cdot \frac{\lim_{x\to\infty} (1)}{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}$$; como $\lim_{x\to\infty} (1) = 1$ y $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right) = 1$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) = 5 \cdot \frac{1}{1} = 5$$

12) Calcular el $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x(x)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} (x)}{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$; como $\lim_{x\to\infty} (x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 1$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{\infty}{1} = \infty$$

13) Calcular el $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-4}{\sqrt{x^2+1}+2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2+1}} - \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}}\right)$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2+1}} - \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2+1}} - \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 1$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 1$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

14) Calcular el $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x^2-2}{x^2+3}}$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2x^2-2}{x^2+3}}\right)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{2}{x^2}\right) = 2$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right) = 1$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1}}$$

$$= \sqrt{2}$$

2.6. Ejercicios propuestos de límites al infinito

Obtener el límite indicado en cada uno de los problemas:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^3+2-{}_{-}1}{2x+3}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^3+2-{}_{-}1}{2x+3}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^3+3x+2}{5x^2+x}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^6+3x^3+2}{7x^6+x-1}$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^6+3x^3+2}{7x^6+x-1}$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-9}{x(x^2+1)}$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[5]{2x^4+3x-11}}{\sqrt[7]{x^3+2}}$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^9-2x^5+x^2}}{\sqrt[5]{3x^{15}-x^2}}$

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^5 - x\sqrt{x}\right)$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-{}^{-}5x^3 - x\sqrt{x}\right)$

11) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-{}^{-}5x^3 - x\sqrt{x}\right)$

12) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 + 8x - 3x^6)$

13) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^5-3}\right)$

14) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3-2x+5}}{x-1}$

15) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+2} - (x-5)\right)$

16) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5-\sqrt{x^2-1}}{5-\sqrt{1+x^2}}$

17) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{1-x^2}}$

18) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3x^2}\right)^{\frac{5x}{2x-8}}$

19) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36}$

20) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{3x^2+2} \right)^{x^2}$

2.7. Limites infinitos

Se dice que existe límite infinito cuando la función $f(x)$ llega a valores que crecen continuamente, es decir que se puede hacer la función tan grande como se requiera. Se dice que $f(x)$ diverge a infinito. Para ello, el valor al que tienda la variable independiente x puede ser tanto a un número finito, como tender al infinito (límites al infinito).

Veamos un caso, con un límite infinito en la siguiente función: $f(x = \frac{1}{(x-2)^2}$

Su límite cuando la variable x tiende a 2 es: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

Se puede comprobar si damos valores a la x cada vez más cercanos a 2, tanto acercándonos por su izquierda como por su derecha, como se ve en el siguiente cuadro, el límite tiende a $+\infty$:

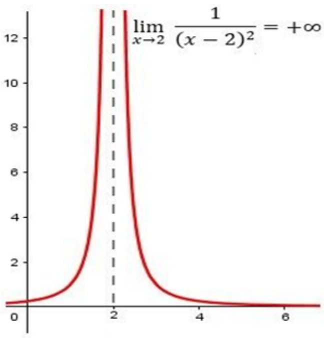


Figura 43: Gráfica de Límites Infinitos

Tabla 7: Evaluación de f(x)

x		f(x)
-2,1000	2,1000	1×10^2
-2,0100	2,0100	1×10^4
-2,0010	2,0010	1×10^6
-2,0001	2,0001	1×10^8

Unas funciones con un límite infinito pueden crecer más rápidamente que otras, conforme la variable x se acerca al valor del límite. Se dice que hay diferentes órdenes de infinito, según su rapidez en acercarse a él. Comparación de órdenes de infinito en infinitos fundamentales, ordenados de mayor a menor. Para eso, veamos estas gráficas:

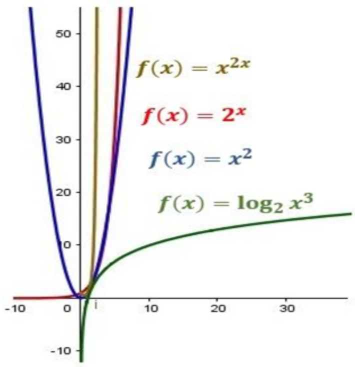


Figura 44: Comparación de diferentes gráficas de funciones cuando tienden a infinito

Una función $f(x)$ puede tener un límite infinito cuando la función $f(x)$ llega a valores que crecen continuamente, es decir que se puede hacer la función tan grande como queramos. Se dice entonces que $f(x)$ diverge a infinito. Esto puede ocurrir cuando la variable x tienda a un valor finito a o también cuando x tienda al infinito.

Definición. Sea una función real $f: A \to \mathbb{R}$, donde A, es un subconjunto de los números reales. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $+\infty$, si y solamente si:

$$(\forall M > 0)(\exists\, \delta < 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$$

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $+\infty$, se representa por: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

Definición. Sea una función real $f: A \to \mathbb{R}$, donde A, es un subconjunto de los números reales. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $-\infty$, si y solamente si:

$$(\forall M < 0)(\exists\, \delta < 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M)$$

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $-\infty$, se representa por: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Teorema: Sí n cualquier entero positivo, entonces: $\lim_{x \to +0^+} \frac{1}{n^n} = +\infty$

Teorema: Sí n cualquier entero positivo, entonces: $\lim_{x \to -0^-} \frac{1}{n^n} = \begin{cases} +\infty, & si\ n\ es\ par \\ -\infty, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$

Teorema: Sí a cualquier número real y si $\lim_{x \to +a} f(x) = k$ y $\lim_{x \to +a} g(x) = 0$, entonces:

a) Si $k > 0$ y $g(x)$ tiende a cero por valores positivos de $g(x)$, entonces: $\lim_{x \to +a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

b) Si $k < 0$ y $g(x)$ tiende a cero por valores positivos de $g(x)$, entonces: $\lim_{x \to +a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

c) Si $k > 0$ y $g(x)$ tiende a cero por valores negativos de $g(x)$, entonces: $\lim_{x \to +a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

d) Si $k < 0$ y $g(x)$ tiende a cero por valores negativos de $g(x)$, entonces: $\lim_{x \to +a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Ejemplo: Calcular el $\lim_{x \to 3} \frac{3x}{9-x^2}$

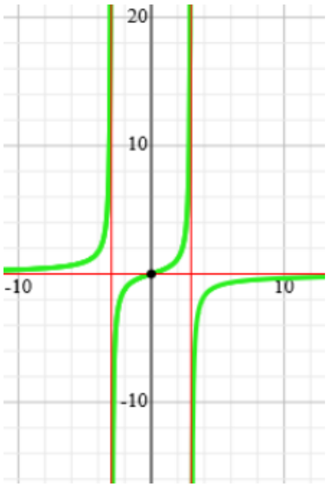


Figura 45: Gráfica de 〚f(x)〛 〚3x/(9-x^2)〛

Solución: si $f(x) = 3x$, entonces: $\lim_{x \to 3} 3x = 6 > 0$

si $g(x) = 9 - x^2$, entonces: $\lim_{x \to 3}(9 - x^2) = 0$

Notar que si $x \to 3$, por la derecha, $g(x)$ tiende a cero por valores negativos como lo indica la figura, por lo tanto $\lim_{x \to 3^+} \frac{3x}{9-x^2} = -\infty$

Y cuando $x \to 3$, por la izquierda, $g(x)$ tiende a cero por valores positivos como lo indica la figura, por lo tanto $\lim_{x \to 3^-} \frac{3x}{9-x^2} = +\infty$

Ejemplo: Calcular el $\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{18x^2+6x+2}{27x^3-1}$

Solución: Sacamos factor común 2 al numerador y aplicamos diferencia de cubos en el denominador, y tenemos:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{18x^2+6x+2}{27x^3-1}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{2(9x^2+3x+1)}{(3x-1)(9x^2+3x+1)}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{2}{(3x-1)}$$

si $g(x)=(3x-1)$, entonces: $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(3x-1)=0$

Notar que si $x\to\frac{1}{3}$, por la derecha, $g(x)$ tiende a cero por valores positivos como lo indica la figura, por lo tanto $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}\frac{18x^2+6x+2}{27x^3-1}=+\infty$

Y cuando $x\to\frac{1}{3}$, por la izquierda, $g(x)$ tiende a cero por valores negativos como lo indica la figura, por lo tanto $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}\frac{18x^2+6x+2}{27x^3-1}=-\infty$

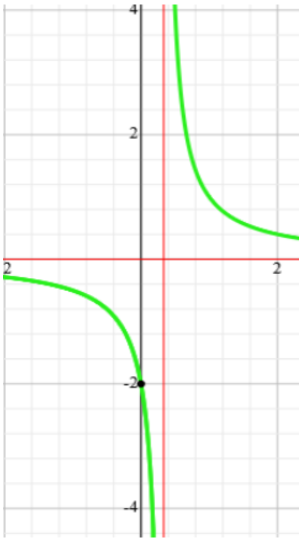


Figura 46: Gráfica de f(x)=(18x^2+6x+2)/(27x^3-1)

2.8. Continuidad.

Definición. Sean $f:]b,c[\; -> \; B$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $a\; \epsilon]$b, c[, f se dice continua en **a** si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $f(a)$ existe

b) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

En caso contrario la función es discontinua en $\boldsymbol{a}$.

Definición. Si f es una función discontinua en $\boldsymbol{a}$, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces esta discontinuidad se llama evitable.

Cuando el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces se puede redefinir la función $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$, de tal manera que, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, con lo cual la función se hace continua en $\boldsymbol{a}$.

Definición. Si $\boldsymbol{f}$ es una función discontinua en $\boldsymbol{a}$, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ **NO** existe, entonces esta discontinuidad se llama no evitable o esencial.

Ejemplo: Sea $F(x) = 2 - 3x$. Demostrar que f es continua en $a\, \epsilon \mathbb{R}$.

Solución:

i. $f(a)$ existe para $a\, \epsilon \mathbb{R}$.

ii. $\lim_{x \to a} f(x)$, existe para $a\, \epsilon \mathbb{R}$.

iii. Luego: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, para $a\, \epsilon \mathbb{R}$.

Ejemplo: Sea $f x) = \begin{cases} -x - 3, & si\ x \neq 2 \\ 1, & si\ x = 2 \end{cases}$, analizar la continuidad en $x = 2$.

Solución.

i) $f(2) = 1;$

ii) $\lim_{x \to 2} f(x) = -5;$

iii) Luego: $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, Entonces, f es discontinua evitable en $x = 2$

Observación: En el ejemplo, si $f(2)$ se define como -5, entonces $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ y seria continua en 2.

Teorema. La función f es continua en a si f se define en algún intervalo abierto que contenga a $\boldsymbol{a}$ y $(\forall\varepsilon > 0)(\exists$>0)$(\forall x/|x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Teorema. Si f y g son funciones continuas en el punto $x = a$ entonces:

a) $k.f$ es continua en a; $a\,\epsilon\mathbb{R}$

b) $f + g$ es continua en a.

c) $f - g$ es continua en a.

d) $f * g$ es continua en a.

e) $\frac{f}{g}$ es continua en a, si $g(a) \neq 0$

Definición. Sea f: $A \rightarrow B$ una función real, f se dice continua en a si y solo si f es continua en todo $a\,\epsilon\mathbb{R}$.

Teorema. La función polinomial (o polinómica) es continua en todo los $\mathbb{R}$

Ejemplos. Sea la función definida por $f(x) = x$. Analizar la continuidad de f en $\mathbb{R}$

Solución:

i) $f(a)$ existe para todo $a \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$, existe para $a \in \mathbb{R}$.

iii) Luego: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, para $a \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, f es continua

a) $f(a)$ existe para todo $a \in \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \to a} f(x)$, existe para $a \in \mathbb{R}$.

c) Luego: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, para $a \in \mathbb{R}$

Teorema. Una función es continua en su dominio.

Demostración. Como f es una función racional, se puede expresar como cociente de dos funciones polinomiales. Esto es: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, donde g y h son dos funciones polinomiales continuas en el dominio de f. Por lo tanto, f es continua en su dominio.

Ejemplos. Sea f una función definida por: $f(x) = \frac{1}{3x-1}$, Analizar la continuidad de f en los $\mathbb{R}$.

Solución. La función no está definida en $x = 1/3$, en consecuencia f no es continua en $x = 1/3$.

La función del ejemplo, también se lo conoce como función discontinua al infinito, ya que el $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty^+} \frac{1}{3x-1} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty^-} \frac{1}{3x-1} = -\infty$

Ejemplo: Sea f una función definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x-1}, & si\ x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & si\ x = \frac{1}{2}, \end{cases}$

Analizar la continuidad de f en los $\mathbb{R}$

Solución: f es continua en $\mathbb{R}/\{1/2\}$, por ser función racional. En $x = 1/2$, la función cambia de definición. Por lo tanto, se analiza en este punto.

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ existe para todo $a\ \epsilon \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty^+} \frac{1}{2x-1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to \infty^-} \frac{1}{2x-1} = -\infty$,

Lo que significa que la segunda condición no se cumple. Por lo tanto f es discontinua en $x = ½$

Teorema: si n es un entero positivo y $f\ (x) = \sqrt[n]{x}$,entonces:

a) Si n es impar, f es continua

b) Si n es par, f es continua en todo su dominio

Ejemplo: Estudiar la continuidad de. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in]-1,1[$

Solución: Sea: $g(x) = 1 - x^2$, una función continua en los $\mathbb{R}$, por lo tanto, será también es $]-1,1[$. Como f está definida en $]-1,1[$; luego por el teorema anterior f es continua es $]-1,1[$.

Teorema: si $f(x) = |x|$ entonces f es continua en los $\mathbb{R}$.

Teorema: si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ y la función f es continua en b, $\lim\limits_{x\to a}(f\ o\ g)(x) = f(b)$, si y solamente si $\lim\limits_{x\to a} f[g(x)] = f\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]$

Teorema. Si la función g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f\ o\ g$ es continua en a

Ejemplo Sea h una función definida por $\mathrm{h}(x) = \sqrt{x^4 - 4}$. Analizar la continuidad de h en $x = 2$

Solución. si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^4 - 4$, entonces $h(x) = (f \, o \, g)(x)$. g es continua en $x = 2$ y f es continua en $g(2)$, entonces $h(x)$ es continua en $x = 2$.

Definición. Una función es continua en un intervalo abierto si y solo si es continua en todo punto del intervalo.

Definición. La función f es continua a la derecha del numero a si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $f(a)$ existe para todo.

b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, existe.

c) Luego: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Definición. La función f es continua a la izquierda del número a si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $f(a)$ existe para todo.

ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, existe.

iii) Luego: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Definición. Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La función es continua en $[a, b]$ si

a) f es continua en $]a, b[$

b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

c) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Ejemplo: Demostrar que la función h(x) = $\sqrt{9 - x^2}$ es continua en $[-3,3]$

Solución. Como f es continua en el intervalo abierto $]-3,3[$, entonces falta calcular la continuidad a la izquierda de 3 y a la derecha de -3.

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\sqrt{9 - x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3)$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(\sqrt{1 - x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$$

Asi, f es continua a la derecha de -3 y a la izquierda de 3, en consecuencia f es continua en el intervalo cerrado $[-3,3]$

Definición. Se f una función definida en el intervalo semiabierto $[a,b[$, La función f es continua en $[a,b[$, si:

i) f es continua en $]a,b[$

ii) f es continua por la derecha de a

Definición. Sea f una función definida en el intervalo semiabierto $]a,b]$, La función f es continua en $]a,b]$, si:

i) f es continua en $]a,b[$

ii) f es continua por la izquierda de b

Pueden darse definiciones análogas a las anteriores, en relación con la continuidad en los intervalos $[a,+\infty[$ y $]-\infty,b]$

Ejemplo: Dada $f(x) = \sqrt{\frac{-x-1}{2x+4}}$, Determinar:

a) El dominio de f.

b) Analizar si f es continua en los siguientes intervalos: $]-2,-1[$, $[-2,-1[$, $]-2,-1]$, $[-2,-1]$

Solución: Sean $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = \frac{-x-1}{2x+4}$;

El dominio de $g(x)$ es todos los$\mathbb{R}^{+}U\{0\}$ y el dominio de $h(x)$ es $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, además $fx) = (g\ o\ h)(x)$

a) f es una función real ssi $h(x) \geq 0$

$$\frac{-x-1}{2x+4} \geq 0$$

b) como h es una función racional, entonces será continua en todo su dominio, esto es en $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, entonces h es continua en $]-2,-1[$. Como g es continua en $\mathbb{R}^{+}U\{0\}$, entonces $f(x) = (g\ o\ f)(x)$, es continua en el intervalo $]-2,-1[$.

Si $x\,\epsilon[-2,-1]$ y $x\epsilon[-2,-1[$, la función es discontinua en $x=-2$ porque -2 no es elemento del dominio de la función f.

En el intervalo $]-2,-1]$:

i) f es continua en $]-2,-1[$

ii) f es continua por la izquierda en $x = -1$. Porque:

$$\lim_{x \to -1^-} \sqrt{\frac{-x-1}{2x+4}} = 0 = f(-1)$$

Por lo tanto f es continua en $]-2,-1]$

Teorema. El $\lim\limits_{x \to o} \left[\frac{\sin(x)}{x}\right] = 1$

Teorema. La función seno es continua en 0.

Teorema. La función coseno es continua en 0

Teorema. Las funciones seno y coseno son continuas en todos los reales

Teorema. La función tangente, cotangente, secante, cosecante son continuas en su dominio.

Ejemplo: Calcular el $\lim\limits_{x \to a} \left[\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}\right]$

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}\right] = \lim_{x \to a} \left[\frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x - a}\right]$$

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \right]$$

Sea $y = \frac{x-a}{2}$, entonces $\lim_{x \to a} \left[\frac{x-a}{2}\right] \Rightarrow y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \left[\frac{\sin(y)\cos(y+a)}{y} \right] = \lim_{y \to 0} \left[\frac{\sin(y)}{y} \right] \lim_{y \to 0} [\cos(y+a)]$$

$$= 1 * \cos(o + a) = \cos\,(a)$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{\theta \to 0} \sqrt[3]{\frac{\sin(8\theta)}{\theta}}$

$$\lim_{\theta \to 0} \sqrt[3]{\frac{\sin(8\theta)}{\theta}} = \lim_{\theta \to 0} \sqrt[3]{\frac{8\sin(8\theta)}{8\theta}} = \lim_{\theta \to 0} \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{\frac{\sin(8\theta)}{8\theta}} =$$

$$\lim_{\theta \to 0} \sqrt[3]{8} * \lim_{\theta \to 0} \sqrt[3]{\frac{\sin(8\theta)}{8\theta}} = \lim_{\theta \to 0} \sqrt[3]{8} * 1 = 2$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{\cos(x)}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{\cos(x)}} * \frac{1+\sqrt{\cos(x)}}{1+\sqrt{\cos(x)}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2\left[1+\sqrt{\cos(x)}\right]}{1-\cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left[1+\sqrt{\cos(x)}\right]}{1-\cos(x)} * \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2\left[1+\sqrt{\cos(x)}\right][1+\cos(x)]}{1-\cos(x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left[1+\sqrt{\cos(x)}\right][1+\cos(x)]}{\operatorname{sen}(x)^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left[1 + \sqrt{\cos(x)}\right][1 + \cos(x)]}{\frac{sen^2(x)}{x^2}} = \frac{\lim_{x \to 0} \left[1 + \sqrt{\cos(x)}\right][1 + \cos(x)]}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}}$$

$$\frac{\lim_{x \to 0} \left[1 + \sqrt{\cos(x)}\right][1 + \cos(x)]}{1} = \left[1 + \sqrt{\cos(o)}\right][1 + \cos(0)] = 2 * 2$$

$$= 4$$

Teorema: sea $f: A \longrightarrow B$, una función real biyectiva.

si f es continua, entonces f^{-1} es continua

Ejemplo: Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen^{-1}(x)}{x}, & \textbf{si x} \in \textbf{[-1,0[} \cup \textbf{]0,+1]} \\ 1, & si\ x = 0 \end{cases},$$

Solución: $sen^{-1}(x)$ y x, son x son continuas **[-1,0[∪]0,1]** entonces $\frac{sen^{-1}(x)}{x}$ es continuas **[-1,0[∪]]0,1]**

a) $f(0)$ existe

b) Se calcula el $\lim_{x \to 0} \frac{sen^{-1}(x)}{x}$

$y = sen^{-1}(x)$ si y solamente si $\sin(y) = x$

Si $x \longrightarrow 0$, entonces y $\longrightarrow 0$

Entonces $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{sen^{-1}(x)}{x} = \lim\limits_{y \longrightarrow 0} \frac{y}{\sin(y)} = \lim\limits_{y \longrightarrow 0} \frac{\frac{y}{y}}{\frac{\sin(y)}{y}} = \lim\limits_{y \longrightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(y)}{y}}$

$$\lim_{y \longrightarrow 0} \frac{sen^{-1}(x)}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{y \longrightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

iii) luego $f(0) = 1 = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{sen^{-1}(x)}{x}$ =1

Por lo tanto f es continua en $x = 0$. Luego f es continua en $[-1,1]$

Teorema. Se f una función definida por $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

Corolario: Sea f una función definida por $f(x) = \log_a |x|$, $a > 0$, $a \neq 1$. Entonces f es continua en $\mathbb{R}^+$

Teorema. Sea f una función real tal que, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$, existe y es positivo, entonces existe un entorno reducido de a, tal que, para todo x elemento del $f(x) > 0$.

Teorema. Sea f una función real tal que, $\lim_{x \to a} f(x)$, existe y es negativo, entonces existe un entorno reducido de a, tal que, para todo x elemento del $f(x) < 0$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{(x-5)}{(1-3x)}$. Calcular un entorno reducido de 2, tal que, para todo x elemento del entorno $f(x) > 0$.

Solución: Se calcula el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-5)}{(1-3x)} = \frac{3}{5}$$

Cuando $\frac{3}{5} > 0$, entonces existe $N^*(2, \delta)$, tal que $\forall x \in N^*(2, \delta), f(x) > 0$

Se puede comprobar que para $\delta = \frac{3}{5}$, se cumple que $f(x) > 0$

Teorema: si $\lim_{x \to a} f(x) = L, L > 0,\ \lim_{x \to a} g(x) = k$

Entonces $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim_{x \to a} g(x)} = L^K$

Teorema. si $\lim_{x \to a} f(x) = L, L > 0, L \neq 1,\ \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$

Entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & si \quad L \in]0,1[\\ +\infty, & si \quad L > 1 \end{cases}$

Teorema. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L, L > 0, L \neq 1, \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

Entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} +\infty, & si \quad L \in]0,1[\\ 0, & si \quad L > 1 \end{cases}$

Este teorema también se cumple, si se reemplaza $x \longrightarrow a$ por $x \longrightarrow +\infty$, o, $x \longrightarrow -\infty$.

Teorema: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Teorema. $\lim\limits_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$

Teorema. $\lim\limits_{y \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$

Este último es un caso especial del teorema anterior parte ii) cuando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \mp\infty$

El teorema se puede generalizar si en vez de x se reemplaza por una función $h(x)$ que tiende a cero. De igual manera si se reemplaza y por una función que tiende a $+\infty$ o $-\infty$

Ejemplo: Calcular el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-2}\right)^{\frac{1-x}{x}}$

Calculamos el límite de la base:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{3x-2}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}}\right)=\frac{1}{3}$$

Ahora el exponente

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}-\frac{x}{x}}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{1}\right)=-1$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-2}\right)^{\frac{1-x}{x}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$$

Teorema. Si $a>1$ y $b>0$ entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^b}=+\infty$

Ejemplo: Calcular el $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$

Sea: $y=\ln(x)\Leftrightarrow x=e^y$

si $x\to+\infty$, entonces y $\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{y}{e^y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right)=\frac{1}{\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{e^y}{y}\right)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Teorema. Sean: $k\in\mathbb{R}^+$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, si $\forall x>k$; $f(x)<g(x)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Definición. Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se dicen equivalentes cuando $x\longrightarrow a$.

Notación: f$(x)\sim g(x)$

Si $(x)\sim g(x)$ cuando $x\longrightarrow a$, significa que para valores muy cercanos a a, da lo mismo trabajar con $f(x)$ o $g(x)$.

Algunas funciones equivalentes importantes.

sen$(x)\sim x$, cuando $x\longrightarrow 0$, ya que $\lim_{x\to o}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]=1$

tang$(x)\sim x$, cuando $x\longrightarrow 0$, ya que $\lim_{x\to o}\left[\frac{\operatorname{tang}(x)}{x}\right]=1$

sen$^{-1}(x)\sim x$, cuando $x\longrightarrow 0$, ya que $\lim_{x\to o}\left[\frac{\operatorname{sen}^{-1}(x)}{x}\right]=1$

$\text{tang}^{-1}(x) \sim x$, cuando $x \longrightarrow 0$, ya que $\lim\limits_{x \to o} \left[\frac{\text{tang}^{-1}(x)}{x}\right] = 1$

$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$, cuando $x \longrightarrow 0$, ya que $\lim\limits_{x \to o} \left[\frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}}\right] = 1$

$\ln(1 + x) \sim x$, cuando $x \longrightarrow 0$, ya que $\lim\limits_{x \to o} \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right] = 1$

$e^x - 1 \sim x$, cuando $x \longrightarrow 0$, ya que $\lim\limits_{x \to o} \left[\frac{e^x-1}{x}\right] = 1$

2.9. Ejercicios propuestos de continuidad de funciones

En los ejercicios del 1 al 14 analizar la continuidad de las funciones propuestas:

1) $f(x) = \begin{cases} x - 5, & si\ x < 0 \\ x^2 - 5, & si\ x > 0 \end{cases}$

2) $f(x) =$

$\begin{cases} x - 1, & si\ x \leq 1 \\ -3x + 3, & si\ x < 1 \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{x^3+2x}{x+2}$

4) $f(x) = \frac{3x^2}{x-3}$

5) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

6) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

7) $f(x) =$

$\begin{cases} x^2 + 2x - 1, & si\ x < 0 \\ 3x - 1, & si\ 0 \leq x < 1 \\ 2, & si \geq 1 \end{cases}$

8) $f(x) =$

$\begin{cases} -x - 4 & si\ x \leq -4 \\ -x^2 + 16 & si - 4 < x < 4 \\ x - 2 & si \geq 4 \end{cases}$

9) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+4}}$

10) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-6x+5}{x-5} & si\ x<5\\ 0 & si\ x=5\\ \frac{3x^2-9x+6}{3x-6} & si\ x>5\end{cases}$

11) $f(x)=$

$\begin{cases} x^2 & si\ x\leq -2\\ 2x-4 & si\ -2<x<2\\ 2x-5 & si\ x\geq 2\end{cases}$

12) $f(x)=$

$\begin{cases} x-2, & si\ |x|\geq 2\\ -4, & si -2<x<2\end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+2}, & si\ x>-2\\ 2x, & si\ \ x\leq -2\end{cases}$

14) $f(x)=$

$\begin{cases} x+1 & si\ x<3\\ -x^2+13 & si\ \ 3\leq x<4\\ -3 & si\geq 4\end{cases}$

En los ejercicios del 15 al 20 encontrar el valor de α y β para que las funciones propuestas sean continuas en el punto donde exista un cambio de definición.

15) $f(x)=\begin{cases}-x+1 & si\ x<-3\\ \alpha x+1 & si\ \ -3\leq x<5\\ \beta x^2-2 & si\ x\geq 5\end{cases}$

16) $f(x)=\begin{cases}3x+6\alpha & si\ x<-3\\ -2\alpha x+\beta & si\ \ |x|<3\\ x-\beta & si\ x\geq 3\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases}\frac{(x+\alpha)(x-1)}{x^2-5x+6}, & si\ x<2\\ 4 & si\ \ x=2\\ \beta x & si\ x>2\end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases}\frac{(x-\beta)(x+1)}{x+5}, & si\ x\neq 2\\ -2, & si\ \ x=2\end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2, & si\ x\geq 2\\ x-7, & si\ \ x<2\end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases} x^2+x-1 & si\ x<-2 \\ \alpha x-\beta & si-2\leq x<1 \\ x+2 & si \geq 1 \end{cases}$

Capítulo III: Derivadas

Los estudios realizados por Isaac Newton y Leibniz permitieron realizar el estudio del cálculo infinitesimal y dieron paso a facilitar el entendimiento de ciertos fenómenos presentes en el mundo actual y que gracias a muchos estudios realizados por matemáticos y científicos permitieron obtener cálculos más exactos. Las derivas aportan información de utilidad como la velocidad de cuerpos, tasas de crecimiento y decrecimiento poblacional y otros fenómenos que sin el empleo de esta herramienta matemática sería complicado su estudio y entendimiento.

3.1. Recta tangente

Definición: sea $y \longrightarrow f(x)$ una función continua. La recta tangente a la gráfica en el punto $(a, f(a))$, es la que pasa por tal punto y su pendiente es:

$$m_a = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f[a + \Delta x] - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que el límite exista. La pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$, se conoce también como pendiente de la curva en el punto. La definición implica que una tangente en $(a, f(a))$ es única.

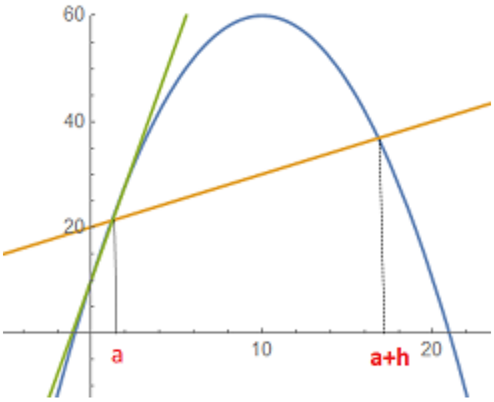


Figura 47: Gráfica de la Recta Tangente

Observaciones:

- Puede que el límite no exista para una función f, pero haya tangente en $(a, f(a))$
- La recta tangente a una gráfica en un punto puede ser vertical o asíntota, en cuyo caso la pendiente no está definida.
- La gráfica de una función no tendrá recta tangente en un punto siempre que:

I. f sea discontinua en $x = a$

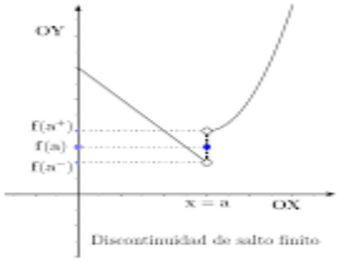


Figura 48: Gráfica de f con discontinua en x=a

II. La gráfica de f tenga un pico en $(a, f(a))$

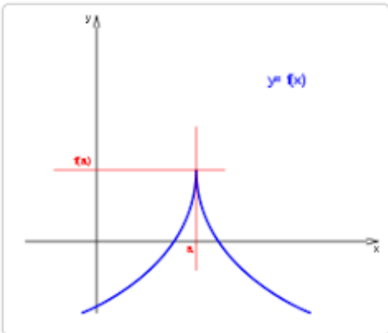


Figura 49: Gráfica de f con un pico en (a,f(a))

La gráfica de f tenga una esquina en $(a, f(a))$

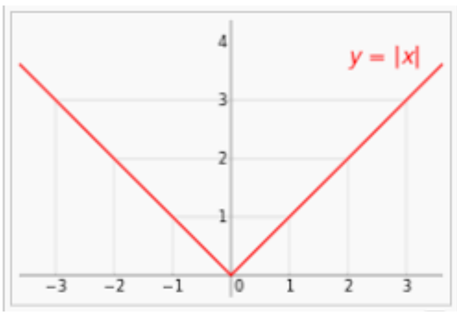


Figura 50: Gráfica de f con un esquina en (a,f(a))

Ejemplo: Encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5x + 6$, en todo punto $(a, f(a))$

Solución:

a) $f(a) = 5a + 6$, para cualquier $\Delta x \neq 0$

$f(a + \Delta x) = 5(a + \Delta x) + 6 = 5a + 5\Delta x + 6$

b) $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$

$\Delta y = [6 = 5a + 5\Delta x + 6\,] - [5a + 6] = 5\Delta x$

c) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$

En todo punto de la gráfica de $f(x) = 5x + 6$, se tiene que

$$m_a = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f[a + \Delta x] - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} (5) = 5$$

Ejemplo: Hallar la pendiente de las siguientes curvas en el punto x = 1

a.) $\boldsymbol{y = 8 - 5x^2}$

$y' = 0 - 2 * 5x$

$y' = -10x$

$y' = -10(1)$

$y' = -10$

b.) $y = \frac{4}{x+1}$

$$y' = -\frac{4}{(x+1)^2}$$

$$y' = -\frac{1}{(1+1)^2}$$

Ejemplo: Calcular las coordenadas del vértice de la parábola $y = x^2 - 4x + 1$ teniendo en cuenta que la pendiente de la tangente en dicho punto es igual a cero.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$xv = -\frac{b}{2a}$$

$$xv = -\frac{(-4)}{2(1)}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

$$xv = -4$$

$$v = (2, -4)$$

Ejemplo: Calcular la pendiente de las tangentes a la parábola $y = -x^2 + 5x - 6$ en los puntos de intersección con el eje x.

$y' = -2 * 1x + 5(1) - 0$	$5 = -2x + 5$	$\frac{1}{-2} = x$
$y' = -2x + 5$	$\frac{5}{5} = -2x$	$x = 0,5$

$y' = -2(0) + 5$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1 = -2x$

$y' = 5$

Ejemplo: Calcular la velocidad de los siguientes movimientos en el instante t = 2; s viene expresado en metros y t en segundos.

a.) $\boldsymbol{s = t^2 + 3t}$

$s = 2^2 + 3(2)$

$s = 4 + 6$

$s = 10$

$$v = \frac{10}{2}$$

$v = 5s$

b.) $\boldsymbol{s = t^3 - 3t^3}$

$s = 2^3 - 3(2)^3$

$s = 8 - 3(8)$

$s = -16$

$$v = \frac{-16}{2}$$

$v = -8s$

3.2. Definición de derivada

La derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a x es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f[x + \Delta x] - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que el límite exista.

La derivada $f'(x)$, también se llama razón de cambio instantánea de la función $y = f(x)$, con respecto a la variable x

Observe que $\Delta x = x - a \Rightarrow x = \Delta x + a$, se ve que $\Delta x \to 0$, entonces $x \to a$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f[a + \Delta x] - f(a)}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = -x^2 - 4x - 1$

Solución:

$$\Delta y = f[x + \Delta x] - f(x)$$

$$\Delta y = [-(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) - 1\,] - [-x^2 - 4x - 1\,]$$

$$\Delta y = -x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 - 4x - 4\Delta x - 1 + x^2 + 4x + 1$$

$$\Delta y = -2x\Delta x - \Delta x^2 - 4\Delta x$$

$$\Delta y = \Delta x(-2x - \Delta x - 4)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f[x + \Delta x] - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(-2x - \Delta x - 4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} (-2x - \Delta x - 4)$$

$$f'(x) = -2\text{x} - 4$$

Notación de la derivada de una función: $f'(x), \frac{dy}{dx}, y', Dy, D_x y$

Valor de una derivada: Es un número especifico a, el valor de la derivada de denota:

$$f'(a), \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \text{ o } y'(a)$$

Ejemplo: Encontrar el valor de la derivada de $f(x) = x^2$, en 5

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(5) = 2(5) = 10$$

Operación: El proceso de obtención de una derivada se llama diferenciación (derivación), si $f'(a)$ existe, se dice que f es diferenciable en a. La operación de diferenciación con respecto a la variable x se representa mediante el símbolo $\frac{d}{dx}$, por ejemplo $\frac{d}{dx} f(x)$

Observación: si $y = f(x)$, es continua en $x = a$, y $f'(a) = 0$, entonces la tangente en $(a, f(a))$ es horizontal

Dominio de la derivada (f')

El dominio de f', es el conjunto de números para los que el límite existe. Una derivada no existe en un número a, por la mismas razones que una tangente a la gráfica no existe.

Una función f no tiene derivada en a, si:

- La función es discontinua en $x = a$
- La gráfica de f tiene un pico o un punto en $(a, f(a))$. Además, puesto que la derivada de la pendiente de f' no existe
- En el punto $(a, f(a))$ en el que la tangente a la gráfica es vertical, y la pendiente de una recta vertical no está definida

Por lo tanto, el dominio f', es un subconjunto del dominio de f.

Teorema: Si f es diferenciable a, entonces f es continua en a

Teorema: Si f es diferenciable en un número c de un intervalo $]a, b[$, si y solo si:

$\boldsymbol{f'_{+}(c) = f'_{-}(c)}$**, y** $\boldsymbol{f}$ **es continua en** $\boldsymbol{c}$

3.3. Ejercicios propuestos de derivadas aplicando la definición

Aplicando la definición encuentre las derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x) = 3x - 5$
2) $g(x) = 2x + 7$
3) f$f(x) = x^2 + 8x - 5$
4) $g(x) = x + 1$
5) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$
6) $g(x) = x^2$
7) $f(x) = x^3 + 1/4$
8) $g(x) = x^2 + 7x$
9) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 10$
10) $g(x) = x^3 + 27x$
11) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$
12) $g(x) = 4x^3 - 2x^2$
13) $f(x) = 4x^3 - 13x^2 + 4x$
14) $f(x) = 6x^3 + 11x - 9$
15) $g(x) = 4x^3$
16) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 9$
17) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x + 3$
18) $f(x) = 6x^3 - 7x^2 + 3x - 2$
19) $f(x) = 8x^2 - x + 3$
20) $f(x) = 7x^3 - x + 5$
21) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 10$
22) $f(x) = x^2 + 3x + 2$
23) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$
24) $f(x) = 4x^3 - 13x^2 + 4x - 3$

25) $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$

26) $f(x) = 2x^2 + 5x - 22$

27) $f(x) = 5x^2 - 9x + 2$

28) $f(x) = 4x^2 + 5x$

29) $f(x) = x^3 - 7x$

30) $f(x) = 2x^3 + x^2$

31) $f(x) = x^2 - 9x + 1$

32) $f(x) = x^3 + 5$

33) $f(x) = 2x^2 + 7x - 11$

34) $f(x) = 7x^3$

35) $f(x) = 11x^2 + 8$

3.4. Reglas de diferenciación

Teorema: dada $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, donde n es un número entero positivo.

Teorema: dada $f(x) = k$, una función constante, entonces $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = 0$.

Teorema: Sea c, una contante y $f(x)$ diferenciable, entonces:

$$\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x) = cf'(x)$$

Teorema: Sea $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables en $]a, b[$, entonces:

a) $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

b) $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

c) $\frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

d) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 7}$

$$f'(x) = 3 * 3x^2 - 2 * 2x + 4 * 1 - 0$$

$$f'(x) = 9x^2 - 4x + 4$$

Ejemplo: $\boldsymbol{g(z) = 5z^4 - 8z^2 + z}$

$$g'(z) = 4 * 5z^3 - 2 * 8z + 1$$

$$g'(z) = 20x^3 - 16z + 1$$

Ejemplo: $\boldsymbol{f(t) = t^2 + (1/t^2)}$

$$f'(t) = 2t + (1 * t^{-2})$$

$$f'(t) = 2t + (-2t^{-3})$$

$$f'(t) = 2t - \frac{2}{t^3}$$

Ejemplo: Derivar $y = \frac{x-1}{5x^3+2x}$

Solución:

$$y' = \frac{(5x^3 + 2x)\frac{d}{dx}[x-1] - (x-1)\frac{d}{dx}[5x^3 + 2x]}{(5x^3 + 2x)^2}$$

$$y' = \frac{(5x^3 + 2x)[1] - (x-1)[15x^2 + 2]}{(5x^3 + 2x)^2}$$

$$y' = \frac{(5x^3 + 2x) - (x-1)[15x^2 + 2]}{(5x^3 + 2x)^2}$$

$$y' = \frac{5x^3 + 2x - 15x^3 - 2x + 15x^2 + 2}{25x^6 + 20x^4 + 4x^2}$$

$$y' = \frac{-10x^3 + 15x^2 + 2}{25x^6 + 20x^4 + 4x^2}$$

Se puede hacer uso de combinación de las reglas de diferenciación

Ejemplo: Derivar $y = \frac{(x^2-1)(2x+1)}{(2x^2+5)}$

Solución: Empezar con la regla del cociente:

$$y' = \frac{(2x^2+5)\frac{d}{dx}[(x^2-1)(2x+1)] - [\![(x^2-1)(2x+1)]\!]\frac{d}{dx}[2x^2+5]}{(2x^2+5)^2}$$

$$y' = \frac{(2x^2+5)\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}(2x+1) + (2x+1)\frac{d}{dx}(x^2-1)\right] - [\![(x^2-1)(2x+1)]\!][4x]}{(2x^2+5)^2}$$

$$y' = \frac{(2x^2+5)[(x^2-1)(2)+(2x+1)(2x)] - [\![(x^2-1)(2x+1)]\!][4x]}{(2x^2+5)^2}$$

$$y' = \frac{(2x^2+5)[2x^2-2+4x^2+2x] - [\![2x^3+x^2-2x-1]\!][4x]}{4x^4+20x^2+25}$$

$$y' = \frac{(2x^2+5)[6x^2+2x-2] - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x}{4x^4+20x^2+25}$$

$$y' = \frac{12x^4+4x^3-4x^2+30x^2+10x-10-8x^4-4x^3+8x^2+4x}{4x^4+20x^2+25}$$

$$y' = \frac{4x^4+34x^2+14x-10}{4x^4+20x^2+25}$$

Teorema: si $f(x) = x^n$, si n es un entero positivo y $x \neq 0$entonces

$f'(x) = \frac{d}{dx}x^{-n} = -nx^{-n-1}$

Ejemplo: Derivar $y = \frac{1}{x^2}$

Solución: Empezar con la regla del cociente:

$$y' = \frac{(x^2)\frac{d}{dx}[1] - 1\frac{d}{dx}[x^2]}{(x^2)^2} = \frac{(x^2)(0) - 1(2x)}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Observación: $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

Entonces: $y' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

3.5. Ejercicios propuestos de derivadas aplicando las propiedades

Encontrar las siguientes derivadas de f(x), g(x)

1) $f(x) = (6x^3+5x^2 - 3)(6x + 3)$
2) $f(x) = 8x^3(5x - 2)$
3) $f(x) = (5x^2 - x + 5)(4x + 3)$
4) $f(x) = (2x + 5)(x^3 - 3x^2 + x)$
5) $f(x) = (8x^3 + x^2 - x + 3)(6x^2 + 3)$
6) $f(x) = (7x^4 + 4x^3 - 5)(x^5 - 2)$
7) $f(x) = (3x^3 + 2x^2 + 5)(3x - 4)$
8) $f(x) = (7x^4 + 8x^2)(2x^2 + 5x)$
9) $f(x) = (9x + 5)(3x^2 + 7x - 2)$
10) $f(x) = (6x^4 - 7x^2)(3x^3 + 2x^2)$
11) $f(x) = (2x^4 - 5x - 6)(6x^3 - 4x^2 + 2)$
12) $f(x) = 6x3 (5x^2 + 4x + 2)$
13) $f(x) = (x^6 + 10)(x^5 - 8)$
14) $f(x) = (6x^2 - 7)(3x^4)$
15) $f(x) = (5x^3 + 8x^2)(4x^5 - 2)$
16) $f(x) = (2x^3 - 4x^2 + 7x)(x^2 - 9)$
17) $f(x) = (x^2 + 2x)(6x^2 - 7)$
18) $f(x) = 7x^3(4x + 9)$
19) $f(x) = 10x^4(x^2 + 8x + 25)$
20) $f(x) = (4x^3 - 11)(3x^2 + 7)$
21) $f(x) = 7x - 5$
22) $f(x) = 2x + 9$
23) $f(x) = x^2 + 11x - 5$
24) $f(x) = x + 8$
25) $f(x) = 7x^2 - 9x + 3$
26) $f(x) = 8x^2$
27) $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{4}$
28) $f(x) = 4x^2 + 7x$
29) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 10$

30) $f(x) = 3x^3 + 28x$

31) $f(x) = 2x^3 - 11x^2 - 2x - 3$

32) $f(x) = 4x^3 - 7x^2$

33) $f(x) = 14x^3 - 3x^2 + 4x$

34) $f(x) = 6x^3 + 15x - 9$

35) $f(x) = 24x^3$

36) $f(x) = 3x^3 - 8x^2 + 5x - 9$

37) $f(x) = 8x^3 - 12x^2 - 15x + 3$

38) $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 13x - 2$

39) $f(x) = 8x^2 - 10x + 3$

40) $f(x) = 7x^3 - 9x + 25$

41) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x + 11$

42) $f(x) = 5x^2 + 8x + 12$

43) $f(x) = 22x^3 - 15x^2 - 2x - 13$

44) $f(x) = 24x^3 - 13x^2 + 7x - 3$

45) $f(x) = 13x^2 - 26x + 8$

46) $f(x) = 2x^2 + 25x - 22$

47) $f(x) = 5x^2 - 19x + 27$

48) $f(x) = 4x^2 + 35x$

49) $f(x) = 18x^3 - 7x$

50) $f(x) = 18x^3 + x^2$

51) $f(x) = 9x^2 - 19x + 1$

52) $f(x) = 13x^3 + 25$

53) $f(x) = 32x^2 + 17x - 110$

54) $f(x) = 37x^3$

55) $f(x) = 11x^2 + 88$

56) $f(x) = 4x^3 + 25$

57) $f(x) = 2x^2 + 7x - 11$

58) $f(x) = 7x^3$

59) $f(x) = 11x^2 + 8$

60) $f(x) = 25x^5 + 12x^4 - 3x^2 + 25$

61) $f(x) = 6x^7 + 13x^5 - 7x^3 + x$

62) $f(x) = 9x^6 - x^4 + 7x^2 + 42x$

63) $f(x) = 14x^5 - 54x^2 + 30$

64) $f(x) = 23x^3 - 54x^2 + 100x$

65) $f(x) = 6x^9 - 12x^7 + 3x^5 - 15x^3 - 100$

66) $f(x) = 9x^{11} + 12x^7 - 3x^4 + 12$

3.6. Derivada de funciones trigonométricas

Teorema: $f(x) = \sin(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = -x^3 \sin(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[-x^3 \sin(x)]$$

Usando la regla del producto tenemos:

$$f'(x) = \sin(x)\frac{d}{dx}[-x^3] + (-x^3)\frac{d}{dx}[\sin(x)]$$

$$f'(x) = \sin(x)\,(-3x^2) + (-x^3)[\cos(x)]$$

$$f'(x) = -3x^2\sin(x) - x^3\cos(x)$$

Teorema: $f(x) = \cos(x)$, entonces $f'(x) = -\text{sen}(x)$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \frac{\sin(x)}{3-3\cos(x)}$

$$f´(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(x)}{3 - 3\cos(x)}\right]$$

Usando la regla del cociente tenemos:

$$f´(x) = \frac{[3 - 3\cos(x)]\frac{d}{dx}[\sin(x)] - [\sin(x)]\frac{d}{dx}[3 - 3\cos(x)]}{[3 - 3\cos(x)]^2}$$

$$f´(x) = \frac{[3 - 3\cos(x)][\cos(x)] - [\sin(x)]\,[0 - 3(-\text{sen}\,(x)]}{(3)^2[1 - \cos(x)]^2}$$

$$f´(x) = \frac{[3\cos(x) - 3\cos^2(x)] - [3\text{sen}^2(x)]}{9[1 - \cos(x)]^2}$$

$$f´(x) = \frac{3[\cos(x) - \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)]}{9[1 - \cos(x)]^2}$$

Aplicando la identidad trigonométrica en el numerador:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \Rightarrow sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$$

$$f´(x) = \frac{3[\cos(x) - \cos^2(x) - 1 + cos^2(x)]}{9[1 - \cos(x)]^2}$$

$$f´(x) = \frac{3[\cos(x) - 1]}{9[1 - \cos(x)]^2} \Rightarrow -\frac{[1 - \cos(x)]}{3[1 - \cos(x)]^2} \Rightarrow \frac{1}{3[1 - \cos(x)]}$$

Teorema: $f(x) = \tan(x)$, entonces $f´(x) = \sec(x)^2$

Como: $f(x) = \tan(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, por lo tanto

$$f´(x) = \frac{[\cos(x)]\frac{d}{dx}[\sin(x)] - [\sin(x)]\frac{d}{dx}[\cos(x)]}{[\cos(x)]^2}$$

$$f´(x) = \frac{[\cos(x)][\cos(x)] + [\sin(x)]\,[sen\,(x)]}{[\cos(x)]^2}$$

$$f´(x) = \frac{[\cos(x)]^2 + [\mathrm{sen}\,(x)]^2}{[\cos(x)]^2}$$

Aplicando la identidad trigonométrica en el numerador:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$f´(x) = \frac{1}{[\cos(x)]^2}$$

$$f´(x) = sec^2(x)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = cos(x)\tan(x)$

$$f´(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[cos(x)\tan(x)]$$

Usando la regla del producto tenemos:

$$f'(x) = \tan(x)\,[-\text{sen}\,(x)] + [\cos(x)]\,[sec^2(x)\,]f'(x)$$

$$= \tan(x)\frac{d}{dx}[\cos\,(x)] + [\cos(x)]\frac{d}{dx}[\tan(x)]$$

$$f'(x) = -\frac{sen(x)}{\cos(x)}sen(x) + \cos\,(x)\frac{1}{\cos\,(x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\text{sen}\,(x)^2}{\cos(x)} + \frac{1}{\cos\,(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1-\text{sen}\,(x)^2}{\cos(x)} + \frac{\cos\,(x)^2}{\cos\,(x)}$$

$$f'(x) = cos\,(x)$$

Teorema: $f(x) = \cot(x)$, entonces $f'(x) = -\csc(x)^2$

Teorema: $f(x) = \sec(x)$, entonces $f'(x) = \sec(x)\tan\,(x)$

Teorema: $f(x) = \csc(x)$, entonces $f'(x) = -\csc(x)\,cot\,(x)$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = sec(x)\cot\,(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[sec(x)\cot\,(x)]$$

$$f'(x) = \cot(x)\frac{d}{dx}[sec\,(x)] + [\sec(x)]\frac{d}{dx}[\cot(x)]$$

$$f'(x) = \cot(x)\,[se\,c(x)\tan\,(x)] + [\sec(x)]\,[-\csc(x)]$$

$$f´(x) = \frac{cos(x)}{\text{sen}(x)}\left[se\,c(x)\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right] - \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]\left[\frac{1}{\text{sen}(x)}\right]$$

$$f´(x) = \left[\frac{1}{\cos(x)}\right] - \left[\frac{1}{\cos(x)sen(x)}\right]$$

$$f´(x) = \left[\frac{sen(x) - 1}{\text{sen(x)}\cos(x)}\right]$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \frac{sec(x)}{1+\tan(x)}$

$$f´(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{sec(x)}{1 + \tan(x)}\right]$$

Usando la regla del cociente tenemos:

$$f´(x) = \frac{[1 + \tan(x)]\frac{d}{dx}[sec(x)] - [sec(x)]\frac{d}{dx}[1 + \tan(x)]}{[1 + \tan(x)]^2}$$

$$f´(x) = \frac{[1 + \tan(x)][\sec(x)\tan(x)\,] - [sec(x)]\,[\sec(x)^2]}{[1 + \tan(x)]^2}$$

$$f´(x) = \frac{[\sec(x)\tan(x)\,]}{[1 + \tan(x)]} - \frac{[sec(x)]\,[\sec(x)^2]}{[1 + \tan(x)]^2}$$

Puedo aplicar la identidad trigonométrica: $1 + [\tan(x)]^2 = [sec\,(x)]^2$, para simplificar aún más la derivada de la función

Ejemplo: Encontrar la derivada de $\boldsymbol{y = x - 3\,sen(x)}$

$$y' = \frac{d}{dx}\big(x - 3sen(x)\big)$$

$$y' = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}\big(3sen(x)\big)$$

$$y' = 1 - 3\cos(x)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $\boldsymbol{y = t^3 \cos(t)}$

$$y' = \frac{d}{dx}(t^3 \cos(t))$$

$$y' = \cos(t)\frac{d}{dx}(t^3) + t^3\frac{d}{dx}(\cos(t))$$

$$y' = \cos(t)\,3t^2 + t^3\,\big(-sen(t)\big)$$

$$y' = 3t^2\cos(t) - t\,sen(t)^3$$

$$y' = t^2\big(\,3\cos(t) - t\,sen(t)\big)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $\boldsymbol{y = \frac{tan(x)}{x}}$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)$$

$$y' = \frac{x * \frac{d}{dx}(\tan(x)) - \tan(x) * \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$y' = \frac{x * sec^2(x) - \tan(x) * 1}{x^2}$$

$$y' = \frac{\frac{x}{cos^2(x)} - \frac{sen(x)}{\cos(x)}}{x^2}$$

$$y' = \frac{\frac{x - sen(x) * \cos(x)}{cos^2(x)}}{x^2}$$

$$y' = \frac{x - sen(x) * \cos\,(x)}{x^2 cos^2(x)}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{sen(x)}}{\boldsymbol{x^2}}$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{sen(x)}{x^2}\right)$$

$$y' = \frac{x^2 * \frac{d}{dx}\big(sen(x)\big) - sen(x)\frac{d}{dx}x^2}{(x^2)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 * \cos(x) - sen(x) * 2x}{x^4}$$

$$y' = \frac{x^2\cos(x) - 2xsen(x)}{x(x^3)}$$

$$y' = \frac{x\big(xcos(x) - 2sen(x)\big)}{x(x^3)}$$

$$y' = \frac{xcos(x) - 2sen(x)}{x^3}$$

3.7. Regla de la cadena

Teorema: Sea $f(x)$, una función compuesta por dos funciones g(x) y h(x), siendo $f(x) = goh$. Si existen las derivadas $g'(x)$ y $h'(y)$, donde $y = g(x)$. Entonces la derivada $f'(x)$ existe y esta dada por:

$$f'(x) = g'(x)h'(x)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = (x-1)^2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[(x-1)^2] = \frac{d}{dx}[(x-1)(x-1)]$$

Usando la regla del producto tenemos:

$$f'(x) = (x-1)\frac{d}{dx}[x-1] + (x-1)\frac{d}{dx}[x-1]$$

$$f'(x) = (x-1) + (x-1) = 2(x-1)$$

Aplicando la Regla de la Cadena:

$$f'(x) = 2(x-1)\frac{d}{dx}[(x-1)] = 2(x-1)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \frac{1}{(5x^4-2x^2-4)^3}$

$$f'(x) = \frac{[(5x^4 - 2x^2 - 4)^3]\frac{d}{dx}[1] - [1]\frac{d}{dx}[(5x^4 - 2x^2 - 4)^3]}{[(5x^4 - 2x^2 - 4)^3]^2}$$

Aplicando la regla de la cadena en el numerador

$$f'(x) = \frac{-[1]3(5x^4 - 2x^2 - 4)^2\frac{d}{dx}[(5x^4 - 2x^2 - 4)]}{(5x^4 - 2x^2 - 4)^6}$$

$$f'(x) = \frac{-3(5x^4 - 2x^2 - 4)^2(20x^3 - 4x)}{(5x^4 - 2x^2 - 4)^6}$$

$$f'(x) = \frac{-3(20x^3 - 4x)}{(5x^4 - 2x^2 - 4)^4}$$

O bien $f(x) = (5x^4 - 2x^2 - 4)^{-3}$

$$f'(x) = -3(5x^4 - 2x^2 - 4)^{-4}\frac{d}{dx}[5x^4 - 2x^2 - 4] = \frac{-3(20x^3 - 4x)}{(5x^4 - 2x^2 - 4)^4}$$

Teorema: sea $f(x)$, una función definida por $f(x) = x^r$, donde r es un numero racional. Entonces $f'(x) = rx^{r-1}$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $\boldsymbol{f(x) = (x^1 - 3x + 8)^3}$

$f(x) = 3(x^2 - 3x + 8)^2 \, \frac{d}{dx} \, (x^2 - 3x + 8)$

$$f(x) = 3(x^2 - 3x + 8)^2 \ (2x - 3)$$

$$f(x) = (x^2 - 3x + 8)^2 \ (6x - 9)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $\boldsymbol{g(x) = (8x - 7)^{-5}}$

$$g(x) = -5(8x - 7)^{-6} \frac{d}{dx} (8x - 7)$$

$$g(x) = -5(8x - 7)^{-6} (8)$$

$$g(x) = \frac{40}{(8x - 7)^6}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $\boldsymbol{f(x) = (\frac{3x^2-5}{2x^2+7})^2}$

$$f'(x) = 2\left(\frac{3x^2 - 5}{2x^2 + 7}\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{3x^2 - 5}{2x^2 + 7}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{6x^2 - 10}{2x^2 + 7}\right)\left[\frac{(2x^2 + 7)\frac{d}{dx}(3x^2 - 5) - (3x^2 - 5)\frac{d}{dx}(2x^2 + 7)}{2x^2 + 7}\right]$$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 10)[(2x^2 + 7)(6x) - (3x^2 - 5)(4x)]}{(2x^2 + 7)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 10)[12x^3 + 42x - 12x^3 + 20x]}{(2x^2 + 7)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 10)(62x)}{(2x^2 + 7)^3}$$

$$f'(x) = \frac{372x^3 - 620x}{(2x^2 + 7)^3}$$

3.8. Ejercicios propuestos de derivadas aplicando regla de la cadena

Encontrar las derivadas aplicando la Regla de la Cadena:

1) $f(x) = (6x^2 - 7x)^2(4x - 2)^3$
2) $f(x) = (3x^2 - 6x)^5 (4x^3 + 5)^4$
3) $f(x) = (2x^3 - 7x)^{-3}(5x^4 + 3x^2)^{-4}$
4) $f(x) = \sqrt[3]{(7x^2 + 8x)^2}(2x^2 - 1)^{3/4}$
5) $f(x) = \sqrt[3]{(5x^2 + 6x)^4}\ \sqrt[3]{8x^3 + 6x^2}$
6) $f(x) = \sqrt{5 - 3x^2}(7 - 10x)^3$
7) $f(x) = (5x - 1)^{-1}(2x - 1)^{-2}$
8) $f(x) = (4x + 3)^3(x + 1)^{1/3}$
9) $f(x) = (2x - 3)^2(3x^2 - 5)^2$
10) $f(x) = (3x - 7)^3(5x^3 + 4x^2 - 3x + 7)^2$
11) $f(x) = (6x^3 - x - 3)^4 (x^2 + 8x + 25)^5$
12) $f(x) = (2x^3 + 7)^5(x^2 - 7x + 4)^3$
13) $f(x) = (4x^3 + 8x + 5)^{-2}(3x^2 + 7)^{1/2}$
14) $f(x) = (13x - 4)^6(15x^2 + 3x + 11)^4$
15) $f(x) = (3x^2 + 10x + 13)^{-4}(2x^4 - 5x^2 + 29)^3$

Teorema: sean $f(x)$ y $\mathrm{g}(x)$, funciones diferenciables tales que $f(x) = [\mathrm{g}(x)]^a$, $\mathrm{g}(x) = u$ y a un número racional cualquiera, si $\mathrm{g}'(x)$ existe, entonces:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[\mathrm{g}(x)]^a = a[\mathrm{g}(x)]^{a-1}g'(x)$$

La derivada de funciones trigonométricas compuestas con una función diferenciables $u(x)$, se obtiene como otra consecuencia directa de la regla de la cadena.

- $\frac{d}{dx}[sen(u)] = \cos(u)\frac{d}{dx}[u]$
- $\frac{d}{dx}[cos(u)] = -\mathrm{sen}(u)\frac{d}{dx}[u]$
- $\frac{d}{dx}[tan(u)] = sec^2(u)\frac{d}{dx}[u]$
- $\frac{d}{dx}[cot(u)] = -csc^2(u)\frac{d}{dx}[u]$
- $\frac{d}{dx}[sec(u)] = sec(u)\tan(u)\frac{d}{dx}[u]$
- $\frac{d}{dx}[csc(u)] = -csc(u)\cot(u)\frac{d}{dx}[u]$

3.9. Ejercicios propuestos de derivadas trigonométricas

Aplicando propiedades de las funciones trigonométricas, encontrar la primera derivada de las siguientes funciones

1) $f(x) = sen(5x^4 - 7x)$

2) $f(x) = -6sen\ 2x$

3) $f(x) = \pi \tan 3x$

4) $f(x) = \sqrt{e} \csc 4x$

5) $f(x) = sen^2\left(\frac{x}{4} - 1\right)$

6) $f(x) = \cos(7x + 3)$

7) $f(x) = \tan[sen\ (x^7)]$

8) $f(x) = \text{cotg}\left[\cos\left(\sqrt{2x}\right)\right]$

9) $f(x) = \tan(x^5) - \cos(9x)$

10) $f(x) = [\cos(11x - 7)]^5$

11) $f(x) = \left[\frac{\tan(8x-5)}{\cos(4x+6)}\right]$

12) $f(x) = \left[\frac{\sec(11x)+\tan\ (11x)}{\text{cotg}(11x)+2x}\right]$

13) $f(x) = sen^2\ (9x + 2)$

14) $f(x) = cos^2\ (12x - 2)$

15) $f(x) = tan^2\ (5x + 9)$

16) $f(x) = sen^{-2}\ (7x + 5)$

17) $f(x) = cos^{-2}\ (2x - 7)$

18) $f(x) = tan^{-2}\ (x + 3)$

19) $f(x) = cos^3\ (12x - 10)$

20) $f(x) = tan^{-\frac{2}{3}}\ (5x)$

21) $f(x) = cotg^{\frac{3}{2}}\ (7x + 2)$

22) $f(x) = cotg^{-\frac{1}{2}}\ (x^2)$

23) $f(x) = sen(-4x^{-3} + 8)^3$

24) $f(x) = sen[\ln(2x - 7)]$

25) $f(x) = sen[tan(5x)]$

26) $f(x) = sen[cotg(7x)]$

27) $f(x) = sen^7[(x^3 + 2)^8]$

28) $f(x) = \cos[ln(2x^4 + 5x)]$

29) $f(x) = cos^2[(-4x + 5)^2]$

30) $f(x) = \tan[ln(7x^2 + 2x)]$

31) $f(x) = \cos\left[cos\left(cos(2x)\right)\right]$

32) $f(x) = cotg(-2x+5)^6$

33) $f(x) = \frac{sen(3x)}{e^{2x}}$

34) $f(x) = \ln[7x^{-3} + 5\,cos(2x)]$

35) $f(x) = \frac{e^{sen(2x)}}{\cos(3x)}$

36) $f(x) = e^{sen(4x)} - 7x$

37) $f(x) = e^{4\cos(x)} + e^{\tan(x)}$

38) $f(x) = e^{arc\,sen(2x)}$

39) $f(x) = e^{5x} sen(7x)$

40) $f(x) = e^{\cos(x)} sen(8x)$

41) $f(x) = e^{\text{sen}(3x)} + e^{\cos(3x)}$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = sen(3x^5 - 2x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[sen(3x^5 - 2x)]$$

Usando la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = cos(3x^5 - 2x)\frac{d}{dx}[3x^5 - 2x]$$

$$f'(x) = (15x^4 - 2)cos(3x^5 - 2x)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \tan[sen(x)]$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[\tan[sen(x)]]$$

Usando la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = sec^2[sen(x)]\frac{d}{dx}[sen(x)]$$

$$f'(x) = sec^2[sen(x)]cos(x)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = sec^3(7x^2)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[sec^3(7x^2)]$$

Aplicamos en tres ocasiones la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = 3sec^2(7x^2)\frac{d}{dx}[\sec(7x^2)]$$

$$f'(x) = 3sec^2(7x^2)[sec(7x^2)tan(7x^2)]\frac{d}{dx}[(7x^2)]$$

$$f'(x) = 3sec^2(7x^2)[sec(7x^2)tan(7x^2)]14\text{x}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = (6x^3 - x^2)^{10}[sen(x)]^5$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[(6x^3 - x^2)^{10}[sen(x)]^5]$$

Usando la regla del producto tenemos:

$$f'(x) = [sen(x)]^5 \frac{d}{dx}[(6x^3 - x^2)^{10}] + (6x^3 - x^2)^{10} \frac{d}{dx}[[sen(x)]^5]$$

Aplicando la regla de la cadena a ambas derivadas

$$f'(x) = [sen(x)]^5 10(6x^3 - x^2)^9 \frac{d}{dx}[(6x^3 - x^2)]$$
$$+ (6x^3 - x^2)^{10} 5[sen(x)]^4 \frac{d}{dx}\big[[sen(x)]\big]$$

$$f'(x) = 10[sen(x)]^5(6x^3 - x^2)^9(18x^2 - 2x)$$
$$+ 5(6x^3 - x^2)^{10}[sen(x)]^4 \cos(x)$$

3.10. Ejercicios propuestos de derivadas de potencias

Encontrar las derivadas de Potencia generalizada de f(x), g(x)

1) $f(x) = (6x^2 - 7x + 9)^2$
2) $f(x) = (3x^2 - 6x + 1)^5$
3) $f(x) = (2x^3 - 7x + 3)^{-3}$
4) $f(x) = (2x^2 - 1)^{3/4}$
5) $f(x) = \sqrt[3]{(7x^2 + 8x + 9)^2}$
6) $f(x) = \sqrt[3]{(5x^2 + 6x + 9)^4}$
7) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 6x^2 + 8x - 1}$
8) $f(x) = (5x^4 + 3x^2 + 1)^{-4}$
9) $f(x) = \sqrt{5 - 3x^2}$
10) $f(x) = (7 - 10x)^3$
11) $f(x) = (4x^3 + 5)^4$
12) $(4x - 2)^3$
13) $f(x) = (5x - 1)^{-1}$
14) $f(x) = (2x - 1)^{-2}$
15) $f(x) = (4x + 3)^3$
16) $f(x) = (x + 1)^{1/3}$

17) $f(x) = (2x - 3)^2$

18) $f(x) = (3x^2 - 5)^2$

19) $f(x) = (3x - 7)^3$

20) $f(x) = (5x^3 + 4x^2 - 3x + 7)^2$

21) $f(x) = (6x^3 - x - 3)^4$

22) $f(x) = (x^2 + 8x + 25)^5$

23) $f(x) = (2x^3 + 7)^5$

24) $f(x) = (x^2 - 7x + 4)^3$

25) $f(x) = (4x^3 + 8x + 5)^{-2}$

26) $f(x) = (3x^2 + 7)^{1/2}$

27) $f(x) = (13x - 4)^6$

28) $f(x) = (15x^2 + 3x + 11)^4$

29) $f(x) = (3x^2 + 10x + 13)^{-4}$

30) $f(x) = (2x^4 - 5x^2 + 29)^3$

Teorema: sea $f(x) = \ln|x|$, $x > 0$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$

Teorema: sea $f(x) = \ln|u|$, donde u, es una función positiva y diferenciables de x, entonces $f'(x) = \frac{1}{u}u'$ o bien $\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \ln[x^7 - 2]$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[\ln[x^7 - 2]]$$

Usando la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{x^7 - 2}\ \frac{d}{dx}[x^7 - 2]$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^7 - 2}\,[7x^6]$$

$$f'(x) = \frac{7x^6}{x^7 - 2}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = sen(x^3)\ln[x^5]$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[sen(x^3)\ln[x^5]]$$

Usando la regla del producto tenemos:

$$f'(x) = \ln[x^5]\frac{d}{dx}[sen(x^3)] + sen(x^3)\frac{d}{dx}[\ln[x^5]]$$

Usando la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = \ln[x^5]\,cos(x^3)\frac{d}{dx}[\,(x^3)] + sen(x^3)\frac{1}{x^5}\frac{d}{dx}[x^5]$$

$$f'(x) = \ln[x^5]\,cos(x^3)3x^2 + sen(x^3)\frac{1}{x^5}5x^4$$

$$f'(x) = 3x^2\ln[x^5]\,cos(x^3) + \frac{5}{x}sen(x^3)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \ln[3X - 5]^4$

$$f´(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[\ln[3X-5]^4]$$

Previo a derivar podemos emplear las propiedades de los logaritmos y la función quedaría de la forma:

$$f(x) = 4\ln(3x-5)$$

$$f´(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = 4\frac{d}{dx}[\ln(3x-5)]$$

Usando la regla de la cadena tenemos:

$$f´(x) = 4\frac{1}{3x-5}\frac{d}{dx}[3x-5]$$

$$f´(x) = 4\frac{3}{3x-5} = \frac{12}{3x-5}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \ln[(x-5)(7x+2)(3-2x)]$

$$f´(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[\ln[(x-5)(7x+2)(3-2x)]]$$

Previo a derivar podemos emplear las propiedades de los logaritmos y la función quedaría de la forma:

$$f(x) = \ln(x-5) + \ln(7x+2) + \ln(3-2x)$$

$$f´(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[\ln(x-5)] + \frac{d}{dx}[\ln(7x+2)] + \frac{d}{dx}[\ln(3-2x)]$$

Usando la derivada para la suma de funciones y la regla de la cadena tenemos:

$$f´(x) = \frac{1}{x-5}\frac{d}{dx}[x-5] + \frac{1}{7x+2}\frac{d}{dx}[7x+2] + \frac{1}{3-2x}\frac{d}{dx}[3-2x]$$

$$f´(x) = \frac{1}{x-5}(1) + \frac{1}{7x+2}(7) + \frac{1}{3-2x}(-2)$$

$$f´(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{7}{7x+2} - \frac{2}{3-2x}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \ln[(1-x^2)^3(x-8)^2]$

$$f´(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[\ln[(1-x^2)^3(x-8)^2]]$$

Previo a derivar podemos emplear las propiedades de los logaritmos y la función quedaría de la forma:

$$f(x) = \ln(1-x^2)^3 + \ln(x-8)^2$$

$$f´(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = 3\frac{d}{dx}[\ln(1-x^2)] + 2\frac{d}{dx}[\ln(x-8)]$$

Usando la derivada para la suma de funciones y la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = 3\frac{1}{1-x^2}\frac{d}{dx}[1-x^2] + 2\frac{1}{x-8}\frac{d}{dx}[x-8]$$

$$f'(x) = \frac{3}{1-x^2}(-2x) + \frac{2}{x-8}(1)$$

$$f'(x) = -\frac{6x}{1-x^2} + \frac{2}{x-8}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = [\ln(4x^2-8)]^3$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[[\ln(4x^2-8)]^3]$$

Usando la derivada para la suma de funciones y la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = 3[\ln(4x^2-8)]^2\frac{d}{dx}[\ln(4x^2-8)]$$

$$f'(x) = 3[\ln(4x^2-8)]^2\frac{1}{4x^2-8}\frac{d}{dx}[4x^2-8]$$

$$f'(x) = 3[\ln(4x^2-8)]^2\frac{1}{4x^2-8}(8x)$$

$$f'(x) = \frac{24x}{4x^2-8}[\ln(4x^2-8)]^2$$

Teorema: sea $f(x) = \log_b u$, donde u, es una función de x diferenciables, entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{u}(\log_b e)\frac{d}{dx}[u]$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \log(4x - 5)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[\log(4x - 5)]$$

Usando la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{4x - 5}(\log[e])\frac{d}{dx}[\,(4x - 5)]$$

$$f'(x) = \frac{4x}{4x - 5}(\log[e])$$

3.11. Derivadas implícitas.

Se dice que una función está definida explícitamente cuando se da de la forma y = *f (x)*; esto es cuando se da y despejada en términos de *x*. En cambio, sí en una ecuación, como, por ejemplo, $2yx = \cos 3y$, existe una función tal que y = $f(x)$, se dice que y es una función que está definida implícitamente por la ecuación. Una ecuación en x e y puede definir a más de una función implícita.

En muchas ocasiones no se puede resolver explícitamente una función dada en forma implícita. Es posible hallar la derivada de una función expresada implícitamente, sin necesidad de transformarla en su equivalente explícita.

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano y de radio R esta dada por $x^2 + y^2 = R^2$, es una función que se encuentra definida de forma implícita, y en muchas funciones que se encuentran definidas en forma implícita no se la puede expresar en forma explícita, es decir para una variable dependiente y en términos de una variable independiente x, y para encontrar la derivada de y respecto a x se empleará el proceso llamado derivación implícita

3.11.1. Proceso de diferenciación implícita:

i. Se supone $y = f(x)$
ii. Se diferencia en ambos miembros de la igualdad, con respecto a la variable independiente, aplicando la operación $\frac{d}{dx}$
iii. Se despeja $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación resultante

Ejemplo: En los siguientes ejercicios, hallar $\frac{dy}{dx}$ por medio del proceso de diferenciación implícita.

A. $x^2 + y^2 = 16$

Solución:

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(16)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

B. $x^3 + y^3 = 8xy$

Solución:

$$x^3 + y^3 = 8xy$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(8xy)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8y + 8x\frac{dy}{dx}$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 8x\frac{dy}{dx} = 8y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 8x) = 8y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$$

C. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

Solución:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow x^{-1} + y^{-1} = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-1} + y^{-1}) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$-x^{-2} - y^{-2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} = x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-2}}{y^{-2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$$

D. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

Solución:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

Ejemplo: Sea la función: $3x^5 - 2x^3 + x = y^3 - 3y$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

Solución: el ejemplo es un caso en el cual se puede expresar la función en términos de x de un solo lado de la igualdad y los términos en y del otro lado de la expresión, es decir $F(x) = G(y)$

$$F(x) = 3x^5 - 2x^3 + x$$

$$G(y) = y^3 - 3y$$

Por lo tanto, para los valores de x, para los cuales la función es diferenciable tenemos:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}G(y)$$

$$\frac{d}{dx}(x^5 - 2x^3 + x\,) = \frac{d}{dx}(y^3 - 3y)$$

Usando la regla de la cadena del lado derecho de la función, tenemos:

$$5x^4 - 6x^2 + 1 = 3y^2\frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx}$$

Sacamos factor común $\frac{dy}{dx}$ del lado derecho de la función, tenemos:

$$5x^4 - 6x^2 + 1 = (3y^2 - 3)\frac{dy}{dx}$$

y despejamos $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 - 6x^2 + 1}{3y^2 - 3}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $5x^3y^2 - 4xy^4 = 2 - y$

Sea f(x) = y, función diferenciable para los valores de x, Aplicando la regla del producto de funciones para las diferenciación tenemos:

$$5\frac{d}{dx}(x^3y^2) - 4\frac{d}{dx}(xy^4) = \frac{d}{dx}(2) - \frac{d}{dx}(y)$$

$$5y^2\frac{d}{dx}(x^3) + 5x^3\frac{d}{dx}(y^2) - 4y^4\frac{d}{dx}(x) - 4x\frac{d}{dx}(y^4) = \frac{dy}{dx}$$

Usando la regla de la cadena del lado izquierdo de la función, tenemos:

$$5y^2(3x^2) + 5x^3(2y)\frac{dy}{dx} - 4y^4(1) - 4xy^3\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Sacamos factor común $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ del lado derecho de la función, tenemos:

$$15x^2y^2 - 4y^4 = -10x^3y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + 4xy^3\frac{dy}{dx}$$

y despejamos $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^2y^2 - 4y^4}{1 + 4xy^3 - 10x^3y}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $2(x+y)^2 + 3(x-y)^3 = x^3 + y^3$

Derivado de forma implícita (además aplicando regla de la cadena) tenemos:

$$2\frac{d}{dx}[(x+y)^2]+3\frac{d}{dx}[(x-y)^3]=\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(y^3)$$

$$4(x+y)\frac{d}{dx}(x+y)+9(x-y)^2\frac{d}{dx}(x-y)=3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$4(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+9(x-y)^2\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}$$

Agrupamos los términos $\frac{dy}{dx}$ *del lado izquierdo de la función, tenemos:*

$$[4(x+y)-9(x-y)^2-3y^2]\frac{dy}{dx}=3x^2-4(x+y)-+9(x-y)^2$$

$y\ despejamos\ \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-4(x+y)-9(x-y)^2}{[4(x+y)-+9(x-y)^2-3y^2]}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $-5xcos(y)+3y\tan{(x)}=1$

Derivado de forma implícita (además aplicando regla de la cadena) tenemos:

$$-5\frac{d}{dx}[xcos(y)] + 3\frac{d}{dx}[y\tan(x)] = \frac{d}{dx}(1)$$

$$-5cos(y)\frac{d}{dx}(x) - 5x\frac{d}{dx}\left(cos(y)\right) + 3\tan(x)\frac{d}{dx}(y) + 3y\frac{d}{dx}(\tan(x))$$
$$= 0$$

$$-5cos(y)(1) - 5x\left(-sen(y)\right)\frac{dy}{dx} + 3\tan(x)\frac{dy}{dx} + 3ysec^2(x) = 0$$

Agrupamos los términos $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ del lado izquierdo de la función, tenemos:

$$[5xsen(y) + 3\tan(x)]\frac{dy}{dx} = 5cos(y) - 3ysec^2(x)$$

y despejamos $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5cos(y) - 3ysec^2(x)}{5xsen(y) + 3\tan(x)}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $\boldsymbol{x + \sqrt{x * y} + y = 2}$

$$x + x^{\frac{1}{2}} * y^{\frac{1}{2}} + y = 2$$

$$\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} * y^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}2$$

$$1 + \left(y^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1+\frac{1y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{dy}{dx}=-1-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+1\right)=-1-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(\frac{-1-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{y}+\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\left(\frac{2\sqrt{xx}+y}{2\sqrt{xy}+x}\right)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $\boldsymbol{xy}=\sqrt{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$

$$xy=(x+y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(x+y)^{\frac{1}{2}}$$

$$y\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(y)=\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$y + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(x+y)^{-\frac{1}{2}}}{2} * \left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d(y)}{dx}\right]$$

$$y + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(x+y)^{-\frac{1}{2}}}{2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{(x+y)^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$y - \frac{(x+y)^{-\frac{1}{2}}}{2} = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{(x+y)^{-\frac{1}{2}}}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{2y-1}{2\sqrt{x+y}} = \frac{dy}{dx}\left(x + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)$$

$$\frac{\frac{2y-1}{2\sqrt{x+y}}}{\frac{2x\sqrt{x+y}+1}{2\sqrt{x+y}}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{2y-1}{2x\sqrt{x+y}+1} = \frac{dy}{dx}$$

3.11.2. Ejercicios propuestos de derivadas implícitas

Encontrar la derivada $\frac{dy}{dx}$, de las siguientes funciones:

1) $4x^2 + 5y^3 = 39$
2) $8x + 5y = 21$
3) $x^3y^5 = 9$
4) $3x^2 - 8y^3 = 49$
5) $35x^3 + 7y^2 = 106$
6) $8x^3 - y^2 = 45$
7) $2y^3 - 5y^2 + 7x^5 = 102$
8) $14x^2 + 9xy + y^2 = 53$
9) $4x^5 + x^3y + xy^2 = 67$
10) $(17y^2 - 18) = 8x^4$

11) $(x^3 + 5y)^2 = x^4$

12) $3x^2 - xy - 5y = 49$

13) $x^3y^7 = 106$

14) $2x^4 - 5y^2 = 29$

15) $x^5 - 6y^3 = 4$

16) $5x^2 + 9y^4 = 121$

17) $13x^2 - 4y^3 = 27$

18) $(5y^4 - 6x)^3 = 18x^2$

19) $6x^3 + 15y^3 = 91$

20) $3x + 7y = 11$

21) $x^2y^4 = 49$

22) $8x^3 - 3y^6 = 49$

23) $5x^3 + 17y^2 = 16$

24) $9x^3 - 3y^2 = 45$

25) $y^3 - 15y^2 + x^5 = 106$

26) $4x^4 + 6xy + 2y^2 = 3$

27) $4x^8 + x^3y^3 + xy^2 = 7$

28) $(7y^2 - 8) = 3x^4$

29) $(2x^3 + y)^2 = 2x^4$

30) $13x^2 - xy - 15y = 149$

31) $2x^3y^7 = 16$

32) $22x^4 - 15y^2 = 129$

33) $3x^5 - 9y^3 = 444$

34) $25x^2 + 2y^4 = 1221$

35) $23x^2 - 14y^3 = 227$

36) $(y^4 - 23x)^3 = 9x^2$

37) $y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$

38) $(2y^2 + 3)^3 = 5x^3 - 3x$

39) $x^4 - 3xy + y^4 = 1$

40) $3x^2y - 6xy^2 + 2y^4 = 0$

3.12. Derivadas de orden superior.

La derivada de una función $f(x)$, es también una función que generalmente puede derivarse

Sea $f(x)$ una función y $f'(x)$ su derivada; entonces, si existe la derivada de $f'(x)$ se llama la segunda derivada de $f(x)$ y se simboliza como: $f''(x)$ y se lee f *segunda*.

Si n es un entero positivo mayor que 2 la $n-ésima$ derivada de una función, es la derivada de la derivada $n-1$ de la función y se denota como:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = Dx^n f$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = \frac{5x}{1-5x}$

Aplicando la regla del cociente tenemos:

$$f'(x) = \frac{(1-5x)\frac{d}{dx}(5x) - 5x\frac{d}{dx}(1-5x)}{(1-5x)^2} = \frac{5(1-5x)+25x}{(1-5x)^2}$$

$$= \frac{5}{(1-5x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1-5x)^2\frac{d}{dx}(5) - 5\frac{d}{dx}((1-5x)^2)}{(1-5x)^4} = \frac{0-5(2)(1-5x)(-5)}{(1-5x)^4}$$

$$= \frac{50}{(1-5x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(1-5x)^3 \frac{d}{dx}(50) - 50\frac{d}{dx}((1-5x)^3)}{(1-5x)^6}$$

$$= \frac{0 - 50(3)(1-5x)^2(-5)}{(1-5x)^6} = \frac{750}{(1-5x)^4}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{5^n n!}{(1-5x)^{n+1}}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = sen(x) - 3x^3$

La primera derivada respecto a x, tenemos:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\big(sen(x)\big) - \frac{d}{dx}(3x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = cos(x) - 9x^2$$

Si volvemos a derivar, encontramos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -sen(x) - 18x$$

Si volvemos a derivar, encontramos la tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = -cos(x) - 18$$

Si volvemos a derivar, encontramos la cuarta derivada:

$$f''''(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = sen(x)$$

Ejemplo: Encontrar la primera y segunda derivada de: $\boldsymbol{f(x) = 2x^5 - 2x^3}$

$$f'(x) = 2\frac{d}{dx}(x^5) - 2\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$f'(x) = 2(5x^4) - 2(3x^2)$$

$$f'(x) = 10x^4 - 6x^2 \longrightarrow \text{Primera}$$

$$f''(x) = 10\frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$f''(x) = 10(4x^3) - 6(2x) \longrightarrow \text{Segunda derivada}$$

$$f''(x) = 40x^3 - 12x$$

Ejemplo: Encontrar la primera y segunda derivada de:$\boldsymbol{f(x) = \cos(5x - 3)}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos(5x - 3)$$

$$f'(x) = -sen(5x - 3)\frac{d}{dx}(5x - 3) \longrightarrow \text{Primera}$$

$$f'(x) = -5sen(5x - 3)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-5sen(5x-3)\right)$$

$$f''(x) = -5\frac{d}{dx}\left(sen(5x-3)\right)$$

$$f''(x) = -5\left[\cos(5x-3)\right]$$

$$f''(x) = -5[5\cos(5x-3)]$$

$$f''(x) = -25\cos(5x-3) \quad \longrightarrow \quad \text{Segunda}$$

Ejemplo: Encontrar la primera y segunda derivada de: $\boldsymbol{f(x) = sen\,(3x-2)}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(sen(3x-2)\right)$$

$$f'(x) = \cos(3x-2)\frac{d}{dx}(3x-2) \quad \longrightarrow \quad \text{Primera}$$

$$f'(x) = 3\cos(3x-2)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(3\cos(3x-2))$$

$$f''(x) = 3\frac{d}{dx}\cos(3x-2)$$

$$f''(x) = 3\left[-sen(3x-2)\frac{d}{dx}(3x-2)\right] \quad \longrightarrow \quad \text{Segunda}$$

$$f''(x) = 3\left(-3\,sen\,(3x-2)\right)$$

$f''(x) = -9\,sen(3x - 2)$

Ejemplo: Encontrar la primera y segunda derivada de: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{4x^2 - 5}}$

$$f(x) = (4x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(4x^2 - 5)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{4x^2 - 5}}\right)\left(4(2x)\right) \longrightarrow \text{Primera}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 - 5}}$$

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 5}}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 5}}\right)$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 5}\,\frac{d}{dx}(4x) - (4x)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{4x^2 - 5}\right)}{(\sqrt{4x^2 - 5})^2}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 5}\,(4) - (4x)[\frac{1}{2}(4x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(4x^2 - 5)]}{(4x^2 - 5)}$$

$$f''(x) = \frac{4\sqrt{4x^2-5} - 4x\left[\frac{1}{2\sqrt{4x^2-5}}(8x)\right]}{(4x^2-5)}$$

$$f''(x) = \frac{4\sqrt{4x^2-5} - \frac{16x^2}{\sqrt{4x^2-5}}}{(4x^2-5)}$$

$$f''(x) = \frac{4(4x^2-5) - 16x^2}{(4x^2-5)\sqrt{4x^2-5}}$$

$$f''(x) = \frac{16x^2 - 20 - 16x^2}{\sqrt{4x^2-5}\,(4x^2-5)}$$

$$f''(x) = -\frac{20}{\sqrt{4x^2-5}\,(4x^2-5)} \longrightarrow$$ Segunda

3.13. Ejercicios propuestos de derivadas orden superior

Encontrar la primera y segunda derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$
2) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x$
3) $f(x) = x^8 + 2x^6 - 7x + 15$
4) $f(x) = 12x^2 - 18x + 5$
5) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 13x - 27$
6) $f(x) = (5x - 9)^3$
7) $f(x) = (6x^2 - 4)(5x + 7)$
8) $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2$
9) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
10) $f(x) = 2x^9 - 7x^6 + 3x^4 - 5x^2 + 21$
11) $f(x) = (7 - 10x)^3$
12) $f(x) = (4x + 5)^4$
13) $f(x) = (4x - 2)^3$

14) $f(x) = (4x + 3)^5$

15) $f(x) = (x + 1)^5$

16) $f(x) =(2x - 3)^2$

17) $f(x) = (3x^2 - 5)^2$

18) $f(x) = (3x - 7)^3$

19) $f(x)= (6x^3+5x^2 - 3) (6x + 3)$

20) $f(x) = 8x^3 (5x - 2)$

21) $f(x) =(5x^2 - x + 5) (4x + 3)$

22) $f(x) =(2x + 5) (x^3 - 3x^2 + x)$

23) $f(x) = (8x^3 + x^2 - x +3) (6x^2 + 3)$

24) $f(x) =(7x^4 + 4x^3 - 5) (x^5 - 2)$

25) $f(x) = (3x^3 + 2x^2 + 5)(3x - 4)$

26) $f(x)= (7x^4 + 8x^2)(2x^2 + 5x)$

27) $f(x)= (9x + 5)(3x^2 + 7x - 2)$

28) $f(x) = (6x^4 - 7x^2)(3x^3 + 2x^2)$

29) $f(x) = (2x^4 - 5x - 6)(6x^3 - 4x^2 + 2)$

30) $f(x) = 6x3 (5x^2 + 4x + 2)$

31) $f(x) = (x^6 + 10)(x^5 - 8)$

32) $f(x) = (6x^2 - 7)(3x^4)$

33) $f(x) = (5x^3 + 8x^2)(4x^5 - 2)$

34) $f(x) = (2x^3 - 4x^2 + 7x)(x^2 - 9)$

35) $f(x) = (x^2 + 2x)(6x^2 - 7)$

36) $f(x) = 7x^3 (4x + 9)$

37) $f(x) = 10x^4 (x^2 + 8x + 25)$

38) $f(x) = (4x^3 - 11)(3x^2 + 7)$

39) $F(x) = 25x^5 + 12x^4 - 3x^2 + 25$

40) $F(x) = 6x^7 + 13x^5 - 7x^3 + x$

41) $F(x) = 9x^6 - x^4 + 7x^2 + 42x$

42)$F(x) = 14x^5 - 54x^2 + 30$

43)$F(x) = 23x^3 - 54x^2 + 100x$

44) $F(x)= 6x^9 - 12x^7 + 3x^5 - 15x^3 - 100$

45)$F(x) = 9x^{11} + 12x^7 - 3x^4 + 12$

3.14. Derivada logarítmica

En ocasiones se encuentra una función $y = f(x)$, que implica productos, cocientes y/o potencias el cuál se desea encontrar la derivada de la función, para lo cual existe la técnica llamada ***derivación logarítmica***, que ayuda a simplificar el proceso de derivación, la cual consiste en:

a) Obtener el logaritmo natural a ambos lados de $y = f(x)$

b) Se aplica las propiedades los logaritmos a $\ln[f(x)]$, para simplificar la expresión.

c) Se deriva a ambos lados de la expresión aplicando la técnica de la derivación implícita.

Ejemplo: Sea la función: $y = x^{5x}$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

Sacamos el logaritmo natural a ambos lados de la expresión:

$$\ln y = \ln(x^{5x})$$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos y el exponente del argumento pasa a multiplicar

$$\ln y = 5x\ln(x)$$

Realizamos el proceso de dedicación implícita, aplicamos la derivada de un producto de funciones:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(x)\frac{d}{dx}(5x) + 5x\frac{d}{dx}[\ln(x)]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 5\ln(x) + 5x\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 5\ln(x) + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = y[5\ln(x) + 5\,]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{5x}[5\ln(x) + 5\,]$$

Ejemplo: Sea la función: $y = \frac{(x^7-2x)^3(5x^2-3)^{\frac{3}{6}}}{\sqrt[5]{2x^4-x^3}}$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

$$\ln(y) = \ln\left[\frac{(x^7-2x)^3(5x^2-3)^{\frac{3}{6}}}{\sqrt[5]{2x^4-x^3}}\right]$$

$$\ln(y) = \ln[(x^7 - 2x)^3] + \ln\left[(5x^2 - 3)^{\frac{3}{6}}\right] - \ln\left[\sqrt[5]{2x^4 - x^3}\right]$$

$$\ln(y) = 3\ln[(x^7 - 2x)] + \frac{3}{6}\ln[5x^2 - 3] - \frac{1}{5}\ln[2x^4 - x^3]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^7 - 2x}\frac{d}{dx}(x^7 - 2x) + \frac{3}{6(5x^2 - 3)}\frac{d}{dx}(5x^2 - 3)$$
$$- \frac{1}{5(2x^4 - x^3)}\frac{d}{dx}(2x^4 - x^3)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3(7x^6 - 2)}{x^7 - 2x} + \frac{10x}{2(5x^2 - 3)} - \frac{8x^3 - 3x^2}{5(2x^4 - x^3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{3(7x^6 - 2)}{x^7 - 2x} + \frac{5x}{5x^2 - 3} - \frac{8x^3 - 3x^2}{5(2x^4 - x^3)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{(x^7 - 2x)^3(5x^2 - 3)^{\frac{3}{6}}}{\sqrt[5]{2x^4 - x^3}}\right]\left[\frac{3(7x^6 - 2)}{x^7 - 2x} + \frac{5x}{5x^2 - 3} - \frac{8x^3 - 3x^2}{5(2x^4 - x^3)}\right]$$

Ejemplo: Sea la función: y $= x^{\sqrt{x}}$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

$$\ln(y) = \ln\left[x^{\sqrt{x}}\right]$$

$$\ln(y) = \sqrt{x}\ln[x]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln[x]\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\frac{d}{dx}(\ln[x])$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln[x]\frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right) + \sqrt{x}\,\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln[x]\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\ln[x]\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sqrt{x}}\left[\frac{\ln[x]}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = 3^{2x^2} * \sqrt{x}}$

$$f(x) = y = 3^{2x^2} * \sqrt{x}$$

$$ln(y) = \ln\left(3^{2x^2} * \sqrt{x}\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left((2x^2)(\ln(3)) * \frac{1}{2}\ln\,(x\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(3)\left(\frac{d}{dx}(2x^2) + 2x^2\frac{d}{dx}(\ln(3)) * \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln(3)(4x) + \frac{1}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3^{2x^2} * \left(x^{\frac{1}{2}-1}\right)(8x^2\ln(3) + 1)}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3^{2x^2} * (8x^2\ln(3) + 1)}{2\sqrt{x}} \qquad \to 3^{2x^2} = 9^{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9^{x^2} * (8x^2 \ln(3) + 9^{x^2})}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}}$

$$y = f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$\ln(y) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{x^2}\right)$$

$$\ln(y) = \ln(e^{2x}) - \ln(x^2)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(x) - 2\frac{d}{dx}(\ln(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(2 - \frac{2}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{x^2}\left(\frac{2x-2}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x(e^{2x}) - 2e^{2x}}{x^3}\right)$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $f(x) = x^{3x^3-3x}$

$$y = f(x) = x^{3x^3-3x}$$

$$In(y) = In\left(x^{3x^3-3x}\right)$$

$$In(y) = x^{3x^3-3x}\left(In(x)\right)$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} = (3x^3 - 3x)\frac{d}{dx}\,\big(In(x)\big) + In(x)\frac{d}{dx}(3x^3 - 3x)$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^3 - 3x)}{x} + In(x)(9x^2 - 3)$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{x(3x^2 - 3)}{x} + In(x)(\,9x^2 - 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\,[\,3x^2 - 3 + (9x^2 - 3)In(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^3-3x}\,[3x^2 - 3 + \big(9x^2\,In(x) - 3\,In(x)\big)$$

$$\frac{dy}{dx} = \big[\,3x^{3x^2-3x+2} - 3^{3x^3-3x} + 9x^{3x^3-3x+2} - 3x^{3x^3-3x}In(x)\big]$$

3.15. Ejercicios propuestos de derivadas logarítmicas

Aplicando propiedades de las funciones logarítmicas, encontrar la primera derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \ln\,(x^4)$
2) $f(x) = \ln\,(x^{-7})$
3) $f(x) = 7\ln\,(x^5)$
4) $f(x) = 11\ln\,\left(x^{\frac{3}{7}}\right)$
5) $f(x) = \frac{7}{5}\ln\,(x^{\frac{3}{11}})$
6) $f(x) = \ln\!\left(\sqrt{x^9}\,\right)$
7) $f(x) = \ln\!\left(\sqrt[3]{3x^4}\,\right)$
8) $f(x) = 7\,\ln\!\left(\sqrt[7]{x^8}\,\right)$
9) $f(x) = \ln\,(6x^5 + 11x^3 - 12x)$
10) $f(x) = \ln\,(x^3 - 5x)$
11) $f(x) = \ln(4x^4 + x^{-5} + 2e^x - 2)$

12) $f(x) = \ln(7x^6 + 3x^{-7} + 5x^4 + 8e^x - 11)$

13) $f(x) = (3x + 7)\ln(x - 8)$

14) $f(x) = (x^4 + x^2 - x^{-3} + 11)\ln(3x^2 - 12)$

15) $f(x) = (7x^5 + 13x^3 + x + 1)\ln(7x^6 - x + 7)$

16) $f(x) = (-3x^7 + 10x^2 + 3)\ln(x^6 - 7x - 3)$

17) $f(x) = e^x + 11^x + \ln(x) + 7x^2 - 2x$

18) $f(x) = \frac{\ln(4x)}{e^x}$

19) $f(x) = e^x\ln(5x)$

20) $f(x) = e^x - 12^x + \ln(x) - x^4 - 6x$

21) $f(x) = [\ln(5x^4 + 2x^3 + 3x^{-2} + 6)]^6$

22) $f(x) = [\ln(4x^6 + 11x^4 + 4x^{-5} + 7)]^{-5}$

23) $f(x) = \left[\ln(2x^3 + 4x^2 + \frac{7}{5}x^{-5} + 9x - 1)\right]^5$

24) $f(x) = [\ln(x^3 + x^2 + x^{-5} + x - 1)]^7$

25) $f(x) = [\ln(7x^4 + 5x^3 + 3x^{-7} + 2x + 12)]^4$

3.16. Derivada exponencial

Teorema: Sea la función: f(x) = y = e^u, donde u, es una función de x diferenciable, entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo: Sea la función: y $= e^{5x^3} - 3x$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^{5x^3}\right] - \frac{d}{dx}(3x)$, donde y $= e^u$, y u $= 5x^3$

$$\frac{dy}{dx} = e^u \frac{d}{dx}[u] - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{5x^3} \frac{d}{dx}[5x^3] - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 e^{5x^3} - 3$$

Ejemplo: Sea la función: y $= \frac{\ln(x^2-5)}{e^{x-2}}$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

Aplicando la regla del cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{x-2})\frac{d}{dx}[\ln(x^2-5)] - (\ln(x^2-5))\frac{d}{dx}[e^{x-2}]}{(e^{x-2})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{e^{x-2}}{x^2-5}\frac{d}{dx}[x^2-5] - e^{x-2}\ln(x^2-5)\frac{d}{dx}[x-2]}{e^{2x-4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x-2} - (x^2-5)\,e^{x-2}\ln(x^2-5)}{(x^2-5)e^{2x-4}}$$

Teorema: Sea la función: f(x) = y $= a^u$, donde $a > 0$, $a \neq 1$ y u, es una función de x diferenciable, entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = a^u \ln(a) \frac{du}{dx}$$

Ejemplo: Sea la función: $y = 7^{x^2 - x}$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 7^{x^2-x} \ln(7) \frac{d}{dx}(x^2 - x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7^{x^2-x} \ln(7)\,(14x - 1)$$

Ejemplo: Sea la función: $e^{xy} = x - y$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(e^{xy}) = \frac{d}{dx}(x - y)$$

$$e^{xy} \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y)$$

$$e^{xy}\left[x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x)\right] = 1 - 1\frac{dy}{dx}$$

$$e^{xy}\left[x\frac{dy}{dx} + y\right] = 1 - \frac{dy}{dx} \Rightarrow xe^{xy}\frac{dy}{dx} + ye^{xy} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$xe^{xy}\frac{dy}{dx} + ye^{xy} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$xe^{xy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 - ye^{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - ye^{xy}}{1 + xe^{xy}}$$

3.17. Ejercicios propuestos de derivadas exponenciales

Aplicando propiedades de las funciones exponenciales, encontrar la primera derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = e^{3x}$

2) $f(x) = e^{11x}$

3) $f(x) = e^{-7x}$

4) $f(x) = e^{-11x}$

5) $f(x) = e^{\frac{5x}{7}}$

6) $f(x) = 15e^{3x}$

7) $f(x) = 3x^5 e^{x^7}$

8) $f(x) = \frac{\sqrt{e^{6x}}}{e^{5x}}$

9) $f(x) = \sqrt{\frac{e^x+15}{e^x}}$

10) $f(x) = (5x^4 e^{5x})^7$

11) $f(x) = 3xe^x$

12) $f(x) = \frac{e^x}{5x}$

13) $f(x) = \frac{9x}{e^x}$

14) $f(x) = \frac{3x^4}{e^x}$

15) $f(x) = \frac{5x^3+18}{e^x}$

16) $f(x) = 2e^x(3x^2 + 12x)$

17) $f(x) = \frac{e^{7x}}{x^4+9}$

18) $f(x) = \frac{e^{5x}-5}{x^2-4}$

19) $f(x) = (e^{9x} + 2x^7)^4$

20) $f(x) = e^{(x^4+x^3+x^2-7)^4}$

21) $f(x) = e^{(3x^5-6x^2-5x)^6}$

22) $f(x) = e^{\left(\frac{2}{9}x^7-16x^3+\frac{5}{7}x^2-9x+11\right)^5}$

23) $f(x) = e^{3x} - 2x^e + x^{3x}$

24) $f(x) = (\pi + 17)^x$

25) $f(x) = e^{-2x}(11x^5 + 12x^3 - x^{-2} + 23)$

3.18. Derivada de funciones inversas

Teorema: Sea la función: f(x) estrictamente creciente y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si existe f´(x) y es una función no nula para cualquier valor de x, que pertenece al intervalo abierto de (a, b), entonces la derivada de $g'(y)$ también existe y es no nula en el mismo intervalo, entoces:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ejemplo: Sea la función: $y = \frac{x-2}{x+1}$, encontrar $\frac{d}{dx}[f(x)^{-1}]$

Aplicando el teorema: Aplicando la regla del cociente de funciones:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{(x+1)\frac{dy}{dx}(x-2) - (x-2)\frac{dy}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{(x+1) - (x-2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)^{-1}] = \frac{1}{f'(x)} = \frac{(x+1)^2}{3}$$

Para encontrar $f(x)^{-1}$:

$$y(x+1) = (x-2) \Rightarrow xy + y = x - 2 \Rightarrow xy - x = -2 - y$$

$$x(y-1) = -(y+2) \Leftrightarrow x = \frac{-(y+2)}{-(1-y)}$$

Por lo tanto: $f(y)^{-1} = \frac{y+2}{1-y}$

Aplicando la regla del cociente de funciones:

$$\frac{d}{dy}[f(y)^{-1}] = \frac{(1-y)\frac{d}{dy}(y+2) - (y+2)\frac{d}{dy}(1-y)}{(1-y)^2}$$

$$\frac{d}{dy}[f(y)^{-1}] = \frac{(1-y) - (y+2)\,(-1)}{(1-y)^2} = \frac{3}{(1-y)^2}$$

$Pero\ como\ y = \frac{x-2}{x+1}$

$$\frac{d}{dy}[f(y)^{-1}] = \frac{3}{\left(1 - \frac{x-2}{x+1}\right)^2} = \frac{3}{\left(\frac{(x+1)-(x-2)}{x+1}\right)^2} = \frac{3(x+1)^2}{9}$$

$$\frac{d}{dy}[f(y)^{-1}] = \frac{(x+1)^2}{3}$$

Ejemplo: Sea la función: f(x) $= arcsen(x)$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

Solución: Si f(x) = y $= arcsen(x)$, entonces: x $= sen(y) = f^{-1}(y)$,

$$\frac{d}{dx}[f(x)^{-1}] = \frac{1}{f'(x)}$$

$$[sen(y)'] = \frac{1}{\frac{d}{dx}[arcsen(x)]} \Rightarrow \frac{d}{dx}[arcsen(x)] = \frac{1}{sen(y)'}$$

$$\frac{d}{dx}[arcsen(x)] = \frac{1}{cos(y)}$$

Reemplazamos la identidad trigonométrica:

$$sen^2(y) + cos^2(y) = 1 \Rightarrow \cos(y) = \sqrt{1 - sen^2(y)}$$

$$\frac{d}{dx}[arcsen(x)] = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(y)}}$$

como: $\mathrm{x} = sen(y)$

$$\frac{d}{dx}[arcsen(x)] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ejemplo: Sea la función: $\mathrm{f(x)} = arcos(x)$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

Solución: Si $\mathrm{f(x)} = \mathrm{y} = arcos(x)$, entonces: $\mathrm{x} = cos(y) = f^{-1}(y)$,

$$\frac{d}{dx}[f(x)^{-1}] = \frac{1}{f'(x)}$$

$$[sen(y)'] = \frac{1}{\frac{d}{dx}[arcos(x)]} \Rightarrow \frac{d}{dx}[arcos(x)] = \frac{1}{cos(y)'}$$

$$\frac{d}{dx}[arcos(x)] = -\frac{1}{sen(y)}$$

Reemplazamos la identidad trigonométrica:

$$sen^2(y) + cos^2(y) = 1 \Rightarrow \mathrm{sen}(y) = \sqrt{1 - cos^2(y)}$$

$$\frac{d}{dx}[arcos(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2(y)}}$$

como: $x = cos(y)$

$$\frac{d}{dx}[arcos(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejemplo: Sea la función: $f(x) = arctan(x)$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

Solución: Si $f(x) = y = arctan(x)$, entonces: $x = tan(y) = f^{-1}(y)$,

$$\frac{d}{dx}[f(x)^{-1}] = \frac{1}{f'(x)}$$

$$[tan(y)'] = \frac{1}{\frac{d}{dx}[arctan(x)]} \Rightarrow \frac{d}{dx}[arctan(x)] = \frac{1}{tan(y)'}$$

$$\frac{d}{dx}[arctan(x)] = -\frac{1}{sec^2(y)}$$

Reemplazamos la identidad trigonométrica:

$$sec^2(y) = 1 + tan^2(y)$$

$$\frac{d}{dx}[arctan(x)] = \frac{1}{1+tan^2(y)}$$

como: $x = tan(y)$

$$\frac{d}{dx}[arctan(x)] = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo: Sea la función: $f(x) = arcot(x)$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

Solución: Si f(x) = y = $arcot(x)$, entonces: x = $cot(y) = f^{-1}(y)$,

$$\frac{d}{dx}[f(x)^{-1}] = \frac{1}{f'(x)}$$

$$[cot(y)'] = \frac{1}{\frac{d}{dx}[arcot(x)]} \Rightarrow \frac{d}{dx}[arcot(x)] = \frac{1}{cot(y)'}$$

$$\frac{d}{dx}[arcot(x)] = -\frac{1}{csc^2(y)}$$

Reemplazamos la identidad trigonométrica:

$$csc^2(y) = 1 + cot^2(y)$$

$$\frac{d}{dx}[arcot(x)] = -\frac{1}{1 + cot^2(y)}$$

como: x = $cot(y)$

$$\frac{d}{dx}[arctan(x)] = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Ejemplo: Sea la función: f(x) = $arcsec(x)$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

Solución: Si f(x) = y = $arcsec(x)$, entonces: x = $sec(y) = f^{-1}(y)$,

$$\frac{d}{dx}[f(x)^{-1}] = \frac{1}{f'(x)}$$

$$[sec(y)'] = \frac{1}{\frac{d}{dx}[arcsec(x)]} \Rightarrow \frac{d}{dx}[arcsec(x)] = \frac{1}{sec(y)'}$$

$$\frac{d}{dx}[arcsec(x)] = \frac{1}{sec(y)\tan(y)} = \frac{1}{sec(y)\frac{sen(y)}{\cos(y)}}$$

$$= \frac{1}{sec(y)\frac{1}{\cos(y)}sen(y)}$$

Reemplazamos la identidad trigonométrica:

$$sen^2(y) + cos^2(y) = 1 \Rightarrow \text{sen}(y) = \sqrt{1 - cos^2(y)}$$

$$\frac{d}{dx}[arcsec(x)] = \frac{1}{sec(y)\frac{1}{\cos(y)}\sqrt{1 - cos^2(y)}} = \frac{1}{sec(y)\sqrt{\frac{1 - cos^2(y)}{cos^2(y)}}}$$

$$\frac{d}{dx}[arcsec(x)] = \frac{1}{sec(y)\sqrt{\frac{1}{cos^2(y)} - \frac{cos^2(y)}{cos^2(y)}}} = \frac{1}{sec(y)\sqrt{sec^2(y) - 1}}$$

como: $\text{x} = sec(y)$

$$\frac{d}{dx}[arcsec(x)] = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Ejemplo: Sea la función: $\text{f(x)} = arcsc(x)$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

Solución: Si $\text{f(x)} = \text{y} = arcsc(x)$, entonces: $\text{x} = csc(y) = f^{-1}(y)$,

$$\frac{d}{dx}[f(x)^{-1}] = \frac{1}{f'(x)}$$

$$[csc(y)'] = \frac{1}{\frac{d}{dx}[arcsc(x)]} \Rightarrow \frac{d}{dx}[arcsc(x)] = \frac{1}{csc(y)'}$$

$$\frac{d}{dx}[arcsc(x)] = -\frac{1}{csc(y)\cot(y)} = -\frac{1}{csc(y)\frac{\cos(y)}{\operatorname{sen}(y)}}$$

$$= -\frac{1}{sec(y)\frac{1}{\operatorname{sen}(y)}cos(y)}$$

Reemplazamos la identidad trigonométrica:

$$sen^2(y) + cos^2(y) = 1 \Rightarrow \cos(y) = \sqrt{1 - sen^2(y)}$$

$$\frac{d}{dx}[arcsc(x)] = -\frac{1}{csc(y)\frac{1}{\operatorname{sen}(y)}\sqrt{1 - sen^2(y)}}$$

$$= -\frac{1}{csc(y)\sqrt{\frac{1 - sen^2(y)}{sen^2(y)}}}$$

$$\frac{d}{dx}[arcsc(x)] = -\frac{1}{csc(y)\sqrt{\frac{1}{sen^2(y)} - \frac{sen^2(y)}{sen^2(y)}}} = -\frac{1}{csc(y)\sqrt{csc^2(y) - 1}}$$

como: $\mathrm{x} = csc(y)$

$$\frac{d}{dx}[arcsc(x)] = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = arc\ sen(1 - 2x^2)}$

$$f(x)' = \ sen^{-1}(1 - 2x^2)$$

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2x^2)}} * \frac{d}{dx}(1 - 2x^2)$$

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 + 4x^2 - 4x^4)}} * (-4x)$$

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{(4x^2 - 4x^4)}} * (-4x)$$

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{(4x^2)(1 - x^2)}} * (-4x)$$

$$f(x)' = \frac{4x}{2x\sqrt{(1 - x^2)}}$$

$$f(x)' = \frac{2}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = arc\ sen\sqrt{x^2 - 4}}$

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sqrt{x^2 - 4})^2}} * \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2} - 4\right)$$

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sqrt{x^2 - 4})^2}} * \frac{d}{dx}(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sqrt{x^2} + 4)^2}} * \frac{1}{2}(x^2 - 4)^{\frac{-1}{2}}\frac{d}{dx}(x^2 - 4)$$

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2 - 4)}} * \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 4)}}$$

$$f(x)' = \frac{x}{\sqrt{(5 - x^2)(x^2 - 4)}}$$

$$f(x)' = \frac{x}{\sqrt{(5x^2 - x^4 - 20 + 4x^2)}}$$

$$f(x)' = \frac{x}{\sqrt{(-x^4 + 9x^2 - 20)}}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = arc\cos e^*}$

$$f(x)' = (arc\cos(e^*));\ e^* = \mathrm{z}$$

$$f(x)' = \frac{d}{dz}(arc\cos(e^*))$$

$$f(x)' = \frac{d}{dz}\left(arc\cos(z) * \frac{d}{dx}(z)\right)$$

$$f(x)' = \frac{1}{\frac{d}{dz}(\cos(\mathrm{z}))} * \frac{d}{dx}(z)$$

$$f(x)' = \frac{1}{(-\mathrm{sen(z)})} * \frac{d}{dx}(z)$$

$$f(x)' = \frac{1}{-\sqrt{(1 - \cos(\mathrm{z})^2)}} * \frac{d}{dx}(e^*)$$

$$f(x)' = \frac{1}{-\sqrt{(1 - (e^*)^2)}} * (e^*)$$

$$f(x)' = -\frac{(e^{*})}{\sqrt{(1-{e^{*}}^{2})}}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = arc\ tang\ \sqrt{x}}$

$$f(x) = \frac{d}{dz}\left(arc\ tang\ \sqrt{x}\right)$$

$$f(x) = \frac{d}{dz}\left(arc\ tang\ \sqrt{x}\right)\frac{d}{dz}(z)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+(z)^2} * \frac{d}{dz}(z)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} * \frac{d}{dz}(\sqrt{x})$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} * (\frac{1}{2\sqrt{x}} * \frac{d}{dz}(x))$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} * \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = arc\ tang\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

$$f(x) = arc\ tang\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right); entonces \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = z$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(arc\ tang\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(arc\ tang\ (z)\frac{d}{dz}(z)\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+z^2}\frac{d}{dz}\ (z)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} * \frac{d}{dz}\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}\right)} * \left(\frac{(1-x)+(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right)$$

$$f(x) = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2} * \left(\frac{(1-x)+1+x}{(1-x)^2}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{2x^2+2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

3.19. Ejercicios propuestos de derivadas de funciones inversas

Aplicando el teorema de derivada de funciones inversas, encontrar la primera derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = e^{arc\,cos(5x)}$

2) $f(x) = e^{arc\,tan(9x)}$

3) $f(x) = (x^3 - 1)arc\tan(x^2 + 4)$

4) $f(x) = (x^5 + e^x + 2)\, arcot(x^2 + 2x - 4)$

5) $f(x) = (x^4 + 3x^2 - 5)arc\sec(x^2 + e^{3x} - 2)$

6) $f(x) = (2x - 9)arc\ csc\ (x^2 - 8)$

7) $f(x) = (x^4 - 9x + 3)arcsen\ (x^3 - 7x)$

8) $f(x) = \frac{(x^3+5x-2)}{arccos\ (x^4-3x^2+2)}$

9) $f(x) = \frac{(x^5+e^{2x}+7)}{arccos\ (3x^2-2x+9)}$

10) $f(x) = \csc^{-1}(3x + \ln|5x^2|)$

3.20. Derivadas de funciones paramétricas

Definición: Si f y g, son dos funciones con un mismo dominio , entonces $x = f(t)$ e $y = g(t)$, son ecuaciones paramétricas, en las culaes tienen un parámetro t, y esta función se grafica en el conjunto de puntos cuyas coordenadas cartesianas son las siguientes:

$$(x, y) \setminus x = f(t),\ y = g(t) \forall t \in D$$

Definición: Si f y g, son dos funciones diferenciables en un mismo dominio común en el intervalo $[a, b]$, si $f'(t)$ es continua y diferente de cero para $a \leq t \leq b$, entonces las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, definen a y como una ecuación diferenciable en x, y esta definida por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ejemplo: Sea la función: $f: \begin{cases} y = t^3 - 6 \\ x = \frac{t}{t^2 - 1} \end{cases}$, encontrar $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 6) = 3t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{t^2 - 1}\right) = \frac{(t^2 - 1)\frac{d}{dt}(t) - (t)\frac{d}{dt}(t^2 - 1)}{(t^2 - 1)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(t^2 - 1)(1) - (t)(2t)}{(t^2 - 1)^2} = \frac{t^2 - 1 - 2t^2}{(t^2 - 1)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t^2 - 1}{(t^2 - 1)^2} = -\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{\frac{1}{1 - t^2}} = 3t^2(1 - t^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3t^2(1 - t^2)$$

3.21. Derivadas parciales

Las derivadas parciales se usan cuando la función que queremos derivar está definida en varias variables.

Definición: De forma análoga a la definición de derivada en una variable, se define la derivada de una función en varias variables en un punto $a = a_1, a_2 \dots \dots . a_n$

Las derivadas parciales se escriben de las siguientes formas, siendo la más típica la primera de ellas en la que utilizamos la d redondeada también conocida como la d de Jacobi.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} = f_{xn}(x,y) = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} = z_{xn}(x,y)$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n} = \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n} = f_{yn}(x,y) = \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = z_{yn}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

3.21.1. Aplicaciones de las derivadas parciales

Las derivadas parciales se utilizan en varias ocasiones en el campo de las Matemáticas y en el uso de la Economía y en la Física.

- La aplicación más importante en matemáticas es resolver problemas de optimización en derivadas en una dimensión en varias variables.
- En economía la derivada parcial hace referencia a la marginalidad a partir de una función de costo que podemos obtener la función de costo marginal respecto de una u otra variable, también se puede hallar la producción y el análisis marginales.
- En física se utiliza para expresar la ecuación de difusión del calor

Dada la función con varias variables independientes x e y : $z = f(x, y)$

a) Se deriva la función con respecto de la variable x, la derivada parcial de la función con respecto de x: $\frac{\partial f}{\partial x}$
b) Se deriva la función con respecto de la variable y, la derivada parcial de la función con respecto de y: $\frac{\partial f}{\partial y}$
c) Si derivamos dos veces la función con respecto de la variable x tenemos la derivada de segundo orden con respecto de x: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

d) Si derivamos dos veces la función con respecto de la variable y tenemos la derivada de segundo orden con respecto de y: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

e) Si derivamos tres veces la función con respecto de la variable x tenemos la derivada de tercer orden con respecto de x: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$

f) Si derivamos tres veces la función con respecto de la variable y tenemos la derivada de tercer orden con respecto de y: $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

g) Las derivadas de enésimo orden son aquellas en las que la función se deriva n veces con respecto de x: $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$

h) Las derivadas de enésimo orden son aquellas en las que la función se deriva n veces con respecto de y: $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$

i) Si derivamos la función una vez con respecto de una variable y a continuación su resultado respecto de la otra, se denomina derivadas parciales cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, por el teorema de SCHWARTZ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es igual derivar primero con respecto de x y luego respecto de y que primero con respecto de y y a continuación respecto de x

Las derivadas de funciones con varias variables independientes se usan las mismas fórmulas de una sola variable independiente, si tenemos la función de dos variables independientes x e y.

La derivada parcial de la función con respecto de x se deriva considerando la x como la variable y la y se trata de una constante.

La derivada parcial de la función con respecto de y se deriva considerando la y como la variable y la x se trata de una constante.

Dada la función $z = f(x, y)$ a continuación explicamos las distintas formas de expresar las derivadas parciales.

3.21.2. Ejercicios propuestos de derivadas parciales

Hallar las derivadas parciales de primer y segundo orden y las cruzadas o mixtas.

1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 18xy$
2) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 8xy$
3) $f(x,y) = 5xy^7 - y^3 = 9x + 4y$
4) $f(x,y) = xy + x - 2y - 1$
5) $f(x,y) = x^2y + 3y - 4$
6) $f(x,y) = x^2y - xy^2 + x^2 + y^2$
7) $f(x,y) = x^3y + xy^3 - 2xy$
8) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

9) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3$

10) $f(x, y) = 8x^2 + 7x^3y^4 - 11y^5$

11) $f(x, y) = 4x^2 + 4y^4 - 7xy + 2$

12) $f(x, y) = 6x^2 + 7x + 5y^3 + 4$

13) $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + 7y + 8$

14) $f(x, y) = 2xy + 5y + 7x$

15) $f(x, y) = 5xy - y + x$

16) $f(x, y) = 2x + 6y - 2xy + y^2$

17) $f(x, y) = x^4y^3 + 3$

18) $f(x, y) = 4x^2y^6 + 2x^3+5y^2 + 7$

19) $f(x, y) = 410x^2 + 90x - 160y^2 - 85y + xy$

20) $f(x, y) = 290x^4 - 40x + 230y^4 + 30y - 190xy$

21) $f(x, y) = 105x^3 - 9x^2 + 380y^2 - 39y^2 + 290xy$

22) $f(x, y) = x^4(5x^2 + 4y^3)$

23) $f(x, y) = y^6(7x - 6y)$

24) $f(x, y) = (4x - 7y)(9x + 11y)$

25) $f(x, y) = (12x + 9y)(17x - 15y)$

26) $f(x, y) = (50 - 5x + 4y)(7x + 5)$

27) $f(x, y) = (4x + 7y - 120)(6y - 22)$

28) $f(x, y) = (1200 + 17y - 18y)(x - 4) + (2150 - 60x + 20y)(y - 6)$

29) $f(x,y) = (290 + 6x - 19y)(x + 1) + (319 - 18x + 12y)(y - 4)$

30) $f(x,y) = (400 + x - 10y)(5x + 4) + (500 - 100x + 20y)(y + 10)$

31) $f(x,y,z) = 6x^4 + 8y^7 + 12z^6$

32) $f(x,y,z) = (x + 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 7)^2$

33) $f(x,y,z) = x^3y^2 + x^3z^4 + y^5$

34) $f(x,y,z) = x^3 + 2xz + 3yz^2 - 4xyz$

35) $f(x,y,z) = x^2 + 4xy - z^2 + 3xz$

36) $f(x,y,z) = x^2 + 6xz - 2xy^2z$

37) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + 6z - 3xy^2 + x^2y^2z^2$

38) $f(x,y,z) = 3x^4 - 4y^2 - 16z + 3xy^4 - x^3y^3z^3$

39) $f(x,y,z) = 3xy^2 + 2x^4y^4z^4$

40) $f(x,y,z) = 7x^5 + y^3 + z + 9y^2 - y^2z^2$

Capítulo IV: Aplicaciones de la derivada

El calcular la pendiente de una tangente, no es la única aplicación de las derivadas, además se puede emplear para el estudio de tasas de variación conocidas como razón de cambio, valores máximos y mínimos de una función, concavidad y convexidad, información útil en una gran gama de profesiones. El presente capitulo está enfocado en realizar un estudio de las aplicaciones básicas de forma general que tienen las derivadas con ejemplos prácticos de aplicación.

En la vida cotidiana de los seres humanos siempre está tratando de predecir los acontecimientos futuros, de ahí la necesidad de crear modelos matemáticos que permitan describir un proceso con la inquietud de conocer cuando se podría tener un máximo, por ejemplo: las ganancias de una empresa, la producción de una fábrica, la cosecha agrícola entre otras, pero también es de importancia los mínimos para conocer el costo mínimo de producción de un cierto producto, mínima cantidad de ventas en una empresa o negocio que permitan cubrir los gastos operativos entre otros.

4.1. Función creciente y decreciente

Teorema: Sea la función $f(x)$, continua en el intervalo abierto $]a,b[$, y sea c un punto del intervalo $]a,b[$. Si $f(c)$ es un extremo de $f(x)$, entonces encontrar $f'(c) = 0$ o no existe $f'(c)$

Sacamos el logaritmo natural a ambos lados de la expresión:

$$\ln y = \ln(x^{5x})$$

Definición: Sea un número c para el cual la función $f(x)$ está definida y para el cual $f'(c) = 0$ o no existe $f'(c)$, se llama un *número crítico* para $f(x)$.

No todo número critico de una función $f(x)$ hace que $f(c)$, sea un máximo o mínimo relativo de $f(x)$

Ejemplo: Hallar los extremos de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3,3]$

$$f(x) = x^3 - 6x$$

Ejemplo: Para hallar los puntos críticos, primero debemos encontrar la derivada de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6$$

Luego igualamos $f'(x)$ a cero

$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 = \pm\sqrt{2}$$

Por lo tanto, los números críticos serian: $x_1 = -\sqrt{2}$ y $x_2 = +\sqrt{2}$

Después se evalúa $f(x)$ en los puntos críticos y en los entremos del intervalo:

Extremo: $f(-3) = -9$ (mínimo absoluto)

Crítico: $f\left(-\sqrt{2}\right) = +4\sqrt{2}$ (máximo relativo)

Crítico: $f\left(+\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$ (mínimo relativo)

Extremo: $f(3) = +9$ (máximo absoluto)

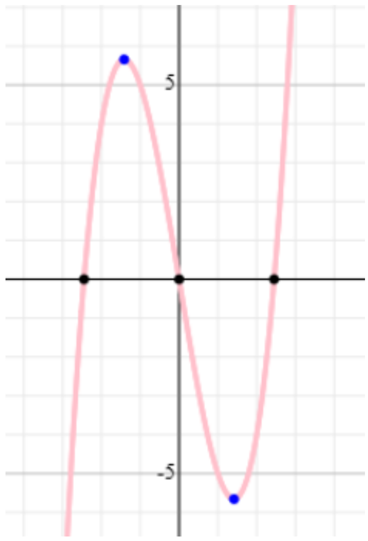


Figura 51: Gráfica de f(x)

Teorema: Sea la función $f(x)$, continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza un valor máximo o un valor minino en el intervalo $[a, b]$

4.2. Monotonía y concavidad

4.2.1. Monotonía

Se dice que una función $f(x)$ es creciente en $x = a$ si en el área que rodea inmediatamente el punto $[a, f(a)]$ la gráfica de la función aumenta a medida que se mueve de izquierda a derecha. La función es decreciente en $x = a$ si el área próxima a $[a, f(a)]$ la gráfica disminuye cuando se mueve se mueve de izquierda a derecha.

$f'(x) > 0\ función\ creciente\ en\ x = a$

$f'(x) < 0\ función\ decreciente\ en\ x = a$

a) Pendiente >0

b) Pendiente <0

$función\ decreciente\ en\ x = a$

$función\ creciente\ en\ x = a$

Figura 52: Gráfica de f(x); a) pendiente > 0; b) pendiente < 0

4.2.2. Concavidad

Una función es cóncava hacia arriba (o convexa) en $x = a$ si en el área más próxima al punto $[a, f(a)]$, la gráfica de la función se halla completamente por encima de su recta tangente.

Una función es cóncava hacia abajo en $x = a$ si el área inmediatamente circundante del punto $[a, f(a)]$, la gráfica se halla completamente debajo de su recta tangente.

$f''(x) > 0\ cóncava\ hacia\ arriba\ en\ x = a$

$f''(x) < 0\ cóncava\ hacia\ abajo\ en\ x = a$

4.2.3. Puntos críticos.

Es el punto donde la derivada es igual a cero o es indefinida.

4.2.4. Puntos extremos

Un punto extremo de una función es el punto donde la función tiene un máximo o un mínimo relativo. Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en $x = a$, la función no debe de ser creciente ni decreciente en a.

Para distinguir entre un máximo o un mínimo relativo se emplea la segunda derivada, suponiendo que a sea un punto crítico.

a) Si $f''(x) > 0$, la función es cóncava hacia arriba y la gráfica de la función se halla completamente por encima de su línea tangente en $x = a$, la función debe de tener un mínimo relativo en $x = a$

b) Si $f''(x) < 0$, la función es cóncava hacia abajo y la gráfica de la función se halla completamente debajo de su línea tangente en $x = a$, la función debe de tener un máximo relativo en $x = a$

c) Si $f''(x) = 0$, la prueba no es concluyente

En resumen, aplicando el principio de la primera derivada podemos concluir:

$f'(a) = 0, f''(a) > 0 \quad mínimo\ relativo\ en\ x = a$

$f'(a) = 0, f''(a) < 0 \quad máximo\ relativo\ en\ x = a$

$f'(a) = 0, f''(a) =$

$0 \quad la\ prueba\ no\ es\ concluyente, la\ función\ es\ estacionaria$

4.2.5. Puntos de inflexión

Es un punto en la gráfica donde la función cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa. Entre los puntos máximos o mínimos o mínimos o máximos debe de haber un punto de inflexión donde la función cambia de concavidad.

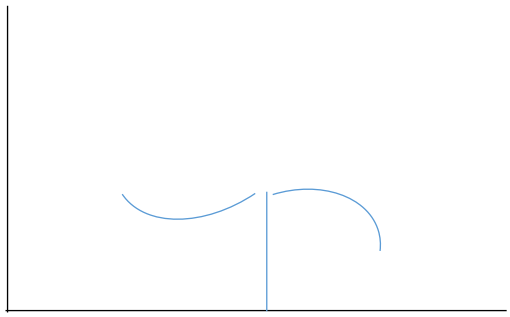


Figura 53: Punto de inflexión en x=a

$f''(a) = 0$, concavidad cambia en $x = a$

4.3. Trazados de curva, aplicando criterio de primera y segunda derivada

Dada una función diferenciable $f(x)$ y aplicando el criterio de la primera y segunda derivada podemos realizar un trazado de la curva de la función $f(x)$ con los siguientes pasos:

1) Tome la primera derivada $[f'(x)]$ para tener una idea aproximada de los intervalos donde la función es creciente y decreciente
2) Calcular los puntos críticos $f'(x)$
3) Hallar los puntos extremos de $f(x)$ igualando $f'(x) = 0$ y resolviendo para x_0. Luego evalué $f(x)$ en x_0.

4) Tome la segunda derivada, evalué ésta en x_0, y revise el signo para determinar la concavidad y distinguir entre un máximo y un mínimo relativo.
5) Calcular los puntos de inflexión donde $f''(x) = 0$ y donde cambie la concavidad.
6) Dibuje la gráfica

Ejemplo

Dada $y = f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 30$, la gráfica de la función aplicando los seis pasos descritos.

1) Tome la primera derivada

$$f'(x) = 6x^2 - 24x$$

$$\text{Para } (0 < x < 4), f'(x) < 0 \; y \; f(x) \qquad es\ decreciente$$

2) Calculamos los puntos críticos

Para este paso Igualamos a cero la primera derivada

$$6x^2 - 24x = 0$$

$$6x(x - 4)$$

$$6x = 0 \qquad x - 4 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 4 \qquad Puntos\ críticos$$

3) Hallamos los puntos extremos

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 30$$

$$f(0) = 2(0)^3 - 12(0)^2 + 30$$

$$f(0) = 30$$

$$f(4) = 2(4)^3 - 12(4)^2 + 30$$

$$f(4) = -34$$

Los puntos extremos son: $(0{,}30); (4, -34)$

4) Calcular el máximo o el mínimo relativo

$$f''(x) = 12x - 24$$

$$f''(0) = 12(0) - 24$$

$$f''(0) = -24 < 0 \qquad Cóncava\ hacia\ abajo, máximo\ relativo$$

$$f''(4) = 12(4) - 24$$

$$f''(4) = 24 > 0 \qquad \textit{Cóncava hacia arriba, mínimo relativo}$$

5) Hallar los puntos de inflexión

$$12x - 24 = 0$$

$$12x = 24$$

$$x = \frac{24}{12}$$

$$x = 2$$

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 30$$

$$f(2) = 2(2)^3 - 12(2)^2 + 30$$

$$f(2) = -2$$

Punto de inflexión es $(2, -2)$

6) Con la información obtenidas en los incisos del uno al cinco, se puede realizar un esbozo de la gráfica de la función:

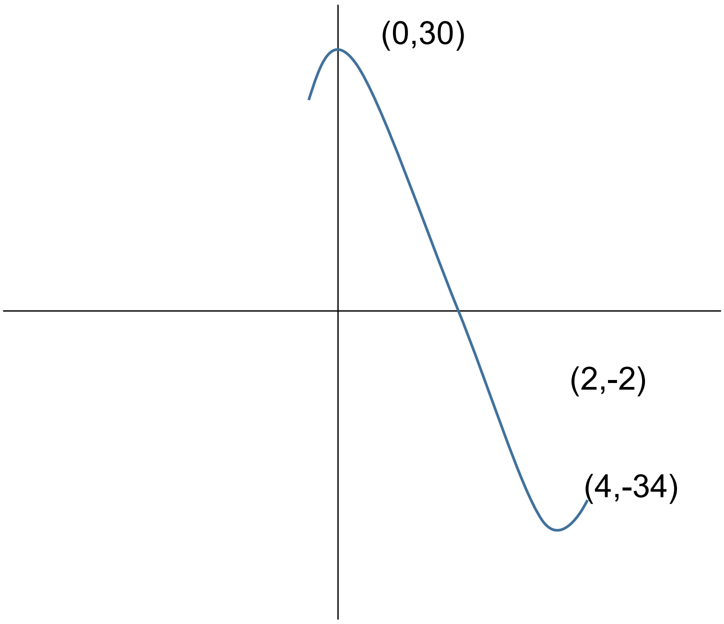


Figura 54: Gráfica de f(x)

4.4. Ejercicios propuestos de grafica de funciones

Para cada una de las siguientes funciones, Hallar:

a) Los valores críticos
b) Puntos extremos
c) La concavidad y determinar los máximos o mínimos relativos
d) Puntos de inflexión
e) Grafico

1) $F(x) = 2x^3 - 54x^2 + 480x - 1300$
2) $F(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 32$
3) $F(x) = 5x^3 - 22.5x^2 - 420x - 85$
4) $F(x) = 2x^3 + 12x^2 - 192x - 45$
5) $F(x) = x^3 - 18x^2 + 105x + 79$
6) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
7) $F(x) = (8 - x)^4$
8) $F(x) = (x - 12)^3$
9) $F(x) = (x - 7)^6$
10) $F(x) = (11 - x)^5$

4.5. Teorema de Rolle

Teorema de Rolle: Sea la función $f(x)$, continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$ y si $f(a) = f(b)$, entonces existe un numero $z \in]a, b[$, talque $f'(z) = 0$.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Hallar los intervalos $[a, b]$ en los que $f(a) = f(b)$ y el teorema de rolle es aplicable. Para cada uno de los intervalos encuentre un numero $z \in]a, b[$, talque $f'(z) = 0$.

Solución: Encontramos los puntos en los cuales $f(x) = 0$, para lo cual facturamos

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x + 1)(x - 1) = 0$$

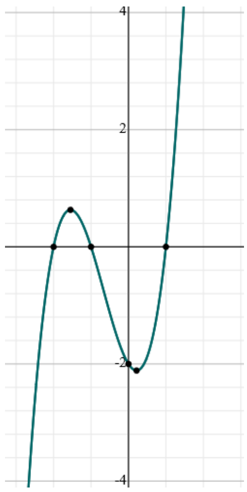


Figura 55: Gráfica de f(x) con máximos y mínimos

Por lo tanto: $x_1 = -2$; $x_2 = -1$ y $x_3 = +1$ y cumple $f(-2) = f(-1) = f(+1) = 0$, por lo tanto, basado en el teorema de Rolle existe un numero $z \in [-2, -1]$ y $z \in [-1, +1]$, talque $f'(z) = 0$.

Encontramos $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{1 + 3}}{3} = \frac{-2 \pm 2}{3}$$

Por lo tanto: $x = 0$ y $x = -\frac{4}{3}$

$$-\frac{4}{3} \in [-2,-1] \text{ y } 0 \in [-1,+1]$$

4.6. Teorema del valor medio

En cálculo diferencial, el Teorema de valor medio, Teorema de los incrementos finitos, Teorema de Bonnet-Lagrange o Teoría del punto medio es una prioridad de las funciones derivables en un intervalo. Algunos matemáticos consideran que este teorema es el más importante del cálculo.

El teorema del valor medio de Lagrange, de hecho, es una generalización del teorema de Rolle, que dice que si una función es definida y continua $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b), y toma valores iguales en los extremos del intervalo, en otras palabras, $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es horizontal, es decir $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio: Sea la función $f(x)$, continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$, entonces existe un numero $z \in]a, b[$ talque $f(b) - f(a) = (b-a)f'(z)$

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2$, hallar los puntos $c \in [-2, +1]$, talque: $f'(c) = \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}$

Solución: Encontramos la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(-2; f(-2)), (1, f(1))$

a) $f(-2) = (-2)^2 = 4$

$$f'(x) = 2x = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

b) $f(1) = (1)^2 = 1$

c) $f'(c) = \frac{1-4}{1-(-2)} = -\frac{4}{3}$

Como $f(x)$ satisface el teorema del valor medio, existe un $c \in [-2, +1]$ talque $f'(c) = -\frac{4}{3}$

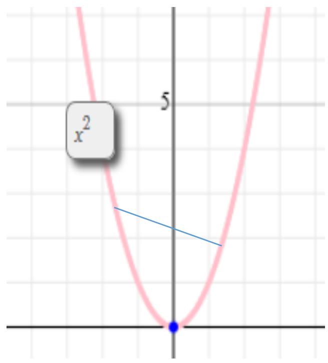


Figura 56: Gráfica de f(x)

Teorema de Cauchy: Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$, continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y son derivables en el intervalo abierto $]a, b[$, y además $g'(x) \neq 0$ para todo x $\in]a, b[$, entonces existe un número z $\in]a, b[$, tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

si $g(x) = x$, el teorema de Cauchy toma la forma del teorema del valor medio

Ejemplo: Calcular el punto c que satisface el teorema del valor medio para la siguiente función en el intervalo [0,1]: $f(x) = x^2 + 2x - 1$

En primer lugar, debemos comprobar si se cumplen las condiciones para que se pueda aplicar el teorema del valor medio. Debemos comprobar si la ecuación es continua en [0,1] y derivable en (0,1)

La función es continua en todo R, al ser una función polinómica, por lo que también será continua en el intervalo [0,1].

La función es derivable en (0,1) si su derivada es continua en ese intervalo.

La derivada de la función es: $f'(x) = 2x + 2$

Es continua en [0,1] y derivable en (0,1), por tanto, existe un valor de c en ese intervalo tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Vamos a pasar a calcular el punto c del teorema.

Calculamos lo que vale la función en los extremos del intervalo:

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$f(0) = (0)^2 + 2(0) - 1 = -1$$

$$f(1) = (1)^2 + 2(1) - 1 = 2$$

Calculamos $f'(c)$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - (-1)}{1} = 3$$

Por otro lado, calculamos $f'(c)$ a partir de $f'(x)$

$$f'(x) = 2x + 2$$

Sustituyendo la x por la c:

$$f'(c) = 2c + 2$$

Igualamos ambos resultados de $f'(c)$ y nos queda una ecuación que depende de c y de donde podemos despejarla y encontrar el valor de c que nos están pidiendo:

$$2c + 2 = 3$$

$$c = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: Calcular el punto c que satisface el teorema del valor medio para la siguiente función en el intervalo [0,2]: $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 8x - 5$$

$$f(0) = 4(0)^2 - 5(0) + 1 = 1$$

$$f(2) = 4(2)^2 - 5(2) + 1 = 7$$

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

$$f'(c) = 8c - 5$$

$$8c - 5 = 3$$

$$8c = 3 + 5$$

$$c = 1$$

4.7. Ejercicios propuestos para aplicar el teorema del valor medio

Calcular el punto c que satisface el teorema del valor medio para las siguientes funciones en los intervalos definidos:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad [1,3]$
2) $f(x) = x^3 \qquad [-1,2]$
3) $f(x) = x^3 - x^2 + 2 \quad [1,3]$
4) $f(x) = (x-2)^2(x+1) \qquad [0,4]$
5) $f(x) = 3x^2 \qquad [0,4]$

4.8. Regla de L´Hopital

Guillaume de L' Hopital y "su" regla

Guillaume François de L' Hopital (1661-1704), más conocido como marqués de L' Hopital, fue un matemático parisino conocido por la llamada **Regla de L' Hopital**. Esta regla permite, como veremos a continuación, el cálculo de límites de fracciones en las que el numerador y denominador tienden ambos al infinito o a cero.

En realidad, esta regla fue demostrada por Johann Bernoulli (1667-1748), pero por un acuerdo entre ambos, el descubrimiento lo publicó el Marqués en su obra Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes en 1696. Esta obra es considerada el primer libro publicado sobre cálculo diferencial.

El acuerdo secreto fue revelado por el propio Bernoulli que, tras la muerte del marqués, aseguró ser el verdadero autor de la mayoría de los resultados publicados por L' Hopital. Cabe decir que, aunque se dice que L' Hopital quiso llevarse los méritos, nunca anunció ser el descubridor y, de hecho, agradeció a Bernoulli su ayuda en su libro.

Definición: Sea $f(x)$ y g(x), funciones reales tales que el $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y el $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, la función definida por $\frac{f(x)}{g(x)}$, tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en a

Definición: Sea $f(x)$ y g(x), funciones reales tales que el $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y el $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, la función definida por $\frac{f(x)}{g(x)}$, tiene la forma indeterminada $\pm\frac{\infty}{\infty}$ en a

Teorema (Regla de L´Hopital): Sea $f(x)$ y g(x), funciones reales derivables en un intervalo abierto I,y que $a \in I$ (no necesariamente diferenciable en el punto a) y sea $g´(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y el $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f´(x)}{g´(x)} = L$$

Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{sen(5x)}{ln|3x+1|}$

Solución: $\lim_{x \to 0} \frac{sen(5*0)}{ln|3*0+1|} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(0)}{ln|1|} = \frac{0}{0}$

Aplicando la Regla de L´Hopital: derivamos al numerador y al denominador de forma independiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f´(x)}{g´(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}[sen(5x)]}{\frac{d}{dx}[ln|3x+1|]} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(5x)\frac{d}{dx}[5x]}{\frac{1}{3x+1}\frac{d}{dx}[3x+1]}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f´(x)}{g´(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{5\cos(5x)}{\frac{3}{3x+1}} = \frac{(3x+1)5\cos(5x)}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f´(x)}{g´(x)}=\frac{(3*0+1)5\cos{(5*0)}}{3}=\frac{5}{3}$$

Si al aplicar la regla de l´hospital sigue existiendo la forma de indeterminación, se puede volver a aplicar la regla $\lim_{x\to a}\frac{f´(x)}{g´(x)}$

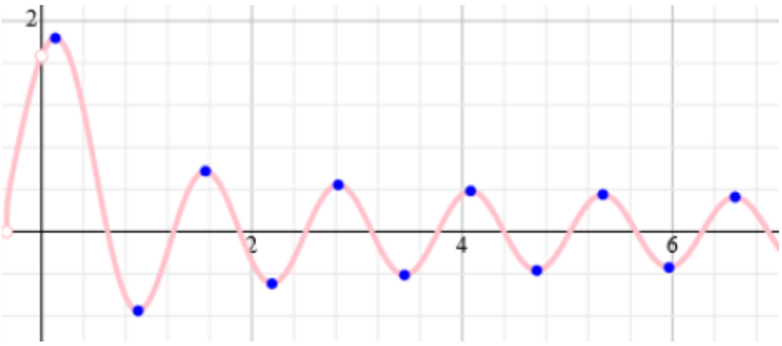


Figura 57: Gráfica de f(x)

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)-2x}{3x^2}$

Solución: $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)-2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(2*0)-2*0}{3*0^2}=\frac{0}{0}$

Aplicando la Regla de L´Hopital: derivamos al numerador y al denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f´(x)}{g´(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}[sen(2x)-2x]}{\frac{d}{dx}[3x^2]}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2}{6x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2*0)-2}{6*0} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la Regla de L´Hopital por segunda ocasión

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}[2\cos(2x)-2]}{\frac{d}{dx}[6x]} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\,\mathrm{sen}(2x)}{6} = 0$$

Nota: Algunas variaciones empleadas en la regla de L´Hopital son válidas como $a = \pm\infty$, o puede emplearse en el cálculo de limites laterales, sin que la regla pierda su validez.

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(2x)}{\csc(x)}$

Solución: $\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(2x)}{\csc(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\ln(2*0)}{\csc(0)} = \frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la Regla de L´Hopital: derivamos al numerador y al denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}[-\ln(2x)]}{\frac{d}{dx}[\csc(x)]} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2x}2}{-\csc(x)\cot(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\frac{sen(x)}{cos\,(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{cos\,(x)} = 1 * 0 = 0$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{5^{3x}}{2x^2}$

Solución: $\lim_{x\to\infty}\frac{5^{3x}}{2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{5^{3\infty}}{2\infty^2} = \frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la Regla de L´Hopital: derivamos al numerador y al denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}[5^{3x}]}{\frac{d}{dx}[2x^2]} = \lim_{x\to\infty}\frac{5^{3x}\ln(5)\,3}{4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{5^{3\infty}\ln(5)3}{4\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la Regla de L´Hopital por segunda ocasión

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}[5^{3x}\ln(5)3]}{\frac{d}{dx}[4x]} = \lim_{x\to\infty}\frac{5^{3x}(\ln(5)\,3)^2}{4}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5^{3\infty}(\ln(5)\,3)^2}{4} = \frac{\infty}{4} = \infty$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^{3x}}{2x^2} = \infty$$

Definición: Sea $f(x)$ y $g(x)$, funciones reales tales que el $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ y el $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$, la función definida por $\frac{f(x)}{g(x)}$, tiene la forma indeterminada $\frac{0}{\infty}$ en a

Definición: Sea $f(x)$ y $g(x)$, funciones reales tales que el $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ y el $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$, la función definida por $f(x)^{g(x)}$, tiene la forma indeterminada 0^0 en a

Definición: Sea $f(x)$ y $g(x)$, funciones reales tales que el $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y el $\lim_{x \to \infty} g(x) =0$, la función definida por $f(x)^{g(x)}$, tiene la forma indeterminada ∞^0 en a

Usando operaciones algebraicas, todas las indeterminaciones pueden reducirse a las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que se puede aplicar la regla de L´Hopital

Ejemplo: $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

Tenemos la indeterminación infinita elevado a cero. Recordemos que:

$$e^{lnA} = A$$

Luego tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(\underset{x\to\infty}{lim} x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\underset{x\to\infty}{lim} ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}$$

Calculamos el límite del exponente

$$\lim_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

Y tenemos ahora la indeterminación infinito dividido infinito. Aplicamos L' Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Finalmente

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(\underset{x\to\infty}{lim} x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^0 = 1$$

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{xcosx - sinx}{x^3}$

Tenemos la indeterminación cero dividido cero. Aplicamos L' Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{xcosx - sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(xcosx - sinx)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{cosx - xsinx - cosx}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-xsinx}{3x^2}=\frac{-sinx}{3x}$$

Tenemos de nuevo la indeterminación 0 dividido 0. Aplicamos L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{-sinx}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-sinx)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-cosx}{3}=-\frac{1}{3}$$

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty}\frac{-e^x+5}{x^3-2}$

Tenemos una indeterminación de tipo infinito dividido infinito. Aplicamos L' Hopital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-e^x+5}{x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-e^x+5)'}{(x^3-2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^x}{3x^2}$$

Seguimos con una indeterminación de tipo infinito dividido infinito. Aplicamos la regla de L' Hopital dos veces.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-e^x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^x}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^x}{6}=-\infty$$

En realidad, podemos calcular el límite sin aplicar L' Hopital ya que sabemos que una exponencial crece más rápido que una función polinómica.

Ejemplo: $\lim_{x \to 1} (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Tenemos una indeterminación de cero dividido cero. Aplicamos la regla de L' Hopital

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)e^{x^2}}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{\left((x+1)e^{x^2}\right)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x \to -1} \frac{e^{x^2} + 2xe^{x^2}(x+1)}{2x}$$

$$= \frac{e^{(-1)^2}}{-2} = -\frac{e}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Para facilitar los cálculos podemos escribir el ejercicio de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 1} (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{1}{(1-x)}}$$

Tenemos una indeterminación de infinito dividido infinito. Aplicamos la regla de L' Hopital, pero en este caso la derivada del denominador se calcula más rápido.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{1}{(1-x)}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\frac{\pi x}{2}}{cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}{\frac{1}{(1-x)^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi(1-x)^2}{2cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

Tenemos una indeterminación de cero dividido cero. Aplicamos la regla de L' Hopital

$$\lim_{x\to 1}\frac{\pi(1-x)^2}{2cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-2\pi(1-x)}{-4cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)x}$$

Tenemos una indeterminación de cero dividido cero. Aplicamos la regla de L' Hopital

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi x}{2}+cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi x}{2}\left(cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi x}{2}}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

Ejemplo : Calcular: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\tan(x)\ln|sen(x)|]$

Solución: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\tan(x)\ln|sen(x)|] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln\left|sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right] = \infty * 0$

Es una forma indeterminada, pero volviendo a escribir la función de la forma:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\ln|sen(x)|}{\cot(x)}\right] = \frac{0}{0}$$

Aplicando la Regla de L´Hopital: derivamos al numerador y al denominador de forma independiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f´(x)}{g´(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}[\ln|sen(x)|]}{\frac{d}{dx}[\cot(x)]} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{sen(x)}\cos(x)}{-csc^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{sen(x)}\cos(x)}{-\frac{1}{sen^2(x)}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\tan(x)\ln|sen(x)|] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[-sen(x)\cos(x)] = 0$$

4.9. Ejercicios propuestos para aplicar la regla de L´Hopital

Encontrar los límites de las siguientes funciones aplicando la regla de L´Hopital

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1- e^{-x}}{sin\ (x)}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln[\cos(8x)]}{\ln[cos(11x)]}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 . e^{-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} 3x^5 * \ln(x)$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4}{x^4-3x+2}$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(9x)}{sin\ (7x)}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{11x-sec(3x)}{x^5}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+tan(5x)}{sin\ (3x)}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(19x)}{sin\ (17x)}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{tan\ (6x)}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^8}{[sin(4x)]^4}$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{\cos(12x)}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(11x)}{4x}$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{[\sin(13x)]^7}{6x^7}$

16) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-e^{-x}+e^{x}}{sin\ (15x)}$

17) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{8x}{(\ln|x|)^5+7x}$

18) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{5x} - \frac{1}{sin(5x)}\right)$

19) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin\ (13x)}{5x-\frac{5}{9}sin(9x)}$

20) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+7x)-sin\ (4x)}{11x*sin(6x)}$

4.10. Razón de cambio

Definición: Si y, $\varphi(t)$ y φ es derivable, la rapidez de variación de y con respecto a t está dada por dy/dt. Pero si $y = f(x)$ y se quiere decir que x y y son funciones desconocidas de t, se puede encontrar dy/dt. El método consiste en derivar ambos lados de la ecuación dada con respecto a t por medio de la regla de la cadena; esto es,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Ejemplo: Un hombre que tiene 5 pies de altura camina a partir de una luz que se encuentra en la calle con una rapidez de 4 pies por segundo. ¿Si la luz está a una altura de 12 pies sobre el piso con qué rapidez crece su sombra en cualquier tiempo t?

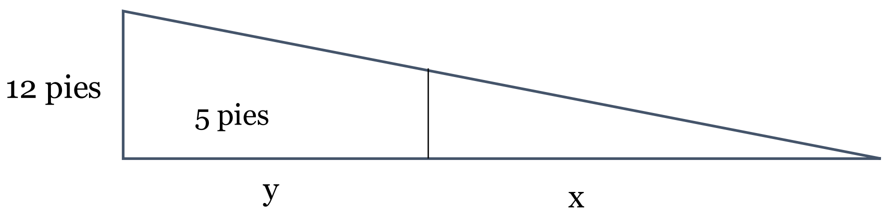


Figura 58: Descripción Gráfica del problema

Solución: Representaremos a la variable y como la distancia entre el hombre y el poste de la luz y x la longitud de su sombra.

Por semejanza de triangulo: $\frac{x}{5} = \frac{x+y}{12}$, o sea,

$$\frac{12x}{5} = x + y \Rightarrow 12x = 5x + 5y \Rightarrow 7x = 5y$$

Derivando ambos miembros de la ecuación con respecto a, t,

$$7\frac{dx}{dt} = 5\frac{dy}{dt}$$

Pero $\frac{dy}{dt} = 4\ [pies\ por\ segundo]$.

Por consiguiente: $7\frac{dx}{dt} = 2(4) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{8}{7}[pies\ por\ segundos]$

su sombra está creciendo en la razón constante de $\frac{8}{7}$ pies por segundo

4.11. Ejercicios propuestos de razón de cambio

1. De un tubo sale arena a razón de 12 $[pie^3/seg]$. Formando en el suelo una pirámide cónica cuya altura es siempre ¼ del diámetro de la base. ¿Con qué rapidez aumenta la altura de la pirámide cuando la misma tiene 6 pies de longitud?

2. Un depósito cónico de 16 [m]. de altura y radio de la base 6 [m], tiene inicialmente 10 $[m^3]$ de agua. En el tiempo t igual a

cero segundos comienza a fluir agua al interior del depósito a una razón de 6 $[m^3/hora]$, y al mismo tiempo, por el fondo comienza a salir agua a razón de 2 $[m^3/hora]$. ¿Determine la razón a la que está variando el nivel del líquido cuando tiene 8 pies de altura?

3. En un depósito de forma cónica minuto. El cono tiene 6 metros de profundidad y 3 metros de diámetro. Si hay una fuga en la base a razón una razon de 2.5 6 $[m^3/minuto]$, cuando el agua tiene 4.8 metros de profundidad, ¿con qué rapidez disminuye la altura del nivel depósito?

4. Un avión que vuela a velocidad constante de 300 Km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altura de 1 Km. Y se eleva a un ángulo de 30º. ¿A qué velocidad aumenta la distancia entre el avión y la estación de radar 1 minuto más tarde?

5. Un aeroplano vuela hacia el oeste a 600 kilómetro por hora y pasa sobre cierto pueblo a la 11:00 am.; un segundo aeroplano vuela a la misma altura hacia el sur a 400 kilómetro por hora y pasa por el mismo pueblo a mediodía (12:00 am). ¿Qué tan

rápido se separan el un aeroplano respecto a l otro cuando el reloj marca la 1:00 p.m.?

6. Una ciudad tiene forma de triángulo rectándolo y sus catetos opuestos son $x + 3$; $x + 5$, a causa de la expansión urbana crece a una razón de 2 kilómetros cada año. ¿Cuál es la razón de cambio del área urbana cuando su hipotenusa es igual a 100 kilómetros?

7. Se desea inflar un globo aerostático con una bomba que le inyecta aire a una razón de 2 metros cúbicos por hora. Considerando que el globo tiene una forma esférica, ¿Cuál es la razón de cambio del volumen del globo cuando su diámetro es de 6 metros?

8. A una cisterna de forma cilíndrica de radio 15 metros y altura 50 metros le están ingresando agua a una razón de 18 metros cúbicos por minuto y el poblado al que abastece consume el líquido vital a una razón de 12 metros cúbicos por minuto. ¿Determine la razón a la que está variando el nivel del líquido cuando tiene 40 metros de altura?

9. Dos cruceros salen simultáneamente del puerto de Manta, uno viaja hacia el Sur a una velocidad de 32 millas náuticas por hora el otro hacia el oeste a una velocidad de 45 millas náuticas por hora. Después de 4 horas ¿cuál es la velocidad de separación de los dos barcos?

10. Una escalera de 5mde longitud descansa contra un muro. Si el extremo inferior de la escalera se está resbalando a razón de 0.5 metros por segundos ¿Con que velocidad desciende el extremo superior cuando ´este a un metro del suelo?

Respuestas a ejercicios propuestos

i) Respuestas a ejercicios propuestos de desigualdades

1) $\left]\frac{5}{7}, +\infty\right[$

2) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

3) $\left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2},, +\infty\right[$

4) $]-\infty, 1[\, \cup \left]2, \frac{8}{3}\right[$

5) $]-10, -3[$

6) $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right[$

7) $\left]-\infty, \frac{7}{4}\right]$

8) $]-\infty, -2[\, \cup\,]5,7[$

9) $\left[\frac{3}{7}, 1\right[$

10) $]-\infty, 1[\, \cup\,]8, +\infty[$

11) $]-\infty, 6[\, \cup\,]12, +\infty[$

12) $]-\infty, -1[\, \cup\,]4, +\infty[$

13) $]-\infty, -3] \cup [0,1] \cup [4, +\infty[$

14) $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{10}}{3}, +\infty\right[$

15) $]-\infty, +\infty[$

16) $]-19, +23[$

17)

18) $]-\infty, 2[\, \cup\,]6, +\infty[$

19) $]-\infty, -1[\, \cup\,]8, +\infty[$

20) $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[\cup \left]\frac{19}{11}, +\infty\right[$

21) $\left]-\infty, -\frac{57}{4}\right[\cup \left]-\frac{69}{10}, +\infty\right[$

22) $]1,13[$

23) $\left]-\frac{17}{2}, -1\right[$

24) $]-\infty, -7[\, \cup\,]17, +\infty[$

25) $]0,10[$

26) $]-\infty, 11[\, \cup\,]13, +\infty[$

27) $]-9,1[$

28) $]-\infty, -3[\, \cup \left]\frac{23}{9}, +\infty\right[$

29) $\left]-\frac{28}{9}, \frac{10}{3}\right[$

30) $\left]-\infty, \frac{17}{11}\right[\cup \left]\frac{23}{9}, +\infty\right[$

31) $\left]-\infty, -\frac{4}{5}\right[\cup]0, +\infty[$

ii) Respuestas a ejercicios propuestos de funciones reales

1) $D_f = \mathbb{R};\ \ R_f = \mathbb{R}$

2) $D_f = \mathbb{R};\ \ R_f = [-49, +\infty[$

3) $D_f = \mathbb{R};\ \ R_f = \left[-\infty, \frac{121}{4}\right[$

4) $D_f = \mathbb{R};\ \ R_f = \mathbb{R}$

5) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\};\ \ R_f = \mathbb{R}\backslash \{1\}$

6) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{5}{7}\};\ \ R_f = \mathbb{R}\backslash \{\frac{2}{7}\}$

7) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\};\ \ R_f = \mathbb{R}$

8) $D_f = \mathbb{R}\backslash \{-2, +1. +5\};\ \ R_f = \mathbb{R}$

9) $D_f = \mathbb{R};\ \ R_f = [0, +\infty[$

10) $D_f = \mathbb{R};\ \ R_f = [0, +\infty[$

11) $D_f = \mathbb{R}\{\frac{1}{6}\};\ \ R_f = [0, +\infty[$

12) $D_f = \mathbb{R}\{-4\};\ \ R_f = [0, +\infty[$

13) $D_f = \mathbb{R}\{-2, +1\};\ R_f = [0, +\infty[$

14) $D_f = [7, +\infty[;\ \ R_f = [0, +\infty[$

15) $D_f = \mathbb{R};\ \ R_f = [0, +\infty[$

16) $D_f = [-2,1] \cup [5, +\infty[;$

$R_f = [0, +\infty[$

17) $D_f =]-\infty, 4[\cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[;$

$R_f = [0, +\infty[$

18) $D_f = \left]-\infty, -\frac{5}{7}\right[\cup [2, +\infty[;$

R_f

$$= \left[0,+\sqrt{\frac{2}{7}}\right[\cup \left]\sqrt{14},+\infty\right[$$

19) $D_f = \mathbb{R}$; $R_f =]0,+\infty[$

20) $D_f = \mathbb{R}\{-2\}$;

$R_f =]0,3] \cup]3,+\infty[$

21) $D_f =]7,+\infty[$; $R_f = \mathbb{R}^+$

22) $D_f =]7,+\infty[$; $R_f = \mathbb{R}$

23) $D_f = \left]-\infty,\frac{4}{3}\right[$; $R_f = \mathbb{R}$

24) $D_f = \left]-\infty,-\frac{5}{7}\right[\cup$

$]2,+\infty[$;

$R_f = \mathbb{R}\backslash \log\left(\frac{7}{2}\right)$

25) $D_f =]-5,3[\cup]4,+\infty[$;

$R_f = \mathbb{R}$

26) $D_f = \left]-4,\frac{5}{3}\right[\cup]5,+\infty[$;

$R_f = \mathbb{R}$

27) $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = [-3,+3]$

28) $D_f = \mathbb{R}\backslash$

$\{\frac{4k+30}{\pi}\}$ $donde\ k \in \mathbb{Z}$;

$R_f = \mathbb{R}\backslash\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

29) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{2k}{\pi}+$

$\frac{1}{2}\}$ $donde\ k \in \mathbb{Z}$;

$R_f = \mathbb{R}$

30) $D_f =$

$[134,136]donde\ k \in \mathbb{Z}$;

$R_f = [-2\pi,+2\pi]$

iii) Respuestas de ejercicios propuestos de límites

1) $\lim\limits_{x\to-2} 5\,x + 24 = 14$

2) $\lim\limits_{x\to6} x\ + 54 = 60$

3) $\lim_{x \to -5} (2x - 8) = 18$

4) $\lim_{x \to 2} (3x^2 \ + 8x - 1) = 27$

5) $\lim_{x \to 2} (x^{\,4} - 8x^3 - 2x^2 - 5x + 3) = 63$

6) $\lim_{x \to 5} (6x^3 - 7x^2 + 3x - 2) = 588$

7) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2+7x-2}{x^3+5} = \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{32}}$

8) $\lim_{x \to -3} \frac{x^4+x^2-1}{x^6-2} = \frac{89}{727}$

9) $\lim_{x \to 7} \sqrt[2]{8x - 2} = 7.35$

10) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{8x^2 - x + 3} = 3.20$

11) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3+27}{x+3} = 9$

12) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2} = indeterminación$

13) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = indeterminación$

14) $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt[3]{5x+2} - \sqrt[3]{64}}{x} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$

15) $\lim_{x \to 7} [x^2(x - 5)] = 98$

16) $\lim_{x \to 3} \frac{4x^2-9x}{x+7} = \frac{9}{10}$

17) $\lim_{x \to 2} \sqrt{6x^2 + 1} = 5$

18) $\lim_{x \to 7} (5x^2 - 13) = 232$

19) $\lim\limits_{x \to 5} (3x^2 - 6x + 8) = 53$

20) $\lim\limits_{x \to -4} (2x^2 + 5x - 22) = -10$

21) $\lim\limits_{x \to 8} \frac{5x^2-9x+22}{2x^2+7} = 2$

22) $\lim\limits_{x - 6} \frac{4x^2-x}{3x^2-12x+20} = \frac{3}{4}$

23) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{4x^2-3x}{3x^2-12x+25} = \frac{297}{160}$

24) $\lim\limits_{x \to -8} (6x^2 + 5x - 36) = 308$

iv) Respuestas a ejercicios de límites empleando propiedades

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x} = \frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$

4) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} = \frac{1}{8}$

5) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2} = 1$

6) $\lim\limits_{y \to -2} \frac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6} = -\frac{2}{5}$

7) $\lim\limits_{u \to -2} \frac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)} = 0$

8) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = 4$

9) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-25} = 0$

10) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = 3x^2$

11) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

12) $\lim\limits_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{1}{56}$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \frac{1}{2}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$

15) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = -\frac{1}{3}$

16) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

17) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

18) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q} = \frac{p}{q}$

19) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = 12$

20) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{3}$

v) Respuestas a ejercicios propuestos de límites al infinito

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x^3+2-_1}{2x+3}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{5x^3+2-_1}{2x+3}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^3+3x+2}{5x^2+x} = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^6+3x^3+2}{7x^6+x-1} = \frac{3}{7}$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^6+3x^3+2}{7x^6+x-1} = \frac{3}{7}$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-9}{x(x^2+1)} = 0$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[5]{2x^4+3x-11}}{\sqrt[7]{x^3+2}} = 0$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^9-2x^5+x^2}}{\sqrt[5]{3x^{15}-x^2}} = \sqrt[15]{9}$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^5 - x\sqrt{x}\right) = +\infty$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-^-5x^3 - x\sqrt{x}\right) = -\infty$

11) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(-^-5x^3 - x\sqrt{x}\right) = +\infty$

12) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-5x^3 + 8x - 3x^6) = -\infty$

13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^5-3}\right) = 0$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3-2x+5}}{x-1} = 3$

15) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+2} - (x - 5)\right) = \frac{11}{2}$

16) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5-\sqrt{x^2-1}}{5-\sqrt{1+x^2}} = 1$

17) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{1-x^2}} = -1$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{3x^2})^{\frac{5x}{2x-8}} = 0$

19) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36} = 0$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{3x^2+2}\right)^{x^2} = 0$

vi) Respuestas a ejercicios propuestos de continuidad de funciones

1) La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$
2) La función es continua en $x\epsilon\mathbb{R}$
3) La función tiene una discontinuidad No evitable en $x = -2$
4) La función tiene una discontinuidad No evitable en $x = 3$
5) La función es continua en $x\epsilon[-2, \infty[$
6) La función es continua en $x\epsilon]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$
7) La función es continua en $x\epsilon\mathbb{R}$
8) La función tiene una discontinuidad No evitable en $x = 4$
9) La función es continua en $x\epsilon\mathbb{R}$
10) La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$
11) La función tiene una discontinuidad No evitable en $x = -2$ y en $x = 2$
12) La función tiene una discontinuidad No evitable en $x = 2$
13) La función tiene una discontinuidad No evitable en $x = -2$

14) La función es continua en $x\epsilon\mathbb{R}$

15) $\alpha = -1$ y $\beta = -\frac{5}{2}$

16) $\alpha = -\frac{21}{6}$ y $\beta = -9$

17) $\alpha = -6$ y $\beta = 2$

18) $\beta = \frac{20}{3}$

19) $\alpha = -\frac{5}{4}$

20) $\alpha = -4$ y $\beta = -7$

vii) **Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas aplicando la definición**

1) $f'(x) = 3$

2) $g'(x) = 2$

3) $f'(x) = 2x + 8$

4) $g'(x) = 1$

5) $f'(x) = 4x - 7$

6) $g'(x) = 2x$

7) $f'(x) = 3x^2$

8) $g'(x) = 2x + 7$

9) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

10) $g'(x) = 3x^2 + 27$

11) $f'(x) = 6x^2 - 10x^2 - 2$

12) $g'(x) = 12x^2 - 4x$

13) $f'(x) = 12x^2 - 26x + 4$

14) $f'(x) = 18x^2 + 11$

15) $g'(x) = 12x^2$

16) $f'(x) = 9x^2 - 4x + 1$

17) $f'(x) = 24x^2 - 4x - 5$

18) $f'(x) = 18x^2 - 14x + 3$

19) $f(x) = 16x - 1$

20) $f'(x) = 21x^2 - 1$

21) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

22) $f'(x) = 2x + 3$

23) $f'(x) = 6x^2 - 10x - 2$

24) $f'(x) = 12x^2 - 26x + 4$

25) $f'(x) = 6x - 6$

26) $f'(x) = 4x + 5$

27) $f(x) = 10x - 9$

28) $f'(x) = 8x + 5$

29) $f'(x) = 3x^2 - 7$

30) $f'(x) = 6x^2 + 2x$

31) $f'(x) = 2x - 9$

32) $f'(x) = 3x^2$

33) $f'(x) = 4x + 7$

34) $f\ (x) = 21x^2$

35) $f'(x) = 22x$

viii) **Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas aplicando las propiedades**

1) $f' = 144x^3 + 144x^2 + 30x - 18$
2) $f' = 160x^3 - 48x^2$
3) $f' = 60x^2 + 22x + 17$
4) $f' = 8x^3 - 3x^2 - 26x + 5$
5) $f' = 240x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 42x - 3$
6) $f' = 63x^8 + 32x^7 - 25x^4 - 56x^3 - 24x^2$
7) $f' = 36x^3 - 18x^2 - 16x - 15$
8) $f' = 84x^5 + 175x^4 + 64x^3 + 120x^2$
9) $f' = 81x^2 + 156\,x + 17$

10) $f' = 126x^6 + 72x^5 -$
$105x^4 - 56x^3$

11) $f' = 84x^6 - 48x^5 - 104x^3 -$
$48x^2 + 48x - 10$

12) $f' = 150x^4 + 96x^3 + 36x^2$

13) $f' = 11x^{10} - 48x^5 + 50x^4$

14) $f' = 36x^5 + 72x^5 - 84x^3$

15) $f' = 108x^5 - 84x^3$

16) $f' = 160x^7 + 224x^6 -$
$30x^2 - 32x$

17) $f' = 10x^4 - 16x^3 - 33x^2 +$
$72x - 63$

18) $f' = 24x^3 + 36x^2 - 14x -$
14

19) $f' = 112x^3 + 189x^2$

20) $f' = 60x^5 + 400x^4 +$
$1000\,x^3$

21) $f' = 60x^4 + 84x^2 - 66x$

22) $f'(x) = 7$

23) $g'(x) = 9$

24) $f'(x) = 4x + 8$

25) $g'(x) = 5$

26) $f'(x) = 12x - 3$

27) $g'(x) = 10x$

28) $f'(x) = 6x^2$

29) $g'(x) = 10x + \frac{1}{7}$

30) $f'(x) = 9x^2 - 4x - 5$

31) $g'(x) = 3x^2 + 17$

32) $f'(x) = 9x^2 - 18x - 3$

33) $g'(x) = 24x^2 - 6x$

34) $f'(x) = 42x^2 - 6x + 24$

35) $g'(x) = 28x^3 - 9x^2 - 28x$

36) $f'(x) = 48x^2 + 21$

37) $g'(x) = 72x^2$

38) $f'(x) = 68x^3 + 46x - 3$

39) $g'(x) = 45x^4$

40) $f'(x) = 39x^2 - 24x + 9$

41) $f'(x) = 21x^2 - 24\,x - 15$

42) $f'(x) = 48x^2 - 34x + 13$

43) $f'(x) = 14x - 9$

44) $f'(x) = 51x^2 - 7$

45) $f'(x) = 27x^2 - 16x - 7$

46) $f'(x) = 10x + 3$

47) $f'(x) = 66x^2 - 30x - 12$

48) $f'(x) = 42x^2 - 66x + 14$

49) $f'(x) = 46x - 16$

50) $f'(x) = 64x + 25$

51) $f'(x) = 30x - 19$

52) $f'(x) = 82x + 52$

53) $f'(x) = 21x^2 - 67x$

54) $f'(x) = 96x^2 + 22x$

55) $f'(x) = 10x - 9$

56) $f'(x) = 12x^2$

57) $f'(x) = 4x + 7$

58) $f'(x) = 21x^2$

59) $f'(x) = 22x$

60) $f'(x) = 125x^4 + 48x^3 - 6x$

61) $f'(x) = 42x^6 + 65x^4 - 21x^2 + 1$

62) $f'(x) = 54x^5 - 4x^3 + 14x + 42$

63) $f'(x) = 70x^4 - 108x$

64) $f'(x) = 69x^2 - 108x + 100$

65) $f'(x) = 54x^8 - 84x^6 + 15x^4 - 45x^2$

66) $f'(x) = 99x^{10} + 84x^6 - 12x^3$

ix) Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas aplicando regla de la cadena

1) $f'(x) = (6x^2 - 7x)(4x - 2)^2(168x^2 - 188x + 28)$

2) $f'(x) = (3x^2 - 6x)^4(4x^3 + 5)^3(264x^4\_408x^3 + 150x\_150)$

3) $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x^3 - 7x)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[5]{(5x^4 + 3x^2)}}\right)(-250x^6 + 563x^4 + 231x^2)$

4) $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(7x^2 + 8x)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}\right)\left(\frac{119x^3 + 104x^{2^-} 28 - 16}{3}\right)$

5) $f'(x) = (5x^2 + 6x)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(8x^3 + 6x^2)^2}}\right)\left(\frac{440}{3}x^4 + 212x^3 + 72x^2\right)$

6) $f'(x) = (5 - 3x^2)^{-\frac{1}{2}}(7 - 10x)^2(120x^2 - 21x - 120)$

7) $f'(x) = (5x - 1)^{-2}(2x - 1)^{-3} - 30x + 9$

8) $f'(x) = (4x + 3)^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\left(\frac{40}{3}x - 11\right)$

9) $f'(x) = (2x - 3)(3x^2 - 5)(36x^2 - 56)$

10) $f'(x) = (3x - 7)^2(5x^3 + 4x^2 - 3x + 7)^1(135x^3 + 84x^2 - 157x - 105)$

11) $f'(x) = (6x^3 - x - 3)(x^2 + 8x + 25)^4(132x^4 + 816x^3 + 1786x^2 - 102x - 220)$

12) $f'(x) = (2x^3 + 7)^4(x^2 - 7x + 4)^2(42x^4 - 252x^3 + 120x^2 + 42x + 147)$

13) $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(4x^3 + 8x + 5)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[2]{(3x^2 + 7)}}\right)(-60x^4 - 192x^2 + 15x - 112)$

14) $f'(x) = (13x-4)^5(15x^2+3x+11)^3(2730x^2-90x+810)$

15) $f'(x) = (3x^2 + 10x + 13)^{-5}\,(2x^4 - 5x^2 + 29)^2[(24x^5-80x^4 + 342x^3-100x^2 -846x -1160\ )\,]$

x) Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas trigonométricas

1) $f'(x) = (20x^3 - 7)cos(5x^4-7x)$

2) $f'(x) = -12\cos(2x)$

3) $f'(x) = 3\pi sec^2(3x)$

4) $f'(x) = \frac{1}{2}sen\left(\frac{x}{4} - 1\right)cos\left(\frac{x}{4}-1\right)$

5) $f'(x) = -4\sqrt{e}csc(4x)cot(4x)$

6) $f'(x) = -7sen(7x+3)$

7) $f'(x) = 7x^6cos(x^7)sec^2[sen\ (x^7)]$

8) $f'(x) = \frac{sen(\sqrt{2x})csc^2[\cos(\sqrt{2x})]}{\sqrt{2x}}$

9) $f'(x) = 5x^4sec^2(x^5) + 9sen(9x)$

10) $f'(x) = -55[\cos(11x - 7)]^5\ \mathrm{sen}(11x-7)$

11) $f'(x) = 4sec(4x+6)[tan(4x+6)tan(8x-5)+2sec^2(8x-5)]$

12) $f'(x) = \frac{tan(11x)[csc(11x)+1]\left(11csc^2(11x)+11csc(11x)+22xsec(11x)-2\right)}{[\mathrm{cotg}(11x)+2x]^2}$

13) $f'(x) = 18sen(9x + 2)cos(9x+2)$

14) $f'(x) = -24\cos(12x - 2)\ sen(12x-2)$

15) $f'(x) = 10\tan(5x + 9)sec^2(5x + 9)$

16) $f'(x) = -14csc^2(7x + 5)cot(7x + 5)$

17) $f'(x) = 4\tan(2x - 7)sec^2(2x - 7)$

18) $f'(x) = -2\cot(x + 3)csc^2(x + 3)$

19) $f'(x) = -36cos^2(12x - 10)sen(12x - 10)$

20) $f'(x) = -\frac{10sec^2(5x)}{3tan^{\frac{5}{3}}(5x)}$

21) $f'(x) = -\frac{21}{2}\sqrt{\cot(7x + 2)}\,csc^2(7x + 2)$

22) $f'(x) = \frac{xcsc^2(x^2)}{cotg^{\frac{3}{2}}(x^2)}$

23) $f'(x) = \frac{36sen^2\left(8-\frac{4}{x^3}\right)cos\left(8-\frac{4}{x^3}\right)}{x^4}$

24) $f'(x) = \frac{2cos[\ln(2x-7)]}{2x-7}$

25) $f'(x) = 5cos[tan(5x)]sec^2(5x)$

26) $f'(x) = -7cos[cotg(7x)]csc^2(7x)$

27) $f'(x) = 168x^2(x^3 + 2)^7 sen^6[(x^3 + 2)^8]cos[(x^3 + 2)^8]$

28) $f'(x) = -\frac{(8x^4+5)\,\mathrm{sen}[ln(2x^4+5x)]}{2x^4+5x}$

29) $f'(x) = 16(5 - 4x)sen[(-4x + 5)^2]cos[(-4x + 5)^2]$

30) $f'(x) = \frac{(14x+2))sec^2[ln(7x^2+2x)]}{7x^2+2x}$

31) $f'(x) = -2sen[cos(cos(2x))]sen(cos(2x))sen(2x)$

32) $f'(x) = 12cotg(-2x + 5)^5csc^2(-2x + 5)$

33) $f'(x) = [3cos(3x) - 2sen(3x)]e^{-2x}$

34) $f'(x) = \frac{-21x-10sen(2x)}{7x^{-3}+5\cos(2x)}$

35) $f'(x) = e^{sen(2x)}\sec(3x)[2\cos(2x) + 3\tan(3x)]$

36) $f'(x) = 4\cos(4x)e^{sen(4x)} - 7$

37) $f'(x) = sec^2(x)e^{\tan(x)} - 4sen(x)e^{4\cos(x)}$

38) $f'(x) = \frac{2e^{arc\,sen(2x)}}{\sqrt{1-4x^2}}$

39) $f'(x) = e^{5x}[5sen(7x) + 7cos(7x)]$

40) $f'(x) = e^{\cos(x)}[8cos(8x) - sen(x)sen(8x)]$

41) $f'(x) = 3\left[\cos(3x)\,e^{\text{sen}\,(3x)} - sen(3x)e^{\cos(3x)}\right]$

xi) Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas de potencias

1. $f'(x) = (144x^3 - 252x^2 + 314x - 126)$
2. $f'(x) = (30x - 30)\,(3x^2 - 6x + 1)^4$
3. $f'(x) = \frac{-(18x^2 + 21)}{(2x^3 - 7x + 3)^4}$
4. $f'(x) = \frac{3x}{\sqrt[4]{2x^2 - 1}}$
5. $f'(x) = \frac{28x+16}{3\cdot(\sqrt[3]{(7x^2 + 8x + 9)})}$
6. $f'(x) = (\frac{40x}{3} + 8)\sqrt[3]{(5x^2 + 6x + 9}$
7. $f'(x) = \frac{24x^2 + 12x + 8}{3\cdot(\sqrt[3]{(8x^3 + 6x^2 + 8x - 1)^2}}$
8. $f'(x) = \frac{-(80x^3 + 24x)}{(5x^4 + 3x^2 + 1)^5}$
9. $f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt[2]{5-3x^2}}$

10. $f'(x) = -1470 + 4200x - 3000x^2$

11. $f'(x) = 3072x^{11} + 11520x^8 + 114400x^5 + 6000)$

12. $f'(x) = 192x^2 - 192x + 48$

13. $f'(x) = \frac{-(5)}{25x^2-10x+1}$

14. $f'(x) = -\frac{4}{8x^{3^-}-12x^2+6-1}$

15. $f'(x) = 192x^2 + 288x + 108$

16. $f'(x) = \left(\frac{1}{3\cdot(\sqrt[3]{(x+1)^2})}\right)$

17. $f'(x) = 8x - 12$

18. $f'(x) = 36x^3 - 60x$

19. $f'(x) = 81x^2 - 378x + 441$

20. $f'(x) = 150x^5 + 200x^4 - 56x^3 + 138x^2 + 130\,x - 42$

21. $f'(x) = (72x^2 - 4)\,(6x^3 - x - 3)^3$

22. $f'(x) = (10x + 40)\,(x^2 + 8x + 25)^4$

23. $f'(x) = 30x^2\,(2x^3 + 7)^4$

24. $f'(x) = 6x^5 - 84x^4 + 342x^3 - 504x^2 + 1566\,x - 1365$

25. $f'(x) = \frac{-(24x^2 + 16)}{(4x^3 + 8x + 5)^3}$

26. $f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 7}}$

27. $f'(x) = (78x)\,(13x - 4)^5$

28. $f'(x) = (120x + 12)\,(15x^2 + 3x + 11)^3$

29. $f'(x) = \frac{-(24x + 40)}{(3x^2 + 10x + 13)^5}$

30. $f'(x) = (24x^3 - 30x)\,(2x^4 - 5x^2 + 29)^2$

xii) Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas implícitas

1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{8x}{15y^2}$

2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{5}$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y^5}{5x^3y^4}$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y^2}$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{-15x^2}{2y}$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2}{y}$

7) $\frac{dy}{dx} = \frac{-35x^4}{6y^2 - 10y}$

8) $\frac{dy}{dx} = \frac{-28x-9y}{9x+2y}$

9) $\frac{dy}{dx} = \frac{-20x^{4^{-}}-x^2y}{x^3+2xy}$

10) $\frac{dy}{dx} = \frac{16x^3}{17y}$

11) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3-6x^5-30x^2y}{10x^3+50y}$

12) $\frac{dy}{dx} = \frac{-6x+y}{x-5}$

13) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y^7}{7x^3y^6}$

14) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{5y}$

15) $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4}{18y^2}$

16) $\frac{dy}{dx} = \frac{-5x}{18y^3}$

17) $\frac{dy}{dx} = \frac{13x}{6y^2}$

18) $\frac{dy}{dx} = \frac{450y^8-1080xy^4+648x^2+36x}{(1500y^{11}-3600xy+2160x^2y^3)}$

19) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2}{5y^2}$

20) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{7}$

21) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x\,y^4}{2x^2\,y^3}$

22) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{3\,y^5}$

23) $\frac{dy}{dx} = \frac{-15x}{17\,y^2}$

24) $\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2}{2\,y}$

25) $\frac{dy}{dx} = \frac{-5x^4}{3y^2-30y}$

26) $\frac{dy}{dx} = \frac{-16x^3+6y}{6x+4y}$

27) $\frac{dy}{dx} = \frac{-32x^7 - 3x^2y^3 - y^2}{(3y^2x^3 + 2xy)}$

28) $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^3}{7y}$

29) $\frac{dy}{dx} = \frac{-24x^5 + 8x^3 - 12x^2y}{4x^3 + 2y}$

30) $\frac{dy}{dx} = \frac{-26x + y}{-x - 15}$

31) $\frac{dy}{dx} = \frac{-6x^2y^7}{14y^6x^3\frac{dy}{dx}}$

32) $\frac{dy}{dx} = \frac{44x^3}{15y}$

33) $\frac{dy}{dx} = \frac{15x^4}{27y^2}$

34) $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4}{9y^2}$

35) $\frac{dy}{dx} = -\frac{25x}{4y^3}$

36) $\frac{dy}{dx} = \frac{23x}{21y^2}$

37) $\frac{dy}{dx} =$

$\frac{18\,x + 39\,y^8 - 1014\,xy^4 + -6591x^2}{12y^{11} - 312xy^7 + 2028\,x^2y^3}$

38) $\frac{dy}{dx} = \frac{3 + 2y}{3y^2 - 2x}$

39) $\frac{dy}{dx} = \frac{15x^2 - 3}{48y^5 + 144\,y^3 + 108y}$

40) $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 + 3y}{-3x + 4y^3}$

41) $\frac{dy}{dx} = \frac{-6xy - 6y^2}{3x^2 - 12xy + 8y^3}$

xiii) Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas orden superior

1) $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 14x;$

$f''(x) = 36x^2 - 30x + 14$

2) $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 3;$

$f''(x) = 20x^3 - 12x$

3) $f'(x) = 8x^7 + 12x^5 - 7;$

$f''(x) = 56x^6 + 60x^4$

4) $f'(x) = 24x - 18;$

$f''(x) = 24$

5) $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 10x + 13;$

$f''(x) = 24x^2 - 24x + 10$

6) $f'(x) = 15(5x - 9)^2;$

$f''(x) = 150(5x - 9)$

7) $f'(x) = [12x \cdot (5x + 7)] + [5 \cdot (6x^2 - 4)]$;

$f''(x) = 90x^2 + 84x + - 20$

8) $f'(x) = 12x^3 + 6x^2 + 2x$;

$f''(x) = 36x^2 + 12x + 2$

9) $f'(x) = 6x^2 + 8x - 5$;

$f''(x) = 12x + 8$

10) $f'(x) = 18x^8 - 42x^5 + 12x^3 - 10x$;

$f''(x) = 144x^7 - 210x^4 + 36x^2 - 10$

11) $f'(x) = 30(7 - 10x)^2$;

$f''(x) = ^- - 600(7 - 10x)$

12) $f'(x) = 16\,(4x + 5)^3$;

$f''(x) = 192(4x + 5)^2$

13) $f'(x) = 12(4x - 2)^2$;

$f''(x) = 96(4x - 2)$

14) $f'(x) = 20(4x + 3)^4$;

$f''(x) = 320(4x + 3)^3$

15) $f'(x) = 5(x + 1)^4$;

$f''(x) = 20(x + 1)^3$

16) $f'(x) = 4(2x - 3)$;

$f''(x) = 8x$

17) $f'(x) = 2(3x^2 - 5)(6x)$;

$f'(x) = 12(3x^2 - 5) + 72x^2$

18) $f'(x) = 9(3x - 7)^2$;

$f''(x) = 54(3x - 7)$

19) $f'(x) = 18x^2 - 10x \cdot (6x + 3) + [6 \cdot (6x^3 - 5x^2 - 3)]$;

$f''(x) = 108x^3 + 54x^2 + 60x^2 + 30x + 36x^3 - 30x^2 - 18$

20) $f'(x) = 24 \cdot (5x - 2) + [5 \cdot 8x^3]$;

$f''(x) = 120x - 48 + 40x^3$

21) $f(x) = 10x - 1 \cdot (4x + 3) + [4 \cdot (5x^2 - x + 5)]'$;

$f''(x) = 40x^2 + 30x - 4x - 3 + 20x^2 - 4x + 20$

22) $f'(x) = 2 \cdot (4x + 3) + [2 \cdot (2x + 5)];$

$f''(x) = 8x + 6 + 4x + 10$

23) $f'(x) = 24x^2 + 2x - 1 \cdot (6x^2 + 3) + [12x \cdot (8x^3 + x^2 - x + 3)\ ];$ $f''(x) = 144x^4 + 72x^2 + 12x^3 + 6x - 6x^2 - 3$

24) $f'(x) = 28x^3 + 12x^2 \cdot (x^5 - 2) + [5x^4 \cdot (7x^4 + 4x^3 - 5)\ ];$

$f''(x) = 28x^4 - 56x^3 + 12x^7 + 24x^2 + 35x^8 + 20x^7 - 25x^4$

25) $f'(x) = 9x^2 + 4x \cdot (3x - 4)\ + [3 \cdot (3x^3 + 2x^2 + 5)];$

$f''(x) = 27x^3 - 36x^2 + 12x^2 - 16x + 9x^3 + 6x^2 + 15$

26) $f'(x) = 28x^3 + 16x \cdot (2x^2 + 5x) + [4x + 5 \cdot (7x^4 + 8x^2)];$

$f''(x) = 56x^5 + 140x^4 + 32x^3 + 80x^2 + 28x^5 + 32x^3 + 35x^4 + 40x^2$

27) $f'(x) = 9 \cdot (3x^2 + 7x - 2) + [6x + 7 \cdot (9x + 5)];$

$f''(x) = 36x^2 + 63x\ - 18 + 54x^2 + 30x + 63x\ + 35$

28) $f'(x) = 24x^3 - 14x \cdot (3x^3 + 7x - 2) + [9x^2 + 7 \cdot (6x^4 - 7x^2)];$

$f''(x) = 73x^6 + 168x^4\ - 48x^3 - 42x^4 + 98x^2 + 28x\ + 54x^6 - 63x^4 + 42x^4 - 49x^2$

29) $f'(x) = 8x^3 - 5 \cdot (6x^3 - 4x^2 + 2)\ + [18x^2 + 8x \cdot (2x^4 - 5x - 6)];$ $f''(x) = 48x^6 - 32x^5\ + 16x^3 + 30x^3 + 20x^2 - 10 + 36x^6 - 90x^2 + 108x^2 - 16x^5 - 40x^2 - 48x$

30) $f'(x) = 18x^3 \cdot (5x^2 + 4x + 2) + [10x + 4 \cdot 6x^3]$;

$f''(x) = 90x^5 + 72x^4 + 32x^3 + 60x^4 + 24x^3$

31) $f'(x) = [6x^5 \cdot (x^5 - 8)] + [5x^4 \cdot (x^6 + 10)]$;

$f''(x) = 6x^{1º} - 48x^5 + 5x^{1º} + 50x^4$

32) $f'(x) = [12x \cdot (3x^4))] + [12x^3 \cdot (6x^2 - 7)]$;

$f''(x) = 36x^5 + 72x^5 - 84x^3$

33) $f'(x) = [(15x^2 + 16x) \cdot (4x^5 - 2)] + [20x^4 \cdot (5x^3 + 8x^2)]$;

$f''(x) = 60x^7 - 30x^2 + 64x^6 - 32x + 100x^7 + 160x^6$

34) $f'(x) = [(6x^2 - 8x + 7) \cdot (x^2 - 9)] + [2x \cdot (2x^3 - 4x^2 + 7x)]$;

$f''(x) = 6x^3 - 54x^2 - 8x^3 + 72x + 7x^2 - 63 + 4x^4 - 8x^3 + 14x^2$

35) $f'(x) = [(2x + 2) \cdot (6x^2 - 7)] + [12x \cdot (x^2 + 2x)]$;

$f''(x) = 12x^3 - 14x + 12x^2 - 14 + 12x^3 + 24x^2$

36) $f'(x) = [21x^2 \cdot (4x + 9)] + [4 \cdot (7x^3)]$;

$f''(x) = 84x^3 + 189x^2 + 28x^3$

37) $f'(x) = [40x^3 \cdot (x^2 + 8x + 25)] + [(2x + 8) \cdot (10x^4)]$;

$f''(x) = 40x^5 + 320x^4 + 1000x^3 + 20x^5 + 80x^4$

38) $f'(x) = [12x \cdot (3x^2 + 7)] + [6x \cdot (4x^3 - 11)]$;

$f''(x) = 36x^3 + 84x + 24x^4 - 66x$

39) $f'(x) = 125x^4 + 48x^3 - 6x$;

$f''(x) = 500x^3 + 144x^2 - 6$

40) $f'(x) = 42x^6 + 65x^4$;

$f''(x) = 252x^5 + 260x^3$

41) $f'(x) = 54x^5 - 4x^3 + 14x + 42$;

$f''(x) = 270x^4 - 12x^2 + 14$

42) $f'(x) = 70x^4 - 108x$;

$f''(x) = 280x^3 - 108$

43) $f'(x) = 69x^2 - 108x + 100$;

$f''(x) = 138\,x - 108$

44) $f'(x) = 54x^8 - 84x^6 + 15x^4 + 45x^2$;

$f''(x) = 432x^7 - 504x^5 + 60x^3 - 90x$

45) $f'(x) = 99x^{1\text{º}} + 84x^6 - 12x^3$;

$f''(x) = 990x^9 + 504x^5 - 36x^2$

xiv) Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas logarítmicas

1) $f'(x) = \frac{4}{x}$

2) $f'(x) = -\frac{7}{x}$

3) $f'(x) = \frac{35}{x}$

4) $f'(x) = \frac{33}{7x}$

5) $f'(x) = \frac{21}{55x}$

6) $f'(x) = \frac{9}{2x}$

7) $f'(x) = \frac{4}{3x}$

8) $f'(x) = \frac{8}{3x}$

9) $f'(x) = \frac{30x^4+33x^2-12}{6x^5+11x^3-12x}$

10) $f'(x) = \frac{3x^2-5}{x^3-5x}$

11) $f'(x) = \frac{16x^3-5x^{-6}+2e^x}{4x^4+x^{-5}+2e^x-2}$

12) $f'(x) = \frac{42x^5-21x^{-8}+20x^3+8e^x}{7x^6+3x^{-7}+5x^4+8e^x-11}$

13) $f'(x) = \ln(x-8)^3 + \frac{3x+7}{x-8}$

14) $f'(x) = (4x^3+2x+3x^{-4})\ln(3x^2-12) + \frac{(x^4+x^2-x^{-3}+11)(6x)}{3x^2-12}$

15) $f'(x) = (35x^4+39x^2+1)\ln(7x^6-x+7) + \frac{(7x^5+13x^3+x+1)(42x^5-1)}{7x^6-x+7}$

16) $f'(x) = (-21x^6+20x)\ln(x^6-7x-3) + \frac{(-3x^7+10x^2+3)(6x^5-7)}{x^6-7x-3}$

17) $f'(x) = e^x + 11^x\log(11) + \frac{1}{x} + 14x - 2$

18) $f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x\ln(4x))}{x}$

19) $f'(x) = \frac{e^x[x\ln|5x|+1]}{x}$

20) $f'(x) = e^x - 12^x\log(12) + \frac{1}{x} - 4x^3 - 6$

21) $f'(x) = \frac{12\left[\ln(5x^4+2x^3+3x^{-2}+6)\right]^5(10x^3+4x^2-3x^{-3})}{5x^4+2x^3+3x^{-2}+6}$

22) $f'(x) = -\frac{20(6x^5+11x^3-5x^{-6})}{(4x^6+11x^4+4x^{-5}+7)[\ln(4x^6+11x^4+4x^{-5}+7)]^6}$

23) $f'(x) = \frac{5\left[\ln\left(2x^3+4x^2+\frac{7}{5}x^{-5}+9x-1\right)\right]^4(6x^2+8x-7x^{-6}+9)}{2x^3+4x^2+\frac{7}{5}x^{-5}+9x-1}$

24) $f'(x) = \frac{7\left[\ln(x^3+x^2+x^{-5}+x-1)\right]^8(3x^2+2x-5x^{-6}+1)}{x^3+x^2+x^{-5}+x-1}$

25) $f'(x) = \frac{4\left[\ln(7x^4+5x^3+3x^{-7}+2x+12)\right]^3(28x^3+15x^2-21x^{-8}+2)}{7x^4+5x^3+3x^{-7}+2x+12}$

xv) Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas exponenciales

1) $f'(x) = 3e^{3x}$
2) $f'(x) = 11e^{11x}$
3) $f'(x) = -7e^{-7x}$
4) $f'(x) = -11e^{-11x}$
5) $f'(x) = \frac{5}{7}e^{\frac{5x}{7}}$
6) $f'(x) = 45e^{3x}$
7) $f'(x) = 15x^4e^{x^7} + 21x^{11}e^{x^7}$
8) $f'(x) = -2e^{-5x}\sqrt{e^{6x}}$
9) $f'(x) = -\frac{15e^{-x}}{2\sqrt{15e^{-x}+1}}$
10) $f'(x) = 7x^{27}e^{35x}(5)^7(4 + 5x)$
11) $f'(x) = 3e^x(x + 1)$
12) $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{5x^2}$
13) $f'(x) = -9e^{-x}(x - 1)$
14) $f'(x) = -3x^3(x - 4)e^{-x}$
15) $f'(x) = (-5x^3 + 15x^2 - 18)e^{-x}$
16) $f'(x) = 6(x^2 + 6x + 4)e^x$
17) $f'(x) = \frac{(7x^4-4x^3+63)e^{7x}}{(x^4+9)^2}$
18) $f'(x) = \frac{(5x^2-2x-20)e^{5x}+10x}{(x^2-4)^2}$
19) $f'(x) = 4(e^{9x} + 2x^7)^3(9e^{9x} + 14x^6)$

20) $f'(x) = 4x(4x^2 + 3x + 2)(x^4 + x^3 + x^2 - 7)^3 e^{(x^4+x^3+x^2-7)^4}$

21) $f'(x) = 6(3x^5 - 6x^2 - 5x)^5(15x^4 - 12x - 5)\ e^{(3x^5-6x^2-5x)^6}$

22) $f'(x) = 5\left(\frac{14}{9}x^6 - 48x^2 + \frac{10}{7}x - 9\right)\left(\frac{2}{9}x^7 - 16x^3 + \frac{5}{7}x^2 - 9x + 11\right)^4\ e^{\left(\frac{2}{9}x^7-16x^3+\frac{5}{7}x^2-9x+11\right)^5}$

23) $f'(x) = 3e^{3x} - e2^e x^{e-1} + 3x^{3x}[\log(x) + 1]$

24) $f'(x) = (\pi + 17)^x \log(\pi + 17)$

25) $f'(x) = \frac{-22x^8+55x^7-24x^6+36x^5-46x^3+2x+2}{x^3e^{2x}}$

xvi) Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas de funciones inversas

1) $f'(x) = -\frac{5e^{arc\,cos(5x)}}{\sqrt{1-25x^2}}$

2) $f'(x) = \frac{9e^{arc\,tan(9x)}}{81x^2+1}$

3) $f'(x) = 3x^2 arc\tan(x^2 + 4) + \frac{2x(x^3-1)}{(x^2+4)^2+1}$

4) $f'(x) = (5x^4 + e^x)\,arcot(x^2 + 2x - 4) - \frac{(2x+2)(x^5+e^x+2)}{(x^2+2x-4)^2+1}$

5) $f'^{(x)} = (4x^3+6x)arc\sec(x^2+e^{3x}-2) +$

$\frac{(x^4+3x^2-5)(2x+3e^{3x})}{(x^2+e^{3x}-2)\sqrt{(x^2+e^{3x}-2)^2-1}}$

6) $f'^{(x)} = 2arc\ csc\ (x^2-8) - \frac{4x^2-18x}{(x^2-8)\sqrt{(x^2-8)^{2-1}}}$

7) $f'(x) = (4x^3-9)arcsen\ (x^3-7x) + \frac{(x^4-9x+3)(3x^2-7)}{\sqrt{1-(x^3-7x)^2}}$

8) $f'^{(x)} = \frac{(3x^3+5)}{arccos\ (x^4-3x^2+2)} - \frac{(x^3+5x-2)\ (4x^3-6x)}{\sqrt{1-(x^4-3x^2+2)^2}\{arccos\ (x^4-3x^2+2)\}^2}$

9) $f'^{(x)} = \frac{(5x^4+2e^x)}{arccos\ (3x^2-2x+9)} - \frac{(x^5+e^{2x}+7)\ (6x-2)}{\sqrt{1-(3x^2-2x+9)^2}\{arccos\ (3x^2-2x+9)\}^2}$

10) $f'^{(x)} = -\frac{2+3x}{x((3x+\ln|5x^2|))\sqrt{1-(3x+\ln|5x^2|)^2}}$

xvii) Respuestas a ejercicios propuestos de derivadas parciales

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 2x-18y$ $\quad\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 2y-18x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 2$ $\quad\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = -18$ $\quad\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = -18$

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 3x^2+8y$ $\quad\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 3y^2-18x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 6x$ $\quad\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 8$ $\quad\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 8$

3) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \ 5y^7 - 9$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = \ 35\, xy^6 - 3y^2 - 4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \ 0$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \ 190\, xy^5 - 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = \ 35y^6$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = \ 35\, y^6$

4) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = y + 1$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = x \ - 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 0$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = \ 1$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = \ 1$

5) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 2xy$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = x^2 + 3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 2y$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 2x$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = \ 2x$

6) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 2xy - y^2 + 2x$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = x^2 - 2\mathrm{x}y + 2y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 2y - 2$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 2x + 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 2x - 2y$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = 2x - 2y$

7) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \ 3x^2y + y^3 - 2y$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = \ x^3 + 3xy^2 -$

$2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \ 6xy$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \ 6xy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 3x^2 +$

$3y^2 - 2$

8) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 3x^2 - 3y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) =$

$-3x + 3y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 6x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = -3$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = -3$

9) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 3x^2 + 6xy - 6y^2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 3x^2 -$

$12xy + 6y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 6x + 6y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = -12x +$

$12y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 6x - 12y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 6x -$

$12y$

10) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 16x + 21x^2y^4$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 28x^3y^3 +$

$55y^4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 16 + 42xy^4$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 84x^3y^2 -$

$220y^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 84x^2y^3$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 84x^2y^3$

11) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 8x - 7y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 16y^3 - 7x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 8$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 48y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = -7$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = -7$

12) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 12x + 7$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 15y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 12$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 30y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 0$

13) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 4x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 8y + 7$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 4$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 8$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 0$

14) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 2y + 7$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 2x + 5$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 2$

15) $\frac{\partial f}{\partial x} = F_x(x,y) = \ 5y + 1$ $\frac{\partial f}{\partial y} = F_y(x,y) = \ 5x - 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = F_{xx}(x,y) = \ 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = F_{yy}(x,y) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 5$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 5$

16) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = \ 2 - 2y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = \ 6 - 2x + 2y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = -2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = -2$

17) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = \ 4x^3y^3$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = \ 3x^4y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = \ 12x^2y^3$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 6x^4y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 12x^3y^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = \ 12x^3y^2$

18) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 8xy^6 + 6x^2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 24x^2y^5 + 10\mathrm{y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 8y^6 + 12x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 120x^2y^4 +$

10

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 48\mathrm{x}y^5$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 48\mathrm{x}y^5$

19) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = \ 820x + 90 + y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = -320y -$

$85 + x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \ \ 820$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = -320$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 1$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = \ 1$

20) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 1160x^3 \ -40 \ -190y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 920y^3 \ +$

$30 \ -190x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 3480x^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) =$

$2760y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = -190$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) =$

-190

21) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \ \ 315x^2 - 18x + 290y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = \ \ 760y -$

$78y + 290x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \ \ 630x - 18$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) =$

682

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = \ 290$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = 290$

22) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 30x^5 + 16x^3y^3$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) =$

$12y^2(x^4) = 12x^4y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 150x^4 + 48x^2y^3$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 24x^4y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 48x^3y^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 48x^3y^2$

23) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 7y^6$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 42xy^5 - 42y^6$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 210\,xy^4 - 252y^5$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 42y^5$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 42y^5$

24) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = \ 72x - 19y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = \ -19x - 154y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 72$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = -154$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 44 \ - \ 63 \ = \ -19$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = -63 \ +$

$44 \ = \ -19$

25) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = \ \ 408x - 27y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = -27x - 270y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 408$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) =$

-270

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = -180 + 153 = \ -27$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 153 -$

$180 = \ -27$

26) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = -70x + 28y + 325$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) =$

$4.(7x+5) = 28x + 20$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = -70$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 28$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 28$

27) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 24\,y - 88$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = 84y + 24x +$

874

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 84$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = 24$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = 24$

28) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 1200 + 17y - 18y - 60y + 360$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = -x + 4 + 20y - 240 + 2150 - 60x + 20y$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 40$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = -61$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = -61$

29) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = 12x - 37y + 368$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = -37x + 24y + 252$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 12$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 24$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = -37$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = -37$

30) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 10x - 150y + 1004$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = -150x + 40y + 660$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 10$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 40$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = -150$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = -150$

41) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 24x^3$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 56\,y^6$ $\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 72z^5$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 72x^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 336y^5$ $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{zz} = 360z^4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = f_{yz} = 0$

42) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2(x + 3) = 2x + 6$; $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2(y + 5) = 2y + 10$; $\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 2z + 14$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial \partial^2} = f_{yy} = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{zz} = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = f_{yz} = 0$

43) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 3x^2y^2 + 3x^2z^4$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2\,x^3y + 5y^4$ $\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 4x^3z^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \quad 6x \quad y^2 + 6xz^4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \ 2\,x^3 + 20y^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{zz} = 12x^3 z^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = \ 6x^2 y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = 12x^2 z^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} =$

$f_{yz} = 0$

44) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \ 3x^2 + 2\mathrm{z} - 4yz \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3z^2 - 4xz$

$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 2x + 6yz - 4xy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$

$f_{zz} = 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = -4yz \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = 2 - 4y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} =$

$f_{yz} = 6z - 4x$

45) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \ 2x + 4y + 3z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \ 4x \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f_z = -2z + 3x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \ 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{zz} = -2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = \ 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = 3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = f_{yz} = 0$

46) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \ 2x + 6z \ - 2y^2 z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -4xyz$

$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 6x \ - 2xy^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = -4xz$ $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$

$f_{zz} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = -4y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = 6 - 2y^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} =$

$f_{yz} = -4xyz$

47) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 3x^2 - 3y^2 + 2xy^2z^2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2y - 6xy +$

$2x^2yz^2$ $\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 6 + 2x^2y^2z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 6x + 2y^2z^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 2 - 6x + 2x^2z^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{zz} = 2x^2y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = -6y + 4xyz^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = 8xy^2z^3$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} =$

$f_{yz} = 4x^2yz$

48) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 12x^3 + 3y^4 - 3x^2y^3z^3$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -8y +$

$12xy^3 - 3x^3y^2z^3$ $\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = -16 + 3x^3y^3z^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 36x^2 - 6xy^3z^3$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = -8 + 36xy^2 -$

$6x^3yz^3$ $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{zz} = -6x^3y^3z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = 12y^3 - 9x^2y^2z^3$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = -9x^2y^2z^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = f_{yz} = -9x^3y^2z^2$

49) $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 3y^2 + 8x^3y^4z^4$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 6xy + 8x^4y^3z^4$

$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 8x^4y^4z^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 24x^2y^4z^4$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 6x + 24x^4y^2z^4$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$

$f_{zz} = 24x^4y^4z^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = 6y + 24x^3y^3z^4$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = 24x^3y^4z^3$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} =$

$f_{yz} = 24x^4y^3z^3$

50) $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 35x^4$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3y^2 + 18y - 2yz^2$

$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 1 - 2y^2z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 140x^3$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 6y + 18 - 2z^2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$

$f_{zz} = -2y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} =$

$f_{yz} = -4yz$

xviii) Respuestas a ejercicios propuestos de grafica de funciones

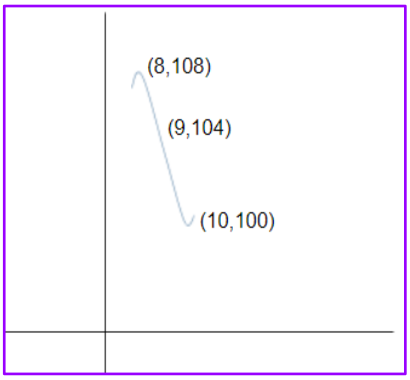
1) Los valores críticos $x = 10$ y $x = 8$

   Puntos extremos $(10{,}100)$; $(8{,}108)$

   $f''(10) = 12 > 0$ Còncava hacia arriba, mìnimo relativo

   $f''(8) = -12 < 0$ Còncava hacia abajo, màximo relativo

   Puntos de inflexión= $(9{,}104)$

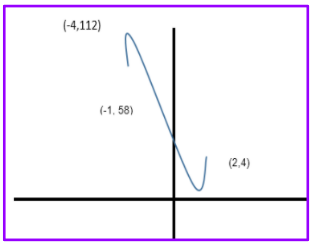


2) Los valores críticos $x = 2$ $x = -4$

   Puntos extremos $(2{,}4)$; $(-4{,}112)$

   $f''(-4) = -18 < 0$ Còncava hacia abajo, màximo relativo

   Puntos de inflexión= $(-1, 58)$



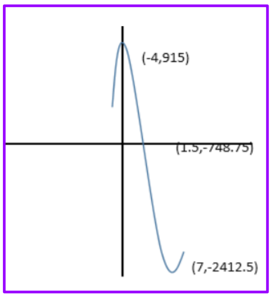
3) Los valores críticos $\boldsymbol{x = -4} \quad \boldsymbol{x = 7}$

Puntos extremos $(-4{,}915)$; $(7, -2412.5)$

$\boldsymbol{f''(-4) = -165 < 0}$ cóncava hacia abajo, máximo

$\boldsymbol{f''(-4) = 165 > 0}$ cóncava hacia arriba, mínimo relativo

Puntos de inflexión=$(\mathbf{1.5}, \mathbf{-748.75})$



4) Los valores críticos $x = 4 \quad x = -8$

Puntos extremos $(4, -493)$; $(-8{,}1235)$

$f''(4) = 72 > 0$ Còncava hacia arriba, mìnimo relativo

$f''(-8) = -72 < 0$ Còncava hacia abajo, màximo relativo

Puntos de inflexión= $(-2{,}371)$

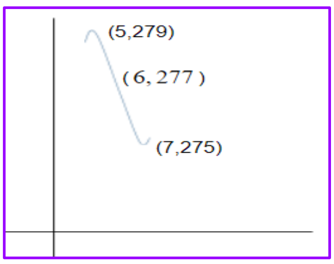
5) Los valores críticos $x = 7$ $x = 5$

Puntos extremos $(7{,}275)$; $(5{,}279)$

$f''(10) = 6 > 0$ Còncava hacia arriba, mìnimo relativo

$f''(8) = -6 < 0$ Còncava hacia abajo, màximo relativo

Puntos de inflexión= $(6{,}277)$



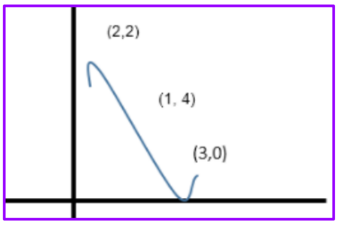
6) Los valores críticos $x = 1$ $x = 3$

Puntos extremos (1,4) ; (3,0)

$f''(0) = -12 < 0$ Còncava hacia abajo, màximo relativo

$f''(4) = 12 > 0$ Còncava hacia arriba, mìnimo relativo

Puntos de inflexión= (2,2)



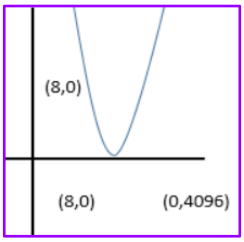
7) Valores críticos $x = 8$ $x = 0$

Puntos extremos (8,0) (0,4096)

$f''(0) = 768 < 0$ cóncava hacia abajo, máximo relativo

$f''(4096) = 2005409628 > 0$ cóncava hacia arriba, mínimo relativo

Puntos de inflexión (8,0)



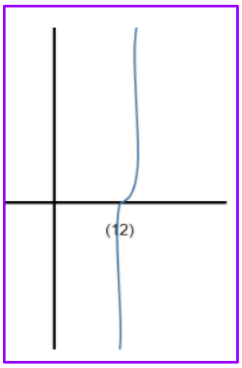
8) Los valores críticos $x = 0 \quad x = 12$

Puntos extremos $(0, 1728)$; $(12,0)$

$f''(0) = -72 < 0$ cóncava hacia abajo, máximo relativo

$f''(1728) = 102962 > 0$ cóncava hacia arriba, mínimo relativo

Puntos de inflexión= $(12, 0)$



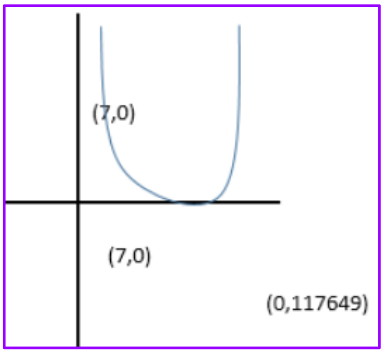
9) Valores críticos $x = 7$ $x = 0$

Puntos extremos (7,0) (0,117649)

$f''(0) = -72030 < 0$ cóncava hacia abajo, máximo relativo

$f''(16.90) = 30(117649)^4 > 0$cóncava hacia arriba, mínimo relativo

Puntos de inflexión (7,0)



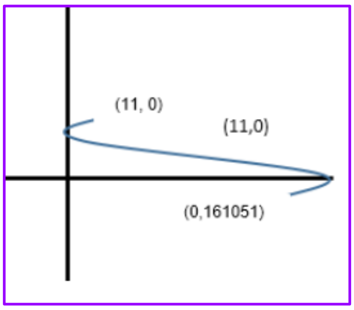
10) Los valores críticos $x = 11 \quad x = 0$

Puntos extremos $(11, 0)$ (0,161051)

$f''(11) = 0 = 0 <$ Còncava hacia abajo, màximo relativo

$f''(0) = 26620 > 0$ Còncava hacia arriba, mínimo relativo

Puntos de inflexión= $(11, 0)$



xix) Respuestas a ejercicios propuestos del teorema del valor medio

1) $c = 2$

2) $c_1 = 1$

   $c_2 = -1$

3) $c_1 = 2.09$

   $c_2 = -1.43$

4) $c_1 = 1.75$

   $c_2 = 0.26$

5) $\boldsymbol{c} = 2$

xx) Respuestas a ejercicios propuestos la regla de L´Hopital

1) 1

2) ∞

3) 0

4) 0

5) $-\infty$

6) $\frac{3}{5}$

7) $\frac{9}{7}$

8) ∞

9) $\frac{5}{3}$

10) $\frac{19}{17}$

11) $\frac{5}{6}$

12) 0

13) 0

14) 0

15) $\frac{62748517}{6}$

16) $\frac{2}{15}$

17) $\frac{8}{7}$

18) 0 19) ∞ 20) ∞

xxi) Respuestas a ejercicios propuestos de razón de cambio

1) La altura aumenta con una rapidez de $\frac{1}{18\pi}\left[{}^{pie}/_{seg}\right]$
2) La altura aumenta con una rapidez de $\frac{4}{9\pi}\left[{}^{metro}/_{hora}\right]$
3) La altura disminuye con una rapidez de $\frac{125}{72\pi}\left[{}^{pie}/_{minuto}\right]$
4) La velocidad con la que aumenta la altura del avión respecto al radar es de $150\sqrt{3}\left[{}^{km}/_{k}\right]$
5) Se separan a una razón de $471.5\left[{}^{km}/_{k}\right]$

Glosario

R

S

T

Bibliografía

Aguilar Márquez, A. (2010). *Cálculo diferencial e integral* . México : Pearson .

Apostol, T. M. (2001). *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* España: REVERTE, S. A.

DEMIDOVICH, B. (1980). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. España: Paraninfo.

Finney/Demana/Waits/Kennedy. (s.f.). *Cálculo de una variable* . PEARSON / PRENTICE HALL.

Frank Ayres, J. (1989). *Cálculo Diferencial e Integral.* España: McGRAW-HILL.

Guber, M. S.-R. (2004). *Elementos de Calculo Diferencial e Integral.* Libreria y Editorial Alsina.

Guervós Sánchez, E. (2008). *Introducción al cálculo Cálculo diferencial cálculo integral ecuaciones diferenciales ordinarias* . España : Garcia-maroto .

Jiménez, R. (2008). *Cálculo diferencial.* México : Pearson educacion S.A. .

Larson, R. (2010). *Cálculo 1* . México : Mcgrawhill .

Lubary Martínez, J. A. (2008). *Cálculo para ingeniería informática* . Madrid: Ediciones UPC.

MARTIN, F. G. (s.f.). *CALCULO INFINITESIMAL DE UNA Y VARIAS VARIABLES (2ª ED.)* . McGRAW-HILL.

MIGUEL DELGADO PINEDA, M. J. (2015). *LENGUAJE MATEMATICO, CONJUNTO Y NUMEROS (2ª ED.)* . España: Editorial Sanz y Torres, S.L.; 2nd edición.

Prado Pérez, C. D. (2006). *Cálculo diferencial para ingeniería* . México : Pearson .

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: PEARSON.

ROSS L. FINNEY, D. W. (segunda edición). *CALCULO DE UNA VARIABLE* . PEARSON PRENTICE HALL.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas* . México : Thomson

Stewart, J. (2015). *Calculus*. CENGAGE Learming.

Swokowski, E. W. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica* . México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Taylor, H. E. (1988). *Cálculo Diferencial e integral Vol 1* . M éxico: Limusa S.A de C. V.,.

Trejo, C. A., Pastor, J. R., & Calleja, P. P. (1959). *Analisis Matematico Volumen I*. Editorial Kapelusz.

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). *Matemáticas 1. cálculo diferencial.* México: McGraw-Hill.

Anexos

I. Casos de factorización

Los casos de factorización son importantes en el estudio de las matemáticas incluyendo el cálculo diferencial y este proceso se basa en poder escribir una expresión algebraica como un producto de factores que dan como producto la primera expresión, y existen varios casos de factorización:

CASO I. **Cuando los términos del polinomio tienen un factor común**: es el factor que está presente en cada término del polinomio

a) Factor común por Monomio

$$3a + 5ab - 4ac = \boldsymbol{a(3 + 5b - 4c)}$$

b) Factor común por polinomio:

$$x(a + b) - y(a + b) = (x - y)(a + b)$$

CASO II. **Factor común por agrupación de términos:** Es el polinomio que aparece en cada término de la expresión:

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$$
$$= (a + b)(x + y)$$

CASO III. **Trinomio cuadrado perfecto:** El trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, y el primero y tercer término tienen una raíz exacta, es decir es un cuadrado perfecto y el segundo término es el doble producto de la raíz cuadrada del primer y tercer término, separados por el signo del segundo término:

$$m^2 \pm 2mb + b^2 = (m \pm b)(m \pm b) = (m \pm b)^2$$

CASO IV. **Diferencia de cuadrados perfectos:**

$$b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$$

Combinaciones de los casos III y IV:

$$a^2 - 2am + m^2 - b^2 = (a^2 - 2\mathrm{am} + m^2) - b^2 = (\mathrm{a} - \mathrm{m})^2 - b^2$$

$$= (a - m + b)(a - m - b)$$

CASO V. **Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción:**

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{cx} + \mathrm{c}^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{cx} + \mathrm{c}^2 + \mathrm{cx} - \mathrm{cx}$$

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{cx} + \mathrm{c}^2 = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{cx} + \mathrm{c}^2 - \mathrm{cx}$$

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{cx} + \mathrm{c}^2 = (\mathrm{x} + \mathrm{c})^2 - \mathrm{cx}$$

CASO VI. **Trinomio de la forma** $x^2 + bx + c$, aquí se descompone en un producto de dos binomios en el cual el primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio considerando que tiene un coeficiente de 1 seguidos por el signo del segundo término del trinomio para el primer binomio y el signo del tercer término del trinomio, para después buscar dos número que multiplicados den el tercer elemento del trinomio y que sumados den el segundo elemento del trinomio.

$$x^2 + 5x + 6 = (\boldsymbol{x} + \mathbf{3})(\boldsymbol{x} + \mathbf{2})$$

CASO VII. **Trinomio de la forma** $ax^2 + bx + c$, a diferencia de los casos vistos, se debe multiplicar por el valor de a todo el trinomio para que quede una raíz cuadrada exacta en el primer término, después buscar dos número que multiplicados den el resultado de multiplicar el valor a por el tercer elemento del trinomio y que sumados den el segundo elemento original del trinomio, y se termina dividiendo para el valor a, para no alterar el trinomio.

$$6x^2 - 5x + 6 = \frac{(6x - 9)(6x - 4)}{6} = \frac{(6x - 9)(6x - 4)}{2 * 3}$$

$$6x^2 - 5x + 6 = \frac{(6x - 9)}{3} * \frac{(6x - 4)}{2} = (2x - 3)(3x - 2)$$

CASO VIII. **Factorización de suma o diferencia de cubos perfectos:** debe ter cuatro términos, el primero y el ultimo deben ser cubos perfectos, que el segundo término sea más o menos el triplo del cuadrado de la raíz cubica del primer término por la raíz cubica del ultimo y el tercer término más el triplo de la raíz cubica del primer término por el cuadrado de la raíz cubica del ultimo termino.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - c^3$$

CASO IX. **Factorización de suma o diferencia de cubos perfectos:**

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

CASO X. **Suma o diferencia de dos potencias iguales:**

$(a^k - b^k)$, es divisible para $(a - b)$, si $k$es un número par o impar.

$(a^k - b^k)$, es divisible para $(a + b)$, si $k$es un número par.

$(a^k + b^k)$, es divisible para $(a + b)$, si $k$es un número impar.

$(a^k + b^k)$, No es divisible para $(a - b)$.

II. Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de un producto. Si x e y son dos números reales positivos no nulos, entonces: $\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Logaritmo de un cociente: Si x e y son dos números reales positivos no nulos, entonces: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Logaritmo de una potencia. Si x es un número real positivo y a un número real cualquiera diferente de cero y uno, entonces: $\log_a(x^b) = b * \log_a(x)$

Logaritmo de una raíz. Si x es un número real positivo y b un número natural mayor que 1, entonces: $\log_a\left(\sqrt[b]{x}\right) = \frac{1}{b}\log_a(x)$

Cambio de base. $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$

III. Propiedades de los exponentes

Producto de potencias de igual base. Si x e y son dos números reales no nulos, entonces: $\boldsymbol{a^x * a^y = a^{(x+y)}}$

División de potencias de igual base. Si x e y son dos números reales no nulos, entonces: $\boldsymbol{\frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}}$

Toda base elevada a la potencia cero es igual a uno: Si x un números real cualquiera, entonces $x^0 = 1$

Potencia de una potencia. Si x e y son dos números reales no nulos, entonces: $(a^x)^y = a^{(x*y)}$

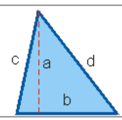
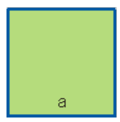
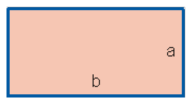
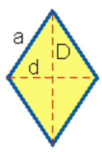
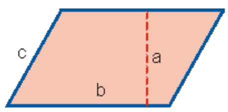
Relación con el logaritmo: Sea a un número real positivo no nulo y distinto de 1, y x otro número positivo no nulo. Se llama logaritmo del número x en base a, al número a que debe elevarse la base para obtener el número x

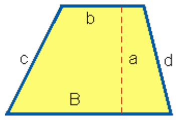
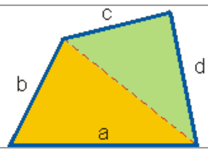
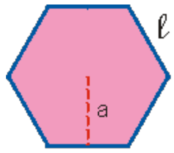
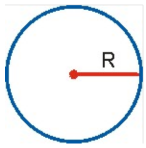
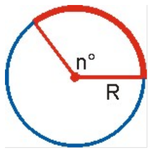
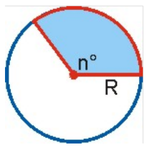
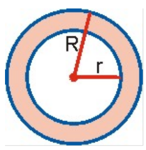
$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

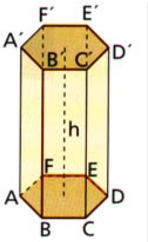
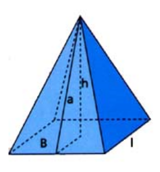
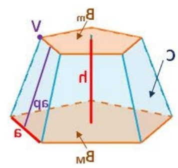
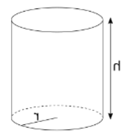
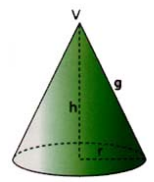
Aquellos logaritmos en base 10 se los llama **Logaritmos decimales,** y no requieren que se especifique su base. $y = \log_{10}(x) = \log(x)$

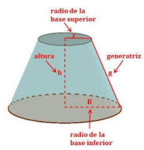
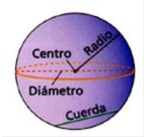
Aquellos logaritmos en base e se los llama **Logaritmos neperianos** (deben su nombre a su descubridor John Neper y es un número irracional que aproximadamente es igual a 2,71828), también conocido como **logaritmo natural** y no requieren que se especifique su base. $y = \log_e(x) = \ln(x)$

IV. Perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos

Nombre	Perímetro	Área	Figura
Triángulo	$P = b + c + d$	$A = \dfrac{base * altura}{2}$	
Cuadrado	$P = 4 * a$	$A = a^2$	
Rectángulo	$P = 2(b + a)$	$A = b * a$	
Rombo	$P = 4 * a$	$A = \dfrac{D * d}{2}$	
Romboide	$P = 2(b + c)$	$A = b \cdot a$	

Trapecio	$P = B + b + c + d$	$A = \frac{B+b}{2} * a$	
Trapezoide	$P = a + b + c + d$	A = Suma de las áreas de los dos triángulos	
Polígono regular	$P = n * \ell$ Donde n es el número de lados	$A = \frac{1}{2} P * a$	
Círculo	$L = 2\pi R$	$A = \pi R^2$	
Arco	$L = \frac{2\pi R}{360} n^o$	$n^{º}$ = grados	
Sector circular	$\alpha =$ $Radianes$	$A = \frac{\pi R^2}{360} * n^o$ $= \frac{R^2}{2} * \alpha$	
Corona circular		$A = \pi(R^2 - r^2)$	

Nombre	Área lateral	Área Total	Volumen	Figura
Prisma	P = Perímetro h=Altura $A_L = P * h$	$A_T = A_L + 2 * A_b$ A_b= Área base	$V = A_b * h$	
Pirámide	$A_L = P * \frac{a}{2}$	$A_T = A_L + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b * h$	
Tronco de Pirámide	$A_L = \frac{P + p}{2} a$	$A_T = A_L + A_{b_1} + A_{b_2}$	$V = \frac{1}{3}\left(A_{b_1} + A_{b_2} + \sqrt{A_{b_1} A_{b_2}}\right) * h$	
Cilindro	$A_L = 2\pi * R * h$	$A_T = 2\pi * R * h + 2(\pi R^2)$	$V = (\pi * R^2) * h$	
Cono	$A_L = \pi * R * g$ g= generatríz	$A_T = \pi * R * g + \pi R^2$ $A_T = A_l + A_b$	$V = \frac{1}{3}(\pi R^2) * h$	

Tronco de Cono	$A_L = \pi(R+r).g$ $A_L = \pi(R + r) * g$	$A_T = A_L + A_{b_1} + A_{b_2}$	$V = \frac{1}{3}\left(A_{b_1} + A_{b_2} + \sqrt{A_{b_1}A_{b_2}}\right) * h$	
Esfera		$A_t = 4\pi * R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi * R^3$	

V. Identidades trigonométricas

- ✓ $sin(A)\,csc(A) = 1 \qquad (sin(A) \neq 0)$
- ✓ $cos(A)\,sec(A) = 1 \qquad (cos(A) \neq 0)$
- ✓ $tan(A)\,ctg(A) = 1 \qquad (sin(A)\,cos(A) \neq 0)$
- ✓ $tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} (cos(A) \neq 0)$
- ✓ $ctg(A) = \frac{\cos(A)}{\sin(A)} (sin(A) \neq 0)$
- ✓ $sin^2(A) + cos^2(A) = 1$
- ✓ $sec^2(A) = 1 + tan^2(A) \qquad (cos(A) \neq 0)$
- ✓ $csc^2(A) = 1 + ctg^2(A) \qquad (sen(A) \neq 0)$
- ✓ $sin(2A) = 2\,sin(A)\,cos(A)$

- ✓ $sin(3A) = 3\,sin(A) - 4\,sin^3(A)$
- ✓ $sin(4A) = 4\,sin(A)\,cos(A) - 8\,sin^3(A)\,cos(A)$
- ✓ $cos(2A) = cos^2(A) - sin^2(A)$
- ✓ $cos(3A) = 4\,cos^3(A) - 3\,cos(A)$
- ✓ $cos(4A) = 8\,cos^4(A) - 8\,cos^2(A) + 1$
- ✓ $tan(2A) = \dfrac{2\tan(A)}{1 - \tan^2(A)}\,(tan(A) \neq \pm 1)$
- ✓ $sen\left(\dfrac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(A)}{2}}$
- ✓ $cos\left(\dfrac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos(A)}{2}}$
- ✓ $tan\left(\dfrac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(A)}{1 + \cos(A)}} = \dfrac{1 - \cos(A)}{\sin(A)} =$

  $\dfrac{\sin(A)}{1 + \cos(A)},\ (sin(A) \neq 0)$
- ✓ $sin(A + B) = sin(A)\,cos(B) + sin(B)\,cos(A)$
- ✓ $sin(A - B) = sin(A)\,cos(B) - sin(B)\,cos(A)$
- ✓ $cos(A + B) = cos(A)\,cos(B) - sin(A)\,sin(B)$
- ✓ $cos(A - B) = cos(A)\,cos(B) + sin(A)\,sin(B)$

- ✓ $tan\ (A\ +\ B\ )\ =\ \dfrac{\tan(A)\ +\ \tan(B)}{1\ -\ \tan(A)\tan(B)}$

  $(\ tan\ (A)\ tan\ (B)\ \neq\ 1\ )$

- ✓ $tan(A - B) = \dfrac{\tan(A)\ -\ \tan(B)}{1\ +\ \tan(A)\tan(B)}$

  $(\ tan\ (A)\ tan\ (B)\ \neq\ -1\ )$

- ✓ $sin\ (A)\ +\ sin\ (B)\ =\ 2\ sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right) cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

- ✓ $sin\ (A)\ -\ sin\ (B)\ =\ 2\ sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right) cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

- ✓ $cos\ (A)\ +\ cos\ (B)\ =\ 2\ cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

- ✓ $cos\ (A)\ -\ cos\ (B)\ =\ -\ 2\ sen\left(\dfrac{A+B}{2}\right) sen\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

- ✓ $tan(A) + tan(B) = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A)\cos(B)}(\ cos\ (A)\ cos\ (B)\ \neq\ 0\ )$

- ✓ $tan(A) - tan(B) = \dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A)\cos(B)}(\ cos\ (A)\ cos\ (B)\ \neq\ 0\ )$

- ✓ $sin\ 2\ (A)\ =\ \dfrac{1\ -\ \cos(2A)}{2}$

- ✓ $sin^3(A) = \frac{3\sin(A) - \sin(3A)}{A}$

- ✓ $sin^4(A) = \frac{3 - 4\ \text{COS}(2A) - \text{COS}(4A)}{8}$
- ✓ $cos^2(A) = \frac{1 + \cos(2A)}{2}$
- ✓ $cos^3(A) = \frac{3\cos(A) + \cos(3A)}{4}$
- ✓ $cos^4(A) = \frac{3 + 4\ \cos(2A) + \cos(4A)}{8}$

VI. Tabla para derivadas

En este apartado encontraran las derivadas de funciones más relevantes, en la cual se considera a las letras u y v como funciones reales con su variable independiente x, es decir $u(x)$ y $v(x)$ y $n \in \mathbb{R}$

- ❖ Potencias

$$y(x) = u^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n * u^{n-1} * \frac{du}{dx}$$

- ❖ Funciones Exponenciales

$$y(x) = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^u * \frac{du}{dx}$$

$$y(x) = a^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^u * \ln(a) * \frac{du}{dx}$$

- ❖ Funciones Logarítmicas

$$y(x) = \ln(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

$$y(x) = \log_a(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} * \log_a(e)$$

❖ Funciones Trigonométricas

$$y(x) = \sin(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(u) * \frac{du}{dx}$$

$$y(x) = \cos(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(u) * \frac{du}{dx}$$

$$y(x) = \tan(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = sec^2(u) * \frac{du}{dx}$$

$$y(x) = \operatorname{ctg}(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -csc^2(u) * \frac{du}{dx}$$

$$y(x) = \sec(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec(u) * \tan(u) * \frac{du}{dx}$$

$$y(x) = \csc(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\csc(u) * \operatorname{ctg}(u) * \frac{du}{dx}$$

❖ Funciones Trigonométricas Inversas

$$y(x) = arcsen(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y(x) = arcos(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y(x) = arctan(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$y(x) = arcot(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$y(x) = arcsec(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$y(x) = arcsec(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

❖ Operaciones más usuales en derivadas e integrales

$$y(x) = k * u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = k * \frac{du}{dx}$$

$$y(x) = u + v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$y(x) = u - v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$y(x) = u * v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} * v + u * \frac{dv}{dx}$$

$$y(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} * v - u * \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$y(x) = u^v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v * u^{v-1} * \frac{du}{dx} + u^v * \ln(u) * \frac{dv}{dx}$$

Grupo de capacitación e investigación pedagógica

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica