compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

UNESCO
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura

uniTwin
Cátedra UNESCO « Paz, Solidaridad y Diálogo Intercultural », Universitat Abat Oliba CEU

CONJUNTO VACÍO

FORMALIDAD O AMBIGÜEDAD SEMÁNTICA

$\emptyset$

José Theódulo Esquivel Grados
Valia Luz Venegas Mejía
Migdonio Nicolás Esquivel Grados

Conjunto vacío
Formalidad o Ambigüedad semántica

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Conjunto vacío
Formalidad o Ambigüedad semántica

José Theódulo Esquivel Grados
Valia Luz Venegas Mejía
Migdonio Nicolás Esquivel Grados

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Conjunto vacío
Formalidad o Ambigüedad semántica

© José Theódulo Esquivel Grados
Valia Luz Venegas Mejía
Migdonio Nicolás Esquivel Grados

2021,
Publicado por acuerdo con los autores.
© 2021, Editorial Grupo Compás
Guayaquil-Ecuador

Editado en Guayaquil - Ecuador
Primera edición

ISBN: 978-9942-33-459-6

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Citación:
Esquivel Grados, J. T., Venegas Mejía, V. L. y Esquivel Grados, M. N. (2021).
Conjunto vacío: Formalidad o ambigüedad semántica. Grupo Compás.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Según el modelo de evaluación del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), la competencia matemática es la “capacidad para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, mediante el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos”[1]. Y en términos de los resultados de PISA 2018: “Todos los países latinoamericanos participantes obtuvieron una puntuación menor al promedio en las tres áreas calificadas”[2]. Asimismo, los resultados de todos estos países que participaron en la referida evaluación tienen puntajes por debajo de la línea base que, para todas las competencias evaluadas, PISA la identifica al nivel 2 como el punto de partida del desarrollo de la competencia (Organisation for Economic Co-operation and Development- OECD, 2016), que en el caso de Matemática es a partir de 420 puntos. Entonces, considerando la respectiva competencia, resulta importante destacar el manejo de conceptos y la comprensión del lenguaje formal de la Matemática en su aprendizaje y aplicación.

Un reducido porcentaje de egresados de educación secundaria de países latinoamericanos, como de otras regiones del mundo, que forman parte del universo de las pruebas PISA, acceden a la educación superior. Por tanto, a la luz de los resultados de diversas mediciones, se infiere en este nivel un deficiente manejo del lenguaje matemático con miras a lograr

1 http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/12/Resultados-PISA-2018-Per%C3%BA.pdf
2 https://observatorio.tec.mx/edu-news/prueba-pisa-2018-latinoamerica

la comprensión de conceptos, procedimientos y algoritmos para logar el aprendizaje y aplicación de diversos temas de Matemática. Deficiencias que se presentan en el manejo del lenguaje matemático, en muchos casos, por el tratamiento de conceptos, notaciones y símbolos matemáticos a partir de la transferencia del lenguaje natural, usual u ordinario. Entonces, el manejo del lenguaje formal matemático demanda que el estudiante posea conocimiento de conceptos y símbolos como códigos, pero también que los conozca desde su rol dentro de una estructura matemática, lo que no necesariamente está sujeta a interpretaciones desde el lenguaje natural, las que puede conducir a errores en el aprendizaje. El lenguaje matemático debe abordarse como corresponde por su función gravitante, que en lo concerniente a la teoría de conjuntos tiene un sitial elevado en el desarrollo y aprendizaje de la Matemática y otras ciencias, Ingenierías, tecnologías, etc.

Felix Hausdorff el año de 1910 publicó su libro *Grundzüge der Mengenlehre* (Fundamentos de teoría de conjuntos) y años más tarde, en 1960, Patrick Suppes editó *Axiomatic Set Theory* (Teoría axiomática de los conjuntos, dos obras de revisión obligatoria por los estudiosos cuando se trata de abordar la teoría de conjuntos. Pero también la destacada obra Teoría Intuitiva de los Conjuntos de Paul Halmos, divulgada en español en 1965, constituye otra fuente de obligatoria consulta al momento de abordar la teoría que desde 1874 empezó a tomar forma por obra de Georg Cantor, la que fue avalada y compartida por el matemático Richard Dedekind. En estas obras clásicas se aprecia en torno a los conjuntos dos ideas antípodas, intuitivo y axiomático, las cuales constituyen serias dificultades en los estudiantes de diversos niveles cuando están frente a la teoría conjuntista.

La teoría de conjuntos, dijo el matemático francés Arnaud Denjoy, es la mayor revolución que ha conocido la Matemática después del Cálculo Infinitesimal. Tal creación de Cantor no tuvo antecedentes históricos; sin embargo, el concepto de conjunto no fue ajeno a una serie de dificultades y controversias. Tal es así que, Vera [3] (2017) asigna a la palabra conjunto "el valor de pluralidad *definida o determinada"* (p. 230) y añade "abusando del lenguaje en aras de la comodidad, llamar conjunto a un solo elemento: conjunto unidad, pero sin confundirlo con el elemento, e incluso concebir que no tenga ninguno: conjunto nulo o vacío" (ídem). Asimismo, en la cuantiosa bibliografía que aborda la teoría conjuntista de Cantor, el concepto conjunto abordado desde el lenguaje usual tiene igual significado que el lenguaje natural establecido en la actualización 2020 del Diccionario de la Lengua Española: "Agregado de varias personas o cosas". Con la palabra "varias" se hace referencia a variedad (sinónimo de conjunto en la idea original de Cantor), a pluralidad, pero el concepto intuitivo "queda corto" cuando se habla de una "cosa" o un elemento, y lo que es más grave, cuando se trata de ausencia de "cosas" o de elementos; dos ideas que conducen a los conjuntos unitario y vacío, respectivamente. Tal es así que, comprender este tipo de conjuntos "especiales" desde el lenguaje natural podría resultar para el estudiante de distintos niveles educativos un auténtico galimatías, pero también cuando se define formalmente recurriendo a una contradicción.

Manrique (2003), expresa que el conjunto vacío "viene a ser un conjunto de nada, expresión paradójica que es vigente matemáticamente" (p. 65). Entonces, respecto de tal conjunto singular, es preciso responder a determinadas peguntas, tales como: ¿Qué naturaleza presenta un conjunto vacío, si precisamente nada contiene? ¿Cómo se entiende al conjunto vacío, aquel que no presenta colección de elementos, pero por ser conjunto se trata de una colección? Responder tales preguntas desde la semántica del lenguaje natural no contribuye a "solucionar la paradoja" en torno a este conjunto "especial", solución que ocurrirá cuando se logre identificar los límites que separan a los lenguajes natural y matemático, desde los enfoques intuitivo y formal. Por eso, debería ser materia de sumo cuidado el tratar el conjunto vacío cuando se elaboran materiales

[3] Francisco Vera (1888, 1967), matemático español de honda influencia en la Matemática en Latinoamérica, desde los años de 1940 del siglo pasado.

didácticos considerando una Matemática contextualizada; es decir, debería optarse por el suficiente rigor científico didáctico al momento de efectuar la transposición didáctica. Esta es la orientación del presente trabajo que tiene por objetivo analizar el tratamiento del conjunto vacío considerando los lenguajes natural y formal en su presentación con fines didácticos hacia estudiantes de educación superior o secundaria, puesto que en el nivel primario el tratamiento del concepto es puramente intuitivo; aunque es preciso considerar también que la enseñanza del conjunto vacío en niños debería ser una posibilidad para pasar de lo intuitivo a lo lógico.

Como se sabe, el lenguaje matemático es un lenguaje formal constituido por símbolos fijados y expresiones que permiten presentar los objetos matemáticos y evitar confundirlos con los significados de las palabras del lenguaje natural. La observación de diversas fuentes permite apreciar que se menciona que “conjunto vacío es el conjunto que carece de elementos”, o expresiones similares; pero se trata de una expresión que es percibida como “paradójica” porque deja entrever que el conjunto vacío una “colección de la nada” al ser apreciada desde un sentido literal con tratamiento intuitivo, lo que podría generar conflicto cognitivo; es decir, se genera una especie de “paradoja semántica” producto de un traslado automático del lenguaje natural al lenguaje matemático, tras el significados de las palabras conjunto y vacío. Entonces, al efectuar la transposición didáctica del conjunto vacío se debería hacer referencia del tratamiento formal de la teoría conjuntista, para “despejar la paradoja” y orientar la enseñanza aprendizaje del conjunto denominado “especial”, de ser el caso, a partir de una Matemática contextualizada pertinente. Sin embargo, otro enigma aparece al definir formalmente el conjunto vació por una contradicción, y más complejo resulta el caso, cuando el conjunto en cuestión se presenta haciendo mención simultáneamente a los lenguajes formal y natural.

Precisando, se aprecia que la idea intuitiva de conjunto desde el lenguaje natural no es suficiente para entender el conjunto vacío, porque el significado de las palabras produce dificultad para aceptar a primera vista este tipo de conjunto, más bien definirlo conduce a una "expresión paradójica". Como se puede apreciar en la literatura sobre teoría de conjuntos, el conjunto vacío es definido por comprensión mediante una contradicción, $\emptyset = \{x / x \neq x\}$, pero también puede determinarse mediante una propiedad cualquiera que conduce a la inexistencia de elementos; pero, determinar un conjunto sobre la base de contradicciones puede dar lugar a formular la "paradoja del conjunto vacío".

El presente libro es producto de una investigación documental y observacional descriptiva, la que estuvo fundada en la revisión de datos secundarios de la literatura en español publicada desde hace más de 70 que contiene la teoría de conjuntos, enfocando la atención en torno al conjunto vacío; asimismo, se recogió datos primarios respecto del conocimiento que poseen los sujetos de una muestra del estudio, sobre el citado conjunto especial, que se realizó a través de la aplicación de un cuestionario en línea administrado a estudiantes universitarios de Pedagogía en la mención de Matemática. En los resultados de las fuentes consultadas, la mayoría de autores suele presentar el conjunto vacío en lenguaje natural, con el que se precisa que "es un conjunto que carece de elementos", en tanto que una minoría de ellos muestra al conjunto vacío desde una perspectiva axiomática, e inclusive algunos que combinan tales presentaciones. En el caso de los estudiantes de la muestra del estudio, mayoritariamente dejaron evidencia de no contar con ideas claras sobre conjunto, conjunto vacío y sus propiedades, así como algunas de sus aplicaciones, lo que estaría dejando como evidencia las deficiencias en la formación de conceptos de la teoría de conjuntos.

CAPÍTULO I

Aspectos teóricos de los conjuntos

1.1. En torno a la idea de conjunto

Cuando el manejo de lenguaje matemático[4] no es óptimo por parte de los estudiantes, pueden presentar el síndrome del conocimiento frágil (Perkins, 1995), aquella señal que describe las dificultades que muestran al momento de comprender conceptos o temas de Matemática, y aplicarlos en el aprendizaje de contenidos y el desarrollo de habilidades, como la solución de problemas. Al respecto, Soto y Noboru (2019) presentan un estudio sobre dificultades que presentan estudiantes universitarios en su formación matemática, destacándose el problema de la comprensión de contenidos y de problemas de Matemática Básica, entre otros.

Una apropiada comprensión de objetos matemáticos (conceptos, definiciones, teoremas, etc.), pasa por no confundir su significado a partir del lenguaje natural. Inclusive, hay casos de representaciones similares con símbolos matemáticos, pero que no significan necesariamente lo mismo. Por ejemplo, en el lenguaje aritmético del sistema decimal, 1+1=2 es una definición, que vista como suma es válida, pero no lo es en el lenguaje aritmético del sistema binario, porque 1+1=10, lo que resulta un absurdo para quien no maneja este sistema. Poincaré (1964), por ejemplo, refiere que una buena definición para el científico es aquella que “satisface las reglas de la lógica. Pero en la enseñanza

[4] Comprende el lenguaje aritmético, lenguaje algebraico, lenguaje geométrico, etc.; por eso se habla de lenguajes matemáticos.

esto no es así; una buena definición es aquella que es comprendida por los alumnos" (p. 191). Entonces, conviene valorar el mensaje de Henri Poincaré [5] (1854-1912) en el que hace notar la presentación en lenguaje matemático formal para científicos y otra exposición para estudiantes.

Piaget (1970) destaca que las operaciones lógicas o matemáticas se extraen de las acciones del sujeto ejercidas sobre los objetos y no de los objetos como tales. Asimismo, destaca que "a un mismo tiempo las matemáticas y la lógica se formaron mucho antes de nuestra era, en tanto que las ciencias experimentales no se desarrollaron sino a partir de los tiempos modernos" (p. 26). Estas consideraciones piagetianas deben tomarse en cuenta al diseñar los lineamientos didácticos tendientes a la formación de conceptos matemáticos y el respectivo lenguaje que acompaña al momento de presentarlos para lograr su comprensión y asimilación.

Un caso específico de lenguaje matemático es el lenguaje conjuntista, aquel que juega un rol vertebrador en la ciencia Matemática actual. Al respecto, Mosterín (2002) destaca que la gran obra de Cantor fue la creación de un nuevo y extraordinariamente expresivo lenguaje; el lenguaje de los conjuntos. Resulta que todos los otros lenguajes matemáticos eran traducibles al lenguaje conjuntista y que todos los otros conceptos matemáticos eran fácilmente definibles en este lenguaje. (p. 73)

Y Godino, Batanero y Font (2004), precisamente, hacen referencia a la doble función que cumple el lenguaje matemático:

- representacional: (porque) nos permite designar objetos abstractos que no podemos percibir;
- instrumental: como herramienta para hacer el trabajo matemático. El valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de palabras, símbolos o gráficas. En consecuencia, el estudio de los diversos sistemas de representación para un mismo contenido

[5] Henri Poincaré Polímata matemático, físico, científico teórico y filósofo de la ciencia francés, descrito como el último universalista de la Matemática.

matemático es necesario para la comprensión global del mismo. (pp. 39, 40)

En la teoría conjuntista, el concepto base es 'conjunto', el cual se ha convertido en piedra angular de la ciencia Matemática; una teoría que desde el siglo XIX ha merecido la atención de matemáticos, educadores, ingenieros, entre otros. Fue formulada por Cantor [6] (1845-1918) y luego pasó por una serie de reformulaciones, como la efectuada por Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953). En la actualidad, el lenguaje de la teoría cantoriana de los conjuntos aporta a la unidad de las disciplinas matemáticas.

Cantor en su artículo "Fundamentos para una teoría general de variedades" de 1883 sostuvo: "entiendo por variedad o conjunto toda multiplicidad que puede ser pensada como unidad, esto es, toda colección de elementos determinados que pueden ser unidos en una totalidad mediante una ley" (citado por Piñeiro, 2013, p. 93) y desarrolló su teoría en base a su enunciación ofrecida en 1895: "Se entiende por conjunto la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra percepción o de nuestro pensamiento" (citado por Cignoli, 2016, p. 1). Esta idea cantoriana equivale a una "agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o de nuestro pensamiento" (Usunáriz y Usunáriz, 2012, p. 113). Era el inicio de una teoría con tratamiento intuicionista.

Kleene[7] (1952) hace referencia que "*un conjunto puede ser denominado también un agregado o colección o clase o dominioo totalidad"* (p. 20). En lo concerniente al rol que cumple el concepto conjunto, Miro-Quesada[8] (1967) refiere que: "El concepto de conjunto

---

6 Georg Cantor. Matemático ruso, nacionalizado alemán y de ascendencia austríaca y judía. Inventor de la teoría de conjuntos, base de la Matemática moderna.
7 Stephen Cole Kleene (1909- 1994). Lógico y matemático estadounidense, seguidor de Gödel.
8 Francisco Miro-Quesada Cantuarias (1918-2019). Docente de Filosofía Contemporánea y Lógica, Filosofía de la Matemática y Filosofía Política en la Universidad Mayor de San Marcos.

permite pues descubrir la unidad sorprendente del edificio matemático, y revela cómo, partiendo de los pensamientos más simples y abstractos, es posible realizar las construcciones más ricas y complejas." (p. iii). Naturalmente, sin la teoría conjuntista sería complicado hablar de la unidad de las distintas ramas de la Matemática y su desarrollo.

La construcción del edificio matemático tiene como insumo primordial a los conjuntos, tal como se ha referido. Tal es así que "Dedekind se dio cuenta que también la noción de entero podía derivarse de una noción más primitiva, la de conjunto. Fue así que la noción de conjunto, esto es las leyes sobre los conjuntos, se tomaron como base de toda la construcción matemática" (Castelnuovo, 1970, 39). Es así como Dedekind validaba la teoría que era abordada con dedicación por el célebre Cantor.

Por su naturaleza de ciencia formal, la Matemática estudia entes ideales como conjunto o elemento; sin embargo, diferente orientación tiene el objeto matemático de origen e identidad funcional. Sobre este tipo de objeto, Pecharromán (2014) indica que cumple una función organizativa o interpretativa del "contexto", término que "hace referencia al que ofrece el medio físico y los que pueden proporcionar la representación de un objeto matemático o conjunto de ellos (registro semiótico). En estos contextos, tienen lugar situaciones que ofrecen la percepción racional del objeto matemático" (p. 112). Entonces, si la naturaleza del concepto matemático es abstracta y responde a un lenguaje formal, entonces se presenta un reto a los docentes responsables de formar en contenidos de Matemática y a los responsables de elaborar recursos con fines pedagógicos (autores de libros, módulos, etc.), quienes deberían considerar una pertinente contextualización de los temas matemáticos para viabilizar los procesos didácticos. Es decir, de ser el caso, sedebería recurrirse a una Matemática contextualizada, apelando a un uso conveniente de los lenguajes matemático y natural, advirtiendo puntos limítrofes, sobre todo cuando se estudian conceptos peculiares como conjunto o conjunto vacío.

A partir de la idea primigenia de Cantor, diversos autores han enunciado la idea de conjunto, como “una colección de objetos bien definida. Por bien definida se entiende que siempre es posible decidir si un objeto está o no en el conjunto” (Soto, 2011, p. 23). Entonces, el conjunto resulta ser una colección de objetos bien determinada, entendiéndose por bien determinada si “dado un objeto particular, debe saberse con claridad si dicho objeto es o no un elemento del conjunto”. (Briton y Bello, 1982, p. 4)

Así como existen conjuntos de números y funciones, los hay de números, niños, pájaros, ríos, etc. Es decir, la teoría de conjuntos tiene aplicaciones en la Matemática, el pensamiento, la sociedad y la naturaleza. En el caso de conjuntos con más de dos elementos (ideales o concretos), por lo general, y sin mayor dificultad, se puede homologar el lenguaje natural con el lenguaje matemático; pues, se entiende fácilmente que los números, los niños, los pájaros y los ríos forman en cada caso una colección, agrupación o pluralidad, considerando a cada número, niño, pájaro o río como una unidad o singularidad. Entonces, de la noción de unidad (un número, un niño, un pájaro, un río), por agregación de otras unidades se tiene la noción de pluralidad (variedad de números, variedad de niños, variedad de pájaros, variedad de ríos).

Desde la referida ‘construcción’ de la noción de conjunto, “En Matemáticas, la palabra conjunto se emplea en el mismo sentido que tiene el lenguaje ordinario” (De Lozada y Puga[9], 1951, p. 1), de la misma forma como aborda ‘conjunto’ la Real Academia de la Lengua (2020): “Agregado de varias personas o cosas”; sin embargo, con el significado de las palabras del lenguaje natural sólo parcialmente se entiende el concepto conjunto, cuando tiene al menos dos objetos; pero no aplica cuando hay un solo objeto o ninguno, que es lo más peculiar, ya que desaparece la idea de colección o pluralidad que caracteriza a la idea de

[9] Cristóbal de Losada y Puga (1894-1961): Intelectual, matemático e ingeniero peruano, discípulo de Federico Villarreal. Docente en la Universidad Mayor de San Marcos y la Pontificia Universidad Católica del Perú.

conjunto. Entonces, resulta que el lenguaje natural no permite explicar el 'conjunto unitario o unidad' y el 'conjunto vacío'; es decir, en buen romance, en estos casos, el lenguaje natural conduce a una evidente ambigüedad. Una ambigüedad generada por "errores gramaticales (anfibología)", porque al decir conjunto vacío, se está frente a dos palabras con significados inversos, una que indica pluralidad y la otra vacuidad, nada.

Como refiere Planas y Reverter (2011), "Para construir buenos argumentos matemáticos, se tienen que dominar bien las reglas básicas de la sintaxis y la semántica matemáticas, pero es igualmente imprescindible ser capaz de elaborar buenos argumentos en el lenguaje ordinario" (p. 3).

> En la fundamentación de esta matemática formalizada se encuentran mezcladas la Lógica y la Teoría de Conjuntos. La noción básica de la Lógica es la de proposición, mientras la noción básica de la teoría de conjuntos es la de conjunto. El lenguaje escrito de la Matemática utiliza, además de las expresiones del idioma, un simbolismo propio, cuyo uso se debe precisar. (Contreras, 2003, p. 11)

Precisamente, el lenguaje conjuntista, como cualquiera de los lenguajes formales, debe estar exento de cualquier elemento semántico ajeno al significado que ofrecen sus conceptos y relaciones. En general, los lenguajes formales suelen ser usados en el modelamiento de teorías de la Matemática, Física, Ingeniería, etc., cuyo uso debe ofrecer la ventaja de descartar cualquier viso de ambigüedad.

1.2 Teorías intuitiva y axiomática de los conjuntos: conjunto vacío

Velazco (2021) hace referencia "que el uso y, en ocasiones, abuso, de la noción intuitiva de conjunto (así como algunos otros conceptos relacionados) puede dar lugar a paradojas (también llamadas antinomias). Para evitar caer en tal tipo de problemas, los matemáticos han desarrollado la **teoría axiomática** de conjuntos" (p. 1). En tal sentido, la enseñanza deber equilibrase en función de los enfoques, los propósitos del aprendizaje de los conjuntos y formación de conceptos matemáticos conexos.

Hay dos enfoques en la presentación de los conjuntos como seaprecia en la cita del autor precedente, uno intuitivo y el otro axiomático; sin embargo, Halmos (1973) destaca que: "En la teoría de los conjuntos "intuitivo" y "axiomático" son palabras contrastantes" (p. 5). Además, este autor respecto de su obra Teoría Intuitiva de los Conjuntos, refiere que podría describirse mejor como una teoría axiomática de los conjuntos desde el punto de vista intuitivo. Es axiomática por el hecho de que algunos axiomas de la teoría de los conjuntos son propuestos y usados como base para todas las demostraciones subsecuentes. Es intuitiva porque el lenguaje y las notaciones son los usados en las matemáticas ordinarias informales (pero formalizables). (ídem).

Muñoz (2012), refiere "Siendo...los conceptos de conjunto, elemento y pertenencia los más intuitivos de la Matemática, los consideraremos como los primitivos de este estudio, es decir no trataremos de definirlos, sino que iremos simultáneamente trabajando con ellos y precisándolos mediante sus propiedades" (p. 12). En el mismo orden de ideas, "construir un conocimiento nuevo en el marco de una teoría científica es algo muy diferente de aplicar un dogma: es llevar a cabo un trabajo crítico permanente para detectar lagunas o contradicciones, es apoyarse en el saber ya elaborado para adentrarse en dominios inexplorados" (Lerner, 1996, p. 89). Tal construcción debe considerar diversos aspectos intuitivos y axiomáticos, lo que implica que, en el marco de una estructura axiomática, de ser el caso, deben contextualizarse los conceptos o contenidos matemáticos para hacerlos intuitivos y lograr una adecuada transposición didáctica, la que consiste en adaptar el saber para que el estudiante pueda aprenderlo, según indica Chevallard (1991).

Para evitar apreciar al conjunto vacío como una expresión paradójica desde su lectura con el lenguaje natural, debería hacerse notar el lenguaje formalizado de la Matemática, desde la axiomatización que conduce a una gramática matemática para evitar las ambigüedades. Sobre el punto, Vera (1944) refiere “la necesidad de construir con todo rigor lógico la gramática de la Matemática, empezando por establecer definiciones claras y precisas de las palabras que emplea, a fin de que el lenguaje matemático se caracterice por la falta de anfibologías para saber lo que decimos y decir lo que sabemos”. (pp. 150, 151)

Si un lenguaje cuenta con una semántica propia, es decir, si hay una interpretación que satisface sus fórmulas válidas, entonces se convierte en un lenguaje formalizado, propio de una teoría axiomática. Y es la axiomatización la que permite contar con un lenguaje formalizado, un instrumento de la ciencia Matemática que permite soslayar las ambigüedades que podría generar el uso literal del lenguaje natural. Entonces las teorías axiomáticas proveen unidad y solidez a la ciencia Matemática. Con tal presentación, tal es así que en la teoría de conjuntos el conjunto vacío ya no sería percibida como expresión paradójica.

La axiomatización consiste en una enunciación en forma de axiomas de los principios en los cuales se basa una teoría matemática, de los cuales se deducen sus teoremas. Tales axiomas, a la par de signos, conceptos, relaciones, definiciones y reglas de derivación, constituyen el sistema axiomático de la teoría que se construye, el punto de partida del razonamiento lógico matemático, según reglas de derivación. Sistema que se caracteriza por ser indecible, si ningún axioma del sistema puede ser obtenido, como un teorema, partiendo de los restantes axiomas; consistente, si los axiomas permiten deducir la verdad de un enunciado, mas no su negación; y, no contradictorio, si indica que lo afirmado por un axioma no contradice a lo afirmado por cualquier otro del sistema.

La axiomatización trajo consigo un viraje en la Matemática que contaba con ramas como la Aritmética, el Álgebra, la Geometría y el Análisis, y una tendencia de considerarlas como disciplinas autónomas en sus fines, métodos y hasta en su lenguaje. Gutiérrez (1984), refiere que a las "Matemáticas" sucedió la Matemática con fundamentos sólidos, cuyas características fundamentales son: La unidad que le confiere el lenguaje de la teoría de conjuntos y las estructuras, y su presentación axiomática, más estructurada y más polivalente en sus posibilidades y aplicaciones.

> La teoría axiomática de conjuntos busca describir y estudiar formalmente las intuiciones que tenemos sobre los conjuntos y la relación de pertenencia entre ellos. Como toda teoría axiomática, ella debe partir de conceptos no definidos, aquellos que se quiere abstraer, y de axiomas que los gobiernan. (Lewin, 2011, p. 22)

Sobre el desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos, Lipschutz (1975) refiere que comienza por términos no definidos, relaciones no definidas, axiomas que relacionan los términos no definidos y las relaciones no definidas. Todo lo cual permite desarrollar los teoremas. "En el fondo, un teorema no es otra cosa que eso; un enunciado que se comprueba haciendo empleo de los axiomas…". (Amster, 2013, p. 25)

Los términos que se van definiendo, se efectúan a partir de otros primitivos o no definidos, incluso ya definidos. En tal sentido, 'conjunto' es un concepto primitivo, por tanto, carece de definición y sólo de él se tiene la idea intuitiva de agrupación de objetos bien determinados, los que en algunos casos se escriben entre llaves, {}, y van separados por coma o punto y coma. Por lo general, los conjuntos se nombran con letras mayúsculas: A, B, C, …

Retornando a la idea primigenia de Cantor: "Por conjunto se entiende una agrupación en un todo de objetos bien distintos de nuestra intuición o de nuestro pensamiento" (citado por Maravall, 1975, p. 67), fue la que sustentó la teoría conjuntista que dio lugar a antinomias que sacudieron al universo matemático de fines del siglo XIX, pero hubo esfuerzos por salvarlas como la axiomatización de Zermelo, la que terminó colocando llama al explosivo y particionó a los matemáticos en dos grupos refractarios: intuicionistas y formalistas.

En tiempos de Cantor, el manejo "ingenuo" de los conjuntos condujo a paradojas y para evitarlas se requirió de la axiomatización, como se ha referido. Es decir, la idea de conjunto que sustenta la teoría de conjuntos respondía a un estadio intuitivo, lo que precisamente generó la aparición de paradojas, por lo que para salir de ellas se hizo ineludible su formalización axiomática. En tal sentido, Kline (2000) destaca: "El fruto de la actividad matemática son los teoremas deducidos de un conjunto de axiomas" (p. 539); sin embargo, la axiomatización puede no ser la vía adecuada cuando los conjuntos se lleva al ámbito de la didáctica para su enseñanza. En el mismo sentido, se generaron dificultades al enseñar la denominada Matemática Moderna alrededor de medio siglo, la que fue acusada de exceso de abstracción, capricho pedagógico, insania psicológica, entre otras (Navarro, 1973).

Al trabajo original de Georg Cantor tomó el nombre de *Teoría Intuitiva de Conjuntos* porque pretendía formalizar las nociones de los matemáticos referentes a las colecciones de objetos matemáticos, funciones y números. Esa parte de la teoría es lo que habitualmente se aprende como *Teoría de Conjuntos* en la educación básica y universitaria. Lewin (2011) refiere que esta teoría intuitiva

> se vio enfrentada a serias dificultades ya que, tal como estaba formulada, era inconsistente. Sin embargo, la idea ya estaba lanzada y muchos matemáticos buscaron la manera de mejorar la presentación. Entre ellos destacan B. Russell y E. Zermelo. La solución más aceptada es la propuesta por este ´ultimo, a saber, formular una teoría axiomática lógicamente correcta. (p. 21)

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1879-1903) presentó una teoría axiomática para salvar la teoría conjuntista del mundo intuitivo; sin embargo, Bertrand Russell (1872-1970) pronto descubrió que tal axiomática presentaba contradicciones. Por ejemplo, en el axioma de especificación: “Para toda propiedad $\varphi(X)$ definible en la teoría, existe un conjunto Y cuyos elementos son exactamente los conjuntos X que cumplen $\varphi(X)$. Esto es, existe el conjunto $Y = \{X/ \varphi(X)\}$”. Russell indicó que si $\varphi(X) \equiv X \notin X$, entonces $Y = \{X/ X \notin X\}$, por lo tanto, se obtenía una

contradicción evidente: $Y \in Y \leftrightarrow Y \notin Y$. Este autor en su célebre Principia Mathematica presentó una axiomatización que disipó las contradicciones de Frege, pero no caló en los círculos matemáticos por su alto gradode complejidad. “Esta contradicción, conocida como la paradoja deRussell, nos dice que el concepto de “propiedad” es más delicado delo que suponemos y que definitivamente no debe corresponder a lo que llamamos un conjunto” (Lewin, 2011, pp. 23, 24).

La enunciación axiomática de Zermelo (1871-1953) en 1908 evitó la paradoja de Russell debilitando el axioma de formación de conjuntos de Frege. La labor de axiomatización siguió con Fraenkel (1891-1965) en 1922, y se logró el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (sistema axiomático ZF), cuyos axiomas son:

A_1. Dos conjuntos son iguales si y solamente si poseen los mismos elementos.

A_2. Existe un conjunto sin elementos, $\emptyset$, llamado vacío.

A_3. Si A y B son dos conjuntos, {A, B} es un conjunto.

A_4. La unión de un conjunto de conjuntos es un conjunto.

A_5. Existe por lo menos un conjunto X tal que $\emptyset \in X$ y tal que si $A \in X$, $A \cup \{A\} \in X$.

A_6. Para toda relación R unívoca y todo conjunto X, existe un conjunto Y formado por los elementos de X que satisfacen R.

A_7. Dado un conjunto, existe el conjunto de todas sus partes.

A_8. Dado un conjunto de conjuntos es posible elegir un elemento de cada uno de ellos.

A_9. Ningún conjunto es un elemento de sí mismo. (Navarro, 1973, p. 52)

Según el sistema ZF, el axioma A_2 simbólicamente, se escribe así: $\exists X \, \forall y \, (y \in X \leftrightarrow y \neq y$; de modo equivalente: $\exists X \, \forall y \, (y \notin X)$. Como se puede apreciar, la existencia del conjunto vacío $\emptyset$[10] está asegurada por el axioma A_2 y su unicidad se deriva del axioma A_1, llamado de extensionalidad. Entonces, se debe precisar que, existe el conjunto vacío a partir de un axioma y debe tomarse como tal, como el principio que no requiere interpretación, mucho menos recurriendo al significado literal.

Con la aparición de paradojas en la teoría conjuntista, el axioma de elección y la prueba de Zermelo del teorema del buen orden, a inicios del siglo XX se creó las condiciones apropiadas para que floreciera la tercera crisis notable de los fundamentos de la Matemática, considerando que la primera crisis data del siglo V a.C. y conexa a los números irracionales (descubrimiento de las cantidades inconmensurables) y la segunda a comienzos del siglo XIX con el tema de los infinitésimos. Como respuesta a esta crisis, aparecen tres proyectos notables: el *logicista*, que propone una reducción de la Matemática a una "Lógica coherente"; el *formalista,* que plantea la axiomatización que impida la existencia de contradicciones; y, el *intuicionista,* que rechaza la Lógica clásica (el principio del tercio excluido para conjuntos infinitos) y el infinito actual, planteando una nueva Lógica para una nueva Matemática.

Zermelo, quien enfocó sus esfuerzos en la tarea de fundamentar la teoría conjuntista y optó por en proyecto axiomático con el propósito de eliminar paradojas y amparar en la medida de lo posible la obra de Cantor, expresó:

> A partir de la teoría de conjuntos hay que buscar los principios que permitan fundamentar esta disciplina; por ello, por una parte, hay que restringir estos principios para evitar contradicciones y, por

---

[9] El símbolo Ø, al igual que {}, fue propuesto en 1939 por el matemático francés André Weil (1906-1998 del grupo Bourbaki, lo que superó el uso de "0". Por su similitud se usa la letra Ø del alfabeto.

> otra, hay que considerarlos lo suficientemente amplio con el fin de conservar lo más valioso de la teoría. (citado por Alonso, Borrego, Pérez y Ruiz, 2007, p. 18)

El conjunto vacío, que se aprecia en el sistema axiomático ZF, representa un verdadero problema a los estudiantes noveles al momento de lograr comprenderlo a partir de su presentación aislada o no sistemática como "un conjunto sin elementos", tal como lo advierte Lewin (2011):

> Uno de los objetos matemáticos que produce más confusiones a los no iniciados es el conjunto vacío, a saber, un conjunto que no tiene ningún elemento. Este es una consecuencia inesperada del Axioma de Separación. En efecto, consideremos, por ejemplo, el siguiente conjunto $\{x \in U: x \neq x\}$, donde U es un conjunto cualquiera. Es claro que ningún conjunto puede verificar esa condición, por lo que este conjunto no tiene ningún elemento. El lector cuidadoso debería ponerse receloso. Para definir el conjunto vacío supusimos que hay un conjunto U, ¿cómo sabemos que existe siquiera un conjunto? Su recelo no es exagerado, la existencia de siquiera un conjunto debe estar garantizada por un axioma. El axioma estándar para este efecto es el Axioma del Conjunto Vacío, … el que dice exactamente eso, "existe un conjunto que no tiene elementos". (p. 25)

Desde la solidez de la teoría de conjuntos, debe indicarse que el conjunto vacío es resultado de sistemas axiomáticos, lo que evitaría cualquier tipo de interpretaciones, confusiones como las que se generan cuando se presentan de modo asistemático bajo la categoría de definición, como ocurre en el común de diccionarios y libros que abordan la teoría de conjuntos. Como se puede notar, estos esfuerzos están orientados a responder la pregunta sobre la naturaleza del conjunto vacío, el conjunto que nada contiene; una respuesta circunscrita a la estructura axiomática de la Matemática. Entonces, "entendemos por conjunto aquello que verifica tales axiomas, prescindiendo por completo de las ideas intuitivas que hubiéramos podido sostener con anterioridad" (Navarro, 1973, p. 52).

Con el tratamiento axiomático de la teoría conjuntista, el conjunto vacío ya no es una "expresión paradójica", porque a

> los axiomas no se les pide la evidencia intelectual que surge inmediatamente de un acto contemplativo o visivo: se trata simplemente de un concebir de la mente, una operación originaria del sujeto que piensa, en este caso del sujeto epistemológico o que hace ciencia, a la que solo se exige ausencia de contradicción, ya que este vendría a ser la muerte del pensamiento. (Serrano, 1990, p. 270)

Bunge (2007) las hace notar: "En realidad existen varias teorías de conjuntos: por ejemplo, con y sin el **axioma de elección** (v.), con o sin la hipótesis de continuo **(v. infinito).** Por consiguiente, existen tantos significados de "conjunto" como teorías de conjuntos" (p. 33). De ahí que, sucesivamente se han formulado diversos sistemas axiomáticos, como el de Neumann-Bernays-Gödel-Quine (sistema axiomático NBGQ) y otros más.

El lenguaje matemático, desde su postura axiomática, ha permitido solidificar la comunicación matemática dentro de la misma ciencia como con otras ciencias o tecnologías; pues, como indican Cárdenas-Marín, Reyes y Viteri (2017), la "formalización del lenguaje ha permitido un campo positivo en el desarrollo del saber humano, sobre todo el saber científico y tecno científico, pues al desarrollar un lenguaje formal se logra un mundo de posibilidades cognitivas y/o tecnológicas".

Otte, Steinbring, Stowasser y Dress (1985), en la línea de opinión de Bertrand Russell, destacan que "la actividad humana constituye la base de la eficacia de las abstracciones y los conceptos. Y lo que sirve para la aplicación de éstos sirve también para su formación" (p. 10). Esto conduce a precisar lo referente a dos opiniones aparentemente opuestas: la Matemática es muy abstracta y, al mismo tiempo, muy práctica, lo que imprime un carácter incompatible. Sin embargo, para el referido lógico y filósofo, la abstracción y la realidad no representan contradicciones; son complementarias.

Debe considerarse la evolución del pensamiento, del mismo modo la evolución de los métodos de enseñanza, según ha sido precisado por Piaget (1969). Entonces, el proceso de enseñanza aprendizaje de temas matemáticos, y en particular el tema relacionado al conjunto vacío, debe encausarse desde la concepción de la Matemática como ciencia que estudia entes ideales, abstractos, pero que al mismo tiempo la Matemática tiene aplicaciones en la vida diaria, en las artes, las letras y ciencias, por eso es su "sirvienta" y no sólo es la "reina". En este sentido, deben diseñarse los recursos didácticos y también usarse los lenguajes formal y natural, considerando que en la comunicación se hace uso de distintos lenguajes: coloquial, usual o natural, que permite expresarse en forma oral o escrita; simbólico, que ofrece la ventaja por ser sintético, claro y riguroso para pruebas y raciocinios; y, gráfico, que se utiliza para esclarecer o interpretar conceptos o expresiones.

Es preciso destacar que los lenguajes formales, como es caso del lenguaje matemático, son más que sistemas semióticos, y son semejantes al lenguaje usual según ciertos aspectos de la gramática. Como indica Babini (1980), desde el formalismo se concibe a la Matemática "como un variado juego de signos y de símbolos, de carácter formal y sin contenido empírico alguno. Estas "formas vacías" obedecen a una serie de reglas de estructura y de deducción que, en último análisis descansan en un sistema de axiomas" (p. 60). En tanto que, Salguero (2001) refiere que un lenguaje formal "está compuesto por símbolos que, en un principio, no están interpretados, es decir: símbolos que carecen, paradójicamente, de un significado concreto" (p. 57). En tal sentido, el lenguaje formal matemático como sistema semiótico, comparte con el lenguaje natural las características de los sistemas de signos; sin embargo, la diferencia notable entre el lenguaje formal y el natural radica en su uso desde el punto de vista comunicativos el primero diseñado para ser usado en contextos específicos y con intenciones comunicacionales precisas, en contraste con la versatilidad contextual y los vastos y complejos propósitos comunicativos que definen al segundo. Entonces, el problema de la comprensión y aprendizaje del conjunto vacío, motivo del análisis, queda zanjado a partir de su presentación en una teoría conjuntista con un lenguaje matemático formal, que es una gramática matemática construida con rigor lógico que no genere ningún tipo de anfibologías y, cuando se presente con fines pedagógicos, se debe recurrir a estrategias didácticas pertinentes desde una Matemática contextualizada, que conduzca a solucionar la "paradoja semántica" en torno al significado literal de "conjunto vacío", entendida como una "colección de nada".

La formación del conjunto vacío, desde el punto de vista filosófico, fluctúa estudiarlo considerando las corrientes filosóficas empirista y racionalista. Al respecto, Alfaro (2016) refiere que: "El conjunto Ø remite a un empirismo sin extensión y a un racionalismo sin intención" (p. 142); es decir, estos aspectos deben considerarse cuando se trata de enseñar este conjunto especial. El signo nulo (Ø) que denota el conjunto vacío, es la misma letra que en lingüística simboliza el cero, la carencia de un elemento.

CAPÍTULO II

Aspectos metodológicos

2.1 Tipo y sujetos del estudio

La investigación fue de tipo documental y observacional descriptiva y estuvo fundada en la revisión de datos secundarios de la literatura especializada que contiene la teoría de conjuntos y específicamente el conjunto vacío, así como de datos primarios a través del recojo de información del tema en estudiantes de Educación, mención Matemática, de una Universidad Nacional de Lima, quienes formaron una muestra representativa y de tamaño adecuado para el estudio. El tamaño equivalente a 61 sujetos se determinó considerando la respectiva fórmula estadística, en la que se usaron los resultados (varianza y error tolerable en función de la media) de un estudio piloto de 30 estudiantes de la población referentes a conocimientos relacionados con el conjunto vacío.

Alfonso (1994) refiere que la investigación documental es un proceso metódico de búsqueda, recolección, organización, análisis e interpretación de datos referidos a un tema determinado. En la presente investigación se implementaron los siguientes pasos:

1°) Selección del tema. En este paso se realizaron la exploración y balance de fuentes sobre el tema objeto de estudio, recurriendo para esto a la lectura y acopio de datos sobre el conjunto vacío y temas conexos. Las fuentes corresponden a publicaciones efectuadas en diversos tiempos y autores.

2°) Planteamiento del problema. En este paso se formularon preguntas relativas a cómo y por qué sucedieron los hechos. Las respuestas merecieron un esfuerzo de revisión de diversas fuentes que poseen los datos requeridos, que fueron recogidos de fuentes primarias: libros, diccionarios, artículos, etc.

3°) Desarrollo del proceso y resultados. En este paso se encontraron resultados producto del análisis e interpretación de los datos sobre el conjunto vacío y temas conexos.

En el estudio, por ser descriptivo, se observó el conocimiento de información en torno al conjunto vacío en la muestra del estudio, como si se tratase de un corte en el tiempo. El rasgo principal que lo define el estudio como observacional descriptivo, y se distingue de un observacional analítico, porque en este último su objetivo y diseño se centran en indagar relaciones causa-efecto. El análisis de los datos contribuirá con acrecentar el corpus teórico existente sobre el conjunto vacío, el conjunto denominado “especial”.

2.2 Técnicas de recojo y análisis de datos

La técnica de recojo de datos primarios fue el fichaje y para los secundarios, la encuesta. Los respectivos instrumentos fueron las fichas y el cuestionario, previamente validado por juicio de expertos y el uso de la técnica alfa de Cronbach.

El análisis de los datos secundarios se realizó mediante la lectura analítica, la aplicación del análisis de contenido y el análisis de documentos. En tanto que el análisis descriptivo de datos primarios, a partir de figuras, que permitieron aproximarse a los conocimientos que sobre el conjunto vacío y temas conexos poseen los sujetos de la muestra del estudio.

CAPÍTULO III
Resultados

3.1 Análisis teórico del conjunto vacío

Sobre el *conjunto vacío* se presentan expresiones tomadas de diccionarios o libros, publicados en diversos tiempos y países:

"conjunto que no posee elemento alguno" (Velazco, 2021);
"conjunto que no contiene ningún elemento" (Real Academia Española, 2020);
"conjunto que no tiene elementos" (Courant [12] y Robbins, 2017, p. 118);
Según su cardinal, conjunto que "tiene 0 elementos" (Marín, Lay y Urbano, 2012);
"único conjunto sin elementos" (Arrondo, 2012, p. 3);
conjunto que "no posee elementos" (Muñoz, 2012, p. 13);
"conjunto que no tiene ningún elemento; lo consideraremos finito y supondremos que está contenido en cualquier otro conjunto" (Herrero, 2012, p. 20);
"conjunto que contiene cero elementos" (Soto, 2011, p. 24);
"conjunto que no contiene elementos" (Rodríguez y otros, 2005, p. 3);
"conjunto que no contiene ningún elemento" (Contreras, 2003, p. 25);
"conjunto sin elementos" (Valiente, 1988, p. 48);
"conjunto que carece de elementos" (Flores y Fautsch, 1981, p. 54);
"conjunto que no contiene ningún elemento" (Seiffert, 1978, p. 186);

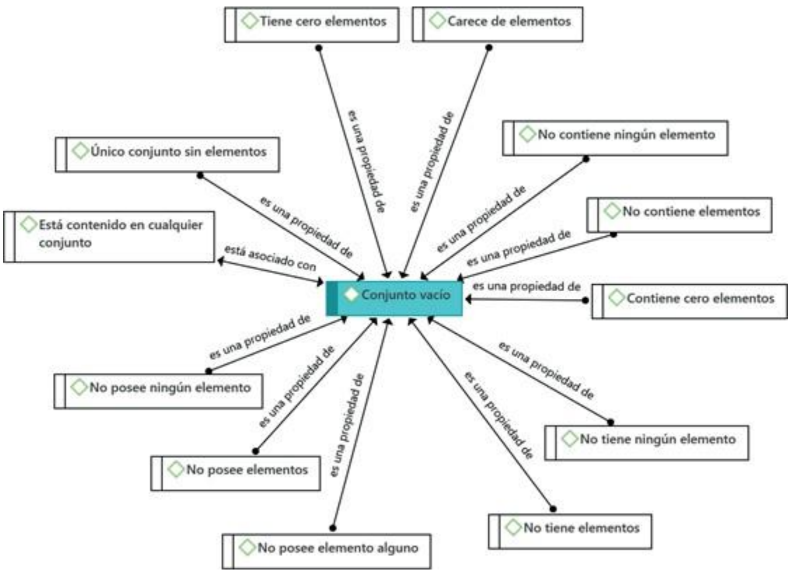
[12] Richard Courant (1888 – 1972): Matemático alemán-estadounidense, discípulo del célebre David Hilbert.

"conjunto que no posee ningún elemento" (Ströbl, 1977, p. 55);
"conjunto que carece de elementos" (Lipschutz, 1975, p. 3);
"conjunto sin elementos" (Lucas y James, 1973);
"conjunto sin elementos" (Lovaglia, Elmore y Conway, 1972, p. 2);
"conjunto que no tiene elementos" (Marks, 1971, p. 46);
"Desde el punto de vista intuitivo, un conjunto que no tiene ningún elemento" (Bandet, Sarazanas y Abbadie, 1969, p. 171);
"conjunto que no tiene elementos" (Kleene, 1952, p. 20);
conjunto que no tiene ningún elemento (Vera, 1948).

En el caso de Gödel (1981), refiere que "una clase es vacía cuando no tiene elementos" (p. 219); sin embargo, previamente realiza una presentación de nociones primitivas y axiomas. El primer axioma afirma que todo conjunto es una clase.

Figura 1

Expresiones de autores asociadas al conjunto vacío.



Nota. *La definición de conjunto responde a una amplia sinonimia, donde se destaca la carencia de elementos; pero también su unicidad e inclusión de cualquier conjunto. No es poco frecuente encontrar redundancia en los autores cuando mencionan "no tiene ningún elemento" o "no posee ningún elemento" o "no posee elemento alguno". Asimismo, se recurre a la cardinalidad para indicar que "contiene cero elementos" o "tiene cero elementos".*

Las expresiones previas en las citas sobre conjunto vacío, que se muestran también en la figura 1, presentan similitud a la que ofrece el diccionario del ente rector de la lengua española, “conjunto que no contiene ningún elemento”. Tales expresiones se mantienen en el tiempo, considerando que las distintas fuentes referidas son libros que han sido editados desde hace más de 70 años en diversos países de América y Europa. Tales expresiones conducen a una caracterización del conjunto vacío como el que no tiene elementos y muestran, a simple vista y recurriendo a un enfoque literal, ideas contrarias a la idea de colección o pluralidad asociada a conjunto según la Real Academia Española (2020); es decir, la forma como de define el conjunto vacío conduce a la pregunta:
¿Cuál es la naturaleza del conjunto vacío, si precisamente nada contiene y dista de la idea de pluralidad? Pues tales expresiones son percibidas a primera vista como “paradójicas” o como una “paradojas semánticas”, porque encierra una contradicción desde el significado de las palabras constitutivas. Esto implica que el “concepto intuitivo” de conjunto vacío no es suficiente y requiere de “retoques matemáticos” para lograr su comprensión, considerando que este concepto es fundamental en la teoría de conjuntos y en la Matemática en general. Asimismo, hay algunos autores que, a la caracterización del conjunto de no poseer elementos, le añaden su unicidad y la propiedad de ser parte de cualquier conjunto.

Claro está que la presentación del conjunto vacío, a partir de las expresiones de los autores citados, responde a descripciones sencillas y parecidas; pero, se convierte en una ambigüedad cuando se enfoca literalmente el concepto, desde el significado de cada palabra componente del lenguaje natural: “conjunto” y “vacío”; pues, confunde si se quiere comprender el concepto matemático a partir del leguaje natural recurriendo a la Matemática asociada con lo concreto, como en la antigüedad, pero que al presente “no se exige a los objetos matemáticos que tengan un correlato real o que sean la representación de un fenómeno concreto; sólo se les pide coherencia lógica” (Piñeiro, 2013, p. 12).

Una mirada de conjunto vacío por tratamiento intuitivo lleva a pensar, desde el principio de constructibilidad, que es una construcción mental “que no puede ser reducida o fundada en algo matemático anterior, que sea más radical o primitivo” (Dou, 1974, p. 115). Pero, ciertamente, lo que se aprecia según el significado de las palabras del lenguaje natural, el “conjunto vacío” se aprecia con facilidad como una “expresión paradójica” o “paradoja semántica”, del mismo modo que “conjunto sin elementos”, según Manrique (2003, p. 65).

El conjunto vacío, según la determinación de los conjuntos, por extensión o enumeración y por comprensión o inclusión, resulta un concepto complejo de comprender. Para Badiou (2008), “un conjunto está ‘hecho de elementos’, es la ‘colección’ [en mi lenguaje, el cuenta-por-uno] de sus elementos” (p. 62). En esta perspectiva, el axioma de existencia de la teoría conjuntista muestra que, como elemento de partida, “hay un conjunto (y este es el conjunto vacío)” (Gironi, 2015, 24), lo que significa que “el vacío está incluido en cada conjunto” (Clemens, 2005, citado por Alfaro, 2016, p. 134). Asimismo, Badiou (1988), refiere que “el conjunto vacío es inextensional” (p. 82), lo que significa que carece de elementos; no tiene intensión y, por lo tanto, tampoco extensión. Como precisa Badiou (2008): “Lo impresentable es inextensional” (p. 80). Esto hace notar que el conjunto vacío, $\emptyset$, por no contar con elementos, carece de extensión, como si la tiene el conjunto A={6, 28, 496}, cuya intención es mostrar los números perfectos menores que 500.

Arrondo (2012), para llegar a la definición del conjunto vacío presenta una secuencia de ideas como parte de una estructura axiomática:

Axioma de existencia: Existe un conjunto sin elementos;

Axioma de extensionalidad. Si cada elemento de X es un elemento de Y y cada elemento de Y es un elemento de X, entonces X = Y;

Corolario. Existe un único conjunto sin elementos;

Definición. Conjunto vacío es el único conjunto sin elementos.

La definición que indica la unicidad del conjunto vacío es consecuencia de axioma de extensionalidad o de la extensión, tal como lo precisa Halmos (1965), “El axioma de la extensión implica que sólo puede haber un conjunto sin elementos” (p. 17); es decir, no existen varios conjuntos vacíos, sino uno solo.

En torno a la determinación del conjunto vacío por comprensión y extensión, Marín, Lay y Urbano (2012), presentan el conjunto vacío sin mencionarlo por medio de un ejemplo: “$C=\{x \in N / 5<x<6\} = \{\ \}= \emptyset \rightarrow C$ tiene 0 elementos, es decir, $n(C)=0$” (p. 12). En la cita, los autores no hacen mención del vacío, sólo presentan su símbolo, $\emptyset$; es decir, las ideas no responden a una presentación didáctica. En tanto que Marín, Lay y Urbano (2012) refieren que el conjunto vacío, según su cardinal, es el conjunto que “tiene 0 elementos”; del mismo modo, Donoso(2009) refiere que: “El uso del cero en un contexto cardinal se hará paraseñalar el cardinal del conjunto vacío. El cero expresa así la ausencia decantidad, es decir, no hay elementos en una colección, lo que hace que sea considerado como “un número sin valor”. (p. 22)

Carranza, Castillo, Vélez y Agapito (1994), presentan al conjunto vacío como un “conjunto especial”, mediante una definición “apoyándose en un convenio” referente a casos de “conjuntos que carecen de elementos” e indican: “Se llama conjunto vacío o conjunto nulo de U y se denota con al siguiente

$$\emptyset = \{x \in U \ / \ x \neq x\}\text{”. (p. 67)}$$

En este caso, los autores asumen el conjunto vacío como resultado de un “convenio”; lo que obvian es decir que tal convenio proviene deun sistema axiomático, un principio necesario para edificar una teoría, como la de los conjuntos y que no es complicado presentarlo de modo sintético. Se aprecia que recurren al conjunto vacío formado por “aquellos elementos x que satisfacen una propiedad p(x)”.

Chávez (1993), anota que el conjunto vacío es “el extremo opuesto de la idea de conjunto universal”:

"Dado un conjunto A, el conjunto vacío puede definirse como:

$$\emptyset = \{x \in A \,/\, x \neq x\}$$

Como $x \neq x$ nunca es verdad, $\emptyset$ es un conjunto sin elementos". (p. 58)

El autor recurre al concepto de conjunto universal y la complementación de manera implícita para presentar al conjunto vacío. Lo de "extremo opuesto" es una expresión temeraria.

Negro y Zorio (1982), parten de los términos no definidos: elemento y conjunto, la relación no definida: pertenencia. Con tales construcciones se precisan las proposiciones: $x \in A$ que establece que el elemento x pertenece al conjunto A; mientras que $x \notin A$ es la negación de la anterior proposición. De este modo, el conjunto se *establece por extensión*, tabulación o enumeración, cuando se explicitan, entre llaves, todos los elementos, y por *comprensión o de forma enunciativa* cuando se determina con una propiedad característica de x, p(x). Sean los conjuntos A y B con sus respectivas propiedades características p(x) y q(x), y considérese la función lógica compuesta $p(x) \wedge \sim q(x)$ con la proposición $\forall x,\ p(x) \wedge \sim q(x)$. El conjunto que tiene esta proposición por propiedad se denomina conjunto diferencia, es decir:

$$A - B = \{x \,/\, p(x) \wedge \sim q(x)\}$$

En el caso del conjunto diferencia A - A, sus elementos habrían de hacer una proposición contradictoria:

$$\forall x,\ p(x) \wedge \sim p(x):\ A - A = \{x \,/\, p(x) \wedge \sim p(x)\} \text{ o } A - A = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin A\}.$$

"Resulta un conjunto "muy especial", pues no hay ningún x que haga cierta una contradicción. De este modo se establece el conjunto vacío,

$$\emptyset = A - A = \{x \,/\, p(x) \wedge \sim p(x)\}\text{". (p. 41)}$$

La presentación didáctica previa, $\emptyset$ ha sido obtenido por construcción recurriendo a argumentos de la Lógica, a partir de la determinación de dos conjuntos por comprensión y la diferencia de conjuntos.

Hernández, Rojo, Rabuffetti y S. de Hernández (1966), definen el conjunto vacío como un conjunto por comprensión:

"Si se da una proposición contradictoria, es decir, que sea siempre falsa, se dice que define un conjunto vacío.

V={x/ P(x)}es vacío $\Leftrightarrow$ |x, P(x) es falsa". (p. 22)

"Un conjunto vacío carece de elementos.

Es inmediato, pues si la proposición que lo define es contradictoria no existe ningún elemento que la satisfaga.

V es conjunto vacío $\Leftrightarrow$ | x, x $\not\in$ V". (p. 23)

Esta presentación del conjunto vacío está asociado a una propiedad P(x) que es una proposición falsa, similar a algunas de las presentaciones anteriores, del mismo modo que Oubiña (1969) presenta la definición: "Sea X un conjunto, se llama "subconjunto vacío de X", y se denota por $\emptyset_X$, al conjunto $\emptyset_X=\{x: x \in X/ x\neq x\}$" (p. 9), a partir de la relación de inclusión de conjuntos y recurriendo a la propiedad P: x≠x. En el mismo sentido, Oyarzún (2019) indica lo siguiente:

"Se define el conjunto vacío como $\emptyset$:={x: x≠x}".

Como se aprecia en las citas previas, el conjunto vacío es definido o determinado por comprensión con una contradicción, $\emptyset = \{x/ x\neq x\}$, pero también se presenta mediante una propiedad cualquiera que conduce a la inexistencia de elementos, como por ejemplo el siguiente caso:

$$\emptyset=\{x\in N/ 5<x<6\}.$$

Hay autores que aparejan lenguaje formal y usual al momento de presentar el conjunto vacío, como López (2019):

> Hay una manera formal para definir, dado un determinado universo Ω, al conjunto vacío: $\emptyset=\{x\in N/ 5<x<6\}$.
>
> $$\emptyset = \{x \in \Omega/x\neq x\}$$
>
> es decir, los elementos del conjunto vacío son los objetos de Ω que son distintos de sí mismos, ¿quién cumple esto? ¡Nadie! Luego el conjunto vacío no tiene elementos. (p. 21)

Las expresiones con lenguaje natural referentes al conjunto vacío, presentadas por algunos autores previamente citados, generan ambigüedad al caracterizarlo; pero, también genera duda el hechode definirlo formalmente mediante una contradicción, $\emptyset = \{x: x \neq x\}$, tal como lo presentan diversos autores, también citados, e inclusive, algunos aparejan ambas maneras de presentación del conjunto vacío, dejando una estela enigmática. Asimismo, las citas de diversos autoresy fuentes presentan maneras distintas de introducir el conjunto vacíoen el contexto de la teoría de conjuntos, unas con criterios didácticos más claros que otras; pero, con un patrón común: existe la tendencia de percibir ambigüedad al ser abordado con el significado de las palabras del lenguaje natural, que bien podría disiparse aduciendo que existe un tratamiento axiomático del mismo, lo que implica que este concepto no tiene la exigencia de responder a una "evidencia intelectual". El estudiante, al tratar de comprender y asimilar el referido conjunto, va a trepidar en torno al conjunto vacío que podría generarle conflicto cognitivo, expresión usada por Piaget (1999) para hacer referencia al cambio conceptual o reconceptualización que produce una situación contradictoria, entre aquello que los estudiantes ya saben (conocimientos anteriores) y los nuevos, generando un desequilibrio cognitivo que debería arrastrar a un conocimiento más amplio. Sin embargo, hay materiales sobre teoría de conjuntos que hasta prescinden del conjunto vacío, como el caso de Álvarez, Acosta y Marmolejo (s. f.).

Pero, ¿cómo se debe enseñar temas matemáticos sin que invada la ambigüedad que genera el lenguaje usual? Planas y Reverter (2011), refieren el grado de polisemia entre el lenguaje matemático en relación a los lenguajes ordinarios o naturales:

> En comparación con los lenguajes ordinarios, los elementos del lenguaje matemático son menos polisémicos y menos dependientes del contexto, pero su enseñanza y aprendizaje se da en entornos en los que la polisemia y el contexto están presentes. De ahí que cualquier ideal comunicativo sea difícil de conseguir en la clase de Matemáticas, que no es ajena a la ambigüedad derivada de la

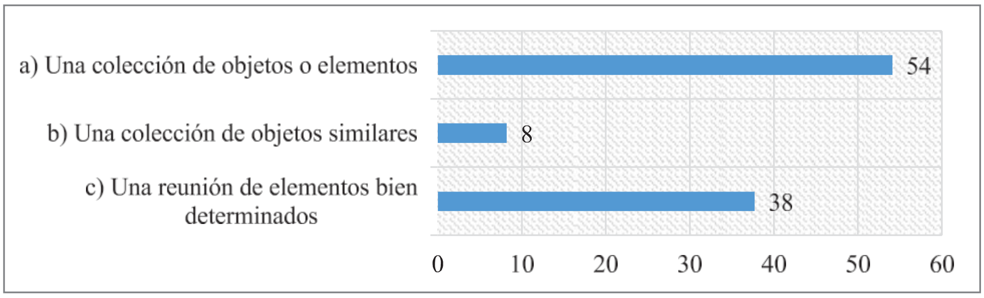
> combinación de lenguajes, ni tampoco al reto del equilibrio entre lo “formal” y lo “informal”. En parte, este reto consiste en ser capaz de usar, como recurso y con prudencia suficiente, los significados dados por los lenguajes ordinarios. (p. 2)

Las ideas previas destacan diversos aspectos que no pueden pasar por alto los docentes que tienen la misión de formar matemáticamente a los estudiantes; pues deben ser quienes manejan los conceptos matemáticos, como es el caso del conjunto vacío, recurriendo a los fundamentos de la Semántica, Psicología, Lógica, Filosofía, Didáctica, entre otros. Los responsables de la transposición didáctica deben analizar a los autores que recurren a diversas formas para presentar el conjunto vacío en libros u otros materiales didácticos a través del leguaje usual o formal y sistematizarlos con el propósito de generar un óptimo aprendizaje de este concepto. Esto exige diseñar propuestas didácticas que contengan incluso palabras contradictorias, que en el caso de la teoría conjuntista debe realizarse compartiendo ambos enfoques de ser el caso, el intuitivo y el axiomático, sin que ello implique amenguar el rigor y la comprensión de los conceptos, como es el caso del conjunto vacío. En esta línea de pensamiento, debe apreciarse que el proceso de construcción del conocimiento en el estudiante es un aspecto complejo y heterogéneo que abarca distintos aspectos (biológico, psicológico, sociológico, pedagógico, ecológico, etc.).

3.2Análisis y resultados de conocimientos del conjunto vacío

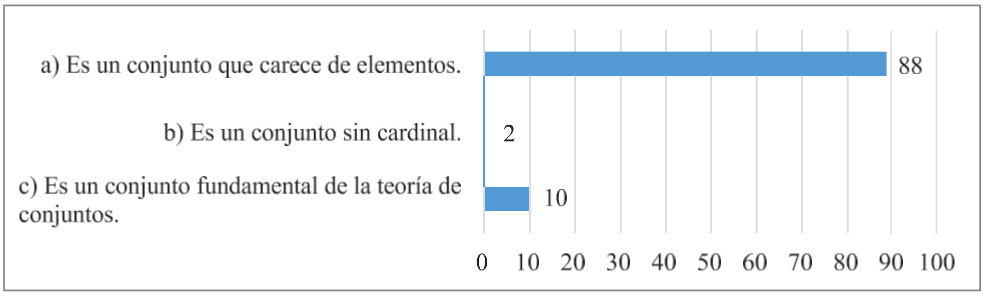
Las respuestas de un cuestionario sobre el conjunto vacío se muestran enseguida:

Figura 2. La idea que corresponde a conjunto es:



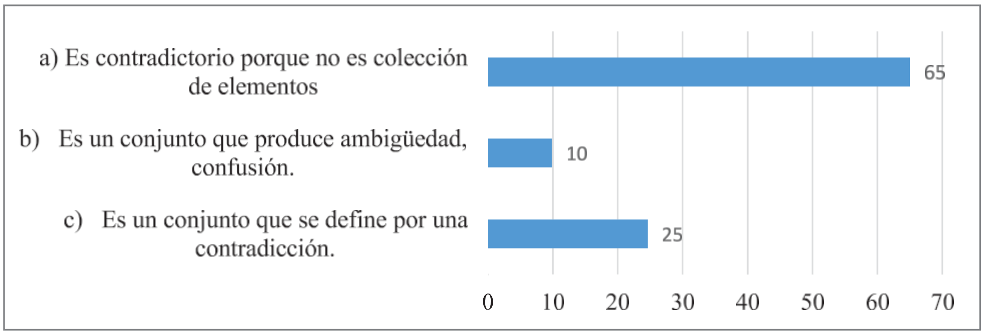
Nota. *Cuestionario aplicado a estudiantes de Pedagogía, mención Matemática, cuyas respuestas se expresan en frecuencias porcentuales, aproximadas a valores enteros. El 54% de los estudiantes encuestados consideró que la idea que corresponde a conjunto es la alternativa a): "Una colección de objetos o elementos", una idea incompleta ya que tales elementos deben estar "bien determinados", lo que significa que, dado un objeto particular, debe saberse con claridad si dicho objeto es o no un elemento del conjunto, tal como lo precisa Briton y Bello (1982). Es decir, la opción correcta es la c) que la respondió el 38%; pues, un conjunto no lo forman objetos similares ni una mera colección de objetos sin mayor precisión.*

Figura 3. *Corresponde a conjunto vacío:*



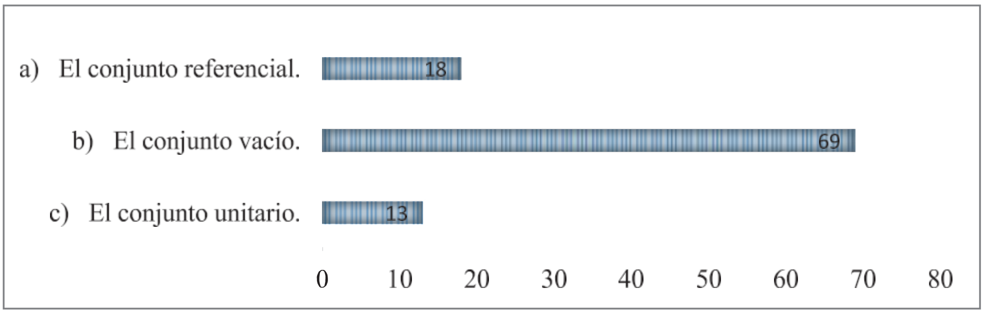
Nota. *Cuestionario aplicado a estudiantes de Pedagogía, mención Matemática, cuyas respuestas se expresan en frecuencias porcentuales, aproximadas a valores enteros. El 88% de encuestados, refirió que el conjunto vacío es aquel que "carece de elementos" tal como lo presenta en la extensa bibliografía sobre teoría de conjuntos, inclusive los autores citados Courant y Robbins (2017) y otros, con la sinonimia respectiva; aunque, la mayoría de ellos lo consideran la definición que encierra "contradicción", como se ve en la siguiente figura.*

Figura 4. *El conjunto vacío:*



Nota. *Cuestionario aplicado a estudiantes de Pedagogía, mención Matemática, cuyas respuestas se expresan en frecuencias porcentuales, aproximadas a valores enteros. Aproximadamente las dos tercias partes, 65%, del total de estudiantes encuestados consideró que el conjunto vacío"es contradictorio porque no es colección de elementos", un 10% que es"un conjunto que produce ambigüedad, confusión", ya que la aprecian como "expresión paradójica" o "paradoja semántica", como lo indica Manrique (2003). Sólo la cuarta parte de los encuestados, 25%, destacó la definición del conjunto vacío a partir de una contradicción, $\emptyset=\{x: x\neq x\}$", como lo presentan Oyarzún (2019) y otros autores citados.*

Figura 5. ¿Cuál es el conjunto que es subconjunto de cualquier conjunto?:

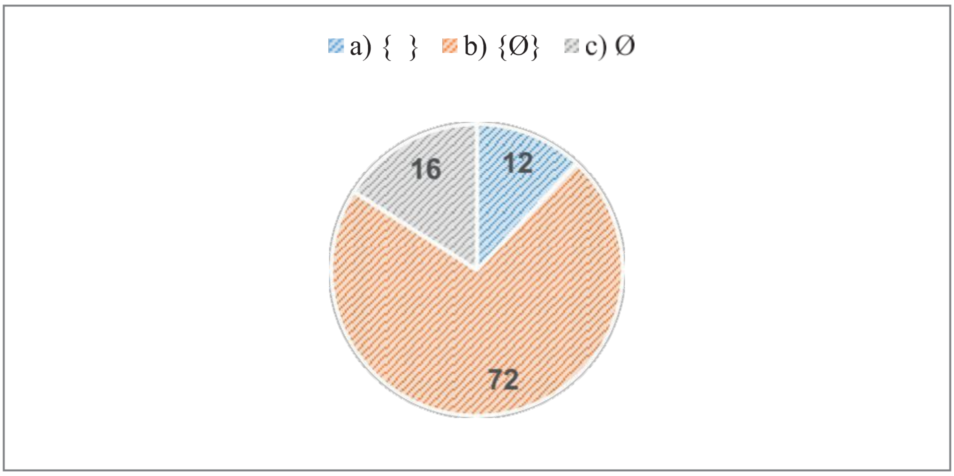


Nota. *Cuestionario aplicado a estudiantes de Pedagogía, mención Matemática, cuyas respuestas se expresan en frecuencias porcentuales, aproximadas a valores enteros. Más de las dos tercias partes de los encuestados, 69%, identifica al conjunto vacío como subconjunto de cualquier conjunto, una propiedad fundamental de este conjunto. Con esta propiedad, por ejemplo, se establece el conjunto potencia de un conjunto A, P(A)*[13] *, y las diversas operaciones entre sus elementos.*

---

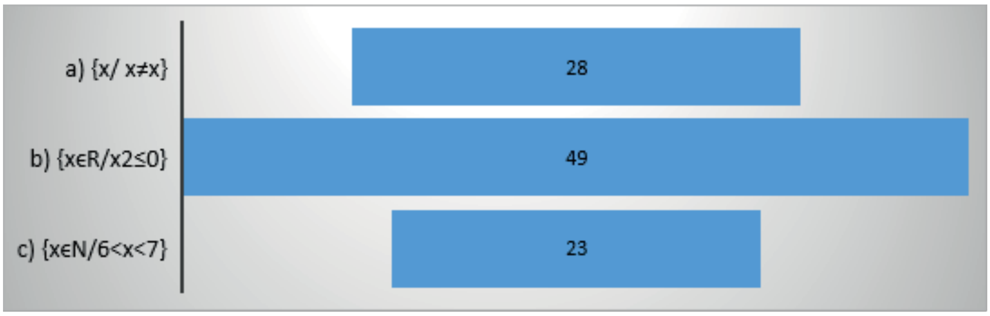
[13] Nótese que la construcción $P(A)=\{X/X\subseteq A\}$ no corresponde al esquema en el que se aplica el axioma de separación, ya que no se cuenta con un conjunto de referencia U apropiado. Entonces, para garantizar la existencia del conjunto potencia de un conjunto se necesitará un axioma, el axioma del conjunto potencia.

Figura 6. ¿Cuál notación no representa al conjunto vacío?



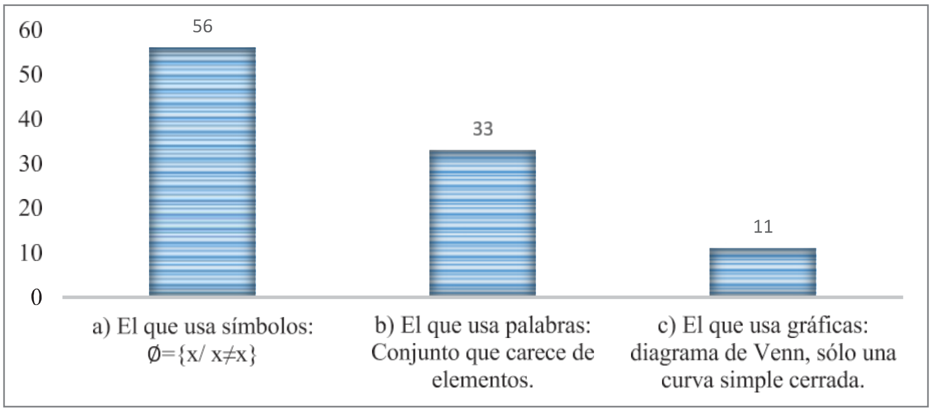
Nota. *Cuestionario aplicado a estudiantes de Pedagogía, mención Matemática, cuyas respuestas se expresan en frecuencias porcentuales, aproximadas a valores enteros. El 72% de los encuestados identifica que {Ø} no es un conjunto vacío, porque es un conjunto unitario, puesto que identificanlas notaciones del conjunto vacío, { } y Ø.*

Figura 7. ¿Cuál de los siguientes conjuntos, NO es un conjunto vacío?



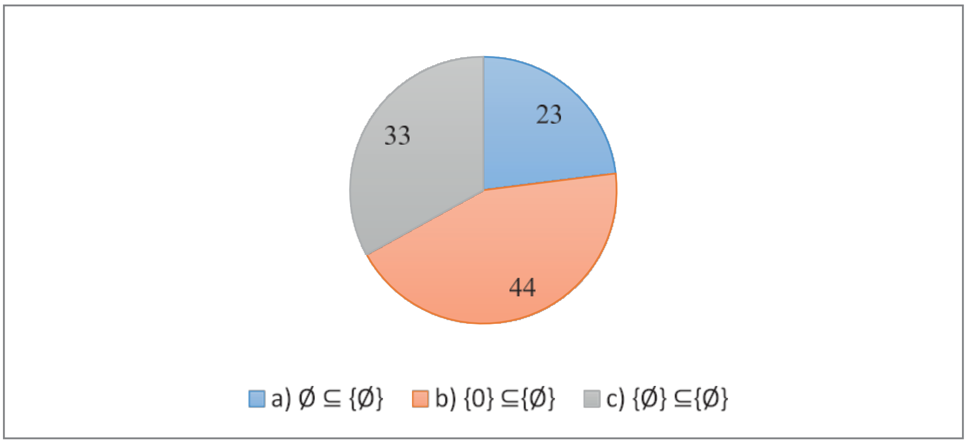
Nota. *Cuestionario aplicado a estudiantes de Pedagogía, mención Matemática, cuyas respuestas se expresan en frecuencias porcentuales, aproximadas a valores enteros. El 49% de los encuestados identifica que el conjunto* $\{x\in R/x^2\leq 0\}$ *no es vacío, respuesta correcta, porque equivale a {0}. Un elevado 28% considera erróneamente que {x/ x≠x} no es vacío, al igual que un 23% al considerar* $\{x\in N/6<x<7\}$ *como conjunto vacío.*

Figura 8. ¿Qué tipo de lenguaje es el más apropiado para expresar el conjunto vacío?



Nota. *Cuestionario aplicado a estudiantes de Pedagogía, mención Matemática, cuyas respuestas se expresan en frecuencias porcentuales, aproximadas a valores enteros. El 56% de los encuestados identifica que el conjunto {x/ x≠x} es vacío, que equivale a optar por un lenguaje formal; en tanto, un 33% opta por el lenguaje usual, que el 75% considera que con este lenguaje el enunciado de conjunto vacío es contradictorio o ambiguo (Fig. 4). Sólo un 11% considera como adecuada una representación gráfica mediante diagramas de Venn.*

Figura 9. ¿Cuál de las expresiones es incorrecta?



Nota. *Cuestionario aplicado a estudiantes de Pedagogía, mención Matemática, cuyas respuestas se expresan en frecuencias porcentuales, aproximadas a valores enteros. El 44% de los encuestados identifica la opción incorrecta, {0} {Ø}, en tanto que el 33% identifica la propiedad que todo conjunto es subconjunto de sí mismo y el 23% que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.*

Los estudiantes perciben mayoritariamente a la definición del conjunto vacío como “conjunto que no posee elementos” o sus equivalentes en lenguaje natural (figura 1) como una “expresión paradigmática”, “ambigua” y “confusa”. Tal interpretación a partir del lenguaje común se zanja cuando el conjunto vacío se presenta como axioma a partir de un sistema axiomático, como el de Zermelo, en el cual se precisa: “Existe un conjunto sin elementos, $\emptyset$, llamado vacío” (Navarro, 1973, p. 52); sin embargo, queda la duda si es el conjunto vacío es “un conjunto” o “el conjunto”, como lo precisa Arrondo (2012): “único conjunto sin elementos”. Lo cierto es que, desde la axiomática que presenta Arrondo (2012), el axioma de existencia y el axioma de extensionalidad, se infiere como corolario que “existe un único conjunto sin elementos”, lo que da lugar a la definición: “Conjunto vacío es el único conjunto sin elementos”.

En el nivel superior, sobre todo en la formación de docentes de Matemática, se debe tener en cuenta lo que expresa Navarro (1973), cuando afirma que “entendemos por conjunto [vacío] aquello que verifica tales axiomas, prescindiendo por completo de las ideas intuitivas que hubiéramos podido sostener con anterioridad” (p. 52). Entonces, a partir de los resultados encontrados, donde se observa deficiencias en la formación conceptual y sus caracterizaciones, particularmente en lo concerniente al conjunto y conjunto vacío, requiere nuevos planteamientos en lo concerniente a la presentación de estos temas con los recursos didácticos (libros, estrategias y otros) pertinentes y adecuados a fin de superar cualquier dificultad en el aprendizaje de la temática objeto del estudio y de la Matemática en general. Es importante que el docente y futuro docente de Matemática deben saber diferenciar entre lo intuitivo y lo axiomático, cuando de estudiar conjuntos se trata.

CONCLUSIONES

El tratamiento intuitivo de la teoría de conjuntos, tal como lo formuló Georg Cantor a fines del siglo XIX, condujo a contradicciones en dicha teoría, las que generaron crisis en sus fundamentos, pero se superaron progresivamente. Lo que aún se mantiene como "expresión paradójica" o "paradoja semántica" es lo que se infiere a partir de cómo se presenta el *conjunto vacío,* $\emptyset$, en textos con fines didácticos, cuando sin explicación previa se menciona: "conjunto vacío es el conjunto sin elementos", una expresión del lenguaje natural convertida en "paradójica" para estudiantes de educación básica y superior generada a partir de una interpretación del sentido literal de este conjunto, según el significado de cada palabra: conjunto (agrupación o colección de objetos) y vacío (ausencia, nada). Es decir, literalmente, en lenguaje natural el conjunto vacío corresponde a un "conjunto de nada", "conjunto que no es conjunto" o "agrupación que no es agrupación", en razón de la idea cantoriana: "conjunto es la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra percepción o de nuestro pensamiento". Pero, la definición del conjunto vacío usando el lenguaje formal mediante una contradicción, como $\emptyset = \{x: x \neq x\}$, tampoco genera "tranquilidad" en quienes tienen la convicción que la Matemática se edifica a partir de exigencias lógicas, sin contradicciones y no con dogmas.

Las teorías axiomáticas de conjuntos consideran la existencia del conjunto vacío, $\emptyset$, al incluir el axioma del conjunto vacío, como es el caso del sistema axiomático ZF; mientras que hay presentaciones en las que se deduce su existencia. El tratamiento axiomático de la teoría conjuntista a partir del lenguaje formal matemático no permite interpretaciones del conjunto vacío; es decir, este conjunto existe alejado del "sentido literal", de las "evidencias", del "sentido común" y de las "demostraciones físicas"; sin embargo, por asuntos didácticos, es posible interpretarlo, considerando que la Matemática surgió cuando el hombre primitivo sintió el deseo de conocer mejor los fenómenos de su entorno. Entonces, un sistema axiomático de la teoría cantoriana disipa el asunto de "paradoja semántica" o "expresión paradójica" respecto de que el "conjunto vacío es un conjunto sin elementos"; lo que constituye una ruta diferente de presentar el conjunto vacío, la que prescinde de las ideas intuitivas que poseen los estudiantes, matizadas por un enfoque literal y que puede conducirlos a análisis infecundos, pero no es tan sencillo alejarse de tales ideas porque forman parte de la estructura mental.

El conjunto vacío, $\emptyset$, es un concepto fundamental en la teoría conjuntista y de su comprensión depende un tratamiento claro de la teoría, pues sin él no se puede desarrollar el álgebra de las partes de un conjunto (por ejemplo, la intersección de dos conjuntos disjuntos o disyuntos, la diferencia cuando se trata del mismo conjunto, la complementación), un caso particular del álgebra de Boole. Este conjunto, a pesar de contener nada, es algo en sí mismo: un conjunto; una distinción sustancial en el campo didáctico si se ubican a los conjuntos en un contexto determinado. Entonces, la forma como se presente el conjunto vacío en los recursos didácticos es decisivo para lograr aprendizajes significativos sobre este conjunto denominado 'especial' y de temas relacionados con él; pero, el problema se podría complicar cuando no se considera el conjunto vacío en la presentación de la teoría de conjuntos.

En libros, manuales y recursos didácticos diversos, generalmente no se explicita si la teoría de conjuntos responde a un tratamiento axiomático u otro, omisiones que indican que una transposición didáctica podría no es óptima, ya que no basta presentar o definir el conjunto vacío, $\emptyset$, a partir del lenguaje natural por género próximo y diferencia específica, lo que podría generar vanos conflictos cognitivos en estudiantes que tratan de comprenderlo a partir del lenguaje natural; confusión que podría generarse también si se recurre a ilustrar el concepto en cuestión a partir de casos concretos desde una Matemática contextualizadano pertinente. Entonces, el aprendizaje del conjunto vacío dependerá, en gran medida, del diseño de estrategias metodológicas en el marco de una óptima enseñanza con recursos pertinentes y que no debería descartarse el entorno del estudiante, sino alentarse.

En comparación con el lenguaje matemático, los elementos de los lenguajes naturales son más polisémicos y más dependientes del medio; sin embargo, la enseñanza y aprendizaje de los elementos matemáticos ocurre en ambientes en los cuales la polisemia y el medio están presentes. En tal sentido, resulta dificultoso conseguir una óptima comunicación matemática en clase, porque ésta no es extraña a la ambigüedad procedente de la combinación de los lenguajes usual y matemático. El desafío del docente reside en su capacidad de aplicar con prudencia los significados procedentes de los lenguajes habituales como recurso didáctico clave en las estrategias previstas en la formación de estudiantes universitarios, de manera particular de quienes serán futuros docentes de Matemática.

Un porcentaje elevado de los estudiantes de formación docente en la mención de Matemática que formó parte de la muestra del estudio, demostró evidencias que no hay claridad en el manejo de los conceptos, en torno al conjunto y al conjunto vacío, así como propiedades u operaciones relacionadas con éste. Respecto al conjunto, el 54% optó por la idea que es “una colección de objetos o elementos”, una idea incompleta; frente a un 38% que optó por “una reunión de elementos bien determinados”, que es la idea cantoriana de conjunto. El 88% optó por considerar la alternativa que indica que el conjunto vacío es aquel “que carece de elementos”, lo que concuerda con la forma como lo presentan la mayoría de autores citados; sin embargo, más de la mitad, el 65% respondió que “es contradictorio porque no es colección de elementos”, dejando constancia de la ambigüedad que se genera ante una apreciación del significado de las palabras del lenguaje usual:

conjunto y vacío; lo que supera al 25% que optó por la alternativa que "es un conjunto que se define por una contradicción". Del mismo modo, se evidencia que un porcentaje significativo de estudiantes, 56%, opta por el lenguaje formal para representar el conjunto vacío, $\emptyset = \{x: x \neq x\}$, probablemente porque el uso del lenguaje ordinario o natural evidencia contradicción o ambigüedad. Tal análisis de los resultados respecto al conocimiento del conjunto vacío invita a replantear estrategias y recursos didácticos con miras a desarrollar la conceptualización matemática, usos del lenguaje formal y manejo de axiomas, teoremas y propiedades.

REFERENCIAS

Alfaro Vargas, R. (2016). Totalidad y teoría de conjuntos. *Revista deCiencias Sociales,* 2(152), 133-144. https://www.redalyc.org/pdf/153/Resumenes/Abstract_15348419010_2.pdf

Alfonso, I. (1994). *Técnicas de investigación bibliográfica.* ContextoEdiciones.

Alonso Jiménez, J. A.; Borrego Díaz, J.; Pérez Jiménez, M. de J. y Ruiz Reina, J. L. (2007). *Curso práctico de teoría de conjuntos*. Universidadde Sevilla. http://www.cs.us.es/~jalonso/publicaciones/2007-LibroTeoriaConjuntos.pdf

Álvarez Gaviria, J.; Acosta, E. y Marmolejo, M. (s. f.). *Técnicas y ConceptosBásicos en Matemáticas.* https://cepreuni.net.pe/content/assets/descargas/libros/39.pdf

Amster, P. (2013). *La Matemática como una de las bellas artes.* Siglo veintiuno editores.

Arrondo, E. (2012). *Apuntes de Teoría de Conjuntos*. Departamento deÁlgebra, Universidad Complutense de Madrid. http://www.mat.ucm.es/~arrondo/conjuntos.pdf

Babini, J. (1980). *Historia de las ideas modernas en Matemática.* (3ª. ed.). Secretaría General de la Organización de Estados Americanos,Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

Badiou, A. (2008). *Number and numbers*. Polity.

Bandet, J.; Sarazanas, R. y Abbadie, M. (1969). *Hacia el aprendizaje de las Matemáticas*. Kapelusz.

Briton, J. y Bello, I. (1982). Matemáticas contemporáneas (2ª ed.). Harla.

Bunge, M. (2007). *Diccionario de Filosofía.* (5ª ed. en español). Siglo XXI editores.

Cárdenas-Marín, W. O., Reyes Solís, D. B. y Viteri Bazante, F. B. (2017). La formalización lógica del lenguaje como punto de partida para el análisisobjetivo del discurso y la argumentación científica. S*ophia, Colección deFilosofía de la Educación,* (22), 103-125. http://scielo.senescyt.gob.ec/scielo.php?script=sci_arttext&pid =S1390-86262017000100103

Carranza, C.; Castillo, P.; Véliz, C. y Agapito, V. (1994). Matemática Básica. Servicios Copias Gráficas.

Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de la matemática moderna*. Trillas.

Chevallard, Y. (1991). *Transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.* Aique.

Chávez Vega, C. (1993). *Matemática Básica.* San Marcos.

Cignoli, R. (2016). *Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción.* http://cms.dm.uba.ar/depto/public/grado/fascgrado8.pdf

Contreras López, M. (2003). *Matemáticas.* Universidad de los Lagos *Ediciones.*
http://elearning.ulagosvirtual.cl/libros/matematicas/Matematicas.pdf

Courant, R. y Robbins, H. (2017). *¿Qué son las matemáticas*? (4ªreimpresión). Fondo de Cultura Económica.

De Lozada y Puga, C. (1951). *Curso de Análisis Matemático, tomo I* (2ª ed.). Universidad Católica del Perú.

Donoso Riquelme, P. M. (2009). P*resencia del cero en textos deMatemáticas de 1º a 5º básico, publicados en chile en los años 2006 y2007* [Trabajo de Máster]. Universidad de Granda, España.
https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Paola_Donoso.pdf

Dou, A. (1974). *Fundamentos de la Matemática.* (2ª ed.). Labor.

Flores Meyer, M. A. y Fautsch Tapia, E. L. (1981). Te*mas selectos de Matemáticas.* Progreso.

Gironi, F. (2015). *Naturalising Badiou. Mathematical Ontology andStructural Realism*. Palgrave Macmillan.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2004). Didáctica de las Matemáticaspara maestros. Manual para el Estudiante. En J. D. Godino y otros. *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* (pp.15, 154).
https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Gödel, K. (1981). *Obras completas* (introducción y traducción de Jesús Mosterín). Alianza Editorial.

Grupo Editorial Norma Educativa. (2001). *Diccionario de Matemáticas.* Norma.

Gutiérrez Mercedes, V. (1984). *Historia y Metodología de la Matemática.* Ediagraria.

Halmos, P. (1973). *Teoría Intuitiva de los Conjuntos* (octava impresión enespañol). Compañía Editorial Continental. https://pdfcookie.com/documents/teoria-intuitiva-de-conjuntos-8a-ed-paul-r- halmos-eg278d7jkjl0

Hernández, R. P. J.; Rojo, A. O.; Rabuffetti, H. T. y S. de Hernández, M. E. (1966). *Conceptos básicos de Matemática moderna.* Codex.

Herrero Piñeyro, P. J. (2012). *Topología de Espacios Métricos.* Universidadde Murcia.
https://www.um.es/documents/4874468/11035667/cap-0-conj-apl.pdf/dee753c0-04b8-4f24-95fa-bda335307c6f

Kleene, S. C. (1952). *Introducción a la Metamatemática.* Tecnos.

Kline, M. (2000). *Matemáticas para estudiantes de humanidades.* Fondode Cultura Económica.

Lerner, D. (1996). La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contrauna falsa oposición. *En AA.WW. Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate* (pp. 69-118). Paidós.

Lewin, R. (2010). *La teoría de conjuntos y los fundamentos de las Matemáticas.* La Familia.

Lipschutz, S. (1975). *Teoría de conjuntos y temas afines*. McGraw-Hill. López

Mateos, M. (2019). *Conjunto, Lógica y Funciones* (2ª ed.).Independently published. http://sistemas.fciencias.unam.mx/~mlm/calculol/cal1.pdf

Lovaglia, F. M.; Elmore, M. A. y Conway, D. (1972). *Álgebra.* Harla.

Lucas, C. W. y James, R. T. (1973). *Álgebra moderna y lineal* (primera edición en español). Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana.

Manrique Enríquez, F. (2003). *Filosofía de las ciencias. Motivación propedéutica.* Rentería Editores.

Maravall Casesnoves, D. (1975). *Diccionario de Matemática Moderna.* Nacional.

Marín Córdova, R.; Lay Huarac, C. y Urbano Arias, J. (2012). *Matemática* 1. Manual para el docente. Grupo Editorial Norma.

Marks, R. W. (1971). *Diccionario y Manual de las Nuevas Matemáticas* (3ª ed. en español). Editors Press Service, Inc.

Mosterín, J. (2002). *Filosofía y Ciencias* (Selección, notas y edición de Lucas Lavado). Fondo Editorial Universidad Inca Garcilaso de la Vega – Fondo Editorial Universidad Particular Antenor Orrego.

Miro-Quesada, F. (1967). *Lógica I. Filosofía de las Matemáticas.* Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Muñoz Quevedo, J. M. (2012). *Introducción a la teoría de conjuntos* (4ª ed.). Universidad Nacional de Colombia. http://ciencias.bogota.unal.edu.co/fileadmin/Facultad_de_Ciencias/Publicaciones/Archivos_Libros/Libros_Matematicas/Introduccion_a_la_Teoria_de_Conjuntos/teoriconjuntos.pdf

Navarro, J. (1973). *La nueva Matemática.* Salvat Editores.

Negro, A. y Zorio, V. (1982). *Matemáticas-1. Fundamentos. Álgebrabásica. Anexos.* Alhambra.

OECD (2016). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence, and Equity in Education.* Paris: OECD Publishing.

Otte, M.; Steinbring, H.; Stowasser, R. y Dress, A. (1985). *Matemáticas.* Desclée de Brouwer.

Oubiña, L. (1969). *Introducción a la teoría de conjuntos.* Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Oyarzún, J. (2019). *Álgebra y Geometría*. Universidad de Chile. http://www.matematicas.ciencias.uchile.cl/juaco/frontmatter-1.html

Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación matemática,*26(2), 111-133. http://somidem.com.mx/descargas/Vol26-2-4.pdf

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente.* Gedisa. Piaget, J. (1999). *Psicología de la inteligencia.* Psique.

Piaget, J. (1970). *Lógica y conocimiento científico. Naturaleza y métodos de la epistemología*. Proteo.

Piaget, J. (1969). *Psicología y Pedagogía.* Ariel.

Piñeiro, G. (2013). Cantor. *El infinito en Matemáticas.* RBA Coleccionables. Planas, N., y

Reverter, F. (2011). Hay mucho de lengua en las matemáticas. *Cuadernos de pedagogía,* 413, 38-41. https://core.ac.uk/download/pdf/78543759.pdf

Poincaré, H. (1964). *Filosofía de la ciencia* (selección e introducción de Elí de Gortari). Universidad Nacional Autónoma de México.

Real Academia Española. (2020). *Diccionario de la Lengua Española.* Edición Tricentenario. https://dle.rae.es/conjunto?m=form

Rodríguez Franco, J. y otros, (2005). F*undamentos de Matemáticas.* Universidad Nacional Autónoma de México. Publicaciones EmpresarialesUNAM. FCA Publishing. http://www.enelaula.unam.mx/Libreria/DGPYFE_1A%20LIBRERIA_47/Fundamentos%20de%20matematicas.pdf

Salguero Lamillar, F.J. (2001). Teoría general de los signos y del significado. En Á. Nepomuceno Fernández, J. F.; Quesada Moreno, F. J.; Salguero Lamillar (Eds.). *Información: tratamiento y representación* (pp.41-58). Universidad de Sevilla, Secretariado de Publicaciones

Seiffert, H. (1978). *Introducción a la Matemática*. Números y conjuntos. Herder.

Serrano, J. A. (1996). *Filosofía de la ciencia*. Trillas.

Soto Apolinar, E. (2011). *Diccionario ilustrado de Matemáticas* (3ª ed.). http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/ DICM.pdf

Soto Quiroz, R. I. y Noboru Yogui, D. (2020). Análisis de las dificultadesque presentan los estudiantes universitarios en matemática básica.Apuntes Universitarios. *Revista de Investigación*, 10(2), 1-16. https://www.redalyc.org/journal/4676/467662252001/html/

Ströbl, W. (versión y adaptación) (1977). *Diccionarios Rioduero.* Matemática. Ediciones Rioduero. (Edición original en alemán, 1975).

Turpo-Gebera, O. (2016). El currículo de la competencia científica en Perú y Portugal. *Comuni@cción* 7 (2), 15-26. http://www.scielo.org.pe/scielo.php?pid=S2219-71682016000200002&script=sci_abstract

Turpo, O. (2011). Concepciones y Prácticas evaluativas de los Docentes del Área Curricular de CTA en las II. EE. Públicas de Educación Secundaria de Arequipa (Perú). *Revista Peruana de Investigación Educativa*, (3), 159-200. https://revistas.siep.org.pe/index.php/RPIE/article/view/20

Turpo, O. (2010). Socio-dinámica de las identidades en la red. *Razón y Palabra*, 73, 1-18. http://www.razonypalabra.org.mx/N/N73/Varia73/05Turpo_V73.pdf

Usunáriz Balanzategui, U. y Usunáriz Sala, P. (2012). *DiccionarioBiográfico de Matemáticos.* http://oa.upm.es/14868/3/DICCIONARIO_BIOGRAFICO_DE_MATEMATICOS.pdf

Valiente Barderas, S. (1988). *Diccionario de Matemáticas* (NivelBachillerato). Alhambra Mexicana.

Velazco, J. A. (2021). *Lenguaje conjuntista.* Una introducción conejemplos. http://www.ccymat.pw/2021/02/09/introduccion-al-lenguaje-conjuntista/

Vera, F. (1944). *Puntos críticos de la Matemática contemporánea.* Losada.

Vera, F. (1948). *Introducción a la Teoría de Conjuntos.* Editora yDistribuidora del Plata.

Vera, F. (2017). Teoría de conjuntos. *Revista de la Academia Colombianade Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,* 41 (Suplemento), 516–527. https://doi.org/10.18257/raccefyn.585

AUTORES

Dr. José Theódulo Esquivel-Grados
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4591-9921
Educador, matemático, investigador.
Facultad de Educación,
Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión, Perú.

Dra. Valia Luz Venegas-Mejía
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3032-8720
Educadora, comunicadora, investigadora.
Escuela de Posgrado, Universidad Norbert Wiener, Perú.

Mg. Migdonio Nicolás Esquivel-Grados
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1685-3994
Educador, investigador.
Facultad de Humanidades,
Universidad Católica de Trujillo Benedicto XVI, Perú.

ISBN: 978-9942-33-459-6

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica