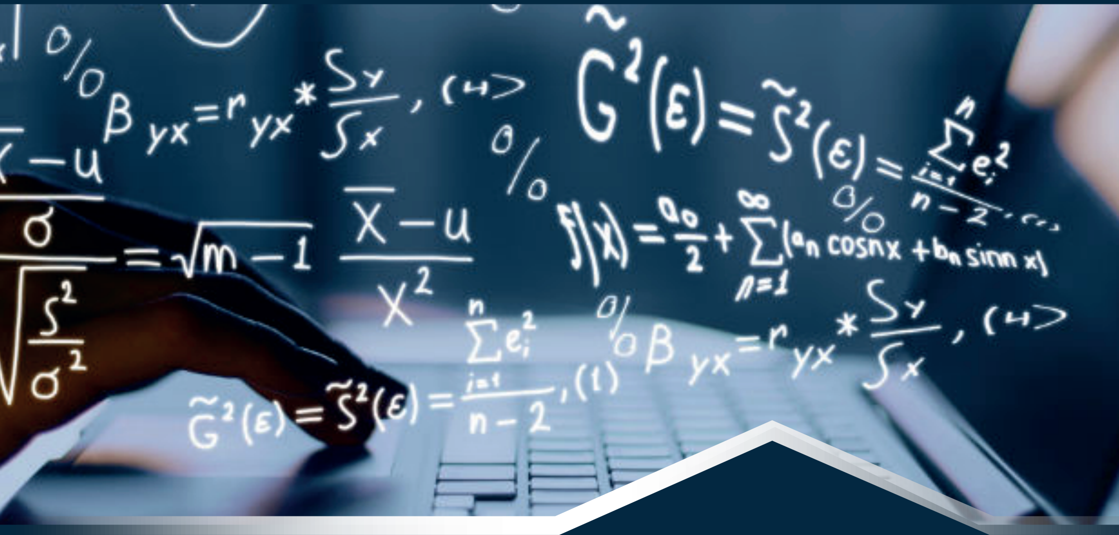


Matemáticas aplicadas a la Ingeniería y administración

Nilo Alfredo Poveda Cisneros
Heriberto Bakke Medina Franco
Bolívar Rosendo Duchi Ortega

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Matemáticas aplicadas a la Ingeniería y administración

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Nilo Alfredo Poveda Cisneros
Heriberto Bakke Medina Franco
Bolívar Rosendo Duchi Ortega

Matemáticas aplicadas a la Ingeniería y administración

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Matemáticas aplicadas a la
Ingeniería y administración

2022,
Publicado por acuerdo con los autores.

Guayaquil-Ecuador

Editado en Guayaquil - Ecuador
Primera edición

ISBN: 978-9942-33-514-2

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Cita.
Poveda, N., Medina, H., Duchi, B. (2021) Matemáticas aplicadas a la Ingeniería y administración. Editorial Grupo Compás.

Contenido

1

Aplicación de las Funciones en administración de Empresas.

Unidad No. 1:
Aplicación de las Funciones en Administración de Empresas.

La Unidad No. 1 del presente libro expondrá elementos matemáticos muy importantes para la Administración y la Economía. Las funciones, en sentidogeneral, tienen aplicaciones prácticas que se complementan con estos dos campos que forman parte de las ciencias sociales. Dentro de los mismos, podemos encontrar aplicaciones de las funciones en materias tales como: planes de negocios, análisis de ingresos, de costos, finanzas, macroeconomía, microeconomía, entre otras.

Objetivo de la Unidad: Aplicar conceptos básicos necesarios para el manejo de las funciones en la Economía y la Administración.

Para que el contenido de la unidad se presente de forma coherente y a su vez abarque todos los temas relevantes; la unidad se estructura de la siguiente forma:

Capítulo I: Breve repaso de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Aplicaciones en la Administración y la Economía.

Capítulo II: Las Funciones lineales y Cuadráticas. Aplicaciones en la Administración y la Economía.

Capítulo III: Las Funciones exponenciales y Cuadráticas. Aplicaciones en la Administración y la Economía.

Los capítulos mencionados cuentan con los siguientes componentes que forman su estructura:

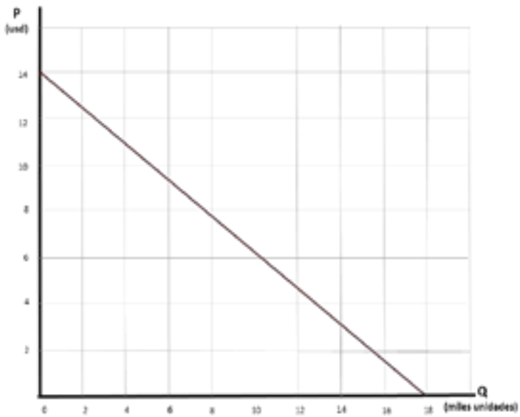
- Contenido teórico.
- Ejemplos prácticos en la administración y la economía.
- Resumen de lo tratado.
- Set de ejercicios.

Además, al finalizar la unidad, se presenta otro set de ejercicios que abarcantodas las materias estudiadas. -

Las funciones lineales y cuadráticas tienen una relación directa con la Administracióny la Economía. Constituyen una herramienta matemática muy utilizada en los tiemposactuales para analizar diferentes escenarios, tanto internos de las empresas como externo, donde se encuentran los mercados y la sociedad en sí. La visualizacióngráfica que ofrecen estos elementos matemáticos ayuda a la toma de decisiones quecada vez se vuelven más complejas y requieren de menos tiempo de análisis.

Por ejemplo, cuando se requiere realizar el análisis del precio de un producto determinado para estimar su demanda en el mercado de bienes, es necesario partirde la siguiente función lineal: donde es la cantidad demandada, de la cual dependeel precio, que se traduce en la siguiente ecuación lineal:

El precio de este producto dependerá de Q, puesto que si por ineficiencias de producción o un incorrecto análisis del mercado, se coloca en el mercado con un precio demasiado elevado, entonces tenderá a cero, esto se puede observar en la siguiente tabla:



Para un precio de 14 usd la demanda en el mercado es 0, por otro lado, para un precio cercano a 0 la demanda es de 18 000 unidades del producto. Esto son los dos extremos que se visualizan de forma sencilla en la gráfica presentada. La visualización gráfica tiene un aporte significativo a la hora de una rápida toma de decisiones.

Este sencillo ejemplo revela el uso que ofrecen estas herramientas matemáticas parallevar a cabo distintos análisis y realizar una toma de decisiones más acertada

CAPÍTULO I: Breve repaso de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Aplicaciones en la Administración y la Economía.

CONTENIDOS:

Es necesario refrescar, antes de comenzar con las funciones, dos elementos matemáticos que son la base para estudiar las funciones lineales y cuadráticas. Aunque serán abordadas de forma breve, como una especie de recordatorio.Además, hay que destacar que estos elementos tienen aplicaciones importantesen el área de la administración y la economía.

1.1 Ecuaciones lineales.

Una ecuación algebraica es un enunciado matemático que relaciona dos expresiones algebraicas que involucran al menos una variable. El conjunto de reemplazo, o dominio, de una variable lo constituye el conjunto de números quepermiten reemplazar a la variable. El conjunto solución de una ecuación se define como el conjunto de los elementosen el dominio de las variables que hacen que la ecuación se verdadera. A cada elemento del conjunto solución se le llama solución o raíz de la ecuación. Para resolver una ecuación se debe hallar el conjunto solución.
Una ecuación lineal es aquella que se puede escribir en la forma:

$$\boldsymbol{ax + b = 0 \; donde \; a \neq 0 \; (Forma \; estándar)}$$

A esta ecuación también se le denomina de primer grado con una variable, donde y son constantes reales y es una variable. El requerimiento a □ 0 es una relevante restricción ya que son ella se podrían escribir ecuaciones con aspectos de primer grado que no tengan solución o un número infinito de ellas.

Ejemplo: Eficiencia productiva

Una compañía de producción de pinturas posee un equipo de mezcla viejo que letoma 6 horas poner en la textura adecuada la pintura. Con la incorporación de un nuevo modelo se termina el trabajo en solo 2 horas. ¿Cuánto tiempo le tomará al nuevo modelo hacer solo el trabajo?

Solución: Sea = tiempo (horas) que utilizar el modelo nuevo en hacer todo el trabajo solo.

(Parte del trabajo terminado en un tiempo dado) = (Rapidez) (Tiempo)

Rapidez del modelo viejo (MV) = $1/6$ trabajo por hora

Rapidez del modelo nuevo (MN) = $1/x$ trabajo por hora

(Parte trabajo terminado MV en 2 horas) + (Parte trabajo terminado MN en 2 horas) = 1 (Rapidez MV) (Tiempo MV) + (Rapidez MN) (Tiempo MN) = 1

$$\mathbf{1/6\,(2) + 1/x\,(2) = 1\ \textit{donde}\ x \neq 0}$$

$$\mathbf{1/3 + 2/x = 1}$$

$$\mathbf{x + 6 = 3x}$$

$$\mathbf{x = 3}$$

1.2- Sistema de ecuaciones lineales.

En ciertas situaciones es conveniente introducir diversas variables, encontrar las ecuaciones que las relacionan y luego resolver el sistema de ecuaciones resultante En general, se tiene interés en resolver sistemas lineales del tipo:

$\boldsymbol{ax + by = h}$ Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables $\boldsymbol{cx + dy = k}$

Donde $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son variables y $\boldsymbol{a,b,c,d,h}$ y $\boldsymbol{k}$ son constantes reales. Un par de números $\boldsymbol{x = x_0\ y = y_0}$ es una solución de este sistema si cada ecuación se satisfacepor el par. El conjunto de todos estos pares de números se denomina conjunto solución para el sistema, por lo tanto, resolver el sistema es encontrarlo.

Ejemplo: Oferta y demanda

La cantidad de un producto que se está comprando voluntariamente durante unperiodo, depende de su precio. Por lo general, a mayor precio, menor demanday todo lo contrario a la inversa. De forma similar, la demanda un producto que un proveedor vende voluntariamente durante un periodo, también depende delprecio. Por lo general un proveedor estará abasteciendo más de un producto a precios altos y menos de un producto a precios bajos. El modelo más simple deproveedor y demanda es un modelo lineal.
Suponga que se quiere analizar las ventas diarias de fresas en una localidadparticular. Usando técnicas especiales de análisis (análisis de regresión) y recolección de datos, un analista plantea las ecuaciones de precio-demanda y deprecio-abastecimiento:

$$\boldsymbol{p = -0.3q + 5 \ Ecuación \ de \ demanda \ (consumidor)}$$
$$\boldsymbol{p = 0.06q + 0.68 \ Ecuación \ de \ abastecimiento \ (proveedor)}$$

Donde $\boldsymbol{q}$ representa la cantidad en miles de libras y $\boldsymbol{p}$ representa el precio en usd. ¿Cuál deberá ser el precio para que el abastecimiento sea igual a la demanda? Solución: usando sustitución (sustituyendo $\boldsymbol{p = -0.3q + 5}$ en la segunda ecuación).

$$\boldsymbol{-0.3q + 5 = 0.06q + 0.68}$$
$$\boldsymbol{-0.36q = -4.32}$$
$$\boldsymbol{q = 12 \ mil \ libras}$$

A esta cantidad vendida se le denomina cantidad de equilibrio, puesto que es la cantidad donde ambas ecuaciones, demanda y abastecimiento, se igualan.
Ahora se sustituye $\boldsymbol{q = 12}$ en cualquiera de las ecuaciones originales del sistemay se obtiene un precio de $\boldsymbol{p = 1.40 \ USD}$ por libra, al cual se le denomina precio deequilibrio.

1.3 Desigualdades lineales.

La desigualdad o relación de orden, se origina cuando las relaciones entre la ecuación son de "menor que" o "mayor que", reemplazando el = por los símbolos de desigualdad < y >. La ecuación de desigualdad lineal se puede escribir de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{ax + b <> 0\, donde\, a \neq 0}$$

El conjunto solución para una desigualdad, es el conjunto de todos los valores de la variable que hacen de la desigualdad un enunciado verdadero, por lo tanto, resolver una desigualdad es encontrar su conjunto solución.

Propiedades de las desigualdades: para cualquiera de los números reales a, b y c.

a) Si a < b y b < c, entonces a < c.
b) Si a < b, entonces a + c < b + c.
c) Si a < b, entonces a - c < b - c.
d) Si a < b y c es positivo, entonces ca < cb.
e) Si a < b y c es negativo, entonces ca > cb.
f) Si a < b y c es positivo, entonces a/c < b/c.
g) Si a < b y c es negativo, entonces a/c > b/c.

Propiedades similares se cumplen si cada signo de la desigualdad se invierte, o si < se reemplaza con ≤ y > se reemplaza con ≥. De esta manera, encontramos que sepueden ejecutar esencialmente las mismas operaciones para las desigualdades,que las que se realizaron para las ecuaciones.

Ejemplo: Utilidades

Una compañía electrónica está planeando comercializar un dispositivo móvil. Loscostos fijos (CF) son de 650 000 usd y los variables (CV) 47 usd por dispositivo. Elprecio al mayoreo será de 63 usd. Es evidente que para que la compañía obtengautilidades, los ingresos deben ser mayor que los costos. ¿Cuántos móviles sedeben vender para obtener utilidades? ¿Cuántos móviles se deben vender para llegar al punto de equilibrio? Analice la relación de ambas preguntas.

En este ejemplo se habla de algunos términos que se emplean mucho en la administración de negocios. Los Costos Fijos son aquellos que independientementeque se produzca o no, ellos se originan, como son la depreciación de los ActivosFijos Tangibles, seguros, rentas, entre otros. Los Costos Variables aglomeran todos aquellos costos que son dependientes del nivel de producción, como materias primas, salarios y otros. Estos son los dos elementos que componen elCosto Total, por lo tanto, constituye la suma de ambos.

El Ingreso Total es aquel que se origina por la venta del producto producido.

La Utilidad (o ganancia) se origina por la resta del Ingreso Total y el Costo Total.

Solución: *Sea = móviles a comercializar*

$$\textbf{Costo Total } (CT) = 47x + 650000 \textbf{ Ecuación de costo Ingresos}$$
$$\textbf{Totales } (IT) = 63x \textbf{ Ecuación de ingresos}$$
$$47x + 650000 < 63x$$
$$650000 < 16x$$
$$40625 < x$$

Para que la compañía obtenga utilidades es necesario vender más de 40 625 dispositivos móviles. La respuesta a la segunda pregunta es la similar, solo cambia el hecho de que, en lugar de vender más, es vender hasta 40 625 móviles para llegaral punto de equilibrio. La relación de ambas preguntas está que la respuesta en la cantidad de dispositivos móviles a vender es la misma, solo que en el primer caso deben sobrepasar esas ventas, es decir, es un mínimo, en lugar de igualarlas.

1.4 Ecuaciones cuadráticas.

Una ecuación cuadrática con una variable es cualquier ecuación que se pueda escribir en la forma:

$$ax2 + bx + c = 0 \; con \; a \;\neq 0$$ **(Forma estándar)**

Donde $\boldsymbol{x}$ es una variable y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son constantes.
Las ecuaciones cuadráticas tienen, como deben recordar, varias formas de solución:

a) **Solución por factorización:** este método se fundamenta en la propiedad cero de los números complejos (Propiedad cero: si $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son números complejos, entonces $\boldsymbol{m * n = 0}$ sí y solo si $\boldsymbol{m = 0} \; o \; \boldsymbol{n = 0}$, o ambos lo son) la cual es una generalización de las propiedades cero de los números reales.

b) **Solución por raíz cuadrada:** como su nombre lo indica, esta forma especialrequiere del uso directo de la propiedad de la raíz cuadrada (Propiedad de laraíz cuadrada: si $a^2=C$, entonces $\boldsymbol{a} = \pm\sqrt{\boldsymbol{C}}$)

c) **Solución al completar el cuadrado:** se basa en el proceso de transformar la ecuación cuadrática estándar $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ en la forma $(\boldsymbol{x + a})^2 = \boldsymbol{B}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son constantes. Para completar el cuadrado de una cuadrática de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx}$, sume el cuadrado de la mitad del coeficiente, es decir, sume$\left(\boldsymbol{b}/_{\boldsymbol{2}}\right)^2$. Así, $\boldsymbol{x^2 + bx} + \left(\boldsymbol{b}/_{\boldsymbol{2}}\right)^2 = \left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}/_{\boldsymbol{2}}\right)^2$. Esimportante destacar que la regla para completar el cuadrado sólo aplicaa formas cuadráticas, en las cuales el coeficiente del término de segundogrado es 1.

d) **Solución por la forma cuadrática:** este método consiste en el uso de la ampliamente usada, en las matemáticas, fórmula cuadrática donde si $\boldsymbol{x2 + bx + c = 0}$ con $\boldsymbol{a \neq 0}$, entonces $\boldsymbol{x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$. Esta fórmula debe ser memorizada para usarla en la resolución de ecuaciones cuadráticascuando los métodos de solución anteriores no sean aplicables.

Debido a la variedad de métodos de soluciones que presentan las ecuaciones cuadráticas y recordando que este epígrafe es un breve repaso de las ecuacionescuadráticas, materia que se recibe en niveles escolares anteriores, el ejemplo quese presenta a continuación emplea el método de Solución por la forma cuadrática,que concatena varios métodos de soluciones de este tipo de ecuación.

Ejemplo: Eficiencia de tiempo

Un software de diseño se puede tardar 4 horas trabajando en dos computadoras simultáneamente para presentar un dibujo en 3D de un producto determinado. ¿Cuántas horas serán necesarias para que cada computadora termine sola si el modelo viejo se tarda 3 horas más que el nuevo? Calcule la respuesta con dos cifras decimales.

Solución: Sea

$\boldsymbol{x}$ = Tiempo que tarda el nuevo modelo (MN) en terminar sólo el dibujo en 3D.
$\boldsymbol{x+3}$ = Tiempo que tarda en terminar el dibujo en 3D solo el modelo viejo (MV).
$\boldsymbol{4}$ = Tiempo en que terminan el dibujo en 3D ambas computadoras trabajando juntas.
Entonces,

$1/_x$ = Rapidez del modelo nuevo (termina $1/_x$ del dibujo por hora)
$1/_{(x+3)}$ = Rapidez del modelo viejo (termina $1/_{(x+3)}$ del dibujo por hora)
Parte trabajo terminado MN en 4 horas + Parte trabajo terminado MV en 4 horas = 1 trabajo

$$\boldsymbol{1/_x(4) + 1/_{(x+3)}(4) = 1 \quad x \neq 0, x \neq -3}$$

$$\boldsymbol{4(x+3) + 4x = x(+3) \textit{multiplique ambos lados por } x(x+3)}$$

$$\boldsymbol{4x + 12 + 4x = x^2 + 3x}$$

$$\boldsymbol{x^2 - 5x - 12 = 0}$$

$$\boldsymbol{x = {(5 \pm \sqrt{73})}/_2 \approx 6.77\ (-1.77\ \textit{se descarta}, x > 0)}$$

$$\boldsymbol{x + 3 = 9.77}$$

La respuesta entonces es que el modelo nuevo terminaría en 6.77 horas trabajando sola, mientras que el modelo viejo lo concluiría en 9.77 horas.
Este breve repaso sobre las ecuaciones lineales y cuadráticas refresca conocimiento ya recibido en los niveles escolares anteriores. Estos son muy importantes para comprender íntegramente los contenidos que son abarcados por los siguientes epígrafes de esta unidad.

1.5-Resumen del capítulo. Aplicaciones prácticas en la administración y la economía.

Resumen del capítulo:

Ecuaciones lineales:

Una solución o raíz de una ecuación es el número en el dominio o conjunto de reemplazo de la variable que cuando se sustituye para la variable hace que la ecuación sea un enunciado verdadero. Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Una ecuación que se puede escribir en la forma estándar $\boldsymbol{ax + b = 0 \rightarrow a \neq 0}$, es una ecuación lineal o de primer grado.

Sistema de ecuaciones lineales:

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es un sistema de la forma:

$$\boldsymbol{ax + by = h}$$
$$\boldsymbol{cx + dy = k}$$

Donde $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ con las dos variables. El par ordenado de números $(\boldsymbol{x^0}, \boldsymbol{y^0})$es una solución al sistema (1) si cada ecuación se satisface por el par. El conjunto detodos los pares ordenados de números se llama conjunto solución del sistema.Para resolver el sistema se debe encontrar el conjunto solución.

Si resuelve el sistema por sustitución, resuelva una ecuación para una variabley sustituya en la otra ecuación, resuelva la ecuación lineal resultante en unavariable y luego sustituya este valor en la expresión obtenida en el primer pasopara encontrar la otra variable.

Si una ecuación en un sistema es una ecuación de demanda y la otra de oferta,entonces la solución produce el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio. Si una ecuación del sistema es una ecuación de costos y la otra de ingresos, entonces la solución produce un número de unidades que se deben fabricar en elpunto de equilibrio.

Desigualdades lineales:

Los símbolos de desigualdades $<, >, \leq$ *y* $\geq$ se usan para expresar relaciones de desigualdad. Una solución de una desigualdad lineal en una variable es un valorde la variable que hace que la desigualdad sea un enunciado verdadero. Dos desigualdades son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

El orden de una desigualdad se invierte si se multiplica o se divide a ambos lados dela desigualdad por un número negativo.

Ecuaciones cuadráticas:

Una ecuación cuadrática en forma estándar es una ecuación que se puede escribir en la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \ con \ a \neq 0}$$

Donde $\boldsymbol{x}$ es una variable y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{y}$ con constantes. Los métodos de solución incluyen:

i. Factorización uso de la propiedad cero.
ii. Uso de la propiedad de la raíz cuadrada.
iii. Completando el cuadrado.
iv. Uso de la fórmula cuadrática.

Ejercicios relacionados con la administración y la economía:

1. El precio de una laptop luego de descontarle el 20% es de 600 usd. ¿Cuánto costaba antes del descuento?

2. A un empleado de una tienda de móviles se le paga un salario base de 2 150usd al mes, más una comisión del 8% si vende más de 7 000 usd durante eseperiodo. ¿Cuánto debe vender para ganar 3 170 usd al mes?

3. Una torre de perforación en el Mar Rojo se coloca de manera que unquinto de su altura está en arena, 20 pies están en el agua y dos terciosen el aire. ¿Cuál es la altura total de la torre?

4. Un editor está planeando producir un nuevo libro de texto. Los costos fijos (revisión, tipografía, entre otros) son de 320 000 usd y los costos variables (impresión, comisiones por ventas, etc.) son 31.25 usd por libro. El precio de mayoreo (es decir, la cantidad que recibirá el editor) será de 43.75 usd por libro. ¿Cuántos libros debe vender el editor para alcanzarel punto de equilibrio; es decir, cuando los costos sean iguales a los ingresos?

5. A una empresa de grabación pequeña le cuesta producir un álbum 17 680 usd. Este es un costo fijo que incluye grabación, el diseño del álbum,etc. Los costos variables, incluyendo la producción, comercialización y regalías son de 4.60 usd por álbum. Si el álbum se vende en las tiendasde discos a 8 usd cada uno, ¿Cuántos debe vender la empresa para llegaral punto de equilibrio?

6. Suponga que tiene 12 000 usd para invertir. Si una parte se invierte al 10% y el resto al 15%, ¿cuánto se debe invertir en cada tasa para obtener un 12% sobre el total de la cantidad invertida?

7. Un proveedor de la industria electrónica fabrica los teclados y mouse para computadoras, en plantas en Corea del Sur y China. En la tablase indica las cantidades producidas por hora en cada planta. ¿Cuántas horas debe operar para cumplir exactamente con un pedido de 4 000 teclados y mouse?

Planta	Teclados	Mouse
Corea del Sur	40	32
China	20	32

8. Un fabricante de videojuegos está planeando comercializar un nuevo videojuego en la versión de 86 bits. Los costos fijos son de 550 000 usd y loscostos variables son de 120 usd por artículo producido. El precio del equipo al mayoreo será de 140 usd

a. ¿Cuántos equipos se deben vender para que la empresa obtengaganancias?
b. ¿Cuántos videojuegos tendría que vender para llegar al punto deequilibrio?
c. Analice la relación entre los resultados de ambos incisos.

9. Si se invierte a una tasa anual de interés, después de 2 años la cantidad será $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{2}}$. ¿A qué tasa de interés los 1 000 usd aumentarán a 1 400 usd en 2 años? $(\boldsymbol{Nota}: \boldsymbol{a} = \mathbf{1\,440}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{P} = \mathbf{1\,000})$

10. Suponga que las ecuaciones de oferta y demanda para las cuchillas deafeitar Gillette en Guayaquil para una semana en particular son:

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{5.5} + \mathbf{0.0002}\boldsymbol{q}\ \ \boldsymbol{Ecuaci\acute{o}n\ de\ la\ oferta}$$
$$\boldsymbol{p} = \mathbf{22} - \mathbf{0.001}\boldsymbol{q}\ \boldsymbol{Ecuaci\acute{o}n\ de\ la\ demanda}$$

Donde es el precio en dólares y es el número de cuchillas de afeitar.Encuentre el precio de equilibrio y la cantidad.

Capítulo II:
Relación de las funciones lineales y cuadráticas con la Administración y la Economía.

Contenidos:

Para aterrizar adecuadamente la relación que existe entre las funciones linealesy cuadráticas con las áreas de administración y economía es necesario revelar aspectos básicos de estas dos herramientas matemáticas.

2.1 Funciones.

La función es uno de los conceptos más básicos en todas las matemáticas y es esencial para el estudio del cálculo. Representa una relación que expresa como dos elementos dependen uno del otro, donde uno es la salida y otro es la entrada.Por ejemplo, si retomamos la situación planteada al inicio de la unidad, se puede

determinar que el precio (***P***) depende de la cantidad demandada (***Q***), es decir, que existe una relación intrínseca de estos dos elementos.

Por lo tanto, una función es una regla que asigna a cada cantidad de entrada unacantidad exacta de salida. Las entradas constituyen el dominio de la función y lassalidas el rango, de lo cual se estará profundizando posteriormente.

Para comenzar a trabajar con las funciones, se presenta el ejemplo siguiente:

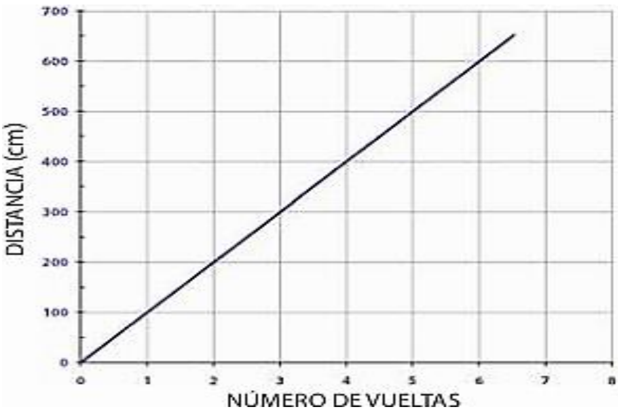
Tenemos que una estera de una maquinaria de producción avanza 100 cm por cadavuelta de las ruedas. Si se quiere conocer la distancia que recorre en función delnúmero de vueltas de las ruedas, se elabora la tabla de valores correspondiente. Así se obtiene:

Número de vueltas	1	2	2.5	3	4	4.5	5	6	6.5
Distancia recorrida (cm)	100	200	250	300	400	450	500	600	650

La distancia recorrida y el número de vueltas de las ruedas son dos magnitudes directamente proporcionales porque el cociente («distancia recorrida» y «número de vueltas») es constante. La constante de proporcionalidad es 100.

Esta relación de proporcionalidad directa se puede expresar mediante una función en la que la variable independiente es el número de vueltas que dan las ruedas y lavariable dependiente es la distancia recorrida.

Esta gráfica representa la función ***y=100x.*** Mediante el ejemplo mostrado se revelaron variosindicios que conllevan a la construcción de ladefinición de la función proporcionalidad directa.



Por lo tanto, se denomina función de proporcionalidad directa o, simplemente, función lineal a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales ***(x, y).*** Su ecuación tiene la forma $y = mx$ ó $f(x) = mx$.

El factor es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de pendiente de la función porque indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente.Las funciones pueden darse usando diferentes formas:

a) Método analítico: Cuando la función se da a través de una o varias fórmulas matemáticas.

b) Método gráfico: Cuando la función se da con ayuda de un gráfico.
c) Mediante tablas donde aparecen los valores de la función para diferentesvalores del argumento. Ejemplos: las tablas de logaritmos y de las funciones trigonométricas.
d) Método descriptivo: Cuando la función se da a través de la descripción de la correspondencia.

La representación gráfica de una función puede ser muy útil para visualizar propiedades de la función, así como también para determinar si la relación entrelas variables corresponde o no a una función.
Esto significa que puede definirse una relación entre dos conjuntos queno corresponda a una función porque a un mismo elemento del dominio le correspondan más de un elemento en la imagen. Visto gráficamente esto significaque al trazar rectas paralelas al eje Y éstas corten a la curva más de una vez. Portanto un gráfico en el plano representa una función si y sólo si ninguna rectaperpendicular el eje X lo corta en más de un punto.
Es importante entender las representaciones gráficas ya que es uno de los elementos esenciales que se utilizan en la administración y la economía donde las prestaciones visuales que brinda permiten un análisis rápido y acertado.

Formas de la Función:
Forma explícita: $y = f(x)$
Forma implícita: $F(x, y) = 0$
Forma paramétrica: $[\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{t});\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{t})]$

Funciones monótonas.
Una propiedad geométrica básica de las funciones es su monotonía. Al analizarel gráfico de una función puede ocurrir que al aumentar los valores de la variable independiente ***x***, aumenten los valores de la función (dados por los valores de lavariable dependiente ***y***) o puede suceder lo contrario, es decir, que a medida que aumentan los valores de ***x***, los valores de y disminuyan. Esto motiva la siguientedefinición.

Una función real de variable real ***f*** se dice:
Monótona creciente, si para todo par x_1, x_2 de elementos de ***Dom f***, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Monótona decreciente, si para todo par x_1, x_2 de elementos de ***Dom f***, tales

Que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Estrictamente creciente, si para todo par x_1, x_2 de elementos de ***Dom f***, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.
Estrictamente decreciente, si para todo par x_1, x_2 de elementos de ***Dom f***, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.

2.2 Pendiente de una recta.

En la función $y = mx$, el coeficiente expresa el aumento o disminución de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente.
Las funciones de este tipo se representan gráficamente como líneas rectas. Además,como ***y=mx***, si ***x=0*** entonces ***y=0***; por lo tanto la gráfica de todas las funcioneslineales pasa por el punto (0,0).
Por ejemplo, en la función $y = f(x) = -3x$, la pendiente es –3. Por cada unidad de la variable independiente, la variable dependiente disminuye 3 unidades. En la función $y = f(x) = 2x$, la pendiente es 2. Por cada unidad de la variable, la variable aumenta 2 unidades.
Cuando la función de la pendiente (***m***) es igual a cero o nula, se denomina función constante. Se representan mediante una recta paralela al eje X. La recta ***y=0*** coincide con el eje X.
Si ***x=1***, entonces ***y=m***, por tanto, m representa la variación de la por cada unidadde, es decir, la inclinación o pendiente de la recta. Si m es positiva, representa lacantidad que sube la por cada unidad de y si es negativa la cantidad que baja.

Ejemplo:
Determinar si las relaciones entre las parejas de magnitudes siguientes sonlineales o no, escribiendo para ello la ecuación que las relaciona.

a. Relación entre el precio inicial y el precio rebajado con un 10%.
b. Relación entre el peso y el volumen de un material en condiciones constantes de presión y temperatura.
c. Un banco ofrece un depósito anual al 5% con una comisión fija de 20usd. Relación entre la cantidad invertida y los intereses recibidos.

Solución:

a. Si el descuento es 10% pago el 90%: Precio Rebajado = 0'9 * PrecioInicial. (Si es lineal).

b. La relación entre peso (P) y volumen (V) es la densidad (d), que es constante si no cambian las condiciones de presión y temperatura: $P = d * V$ (Si es lineal).

Si C es la cantidad invertida e I son los intereses $I = 0'05 * C - 20$. (No es lineal, pero casi lo es).

Para realizar en cálculo de la pendiente de una recta es necesario tener en cuenta si una recta pasa por dos puntos distintos $\boldsymbol{P_1(x_1, y_1)}$ y $\boldsymbol{P_2(x_2, y_2)}$, entonces su pendiente está dada por la fórmula:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \; donde \; x_1 \neq x_2 = \frac{cambio\ vertical\ (elevación)}{cambio\ horizontal\ (desplazamiento)}$$

Es importante resaltar que la pendiente no depende de los dos puntos elegidos en la recta siempre que estos sean diferentes. Esto es consecuencia del hecho que las proporciones de los lados correspondientes de triángulos similares son iguales.

Existen dos formas de interactuar con la pendiente para realizar distintos cálculos:

- **Forma pendiente-intersección:** empleando como base la conocida ecuación $\boldsymbol{f(x) = y = mx + b}$, donde $\boldsymbol{f(x) = y = mx + b}$, $donde\ \boldsymbol{m = \frac{elevación}{desplazamiento} = pendiente = intersección\ con\ el\ eje\ Y}$ **.** Mediante esta forma se lograr obtener la ecuación de una recta con una pendiente dada por la intersección con el eje ***Y***.

- **Forma punto – pendiente:** se usa como base la conocida ecuación donde se desprende la ecuación de una recta bajo esta forma: $\boldsymbol{y\_ - y1 = m(x\_ - x1)}$. Esta forma permite encontrar la ecuación de una recta si se conoce la pendiente y las coordenadas de un punto sobre la recta.

Ejemplo: Política comercial de aumento de precios

Una tienda de celulares vende un dispositivo de recarga que cuesta 60 usd, en 82usd, un disco duro externo que cuesta 80 usd, en 106 usd.

a) Si se supone que la política de aumento de precios de la tienda para artículosque cuesten más de 30 usd, es lineal y se refleja en el precio de estos dos artículos, escriba una ecuación que relacione el precio de venta al menudeoR con el costo C.

b) Use la ecuación y encuentre el precio de venta al menudeo de unos audífonosque cuestan 40 usd.

Solución:

a) Si el precio de venta al menudeo R se supone es lineal en relación con el costo C, entonces se debe buscar una ecuación cuya gráfica pase por(y por (. Se encuentra la pendiente y después se usa la forma punto- pendiente para encontrar la ecuación:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{R_2 - R_1}}{\boldsymbol{C_2 - C_1}} = \frac{106 - 82}{80 - 60} = \frac{24}{20} = 1.2$$

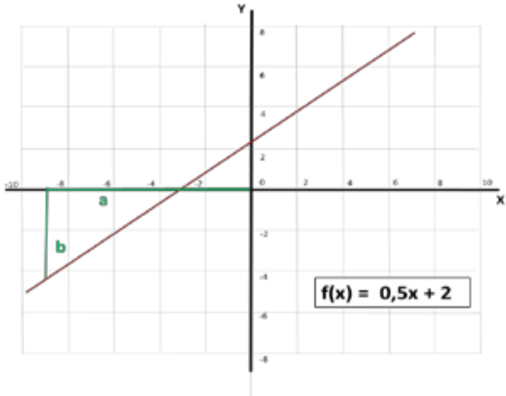
$$R - R_1 = m\,(C - C_1)$$
$$R - 82 = 1.2\,(C - 60)$$
$$R - 82 = 1.2C - 72$$
$$\boldsymbol{R = 1.2C + 10}$$

b) $\boldsymbol{R = 1.2(40) + 10 = 58\ usd}$

2.3 Función lineal o afín.

Si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condicióninicial, la función que las liga ya no es totalmente lineal (las magnitudes ya no son proporcionales). Se dice que es una función afín y su forma es: ***y = mx + bo f (x) = mx + b***.

La pendiente, ***m***, sigue siendo la constante de proporcionalidad y el término se denomina ordenada en el origen porque es el valor que toma y (ordenada) cuandovale 0 (abscisa en el origen). Ahora el cociente entre ***f(x)*** y ***x*** no es constante. La ***m*** continúa siendo la pendiente, pero ***f(x)*** y ***x*** no son proporcionales (salvo si ***b = 0***).



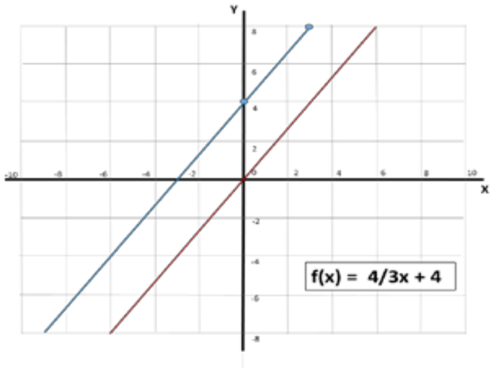
Las funciones afines se representan también mediante líneas rectas, pues el término independiente que las diferencias de las funciones de proporcionalidad solo producen una traslación hacia arriba o haciaabajo de la gráfica de éstas.

Para dibujar la gráfica necesitamosobtener dos puntos:

- Uno nos lo proporciona la propia ecuación, pues, como hemos visto, la ordenada en el origen, ***b***, nos indica que la recta pasa por el punto ***(0, b)***.
- El otro punto se obtiene dando un valor cualquiera a ***x*** y obteniendo el correspondiente valor de ***y***.

Uniendo los dos puntos tenemos la gráfica de la función.

Las propiedades de las funciones lineales son las siguientes:



a) Dominio de definición: $\boldsymbol{Dom\ f}$ = conjunto de los números racionales **(NR)**.

b) Imagen de la función: $\boldsymbol{Im\ f = NR\ (Si\ m = 0;\ Imf\ \{b\})}$.

c) La función no es par ni impar,ya que $\boldsymbol{f(-x) = m(-x) + b = -mx + b \neq \pm f(x). (Si\ b = 0\ la\ función\ es\ impar, ya\ que\ f(-x) = m(-x) = -mx = -f(x))}$.

d)

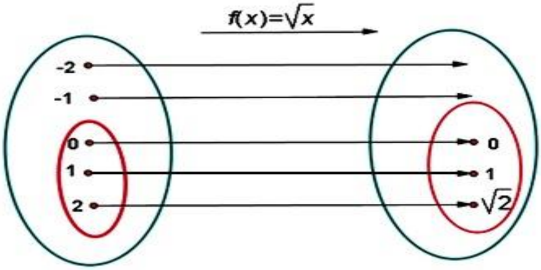
e) El gráfico de la función intercepta al eje en el punto $(-b/m; 0)$ y el eje enel punto $(0;\ b)$. Si $m = 0$ no tiene intercepto con el eje x.

f) La función es creciente para $m > 0$ y es decreciente para $m < 0$.

g) La función es no acotada.

2.4- Profundizando en el dominio y rango de una función lineal.

En la figura siguiente se puede observar gráficamente el comportamiento dela función raíz cuadrada de un número. Que aunque no se ha estudiado, es la referencia visual más adecuada para ver el dominio de una función.



Del lado izquierdo se observa el conjunto de partida (representado por los valores que le asignemos a la variable independiente x), del lado derecho observamos el conjunto de llegada (representado por los valores que toma la variable dependiente y una vez que se extrae la raíz cuadrada del valor que se leasignó a x) y sobre la flecha está indicada la relación matemática (función) quetransforma los valores del conjunto de partida en los valores del conjunto dellegada (imagen).

Dominio de una función:

Es el conjunto formado por los elementos que tienenimagen. Los valores que le damos a x (variable independiente) forman el conjunto de partida. Gráficamente, se mira en el eje horizontal (abscisas), leyendo como seescribe, de izquierda a derecha.
El dominio de una función está formado por aquellos valores de x (números reales)para los que se puede calcular la imagen $f(x)$. En la gráfica anterior se nota que si se le asignan los valores “-2” y “-1” a la x, estos no tienen imagen, por lo tanto no pertenecen al dominio de la función estudiada. Esto es lógico ya que los números negativos no tienen raíces reales sino raíces imaginarias.

Rango de una función:

Es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función y (variable dependiente), por eso se denomina f(x), su valor depende del valor que le demos a x.

Gráficamente se mira en el eje vertical (ordenadas), leyendo de abajo a arriba.

El Rango de una función es el conjunto formado por las imágenes f(x) de los valores de x que pertenecen al Dominio de dicha función.

La manera más efectiva para determinar el Rango consiste en graficar la función y ver los valores que toma y de abajo hacia arriba.

2.5- Funciones polinómicas.

Aquellas funciones cuya expresión algebraica es un polinomio, es decir, las funciones polinómicas, tienen como dominio todo el conjunto de los números reales: $\boldsymbol{R}$, ya quea partir de una expresión polinómica, se puede sustituir el valor de $\boldsymbol{x}$ por cualquier número real que hayamos elegido y se puede calcular sin ningún problema el númeroreal imagen $\boldsymbol{y}$.

Son funciones polinómicas: La recta (función lineal o afín), la parábola (función de segundo grado) y los polinomios de grado superior.

$$\boldsymbol{Domf(x) = R} \text{ también se puede expresar} \rightarrow \boldsymbol{Domf(x) = (-\infty, \infty)}$$

2.6- Funciones cuadráticas.

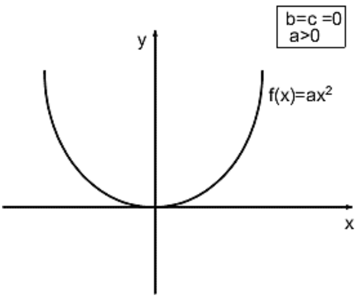
La función cuadrática es un polinomio de grado dos. Su gráfico es una parábola.El punto $\boldsymbol{V[(-b/2a)\,;(c - \ b2/4a)]}$ se llama vértice de la parábola.

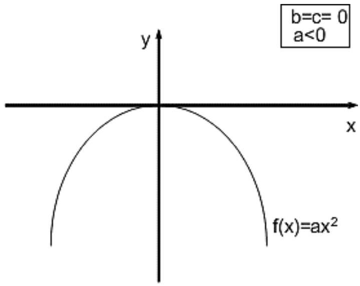
Propiedades:

- Dominio de definición: $\boldsymbol{Domf = NR}$.
- Imagen: $\boldsymbol{Si\ a > 0}$ se tiene $\boldsymbol{Imf = [0, +\infty)};\ \boldsymbol{si\ a < 0se\ tiene\ Imf = (-\infty, 0]}$.
- La función es par: $\boldsymbol{f(-x) = a(-x)^2 = \ ax2 = f(x)}$.
- Si $\boldsymbol{x = 0}$, entonces $\boldsymbol{f(x) \ = \ 0}$. El gráfico de la función pasa por el origen decoordenadas.
- Si $\boldsymbol{a > 0}$ la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, \boldsymbol{0}]$ y es creciente en elintervalo $[\boldsymbol{0}, +\infty)$.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$ la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, \boldsymbol{0}]$ y es decreciente enel intervalo $[\boldsymbol{0}, +\infty)$.

- Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y la función tiene un mínimo en
$$x = 0\,;\ y_{min} = 0.$$
- Si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo y la función tiene un máximo en
$$x = 0;\ y_{min} = 0.$$

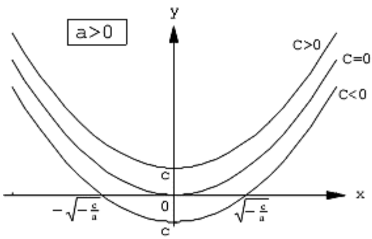
Los gráficos de las parábolas $f(x) = a\,x^2$ son:

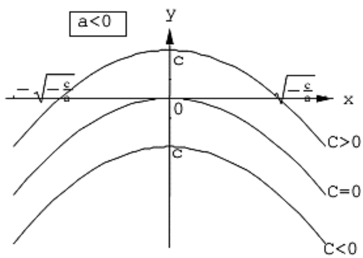




La función $f(x) = ax^2 + c$

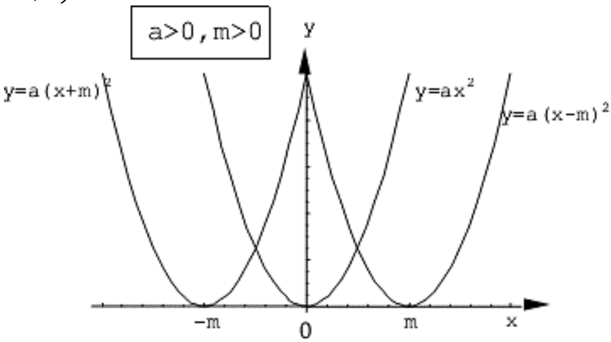
El gráfico de esta función es una parábola que puede obtenerse si se traslada la parábola $y = ax2\ |c|$ unidades hacia arriba si $c > 0$ ($|c|$ *unidades hacia abajo si* $c < 0$). Su vértice está en el punto $(0, c)$.





La función $f(x) = a(x + m)^2$.

El gráfico de esta función es una parábola que puede obtenerse si se traslada laparábola $\boldsymbol{y = ax2\ |m/}$ unidades hacia la izquierda si $\boldsymbol{m > 0}$ $(|\boldsymbol{m}|\ unidades\ hacia\ la\ derecha\ si\ \boldsymbol{m < 0})$. Su vértice está en el punto $(\boldsymbol{-m}, \mathbf{0})$.



La función cuadrática $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$.

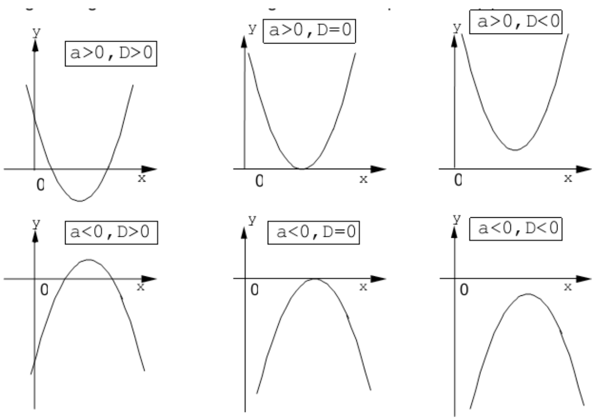
Es la función cuadrática que puede escribirse como una forma polinómica desegundo grado, es decir como: ***f(x) = ax²* + *bx* + *c***. Donde ***a***, ***b*** y ***c***, son constantesreales, pero debe ser distinto de cero; ***b*** y ***c*** no tienen restricciones. El término ***ax²*** se denomina término ***bx*** cuadrático, el término ***c*** se denomina término lineal y el término , se denomina término independiente.

Propiedades:

- Si $\boldsymbol{a > 0}$ se tiene que $\boldsymbol{Dom\ f = NR\ e\ lm\ f\ = [ac - b^2/4a, +\infty)}$.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$ se tiene que $\boldsymbol{Dom\ f = NR\ e\ lm\ f\ = (-\infty, ac - b^2/4a]}$.
- Si $\boldsymbol{a > 0}$ la parábola abre hacia arriba y la función tiene un mínimo en $\boldsymbol{x = -b/2a}$; $\boldsymbol{y_{min} = c - b^2/4a}$.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$ la parábola abre hacia abajo y la función tiene un máximo en.
- Si el discriminante $\boldsymbol{D = b^2 - 4a > 0}$, entonces los ceros de la parábola son los puntos $\{[\boldsymbol{-b + \sqrt{}(b^2 - 4ac)]/2a, 0}\}\ y\ \{[\boldsymbol{-b - \sqrt{}(b^2 - 4ac)]/2a, 0}\}$. La ecuación tiene dos raíces reales y distintas.

- Si el discriminante $D = b^2 - 4a = 0$, entonces la parábola sólo intercepta al ejeX en su vértice, es decir, su único cero es el punto $(-b/2a, 0)$. La ecuación tieneuna única solución real, una raíz doble.
- Si el discriminante $D = b^2 - 4a < 0$, entonces la parábola no tiene ceros, es decir,no corta el eje X. La ecuación no tiene dos raíces reales; tiene dos raíces complejas conjugadas.

Los gráficos de las parábolas $f(x) = ax^2 + bx + c$ son:
El valor absoluto de modifica la abertura de las parábolas:



- Cuanto menor es $|a|$, la parábola es más abierta.
- Cuanto mayor es $|a|$, la parábola es más cerrada.

Si se continúa investigando la gráfica de una parábola, se centra la atención ahora en la función siguiente: $y = x2$, cuya gráfica es simétrica respecto del eje Y. Véase que si se desplaza su gráfica de forma vertical u horizontal, se obtienen las gráficas siguientes:
Se concluye lo siguiente:

- **Vertical:** en el caso de contar con una parábola cuya ecuación es de la forma $y = x^2 + k$, las coordenadas del vértice son $(0, k)$, mientras que el conjunto imagenes $[k, +\infty)$.

-
- **Horizontal:** en el caso de contar con una parábola cuya ecuación es de la forma $\boldsymbol{y = (x + p)^2}$, las coordenadas del vértice son $\boldsymbol{(p, 0)}$, mientras que el ejede simetría es $\boldsymbol{x = p}$.

En síntesis, al desplazar la gráfica de $\boldsymbol{y = x^2}$ en $\boldsymbol{p}$ unidades en sentido horizontal y $\boldsymbol{k}$ en sentido vertical, se obtiene la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{y = (x + p)^2 + k}$$

Su vértice es el punto $\boldsymbol{V = (p, k)}$ y el eje de simetría es la recta de ecuación $\boldsymbol{x = p}$.

2.7- Factorización de la función cuadrática.

A la expresión $\boldsymbol{f(x) = (x + 1)(x + 1)}$ se le llama: forma factorizada de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 1}$ *y, al valor* $\boldsymbol{(-1)}$, se le llama raíz o cero de dicha función; pues cuando la función se evalúa en este valor, ésta se hace cero.

La forma (general) factorizada de una función cuadrática es: $\boldsymbol{f(x) = a(x - r1)(x - r2)}$. La atención se centrará en el caso donde y son constantes (reales) yreciben el nombre de raíces de la función o ceros de la función; es el coeficiente del término cuadrático.

Ejemplo:

Factorizar la ecuación $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$.

Si se extrae 4 factor común tenemos: $f(x) = 4(x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4})$, se tiene que $x = \tfrac{1}{2}$ es la raíz doble de la ecuación, es decir, se puede describir:

$4(x - \tfrac{1}{2})^2$ o $4(x - \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2})$

Otra forma de dar resolución a las ecuaciones de segundo grado completas es mediante el procedimiento de completar cuadrados. Este método resulta importante en la siguiente sección para identificar los elementos que caracterizan a la función cuadrática.

Ejemplo:

Factorizar la ecuación ***f(x) = 4x2 – 2x + 1= 0.***
El primer miembro de la igualdad es el desarrollo del cuadrado de binomio $(2x - 1)^2$;

luego resulta que $(2x - 1)^2$. Entonces $(2x - 1)(2x - 1) = 0$ y $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$;

Las ecuaciones incompletas, también se pueden resolver directamente como se muestra a continuación:

Ejemplo:
Factorizar la ecuación $f(x) = 4x^2 = 0$. Entonces $x^2 = 0$, $x_1 = 0$, y $x_2 = 0$.
La aplicación de las funciones cuadráticas en la administración y la economía es variada. La búsqueda de máximos o mínimos es una de ellas, donde se analizan funciones de costos, de precios y de ingresos. Un ejemplo de esto lo veremos a continuación:

Ejemplo: Facilidades de ventas

Una compañía ofrece instalar bombillas a un costo de $300 cada una si el pedido esde 40 unidades o menos. Para conseguir mejores contratos, la compañía propone que si se compran más de 40 bombillas, el precio por unidad se reducirá en 5 vecesel número de bombillas adicionales a 40. ¿Cuántas bombillas por encima de las 40 deben negociarse para que los ingresos por venta sean los mayores posibles?

Solución: Sea.

$$\boldsymbol{x} = cantidad\ de\ bombillas\ por\ encima\ de\ 40\ bombillas$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}) = Precio\ final\ de\ cada\ bombilla\ por\ compras\ superiores\ a\ 40\ bombillas$$
$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) = Cantidad\ definitiva\ de\ bombillas\ vendidas$$
$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{X}) = Ingresos\ por\ venta\ de\ bombillas\ (usd)$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{300} - \mathbf{5}\boldsymbol{x}\ (ecuadión\ de\ precios)$$
$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{40} + \boldsymbol{X}\ (ecuación\ de\ costos)$$

Función por optimizar $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}) * \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$
Función por optimizar con una variable: $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{300} - \mathbf{5}\boldsymbol{x})(\mathbf{40} + \boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{120000} + \mathbf{300}\boldsymbol{x} - \mathbf{200}\boldsymbol{x} - \mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$$
$$= \mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{100}\boldsymbol{x} + \mathbf{12000}\ (\boldsymbol{funci\acute{o}n\ a\ optimiza})$$

Recordando $\boldsymbol{f(x) = ax2 + bx + c\ con\ a \neq 0}$, en este caso: $\boldsymbol{a = -5, b = 100, c = 12000}$

La función planteada es cóncava hacia abajo puesto que, por lo tanto la función tiene un máximo.
Ecuación del eje de simetría: por lo tanto el eje se simetría es la ecuación.
Lo anterior significa que se pueden negociar hasta 10 bombillas por encima de las 40 para que el ingreso por ventas sea máximo.
El precio final de cada bombilla sería:
Para conocer el ingreso máximo es necesario conocer las coordenadas del vértice:
evaluando la función

Por lo tanto el ingreso máximo a obtener sería de **12 500 usd.**

2.8- Caso de estudio: Un modelado matemático de un negocio.

Como se ha mencionado previamente la matemática tiene una estrecha relacióncon la administración y la economía. Estas constituyen una herramienta esencial en la gran variedad de análisis que se llevan a cabo en estos dos campos. Desdeanálisis contables, financieros, de mercados, entre otros, emplean distintoscomponentes matemáticos que ayudan a obtener resultados, visualizar estimaciones y esclarecer la toma de decisiones.
En los epígrafes de este capítulo se han mostrado problemas donde las variableseconómicas se analizan desde una perspectiva matemática. A través del empleode funciones lineales y cuadráticas, se ha logrado dar respuesta a variables económicas muy utilizadas en la actualidad, tales como: costos, ingresos, utilidad,precios, entre otras.

Para visualizar correctamente la interacción de las variables económicas con los elementos matemáticos estudiados en el epígrafe anterior, se analizará un caso de estudio. Este caso de estudio es una actividad que se realizará en grupos donde losestudiantes tendrán la oportunidad realizar distintas tareas para llegar al resultado final del caso. Por lo tanto, el caso será desarrollado con una guía que encaminaa los estudiantes pero que no les brinda todas las soluciones para que ellos seanlos protagonistas a la hora de hallar estos resultados, que le permitirán llegar a la respuesta final.

Caso de Estudio: Modelado matemático de un negocio.

Se presentan un grupo de actividades que tienen que ver con el análisis de un modelo matemático para la fabricación y venta de un producto empelando tablas de datos y regresión lineal, para determinar los valores adecuados de las constantes a, b, m y n en las funciones siguientes:

Tabla 1: Funciones para el modelado en negocios

FUNCIÓN	DEFINICIÓN	INTERPRETACIÓN
Precio-demanda	$p(x) = m - nx$	x = número de artículos que se pueden vender a p usd.
Costo	$C(x) = a + bx$	Costo total de producción de x artículos
Ingresos	$R(x) = xp = x(m - nx)$	Ingresos totales de la venta de x artículos
Ganancia	$P(x) = R(x) - C(x)$	Ganancia total de la venta de x artículos

Una empresa fabrica y comercializa motocicletas eléctricas. Al gerente le gustaría tener las funciones de precio-demanda y funciones de costos para el análisis delpunto de equilibrio y de pérdidas y ganancias.

Las funciones de precio-demanda y de costos podrían establecerse al obtener los datos adecuados en los diferentes niveles de producción y luego encontrando unmodelo en la forma de una función básica elemental que "ajuste a lo más cercano"los datos obtenidos. El departamento de finanzas, usando técnicas estadísticas, llegó a los datosde precio-demanda y costo que se muestran en las tablas 2 y 3, donde p es el precio de mayoreo de

Tabla 2: Precio-demanda

x (miles)	p (usd)
7	530
13	360
19	270
25	130

Tabla 3: Costo

x (miles)	C (miles usd)
5	2 100
12	2 940
19	3 500
25	3 920

una motocicleta eléctrica para una demanda de x miles demotocicletas y C es el costo, en miles de dólares (usd), para producir y vender $x$miles de motocicletas.

a. Construcción de un modelo matemático para el precio-demanda.

Trace los datos de la tabla 2 y observe que la relación entre y es casi lineal.Luego de observar una relación entre variables, a menudo los analistas intentanmodelar la relación en términos de una función que “ajuste mejor” los datos.

1. Las rectas de regresión lineal se usan frecuentemente para modelarfenómenos lineales. Este es un proceso de ajuste de un conjunto de datosa una línea recta que minimice la suma de los cuadrados de las distanciasde todos los puntos en la gráfica de los datos a la recta, mediante elmétodo de mínimos cuadrados. Luego de obtener la recta de regresiónlineal con los datos de la tabla 2, grafique la recta.

2. La recta de regresión lineal encontrada en el paso anterior, es un modelomatemático para la función precio-demanda y está dada por:

$$\boldsymbol{p(x) = 666.5 - 21.5x} \; (Función\ precio - demanda)$$

   Grafique los datos de la tabla 2 y la función precio-demanda en el mismosistema de coordenadas.

3. La recta de regresión lineal define la función lineal de precio-demanda. Interprete la pendiente de la función. Analice su dominio y rango. Mediante el modelo matemático, determine el precio para una demandade 10 000 motocicletas eléctricas y para una demanda de 20 000 motocicletas.

b. Construcción de un modelo matemático para el costo.

Trace los datos de la tabla 3 en un sistema de coordenadas. ¿Qué tipo de funciónresulta que ajusta mejor los datos?

1. Ajuste los datos de la tabla 3 con una recta de regresión lineal. Luego trace los puntos dados por los datos y la recta.

2. La recta de regresión lineal encontrada en el paso anterior es un modelomatemático para la función costo y está dada por:

$$C(x) = 86x + 1782 \text{ (Función costo)}$$

Grafique los datos de la tabla 3 y la función costo en el mismo sistema de coordenadas.

3. Interprete la pendiente y la intersección de la función costo. Analice su dominio y rango. Mediante el modelo matemático, determine el costo para una producción y venta de 10 000 motocicletas eléctricas y parauna producción y venta de 20 000 motocicletas.

c. Análisis del punto de equilibrio y de ganancias y pérdidas.

Formule una ecuación para la función ingreso y establezca su dominio. Formula la ecuación para la función ganancia y establezca su dominio.

1. Grafique la función ganancia y la función costo, simultáneamente en el mismo sistema de coordenadas. Determine, de forma algebraica, con quéproducción (a la unidad más cercana) la empresa alcanza su punto de equilibrio. Determine dónde los costos exceden a los ingresos y dónde los ingresos exceden a los costos.

2. Grafique la función ganancia y la función costo, simultáneamente en el mismo sistema de coordenadas. Determine, de manera gráfica, con quéproducción (a la unidad más cercana) la empresa alcanza su punto de equilibrio. Determine dónde los costos exceden a los ingresos y dónde los ingresos exceden a los costos.

3. Grafique la función ganancia en un sistema de coordenadas. Determine,de forma algebraica, con qué producción (a la unidad más cercana) la empresa alcanza su punto de equilibrio. Determine dónde ocurren las ganancias y dónde las pérdidas. ¿Con qué producción y precio se tendrála máxima ganancia? ¿Se tienen los máximos ingresos y máxima ganancia con la misma producción? Analice.

4. Grafique la función ganancia en un sistema de coordenadas. Determine,gráficamente, con qué producción (a la unidad más cercana) la empresaalcanza su punto de

equilibrio y dónde ocurren las ganancias y las pérdidas. ¿Con qué producción y precio se tendrá la máxima ganancia?
¿Se tienen los máximos ingresos y utilidades con la misma producción?Analice.

Con este caso de estudio se estimula el análisis gráfico de las funciones, así comoel trabajo individual de los estudiantes y a su vez su desarrollo analítico.

2.9- Resumen del capítulo. Aplicaciones prácticas en la administración y la economía.

Resumen del capítulo:

Funciones:

Una función es una regla que produce correspondencia entre dos conjuntos de elementos, de forma tal que a cada elemento, en el primerconjunto, le corresponda uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

El primer conjunto se llama dominio y el conjunto de todos los elementos correspondientes en el segundo conjunto se denomina rango. El dominio esel conjunto de todos los primeros componentes y el rango es el conjunto de todos los segundos componentes. Una ecuación con dos variables define una función si para cada valor de la variable independiente, al sitio de los valores del dominio, le corresponde exactamente un valor de la variabledependiente, al sitio de los valores del rango. El símbolo $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$ representa elnúmero real en el rango de la función $\boldsymbol{f}$ que corresponde al valor dominio de $\boldsymbol{x}$. De forma equivalente, el par ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ pertenece a la función $\boldsymbol{f}$.

Pendiente de la recta:

La forma estándar para la ecuación de la recta es $\boldsymbol{ax + by + c}$, donde $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son constantes y $\boldsymbol{a \neq 0}$ y $\boldsymbol{b \neq 0}$. La intersección $\boldsymbol{y}$ es la ordenada del punto en que la gráfica cruza al eje Y, y la intersección es la abscisa del punto dondela gráfica cruza el eje X. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ y $(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}\,)$ es:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = donde\ x_1 \neq x_2}$$

La pendiente no está definida para una recta vertical, donde $\boldsymbol{x1 \neq x2}$. Dos rectas con pendientes $\boldsymbol{m_1}$ y $\boldsymbol{m_2}$ son paralelas si y sólo si $\boldsymbol{m_1 = m_2}$ y perpendiculares si y sólo si $\boldsymbol{m_1}{}_{,}\boldsymbol{m_2} = -1$.

Función lineal o afín:

Una función $\boldsymbol{f}$ es una función lineal si $\boldsymbol{f(x) = mx + b \rightarrow m \neq 0}$. La gráfica de una función lineal es una recta que no es horizontal, ni vertical.

Dominio y rango:

El dominio de una función es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Los valores que le damos a (variable independiente) forman el conjunto departida.

El rango de una función es el conjunto formado por las imágenes. Son los valoresque toma la función $\boldsymbol{y}$ (variable dependiente), por eso se denomina $\boldsymbol{f(x)}$, su valordepende del valor que le demos a $\boldsymbol{x}$.

Funciones cuadráticas:

Una función es cuadrática si $f(x) = ax2 + bx + c \rightarrow a \neq 0$. Las propiedades de esta función son:

- Dominio de definición: $Dom\, f = NR$.
- Imagen: $Si\, a > 0$ se tiene $Im\, f = [0, +\infty)$; $Si\, a < 0$ se tiene $Imf = (-\infty, 0]$.
- La función es par: $f(-x) = a(-x)2 = ax2 = f(x)$.
- Si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$. El gráfico de la función pasa por el origen de coordenadas.
- Si $a > 0$ la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y es creciente enel intervalo $[0, +\infty)$.
- Si $a < 0$ la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y es decreciente enel intervalo $[0, +\infty)$.
- Si la parábola abre hacia arriba y la función tiene un mínimo en $y_{min} = 0$.
- Si la parábola abre hacia abajo y la función tiene un máximo en $y_{max} = 0$.

Factorización de funciones cuadráticas:

La forma factorizada de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es:

$f(x) = a(x - r1)(x - r2)$.

Ejercicios relacionados con la administración y la economía:

1) Los costos fijos por día para producir una docena de helados son 300usd y los costos variables 1.75 usd. Si diariamente se producen ***x*** helados,exprese el costo diario ***C(x)*** como una función de ***x***.

2) Los costos fijos por par de gomas de motocicleta son 3 750 usd y loscostos variables 68 usd. Si todos los días se producen ***x*** pares de gomas,exprese el costo diario ***C(x)*** como una función de ***x***.

3) El gerente de una empresa que fabrica bolígrafos estima que sus costosde operación serán 200 usd por día con cero producciones y de 700 usd por día con una producción de 1 000 bolígrafos.

   a) Suponga que el costo total $\boldsymbol{C}$ por día está linealmente relacionadocon la producción total $\boldsymbol{x}$ por día, escriba una ecuación que relacione estas dos cantidades.

   b) ¿Cuál es el costo por día para una producción de 5 000 bolígrafos?

4) Una agencia de renta de autos calcula un cargo de renta diaria para autos compactos con la ecuación $\boldsymbol{c = 25 + 0.25x}$, donde $\boldsymbol{c}$ es el cargo diario en usd y $\boldsymbol{x}$ es el recorrido diario en millas. Traduzca este enunciadoalgebraico en un enunciado verbal que pueda ser usado para explicar loscargos diarios al consumidor.

5) Una empresa telefónica calcula los cargos para una instalación de teléfonos con la ecuación $\boldsymbol{c = 15 + 0.7x}$, donde $\boldsymbol{c}$ es el cargo de instalaciónen usd y $\boldsymbol{x}$ es el tiempo gastado en minutos al realizar la instalación. Traduzca este enunciado algebraico en un enunciado verbal que puedaser usado para explicar los cargos por instalación a un consumidor.

6) La compañía Bayern & Co. Inc. es la compañía farmacéutica más grandedel mundo. Los datos de la tabla que se muestra a continuación fueroncorresponden al reporte anual del año 2013.

Datos Financieros seleccionados (en miles de millones) Bayern & Co.					
	2008	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**
Ventas	$5.9	$6.5	$7.7	$8.6	$9.7
Ingreso Neto	$1.2	$1.5	$1.8	$2.1	$2.4

El modelo matemático para las ventas de la compañía Bayern & Co. Inc. estádado por $\boldsymbol{y = 5.74 + 0.97x}$, donde $\boldsymbol{x = 0}$ corresponde a 2008.

a) Complete la tabla siguiente. Redondee los valores de y a una cifradecimal.

Bayern & Co.					
x	0	1	2	3	4
Ventas	\$5.9	\$6.5	\$7.7	\$8.6	\$9.7
y					

b) Trace la gráfica de "*y*" y los datos de ventas en los mismos ejes.

c) Use la ecuación del modelo para estimar las ventas del año 2014 yen el año 2020.

d) Describa brevemente las ventas de la compañía de 2008 a 2012.

7) La siguiente tabla enumera la producción total de vehículos de la compañía General Motors de Estados Unidos, en millones de unidades, de 1989 a 1993.

General Motors Co.					
	1989	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**
Ventas	4.7	4.1	3.5	3.7	5.0

El modelo matemático para los datos de producción de la compañía GeneralMotors está dado por $\boldsymbol{f(x) = 0.33x^2 - 1.3x + 4.8}$, donde $\boldsymbol{x = 0}$ corresponde a 1989.

a) Complete la tabla siguiente. Redondee los valores de a una cifradecimal.

General Motors Co.					
X	0	1	2	3	4
Ventas	4.7	4.1	3.5	3.7	5.0
f(x)					

b) Trace la gráfica de ***f*** y los datos de producción en los mismos ejes.

c) Use los valores de la función del modelo *f*, redondee a dos cifrasdecimales para calcular la producción en el año 1994 y en el año 1995.

d) Describa en forma verbal la producción de la compañía de 1989 a 1993.

8) Una empresa compró una computadora servidor de última generación en 20 000 usd y supuso que su valor de recuperación es de 2 000 usd después de10 años. Su valor se deprecia linealmente de 20 000 usd a 2 000 usd.

a) Encuentre la función lineal $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ que relaciona al valor ***V***, en dólares (usd), con el tiempo ***t*** en años.

b) Encuentre $\boldsymbol{f}\ (\mathbf{4})\ y\ \boldsymbol{f}\ (\mathbf{8})$, los valores de la computadora luego de 4 y8 años respectivamente.

c) Encuentre la pendiente de la gráfica ***f.*** (La pendiente indica la disminución en el valor por año.)

d) Grafique $\boldsymbol{f}\ para\ \mathbf{0}\ \leq\ \boldsymbol{t}\ \leq\ \mathbf{10}.$

9) Un vendedor de electrodomésticos recibe un salario base de 200 usd a lasemana y una comisión del 4% por todas las ventas de 3 000 usd que hacedurante la semana. Además, si las ventas por semana son de 8 000 usd o más, el vendedor recibe un bono de 100 usd. Si ***x*** representa las ventas porsemana, exprese los ingresos por semana ***E(x)*** como una función de ***x*** y trace su gráfica. Encuentre $\boldsymbol{E}(\mathbf{5\ 750})\ y\ \boldsymbol{E}(\mathbf{9\ 200})$.

10) En los fines de semana y días feriados, un servicio de emergencia de plomeríacobra 2.00 usd por minuto, para los primeros 30 minutos de un servicio adomicilio y 1.00 usd por minuto por cada minuto adicional. Si ***x*** representa laduración de un servicio a domicilio en minutos, exprese el cargo total del servicio***S(x)*** como una función de ***x*** y trace su gráfica. Encuentre$\boldsymbol{S}(\mathbf{25})\ y\ \boldsymbol{S}(\mathbf{45})$.

11) ¿Qué compañía interesa más?

La compañía A ofrece una cuota fija de 15 usd al mes más 0.05 usd/minuto.

La compañía B ofrece pagar sólo por el consumo a 0.25 usd/minuto.

La compañía C ofrece una cuota de 0.15 usd/minuto con un mínimo de 15 usd.

12) Las acciones de dos compañías están representadas en estas funcionescuadráticas. Representa gráficamente y estudia las gráficas que obtengas.

a) $y = 2x^2 - 4x - 6$

b) $y = -x^2 - 6x + 27$

13) Juan recibe una factura mensual de 100 minutos de teléfono. Dos nuevascompañías telefónicas le realizan las siguientes ofertas.

a) ¿Cuál es más beneficiosa para Juan?

b) ¿Existe algún número de minutos consumidos en el que la facturasea la misma en las dos compañías?

14) La parábola del rendimiento de un producto que se encontraba en declivey fue mejora está representado así: $\boldsymbol{y = (x + a)^2 - 5}$ donde, en el punto$\boldsymbol{V(-3, b)}$, el vértice. Halla el valor de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

15) El comportamiento de los ingresos (en dólares) de cuatro productos por laventa de $\boldsymbol{x}$ está dado por las siguientes parábolas.

- $y = 2x^2$
- $y = 2x^2 - 3$
- $y = 1/2x^2 - 2x + 1$
- $y = 5(x^2 - 2)$

Indica:

a) Cuál es el único producto cuya parábola abre sus ramas hacia abajo,es decir, tiene un comportamiento negativo.

b) Cuáles otros productos tienen igual abertura.

c) Cuál es el producto con la parábola más cerrada.

Capítulo III:

Aplicación de funciones exponenciales y logarítmicas en elcampo de la administración y la economía.

Contenidos

En esta sección se trabajará con las funciones exponenciales y logarítmicas, las cuales tienen importantes aplicaciones en los campos de la administración y la economía. Se debe plantear que estos elementos matemáticos se emplean en análisis económicos y administrativos más complejos que los vistos hasta ahora.

3.1- Funciones exponenciales.

Si se analizarán las funciones f y g que se muestran a continuación:

$$f\ (x) = 2^{x}\ y\ g\ (x) = x^{2}$$

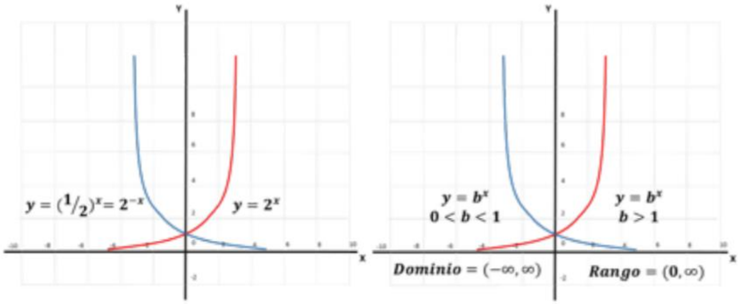
Se puede notar que no son la misma función. En el caso de la primera, tieneuna base constante elevada a una variable y en la segunda se tiene una variableelevada a un exponente constante, entre las cuales hay una gran diferencia.

La función g es una función ya estudiada en esta unidad, se trata de una funcióncuadrática. Sin embargo, la función f es desconocida hasta ahora, es un nuevo tipo de función que se denomina función exponencial.

La función exponencial está definida por la ecuación: $f(x) = bx$ donde $b > 0, b \neq 1$. Esta ecuación define una función exponencial para cada b constante diferente, a la cual se le denomina base. La variable independiente puede asumir cualquier valor real.

Por lo tanto, el dominio de la función $\boldsymbol{f}$ es el conjunto de todos los números realespositivos, se puede mostrar que el rango de $\boldsymbol{f}$ es el conjunto de todos los númerosreales positivos.

Es útil comparar las gráficas de $\boldsymbol{y = 2^x}$ y $\boldsymbol{y = (1/2)^x = 2^x}$ graficando ambas en el mismo sistema de coordenadas. También se encuentra graficada $\boldsymbol{f(x) = bx \to b > 1}$ y $\boldsymbol{f(x) = b^x \to 0 < b >}$:



Se puede observar claramente que ambas gráficas son muy similares, ya que $\boldsymbol{y = 2^x}$ se parece mucho a $\boldsymbol{f(x) = b^x \to b > 1}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{y = (1/2)x = 2^{-x}}$se parece mucho a $\boldsymbol{f(x) = b^x \to 0 < b > 1}$. Se observa que en ambos casos el eje $\boldsymbol{X}$ es una asíntota horizontal para la gráfica.

Ambas gráficas sugieren las siguientes propiedades generales de las funciones exponenciales:

1. Todas las gráficas que pasan por el punto $\boldsymbol{(0, 1) \to b^0 = 1}$ para cualquier base y $\boldsymbol{b}$ permitida.
2. Todas las gráficas son continuas, sin huecos ni saltos.
3. El eje X es una asíntota horizontal.
4. Si $\boldsymbol{b > 1}$, entonces $\boldsymbol{b^x}$ aumenta conforme aumenta $\boldsymbol{x}$.
5. Si $\boldsymbol{0 < b > 1}$ entonces $\boldsymbol{b^x}$ disminuye conforme aumenta $\boldsymbol{x}$.
6. La función $\boldsymbol{f}$ es uno a uno.

La última propiedad implica que una función exponencial tiene una inversa llamada función logarítmica, esta se analizará más adelante.

Las funciones exponenciales cuyos dominios incluyen números irracionales, obedecen las leyes de los exponentes. A continuación se resumen estas leyes yse agregan otras dos útiles e importantes propiedades:

Para $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ positivos, $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{1} \rightarrow \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}$ "$\boldsymbol{y}$" reales:

1. Leyes de los exponentes:

$$-a^x a^y = a^{x+y} \qquad -\left({}^{a}/_{b}\right)^x = {}^{a^x}/_{b^x}$$

$$-(a^x)^y = a^{xy} \qquad -{}^{a^x}/_{a^y} = a^{x-y}$$

$$-(ab)^x = a^x b^x$$

2. $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{y}}$ sí y sólo si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

3. Para $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}}$ si y sólo si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Una aplicación muy significativa que tiene la función exponencial en el campo dela administración y la economía es la ganancia de dinero por interés compuesto.Este tema es muy importante para el mundo financiero y es fundamental para lamateria matemáticas financieras.

Al ingreso que se cobra por prestar su dinero a otra persona se le llama interés.Este por lo general se calcula como un porcentaje llamado tasa de interés de uncapital en un periodo dado. Si al final del periodo de cobro, el interés obtenido se invierte nuevamente a la misma tasa, entonces, tanto el interés ganado como capital generarán intereses durante el siguiente periodo de cobro. El interéscobrado por el interés reinvertido se le denomina interés compuesto.

Supongan que se depositan 1 000 usd en una cuenta de ahorros y préstamos que paga el 8% de interés compuesto semestralmente. ¿Cuánto dinero tendrá ahorrado y cuánto deberá después de 2 años?

Los intereses compuestos semestralmente son los intereses que se depositan ensu cuenta luego de un periodo semestral y que volverán a ganar intereses.

La tasa de interés por periodo es la anual, , dividido entre el número de periodos compuestos por año. Si y representan las nuevas cantidades que se deben al final del primero, segundo, tercero y cuarto periodos respectivamente, entonces:

$$A_1 = 1\,000 + 1\,000\left({}^{0.08}/_{2}\right) \qquad P = \left(1 + {}^{r}/_{n}\right)$$
$$A_1 = 1\,000(1 + 0.04)$$

$$A_2 = A_1\,(1 + 0.04) \qquad P\left(1 + {}^{r}/_{n}\right)^2$$
$$A_2 = [1\,000(1 + 0.04)](1 + 0.04)$$
$$A_2 = 1\,000\,(1 + 0.04)^2$$

$$A_3 = A_2\,(1 + 0.04) \qquad P\left(1 + {}^{r}/_{n}\right)^3$$
$$A_3 = [1\,000(1 + 0.04)^2](1 + 0.04)$$
$$A_3 = 1\,000\,(1 + 0.04)^3$$

$$A_4 = A_3\,(1 + 0.04) \qquad P\left(1 + {}^{r}/_{n}\right)^4$$
$$A_4 = [1\,000(1 + 0.04)^3](1 + 0.04)$$
$$A_4 = 1\,000\,(1 + 0.04)^4$$

¿Cuánto serían los ahorros y préstamos que deberá luego de 6 años? Si se supone que:

$$A_{12} = 1\,000\,(1 + 0.04)^{\,12}$$

Se observa un patrón que está generalizado en la siguiente fórmula de interés compuesto: si el se invierte a una de interés compuesto, veces al año, entonces laen la cuenta al final del año está dada por:

$$\mathbf{P}\,\left(1 + {}^{\mathbf{r}}/_{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{nt}}$$

Es importante destacar que la se expresa en forma decimal.

Como el ***capital P*** representa la cantidad inicial de la cuenta y ***A*** representa la cantidad ***t*** años después, también se le llama ***P*** al valor actual de la cuenta y ***A*** el valor futuro de la cuenta.

Estos dos aspectos son sumamente importantes y empleados en el mundo financiero actual, desde los préstamos al consumo hasta las grandes inversiones en sectores industriales.

Ejemplo: Interés compuesto

Si se depositan 5 000 usd en una cuenta que paga el 9% (*r*) de interés compuestodiariamente. ¿Cuánto tendrá en su cuenta en 5 años (*t*)? Aproxime la respuesta alcentésimo más cercano.

Solución: Se usa la fórmula del interés compuesto como se muestra a continuación:

$$A = P\left(1 + {}^{r}/_{n}\right)^{nt}$$

Donde es el monto para recibir al final, es el capital depositado y los días del año.

$$A = 5\,000\left(1 + {}^{0.09}/_{365}\right)^{(365)(5)}$$

$$A = 7\,841.12$$

3.2- Un acercamiento al Interés Compuesto.

Se da continuidad al interés compuesto por su notable aplicación en el mundo administrativo y económico actual, ya que está presente en muchos instrumentos financieros. Se recuerda que el interés compuesto es aquel en el cual el capital cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se adicionan al capitalpara formar un nuevo capital denominado monto y sobre este monto volver a calcular intereses, es decir, hay capitalización de los intereses. En otras palabras,se podría definir como la operación financiera en la cual el capital aumenta alfinal de cada periodo por la suma de los intereses vencidos.

El interés compuesto es más flexible y real, ya que valora periodo a periodo el dinero realmente comprometido en la operación financiera y por tal motivo es eltipo de interés más utilizado en las actividades económicas.

Es conveniente afirmar que el interés compuesto se utiliza en la Ingeniería Económica, Matemática Financieras, Evaluación de Proyectos y en general por todo el sistema financiero.

El interés compuesto se puede subdividir de la siguiente manera:

1. **Interés compuesto discreto:** Se aplica con intervalos de tiempos finitos.
2. **Interés compuesto continuo:** Se aplica en una forma continua, o sea quelos intervalos de tiempo son infinitesimales.

Sin importar el hecho de que el interés sea discreto o continuo y para dar una definición precisa del interés compuesto, es conveniente indicar los siguientes aspectos:

1. **Tasa de interés:** Es el valor del interés que se expresa como un porcentaje.Ej. 5%. 10%, 20%.
2. **Periodo de aplicación:** Es la forma como se aplicará el interés. Ej. 2%mensual, 20% anual compuesto trimestralmente, 18% anual compuesto continuamente.
3. **Base de aplicación:** Es la cantidad de dinero sobre la cual se aplicará elinterés para cada periodo. Ej. 20% anual compuesto trimestralmente sobreel saldo mínimo trimestral.
4. **Forma de aplicación:** Es el momento en el cual se causa el interés. Ej. 2%mensual por adelantado, 18% anual por trimestre vencido.

El tiempo que transcurre entre un pago de interés y otro se denomina periodo y se simboliza por $\boldsymbol{n}$, mientras que el número de periodos que hay en un año se representapor $\boldsymbol{m}$ y representa el número de veces que el interés se capitaliza durante un año yse le denomina frecuencia de conversión o frecuencia de capitalización.

El periodo de capitalización es un dato indispensable en la solución de problemas deinterés compuesto. Al realizar un cálculo de interés compuesto es necesario que la tasa de interés esté expresada en la misma unidad de tiempo que el periodo decapitalización.

Ejemplo: Cálculo del periodo.

Si un documento ofrece pagos semestrales y tiene una duración de 3 años. ¿Cuánto vale $\boldsymbol{m}$ *y* $\boldsymbol{n}$?

Solución: Un año tiene 2 semestre, por lo tanto, $\boldsymbol{m = 2}$.

Teniendo que la obligación financiera dura 3 años, el número de veces que eldocumento paga interés por año será 2, por consiguiente en 3 años, pagará 6 veces, lo que indica que $\boldsymbol{n = 6}$

Valor Futuro: otra vía de utilizar el interés compuesto.

El valor futuro, se puede encontrar a partir de un valor presente dado, para lo cual, se debe especificar la tasa de interés y el número de períodos, se muestra lafórmula que permite calcular el valor futuro:

$$\boldsymbol{A = P\,(1 + r)^{n}}$$

$\boldsymbol{A}$ = Monto o valor futuro.

$\boldsymbol{P}$ = Valor presente o valor actual.

$\boldsymbol{r}$ = tasa de interés por periodo de capitalización.

$\boldsymbol{n}$ = Número de periodos o número de periodos de capitalización.

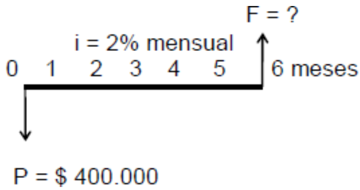
La anterior fórmula se puede expresar nemotécnicamente de la siguiente manera: $\boldsymbol{A = P\,(A/P, i, n)}$; que se lee así: hallar $\boldsymbol{A}$ dado $\boldsymbol{P}$, una tasa $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{n}$ periodos. La formanemotécnica se emplea cuando se usan las tablas financieras que normalmentese encuentran al final de los libros de ingeniería económica o de matemáticas financieras.

El término $\boldsymbol{(A/P, i, n)}$ se conoce con el nombre de factor y es un valor que se encuentra en las tablas financieras. El factor corresponde al elemento $\boldsymbol{(1 + r)^{n}}$ de la fórmula, que se conoce con el nombre de factor de acumulación en pago único.

Ejemplo: Interés compuesto en el valor actual.

¿Cuánto dinero se tiene dentro de seis meses en una cuenta de ahorros que reconoceel 2% mensual si hoy se invierte en una corporación $400.000?

Solución:



$\boldsymbol{F = P\,(1+r)^{n}}$; por tanto: $\boldsymbol{F = 400.000\,(1+0.02)^{6} = \$\,450.465}$

El valor de Va se toma negativo ya que se trata de una inversión.Valor presente.

Se conoce que $\boldsymbol{A = P(1+r)^{n}}$; por lo tanto, $\boldsymbol{P = A\,(1+r)^{-n}}$

El valor presente se puede definir, como el capital que prestado o invertido ahora, a una tasa de interés dada, alcanzará un monto específico después de un ciertonúmero de periodos de capitalización.

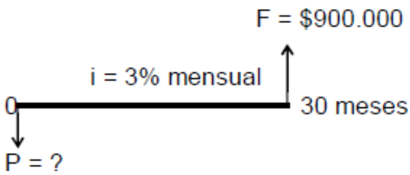
En este caso, se expresa nemotécnicamente de la siguiente manera: ***P = F(P/F,i,n)***;que se lee así : hallar ***P*** dado ***F***, una tasa ***i*** y ***n*** periodos. El término ***(P/F,i,n)*** se conocecomo el nombre de factor y es un valor que se encuentra en las tablas financieras. El factor corresponde al elemento ***(1+r)-n*** de la fórmula, se conoce con el nombre de factor de descuento o factor de valor presente para pago único.

Ejemplo: Interés compuesto en el valor presente.

Dentro de dos años y medio se desea cambiar la actual maquinaria empacadorapor una de mayor capacidad. En esa fecha, se estimó que se puede vender por $
300.000 y la de mayor capacidad estará costando $1.200.000 ¿Cuánto capitalse debe consignar en una entidad financiera que paga el 3% mensual, si se deseaadquirir la nueva maquinaria?

Solución:

Como la actual maquinaria se vendería por $ 300.000 dentro de dos años y medioy la nueva tendría un costo de $ 1.200.000, realmente se debe tener consignadoen la entidad financiera en esa fecha $ 900.000.



Se tiene que: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}} = \mathbf{900.000}\ (\mathbf{1} + \mathbf{0.03})^{-\mathbf{30}} = \$\mathbf{370.788, 08}$

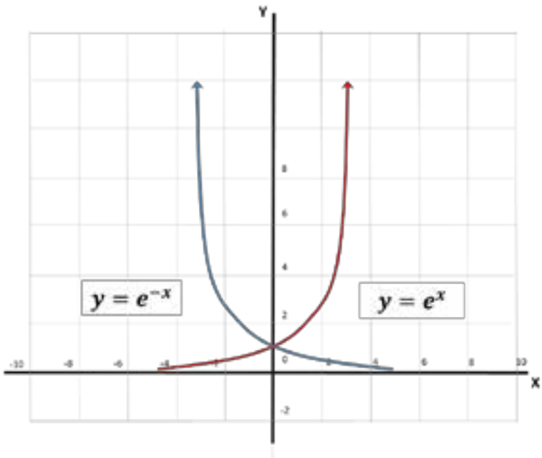
3.3- La función exponencial de base.

En la matemática, el número $\boldsymbol{\pi}$ ha sido probablemente el número irracional másimportante que se ha encontrado. En esta sección se mencionará otro número irracional, $\boldsymbol{e}$, que también es muy significativo tanto para las matemáticas comopara sus aplicaciones.

Al igual que un número irracional como $\boldsymbol{\pi}\ y\ \sqrt{\mathbf{2}}$ la, es un número irracional que no tiene final, ni una representación decimal repetitiva; para 12 cifras decimalesel valor de $\boldsymbol{e} = \mathbf{2.718281828459}$.

El descubrimiento de este número irracional se le atribuye, aunque todavía hay discusión sobre el tema, al gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783),
quien calculó $\boldsymbol{e}$ con 23 cifras decimales usando la fórmula $[\mathbf{1} + (\mathbf{1} / \boldsymbol{m})^{\boldsymbol{m}}]$.

La constante $\boldsymbol{e}$ parece ser una base ideal para una función exponencial ya que se usa extensivamente en expresiones y fórmulas de modelos de fenómenos en el mundo real.



Para un número real $\boldsymbol{x}$, la ecuación: $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ define a la función exponencial de base $\boldsymbol{e}$.

La función exponencial de base se emplea con tanta frecuencia que a menudo se hace referencia a ella como una función exponencial. La figura muestra las gráficas de $\boldsymbol{y = e^x}$ y $\boldsymbol{y = e^{-x}}$.

Interés compuesto continuo.

La constante $\boldsymbol{e}$ aparece naturalmente en el estudio del interés compuesto. Volviendoa la fórmula planteada, del interés compuesto, previamente en este capítulo:

$$\boldsymbol{A = P\left(1 + {}^{r}/_{n}\right)^{nt}}$$

Donde:

$\boldsymbol{A}$ = Monto o valor futuro.

$\boldsymbol{P}$ = Valor presente o valor actual.

$\boldsymbol{r}$ = tasa de interés por periodo de capitalización.

$\boldsymbol{n}$ = Número de periodos o número de periodos de capitalización.

Suponga que $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{t}$ son constantes y $\boldsymbol{n}$ se incrementa sin límite ¿Aumentará la cantidad A sin límite o tenderá a algún valor limitante? Se lleva a la práctica para responder la pregunta.

Una pequeña maniobra algebraica de la fórmula de interés compuesto proporcionaráuna respuesta y un resultado relevante en matemática financiera.

$$A = P(1 + {}^{r}/_{n})^{nt} \rightarrow A = P\left(1 + {}^{1}/_{{}^{n}/_{r}}\right)^{({}^{n}/_{t})^{nt}} \rightarrow A = P[(1 + {}^{1}/_{m})^{m}]^{rt}$$

$$sea\, m = {}^{n}/_{r}$$

La expresión dentro del corchete les es familiar, cuando se estuvo haciendo algode historia acerca del descubrimiento de la base e, donde se planteó la fórmula:

$[(1 + {}^{1}/_{m})^{m}]$que tiende a e conforme a que m tiende a ∞
Puesto que r es constante, $m = {}^{n}/_{r}$ tiende a ∞ conforme n tiende a. Por tanto:
$P\ (1 + {}^{r}/_{n})^{\ nt}$ que tiende a Pe^{rt} conforme a que n tiende a ∞

Llegando así a la fórmula del interés compuesto continuo, una formula muyusada en negocios, bancos y economías.

Ejemplo: Interés compuesto continuo.

Si se invierten 100 usd a una tasa anual del 8% de interés compuesto continuamente, ¿qué cantidad, aproximada al centésimo más cercano, estará enla cuenta luego de 2 años?

Solución: Use la fórmula del interés compuesto continuo para encontrar A cuando

$$P = 100\, usd, r = 8\%\ y\ y\ t = 2.$$

$$A = Pe^{rt} = 100e^{\,(0.08)(2)} = 117.35\, usd$$

Crecimiento y decaimiento exponencial		
Descripción	**Ecuación**	**Aplicaciones**
Crecimiento sin límite	$y = ce^{kt}$ $con\ c, k > 0$	- Crecimiento poblacional a corto plazo - Crecimiento del dinero a un interés compuesto.
Decaimiento exponencial	$y = ce^{kt}$ $con\ c, k > 0$	- Decaimiento radioactivo - Absorción de luz en agua - Presión atmosférica
Crecimiento limitado	$y = c\ (1 - e^{kt})$ $con\ c, k > 0$	- Habilidades de aprendizaje - Últimas ventas - Crecimiento de la empresa - Circuitos eléctricos
Crecimiento logístico	$y = M/1 + cekt)$ $con\ c, k > 0$	- Crecimiento de la población al largo plazo - Epidemias - Ventas de nuevos productos - Crecimiento de una empresa

3.4- Funciones logarítmicas.

Se estará haciendo referencia a continuación de un nuevo tipo de funciones, las llamadas funciones logarítmicas, como funciones inversas de las funciones exponenciales. Para revelar que es una función inversa es necesario, inicialmente, definir una función uno a uno.

Una es función uno a uno si ninguno de los pares ordenados en la función tiene el mismo segundo componente y diferentes primeros componentes. Por ejemplo, sitenemos las siguientes funciones:

$$f = \{(0,3)\ ;\ (0,5)\ ;\ (4,7)\}$$
$$g = \{(0,3)\ ;\ (2,3)\ ;\ (4,7)\}$$
$$h = \{(0,3)\ ;\ (2,5)\ ;\ (4,7)\}$$

El conjunto f no es una función, el conjunto g es una función, pero no es una funciónuno a uno debido a que no cumple con la definición planteada; por último, la funciónh es una función y uno a uno

La inversa de una función se obtiene si $\boldsymbol{f}$ es una función uno a uno, entonces lainversa de $\boldsymbol{f}$ se denota $\boldsymbol{f}^{-1}$, que es la función formada al invertir todos los paresordenados en $\boldsymbol{f}$. Por consiguiente:

$$\boldsymbol{f}^{-1} = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) | (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ \textbf{\textit{está en}} \ \boldsymbol{f} |\}$$

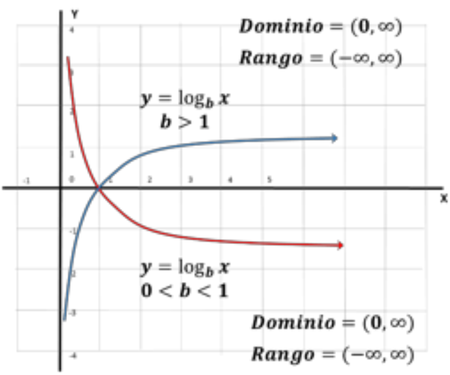
Si $\boldsymbol{f}$ no es una función uno a uno, entonces $\boldsymbol{f}$ no tiene una inversa y $\boldsymbol{f}^{-1}$ no existe.Las

propiedades de las funciones inversas son las siguientes:

Si $\boldsymbol{f}^{-1}$ existe, entonces:

1) $\boldsymbol{f}^{-1}$ es una función uno a uno.
2) Dominio de $\boldsymbol{f}^{-1}$Rango de $\boldsymbol{f}$.
3) Rango de $\boldsymbol{f}^{-1}$Dominio de $\boldsymbol{f}$.

Con lo mostrado con anterioridad se conoce de qué se habla cuando en el textose refiere a funciones inversas. Como se mencionó anteriormente, la funciónlogarítmica, es la función inversa, de la función exponencial. En general, se definela función logarítmica de base $\boldsymbol{b}$ como la inversa de la función exponencial debase $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{1})$.



Una función es logarítmica cuando para $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{1}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{log_b x}$ es equivalente a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{y}}$. El logaritmo de base $\boldsymbol{b}$ de $\boldsymbol{x}$ es el exponente al cualse debe elevar $\boldsymbol{b}$ para obtener $\boldsymbol{x}$. Por ejemplo, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{log_{10} x}$ es equivalente a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{10}^{\boldsymbol{y}}$.

Es necesario recordar que unlogaritmo es un exponente; además que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{log_b x}$ y

$x = b^y$ definen la misma función, por lo tanto, se pueden emplear alternativamente. Se pueden convertir formas logarítmicas a formas exponenciales y viceversa. Por ejemplo:

De logarítmica a exponencial: $log_2 8 = 3$ *es equivalente a* $8 = 2^3$

De exponencial a logarítmica: $49 = 7^2$ *es equivalente a* $log_7 49 = 2$

Propiedades de las funciones logarítmicas: si b, M *y* N son números reales positivos, $b \neq 1$, *y* p *y* x son números reales, entonces:

1) $log_b 1 = 0.$
2) $log_b b = 1$
3) $log_b b^x = x$
4) $b^{log_b x} = x, x > 0$
5) $log_b MN = log_b M + log_b N$
6) $log_b M/N = log_b M - log_b N$
7) $log_b M^p = p \, log_b M$
8) $log_b M = log_b N$ si y solo si $M = N$

Las primeras dos propiedades se deducen de la definición de función logarítmica,la tercera y la cuarta se deducen del hecho de que las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas unas a otras. Las propiedades 5, 6 y 7 permiten convertirla multiplicación en suma, la división en resta y los problemas de potencias y raícesen multiplicaciones. Finalmente la octava propiedad se deduce del hecho de que lasfunciones logarítmicas son uno a uno.

Existen en las matemáticas dos tipos de logaritmos convencionales, estos son:

- **Logaritmos comunes:** son los logaritmos de base 10, ejemplo: $log\, x = log_{10} x_1$,lamados logaritmos de Briggsian.

- **Logaritmos naturales:** son los
- logaritmos de base ***e***, ejemplo: $\boldsymbol{ln\ x = log_e x}$,llamados logaritmos neperianos.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

El siguiente ejemplo ilustra como el uso de las propiedades de los logaritmos para llegar a la solución de las ecuaciones exponenciales.

Ejemplo: Interés compuesto.

Una cierta cantidad de efectivo ***P*** (capital) se invierte a una tasa anual ***r*** de interés compuesto anualmente. La cantidad de dinero ***A*** en la cuenta luego de ***t*** años, suponiendo que no hay retiros, está dada por la fórmula ya estudiada previamente:

$$\boldsymbol{A = P\,(1 + {}^{r}/_{n})^{nt} = P\,(1 + r)^{t} \rightarrow n = 1\ (para\ interés\ compuesto\ anual)}$$

¿Calcule cuántos años aproximadamente al año más cercano pasarán para quese duplique si se invirtió a un 6% de interés compuesto anual?

Solución: Para encontrar el tiempo de duplicación, se reemplaza ***A*** por $2\boldsymbol{P}$ en laecuación $\boldsymbol{A = P(1.06)^t}$ y se despeja ***t***.

$$2P = P\,(1.06)^t$$
$$2 = (1.06)^t\ dividiendo\ ambos\ lados\ entre\ P$$
$$log\ 2 = log\ (1.06)^t\ tome\ el\ logaritmo\ común$$
$$= t\ log\ 1.06\ Observen\ como\ se\ ha\ empleado\ las\ propiedades\ de\ los\ logaritmos\ para\ sacar\ t\ del\ exponente.$$
$$t = \frac{log^2}{log\ 1.06}$$
$$t = 12años(aproximadoalañomáscercano)$$

3.5- Resumen del capítulo. Aplicaciones prácticas en la administración y la economía.

Resumen del capítulo:

Funciones exponenciales:

La ecuación $\boldsymbol{f(x) = b^x, b > 0, b \neq 1}$, define una función exponencial de base $\boldsymbol{b}$, con un dominio de $\boldsymbol{f\ de\ (-\infty, \infty)}$ y un rango de $\boldsymbol{(0, \infty)}$. La gráfica de una función exponencial es una curva continua que siempre pasa por el punto y tiene el eje Xcomo una asíntota horizontal. Si $\boldsymbol{b > 1}$, entonces $\boldsymbol{b^x}$ aumenta conforme aumenta $\boldsymbol{x}$, y si $\boldsymbol{0 < b < 1}$, entonces $\boldsymbol{b^x}$ disminuye conforme aumenta $\boldsymbol{x}$. La función $\boldsymbol{f}$ es uno a uno i tiene inversa.

La principal aplicación que tiene las funciones exponenciales en el campo de la administración y la economía está relacionada con el incremento del dinero en una cuenta, financiamiento o inversión que paga interés compuesto. El interés compuestose emplea, principalmente en la materia de matemática financiera y puede utilizarse para: capitalización, valor presente y valor futuro.

La función exponencial de base "$\boldsymbol{e}$" $[\boldsymbol{f(x) = e^x}]$, es cuando $\boldsymbol{m}$ se aproxima a ∞ y la expresión $\boldsymbol{(1 + {}^1/m)^m}$ se aproxima al número irracional $\boldsymbol{e = 2.718281828459}$. Estas funciones se usan para modelar diferentes tipos de crecimiento y decaimiento exponencial, incluyendo el crecimiento del dinero en formas de financiar que pagan un interés compuesto continuo.

Funciones logarítmicas:

La función logarítmica de base $\boldsymbol{b}$ se conceptualiza como la inversa de la función exponencial de base $\boldsymbol{b}$ y se denota por $\boldsymbol{y = log_b\ x}$. Así, $\boldsymbol{y = log_b\ x}$ si y solo si $\boldsymbol{x = b^y, b > 0, b \neq 1}$. El dominio de una función logarítmica es $\boldsymbol{(0, \infty)}$ y el rango es $\boldsymbol{(-\infty, \infty)}$. La gráfica es una curva continua que siempre para por el punto y tiene el eje Y como unaasíntota vertical.

Los logaritmos en base 10 se denominan logaritmos comunes y se escriben como $\boldsymbol{log^x}$.Los logaritmos de base "$\boldsymbol{e}$" se conocen como logaritmos naturales y se denotan por $\boldsymbol{ln^x}$. Así, $\boldsymbol{log\, x = y}$ es equivalente a $\boldsymbol{x = 10^y}$ y $\boldsymbol{ln\, x = y}$ es equivalente a $\boldsymbol{x = e^y}$.

Ejercicios relacionados con la administración y la economía:

1) Si se invierten 1 000 usd en una cuenta que paga el 10% de interés compuesto mensualmente, ¿cuánto habrá en la cuenta después de 10 años? Aproxime surespuesta al centésimo más cercano.

2) Grafique y compare un crecimiento de una inversión de 1 000 usd al 10% deinterés compuesto mensualmente con una inversión de 2 000 usd al 5% de interés compuesto mensualmente. ¿Cuándo tendrán las dos inversiones el mismo valor?

3) Determine, mediante la graficación, si una inversión de 5 000 usd al6% de interés compuesto trimestralmente tiene el mismo valor que unainversión de 4 000 usd al 10% de interés compuesto diariamente.

4) Suponga que invierte 4 000 usd en una cuenta al 11% de interés compuesto semanalmente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta en:

    a) $^1/_2$ año?

    b) 10 años?

5) Una pareja acaba de tener un bebé. ¿Cuánto tendrán que invertir al8.25% de interés compuesto diariamente, con el fin de tener dentro de17 años 40 000 usd para la educación del niño? Aproxime su respuestaal dólar más próximo.

6) Una persona desea reunir 15 000 usd en efectivo para comprarse uncarro dentro de 5 años. ¿Cuánto debe tener en la cuenta si ésta paga el9.75% de interés compuesto semanalmente? Aproxime su respuesta aldólar más próximo.

7) Si se invierten 7 500 usd en una cuenta que paga el 8.35% de interés compuesto continuamente, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta luego de:

a) 5.5 años

b) 12 años

8) Financieros, es un negocio nacional y de finanzas semanales, publicó losiguiente “los depósitos ahorradores rinden” para certificados de cuentasde depósitos a 2 años y medio:

a. Ahorros Alonso 8.30% (CC).

b. Ahorros y préstamos González 8.40% (CT).

c. Ahorros de Ecuador 8.25% (CD).

9) Donde CC representa el interés compuesto en forma continua, CT el interés compuesto trimestral y CD el interés compuesto diariamente. Calcule el valorde un capital de 1 000 usd invertidos en cada cuenta luego de 2 años y medio.

10) Un prometedor pagaré alcanzará 30 000 usd al vencimiento luego de 10 añosa partir de ahora. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por el pagaré ahora si éste gana valor a una tasa del 9% de interés compuesto continuamente?

11) Un pagaré pagará 50 000 usd al vencimiento después de 5 años y medio a partir de ahora. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por el pagaré ahora si éstegana valor a una tasa del 10% de interés compuesto continuamente?

12) ¿A qué tasa de interés anual compuesto continuamente se tendrán que invertir un importe de 1 000 usd para que se incremente a 2 500 usd en 10 años? Usela fórmula $A=Pe^{rt}$. Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

13) ¿Cuántos años tendrán que pasar para que 5 000 usd se incrementen a 8000 usd a una tasa de interés compuesto continuamente del 9% anual? Usela fórmula $A=Pe^{rt}$. Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

Ejercicios de repaso de la Unidad No. 1.

1) A 0.60 usd por bushel, la oferta diaria para el trigo es de 450 bushelsy la demanda diaria es de 645 bushels. Cuando el precio se incrementaen 0.90 usd por bushel, las ofertas diarias aumentan a 750 bushels y lademanda diaria disminuye a 495. Suponga que las ecuaciones de ofertay demanda son lineales.

   a. Encuentre la ecuación oferta. (Sugerencia: forme la ecuación dela oferta en la forma ***p=aq+b*** para ***a*** y ***b***.)

   b. Encuentre la ecuación demanda.

   c. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

2) Si una persona entre los 65 y 69 años de edad continúa trabajandodespués de comenzar a recibir los beneficios por seguridad social, los beneficios se reducirán cuando los ingresos excedan un límite establecido. En 2011, los beneficios se redujeron en un dólar por cada 2 usd que seganaron después de 8 880 usd. Encuentre el rango en las reducciones de los beneficios para las personas que ganan 13 000 usd y 16 000 usd.

3) En Guayaquil, las ecuaciones precio-demanda y precio-oferta para los bolígrafos son:

$$\boldsymbol{p = 75\,000 \;/\; q\;(Ecuación\ demanda)\ p = 0.0005q + 12.5\;(Ecuación\ oferta)}$$

Donde $\boldsymbol{q}$ representan la cantidad y $\boldsymbol{p}$ el precio en dólares. Encuentre elprecio de equilibrio.

4) Las ecuaciones de costo para una fábrica son frecuentemente de naturaleza cuadrática. Si la ecuación de costos para fabricar gomas paramotocicletas es $C=x^2-10x+31$, donde C es el costo de fabricación de unidades a la semana (C y x en miles), encuentre:

a. La producción para un costo semanal de 15 000 usd.

b. Si la fábrica vende las gomas a 3 usd cada una, su ecuaciónde ingresos es $R=3x$, donde R es el ingreso y x es el número deunidades vendidas por semana. Encuentre el punto de equilibriopara la fábrica.

c. Encuentre los niveles de producción donde se obtiene una utilidad.

5) El costo de combustible por hora que un tren gasta en su recorrido es de $v^2/5$ usd, donde v es la velocidad en kilómetros por hora. Otros costos, incluyendo mano de obra, son 400 usd por hora. Exprese el costo total de un viaje de 500 kilómetros como una función de la velocidad v.

6) Un almacén de ropa vende una camisa que cuenta 20 usd en 33 usd y unachamarra que cuesta 60 usd en 93 usd.

a. Si se supone que la política de aumento de precios del almacén paralos objetos que cuestan más de 10 usd es lineal, escriba la ecuaciónque exprese el precio de venta al menudeo R, en términos de costo C (precio de venta al mayoreo).

b. ¿Cuánto paga el almacén por un traje que vende al menudeo a 240usd?

c. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de la ecuación que se encontró enel inciso a. interprete verbalmente.

7) Una agencia de renta de autos renta 300 automóviles diarios a una tarifa de40 usd por día. Por cada un dólar de aumento en la tarifa se rentan cincoautos menos. ¿A qué tarifa se tendrían que rentar para producir el máximoingreso? ¿Cuánto es el ingreso máximo?

8) ¿Una inversión de 10 000 usd al 8.9% de interés compuesto diariamentedará mayor rendimiento al final de un trimestre, que una inversión de 10 000

usd al 9% de interés compuesto trimestralmente? Explique.

9) Una cantidad de 5 000 usd se invierten al 13% de interés compuesto semestralmente. Suponga que una segunda inversión de 5 000 usdobtiene una tasa de interés compuesto diariamente. ¿Para qué valoresde , aproximados al decimal más cercano de un porcentaje, es mejor lasegunda inversión que la primera? Analice.

10) Una empresa está intentando da a conocer un nuevo producto a tantaspersonas como sea posible mediante comerciales de televisión en una gran área metropolitana con dos millones de espectadores. Un modelo del número de personas N, en millones, que conocen el producto luegode t días de publicidad se encuentran con:

$$N=2(1-e^{-0.037r})$$

Grafique esta función para . ¿Qué valor tiene cuando aumenta sinlímite?

UNIDAD 2

El Cálculo Diferencial en la Administración y la Economía.

Unidad No. 2:
El Cálculo Diferencial en la Administración y la Economía.

La Unidad No. 2 mostrará que el cálculo diferencial es uno de los elementos matemáticos que brinda un significativo aporte a la Administración y la Economía.El cálculo diferencial, de modo general, tienen aplicaciones prácticas que formanparte con estos dos campos de las ciencias sociales. Dentro de los mismos, se pueden encontrar aplicaciones del cálculo diferencial en materias tales como: microeconomía, macroeconomía, optimización de ingresos, de costos, en las finanzas, entre otras.

Objetivo de la Unidad: Resolver situaciones reales empleando técnica de derivación, en la Economía y la Administración.

Para que el contenido de la unidad se presente de forma coherente y a su vez abarque todos los temas relevantes; la unidad se estructura de la siguiente forma:

Capítulo IV: Análisis de límites, continuidad e incremento de las funciones.

Capítulo V: La Derivada.

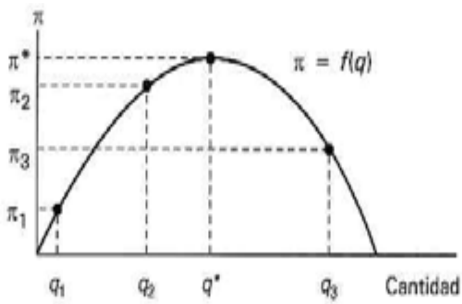
Los capítulos mencionados cuentan con los siguientes componentes que forman su estructura:

- Contenido teórico.
- Ejemplos prácticos en la administración y la economía.
- Resumen de lo tratado.
- Set de ejercicios.

Además, al finalizar la unidad, se presenta otro set de ejercicios que abarcantodas las materias estudiadas.

Para la economía, no sólo es relevante determinar magnitudes que muestren una determinada situación, sino analizar cómo varían estas magnitudes y de qué formainfluyen sobre unas las variaciones de otras. Por ejemplo, la inflación es un indicadoreconómico que revela la variación de los precios a lo largo del tiempo; si dos nacionestienen la misma tasa de paro, pero la de uno crece y la de otro decrece, entonces soneconomías diferentes; un empresario podría estar interesada en estimar la variación de sus beneficios que ocasionaría un incremento en la producción, o del gasto publicitario, entre otros.

Suponga que el director de una empresa quiera maximizar los beneficios obtenidoscon la venta de determinado bien. Suponga además que los beneficios $(\boldsymbol{\pi})$ recibidos solo dependen de la cantidad ***(q)*** vendida del bien. Esto se expresa matemáticamentede la forma siguiente:



$$\pi = f(q)$$

En la figura se revela una posible relación entre $\boldsymbol{\pi}$ *y* $\boldsymbol{q}$. Evidentemente para lograr el máximo beneficio, el director debe producir$\boldsymbol{q}^*$, que ofrece unos beneficios iguales a $\boldsymbol{\pi}^*$. Si se dispusiera de un gráfico como elmostrado, esta situación tendría solucióndе forma sencilla mediante una regla.

No obstante, es más probable, que el director no tenga una descripción tan precisadel mercado. Por lo que el director tratará de variar $\boldsymbol{q}$ para ver dónde obtiene elmáximo beneficio. Por ejemplo, partiendo de $\boldsymbol{q}^1$, donde beneficios de las ventas serían π^1. Luego intentaría producir $\boldsymbol{q}^2$ y vería que los beneficios se incrementarían hasta $\boldsymbol{\pi}^2$. El sentido común indica que los beneficios han aumentado debido al incrementede $\boldsymbol{q}$. Siempre que la relación entre la variación de $\boldsymbol{\pi}$ y la variación de q sea positiva,los beneficios aumentarán y la producción se continuará elevando; sin embargo unaproducción de $\boldsymbol{q} > \boldsymbol{q}^*$, no sería una decisión acertada.

Este ejemplo ilustra lo útil del cálculo diferencial en diferentes análisis a nivel empresarial.

Capítulo IV:

Análisis de límites, continuidad e incremento de las funciones.

Contenidos:

La definición de función es elemental a la hora de estudiar la relación entredistintas magnitudes. Si se plantea que un elemento $\boldsymbol{M}$ es función de otros elementos $\boldsymbol{x1,\ldots,x_n}$ si el valor que toman éstas determina totalmente el valor de $\boldsymbol{M}$. En tal caso se escribe que $\boldsymbol{M = M(x_1,\ldots,x_n)}$.

Por ejemplo, si se deposita un capital en un banco, el capital disponible $(\boldsymbol{C})$,durante un tiempo dado t, es función del capital inicial depositado $\boldsymbol{C_0}$, del tiempo dado $\boldsymbol{t}$ y del tipo de interés i. Concretamente:

$$\boldsymbol{C = C(C_0, i, t) = C_0(1+i)^t}$$

Esta fórmula nos dice cómo calcular $\boldsymbol{C}$ si se conocen las variables $\boldsymbol{C_0, i, t}$.

Es frecuente que una magnitud pueda considerarse función de otras sin que se conozca explícitamente la relación entre ellas. En tales casos entra en juego la modelización matemática, que nos lleva a proponer fórmulas aproximadas o razonables. Por ejemplo, se puede suponer que la demanda de un artículo esfunción de su precio, lo cual no es exacto, pues además del precio pueden influirotros muchos factores, si bien éstos pueden ser despreciados en la medida en la que puedan considerarse constantes. Aun así, una relación explícita entredemanda y precios siempre deberá considerarse como una aproximación teóricamás o menos simplificada a una función que en realidad es muy compleja.

4.1- Funciones de varias variables

Para definir las funciones de varias variables se considera $\boldsymbol{D}$ un subconjunto de $\boldsymbol{R^n}$. Una función escalar de $\boldsymbol{n}$ variables reales es cualquier criterio que a cada punto $\boldsymbol{x\ E\ D}$ le asigna un único número real $\boldsymbol{f(x)}$. La función $\boldsymbol{f}$ se representa $\boldsymbol{f: D\ c\ R^n \rightarrow R}$.

El conjunto $\boldsymbol{D}$ sobre el que está definida la función $\boldsymbol{f}$ se llama dominio de $\boldsymbol{f}$ y, dado $\boldsymbol{x\ E\ D}$, el número $\boldsymbol{f(x)}$ se llama imagen de $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{f}$.

Cuando $\boldsymbol{n = 1}$, es decir, cuando $\boldsymbol{f: D\ c\ R \rightarrow R}$, se dice que $\boldsymbol{f}$ es una función real de variable real.

En general, para determinar el dominio de una función habrá que tener en cuenta que:

1) Los polinomios tienen por dominio $\boldsymbol{R^n}$.
2) El denominador de una fracción no puede anularse.
3) El argumento de un logaritmo ha de ser mayor que 0.
4) El dominio de la exponencial es el mismo que el dominio del argumento.
5) El radicando de una raíz de índice par ha de ser mayor o igual que 0.
6) El dominio de una raíz de índice impar es el mismo que el del radicando.
7) La base de una potencia de exponente variable ha de ser mayor que 0.

Ejemplo: Calcula el dominio de la función $\boldsymbol{f\ (x, y, z) = ln\ (x + y + z)}$.

Solución: Se trata de una función $\boldsymbol{f: D\ c\ R3 \longrightarrow R}$, definida sobre el conjunto:

$$\boldsymbol{D = \{(x, y, z) E\ R^3 \mid x + y + z > 0\}}$$

No obstante, a menudo sucede que si una función tiene una interpretación económica, conviene considerarla definida en un conjunto menor que su dominio. Por ejemplo, la función $\boldsymbol{C\ (C0, i, t) = C0\ (1 + i)^t}$ es una función escalar cuyo dominio es:

$$\boldsymbol{D = \{(C_0, i, t)\ E\ R^3 \mid i > -1\}}$$

Pues la única restricción es que la base $1 + i$ de la potencia ha de ser mayor que *0*. No obstante, cuando consideramos a C como la ley de capitalizacióncorrespondiente al interés compuesto hemos de considerar que su dominio es:

$$D^1 = \{(C0, i, t)\ E\ R^3 \mid C0 \geq 0, i \geq 0\},$$

Ya que no tiene sentido considerar capitales iniciales negativos C_0 ni tampoco tipos de interés negativos. Incluso podemos desechar el caso de un capital ointerés nulo. En determinados contextos convendrá considerar únicamente tiempos no negativos $(t \geq 0)$, aunque en otros puede tener sentido que t sea arbitrario.

4.2- Límites.

De lo visto previamente, se llega al elemento matemático denominado Límite, quese define cuando sea $f: D\ c\ R^n \rightarrow R$ una función escalar y sea $p\ E\ R^n$ un punto de acumulación de D. Se dice que un punto $l\ E\ R$ es el límite de *f(x)* cuando x tiende a p (*y se representa por* $\lim_{(x \to p)} f(x) = l$) *si para todo* $\in > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x\ E\ D, x \neq p$ *y* $y \, \|x - p\| < \delta$, *entonces* $\|f(x) - l\| < \epsilon$. Si E es muy pequeño, la condición $\|f(x) - l\| < \epsilon$ significa que $f(x)$ es casi igual a l, luego la definición de límite puede parafrasearse así: Si se toman puntos x suficientemente cercanos a p (concretamente, tan cercanos como para que $\|x - p\| < \delta$), que estén en D (es decir, tales que exista $f(x)$ y que no sean el propio p, entonces *f(x)* es casi igual a l.

En la práctica conviene recordar lo siguiente: La igualdad $\lim_{(x-p)} f(x) = l$ significa que si tomamos puntos $x \approx p$ sobre los que esté definida la función *f*, entonces $f(x) \approx l$, se entiende que la última aproximación será mejor cuanto mejor sea la primera.

Ejemplo: Un caso práctico de "paso al límite", el interés continuo.

Se supone que un banco ofrece una cuenta corriente con un interés simple de un3% anual. Esto significa que los intereses generados en un tiempo t (expresado en años) serán $I = C_0 it$, donde C_0 es el capital depositado e i el tanto por uno anual.El capital total será $C = C_0 + I = C_0 (1 + it)$. Se supone que depositen 10 000 usddurante 3 años.

Según esto, al cabo de tres años dispondremos de un capital:

$$C(3) = 10\,000(1 + 0.03 * 3) = 10900\ usd$$

Ahora bien, se supone que al cabo de un año ***(t = 1)*** se va al banco y se cancela la cuenta, con lo que del banco se recibe:

$$C(1) = 10\,000(1 + 0.03 * 1) = 10\,300\ usd$$

Y si se vuelve a ingresar, al tercer año se terminará con un capital de:

$$10\,609(1 + 0.03 * 1) = 10\,927.27\ usd$$

Así pues, se ha ganado 27.27 usd sin más que meter y sacar nuestro dinero cada año. La razón es clara: al forzar al banco a que se nos pague los intereses del primer año eingresarlos en la cuenta, estos intereses generan a su vez nuevos intereses, los cuales,a partir del segundo año generan nuevos intereses. Ahora bien, todavía podríamosobtener más dinero si cancelamos y reabrimos nuestra cuenta cada mes. En general, si forzamos al banco a capitalizar los intereses cada Δt años (por ejemplo, $\Delta t = {}^{1}/_{12}$ sería cada mes), se tiene que al final de cada periodo el capital se multiplica por $1 + i\Delta t$, y como en t años hay ${}^{t}/_{\Delta t}$ periodos, el capital final sería:

$$C(\Delta t) = C_0(1 + i\Delta t)^{t/\Delta t}$$

Con los datos anteriores, si se capitaliza cada mes obtendrá:

$$C = 10\,000\left(1 + 0.03 * {}^{1}/_{12}\right)^{12-3} = 10\,940,51\ usd$$

Con lo que se ha beneficiado con 13 usd más (40.27 usd más que al principio).
En la práctica no tiene sentido ir más allá, pues las diferencias para valores más pequeños para Δt no llegan a un céntimo. Con lo visto puede probarse que:

$$\lim_{(\Delta t \to 0)} C_0\,(1 + \Delta t)^{t/\Delta t} = C_0 e^{it} \to C = C_0 e^{it}$$

La fórmula que se muestra nos da el capital generado por un capital inicial C_0, enun tiempo t a una tasa de interés continuo i.
En el ejemplo analizado:

$$C = 10\,000e^{0.03*3} = 10\,941.74283 \to C = \lim_{(\Delta T \to 0)} C\,(\Delta t)$$

Se interpreta (en el caso de nuestro ejemplo), como que si $\Delta t \approx 0$, entonces el capital generado por un interés simple anual del 3% durante 3 años capitalizandointereses cada Δt años es $C(\Delta t) \approx 10\,941.74283$.

Esto explica, entre otras razones, por qué los bancos no ofrecen interés simple,pues ello sería invitar a sus clientes a meter y sacar su dinero cuantas más vecesmejor. En la práctica se usa el interés compuesto (discreto), que consiste enpactar no sólo el tipo de interés, sino también los intervalos en que capitalizan los intereses. Como es sabido, un depósito de un capital C_0 a una tasa efectiva anual i genera en un tiempo t un capital: $C = C_0(1 + i)^t$, lo cual es equivalente a uninterés (simple) i en el que los intereses capitalizan cada año (sin necesidad de que vayamos al banco a cancelar y reabrir la cuenta).

Podría pensarse que el interés continuo es una invención, en el sentido de que ningún banco nos va a capitalizar intereses cada segundo o cada hora, pero cualquiera familiarizado con el interés compuesto sabe que, en realidad, el "periodo de capitalización de intereses" carece de sentido con el interés continuo, pues un interés efectivo anual es equivalente a otro tipo de interés efectivotrimestral, o mensual, o diario, entre otras; y del mismo modo es equivalente a un interés continuo. Para comprobarlo basta igualar las leyes de capitalización compuesta (discreta) y continua con dos tipos de interés distintos i e i_∞:

$$C_0(1 + i)^t = C_0 e^{i_\infty t}$$

De donde, tomando logaritmos, obtenemos la relación:

$$t \ln (1 + i) = t i_\infty \ln e = t i_\infty \rightarrow i_\infty = \ln (1 + i)$$

Concluyendo, un interés efectivo anual (discreto) i es equivalente a un interés continuo $i_\infty = \ln(1 + i)$, en el sentido de que la ley de capitalización correspondiente al interés discreto i proporciona el mismo capital final que la ley de capitalización correspondiente al interés continuo i_∞. Así pues, hablar de una cuenta corrientecon un tipo de interés continuo del 3% no es una abstracción matemática, sino únicamente una forma matemáticamente más cómoda y simple de expresar la ley decapitalización que emplean habitualmente los bancos.

Propiedades de los límites:

1. Para que tenga sentido calcular $\lim\limits_{(x \to p)} f(x)$es necesario que p sea un punto de acumulación del dominio de f, es decir, que nos podamos acercar a p porpuntos donde esté definida f.

2. En la definición sólo se considera el valor de $f(x)$ en los puntos x cercanosa p distintos del propio p, por lo que el límite de una función en un punto p sólo depende de la definición de f en los puntos alrededor de p distintos del propio p.

3. Si una función tiene límite en un punto, el límite es único, es decir, unafunción no puede tener dos límites distintos en el mismo punto.

Teorizando, se plantea que: sean $f, g : D\ R^n \to R$ dos funciones escalares, $\alpha\ E\ R$ y p es un punto de acumulación del dominio D. Entonces:

1. Si fy g tienen límite en p, también lo tienen $f \pm g$ y fg y se cumple que:

$$\lim_{(x \to p)} [f(x) + g(x)] = \lim_{(x \to p)} f(x) + \lim_{(x \to p)} g(x)$$

$$\lim_{(x \to p)} f(x)\, g(x) = \lim_{(x \to p)} f(x) \lim_{(x \to p)} g(x)$$

2. Si f tienen límite en p, también lo tienen αf y $f\ g$ y se cumple que:

$$\lim_{(x \to p)} [af(x)] = a \lim_{(x \to p)} f(x)$$

3. Si f y g tienen límite en p y $lim\ g(x) \neq 0$, entonces f/g tiene límite en p y:

4. Una función vectorial $f= (f1, \ldots, f_m)$ tiene límite en un punto p si y sólosi lo tienen todas las funciones coordenadas f_i, y entonces:

$$\lim_{(x \to p)} f(x) = \left[\lim_{(x \to p)} f_1(x), \ldots, \lim_{(x \to p)} f_m(x)\right]$$

4.3- Continuidad.

Luego de haber analizado los aspectos fundamentales de la herramienta matemática denominada Límite, se da paso al análisis de otra herramienta matemática. La Continuidad se define de la siguiente manera: una función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subset$

$\subset \boldsymbol{R} \subset^{\wedge} \boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{R}$es continua en un punto $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{D}$ si existe $\lim\limits_{(x \to p)} f(x) = f(p)$.

En la práctica, para comprobar que f es continua en p se ha de verificar laspropiedades siguientes:

1) $\boldsymbol{f}$ está definida en $\boldsymbol{p}$ (es decir, existe $\boldsymbol{f(p)}$).

2) Existe $\lim\limits_{(x \to p)} f(x)$.

3) Se da la igualdad $\lim\limits_{(x \to p)} f(x)$

De las propiedades de los límites se deducen las siguientes propiedades de la continuidad:

1. La continuidad de una función $\boldsymbol{f}$en un punto $\boldsymbol{p}$ depende únicamente de los límites, teniendo en cuenta el valor que toma en $\boldsymbol{p}$).
2. Una función vectorial $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f1}, \ldots, \boldsymbol{f_m})$ es continua en un punto $\boldsymbol{p}$ si y sólo si lo son todas sus funciones coordenadas $\boldsymbol{f_i}$.

Se ha definido únicamente la continuidad de una función en un punto de acumulación de su dominio, lo cual deja sin considerar el caso de los puntosaislados. Se considera que una función es siempre continua en los puntos aislados de su dominio, pero este caso no se va a aparecer en ningún momento.

Por lo tanto se cumple que:

1. Si $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}: \boldsymbol{D}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R}$ son funciones continuas en un punto $\boldsymbol{p} \subset \boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{R},$ entonces también son continuas en p las funciones $\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\alpha f}, \boldsymbol{fg}$ y, si además $\boldsymbol{g(p)} \neq \boldsymbol{0}$, también es continua la función $\boldsymbol{f/g}$.
2. Todo polinomio es una función continua en todos los puntos de su dominio.
3. La composición de funciones continuas es una función continua.

4. Las funciones e^x, $ln\ x$, $\sqrt[n]{x}$ son continuas en todos los puntos de su dominio.

Se ha de recordar entonces que toda función construida a partir de polinomios mediante sumas, productos, cocientes y composición con las funciones usuales (exponencial, logaritmo, entre otros) es continua en todos los puntos de su dominio.

Por ejemplo, si se analiza la función siguiente:

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^\wedge 2 + y^\wedge 2 + 1}$$

Es continua en todos los puntos de R^2, pues es un cociente de polinomios (que son funciones continuas) y el denominador no se anula en ningún punto.

$$\frac{lim}{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{x + y}{x^2 + y^2 + 1} = f(1, 0) = \frac{1}{2}$$

Concluyendo que siempre que tengamos que calcular el límite de una función en unpunto donde sepamos que ésta es continua, el límite se obtendrá sin más que evaluarla función en el punto, por la propia definición de continuidad.

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función

$$f(x, y, z) = (x^2 y, z + y + z, y\ sin\ z)$$

Solución:

La función f es vectorial, luego será continua en los puntos donde sean tresfunciones coordenadas. Las dos primeras son polinomios, luego son continuas en R^3. La tercera es continua en R^3 porque es producto del polinomio y por la función continua $sin\ z$. Por consiguiente, f es continua en R^3.

4.4- Incrementos de las funciones.

Los incrementos de las funciones se pueden dar de dos formas: parciales ototales. Durante este epígrafe se estarán analizando ambos con el fin de brindaruna visión integral de estos elementos matemáticos que se utilizan con frecuenciaen la administración y la economía.

Incrementos parciales:

Si $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subset\subset \boldsymbol{R} \subset \hat{}\boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{R}$ es una función escalar definida en un abierto $\boldsymbol{D}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{D}$, se denomina función de incrementos parciales de f respecto de la variable x, a la función:

$$\Delta_{xi}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i + \Delta\boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

De esta forma la función de incrementos parciales de una función $\boldsymbol{f}$ respecto a $\boldsymbol{x}_i$ es otra función cuyas variables son las de $\boldsymbol{f}$ más la nueva variable $\Delta\boldsymbol{x}_i$, y permitecalcular el incremento que experimenta $\boldsymbol{f}$ cuando la variable $\boldsymbol{x}_i$ se incrementa enla cantidad $\Delta\boldsymbol{x}_i$. Si se particulariza a un punto $\boldsymbol{x}$, se obtiene una función cuya única variable es $\Delta\boldsymbol{x}_i$.

Ejemplo: Análisis de incrementos parciales en multiproductos.

Una empresa fabrica dos productos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, de modo que su función de beneficios es:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{xy} - 20$$

Donde $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{y}$ son, las cantidades producidas $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{B}$ respectivamente.

1. Calcula las funciones de incrementos parciales $\Delta_x\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{e}$ $\Delta_y\boldsymbol{B}$.
2. La producción actual de la empresa es $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (200,150)$. Calcula las funciones de incrementos parciales para esta producción.
3. La empresa tiene la posibilidad de incrementar en 2 unidades la producción de $\boldsymbol{A}$ o de $\boldsymbol{B}$. Determina cuál de las dos opciones es másconveniente.

Solución:

A. El incremento respecto de x es:

$$\Delta_x B(x,y) = B(x+\Delta x, y) - B(x,y)$$
$$= (x+\Delta x)^2 + 3y^2 - (x+\Delta x)y - 20 - (x_2 + 3y^2 - xy - 20)$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3y^2 - xy - y\Delta x - 20 - x^2 - 3y^2 + xy + 20$$

Llegando a: $\Delta_x\ B(x,y) = (2x-y)\Delta x + \Delta x^2$

De la misma forma se realiza para $\Delta_y B(x,y) = B(x, y+\Delta y) - B(x,y)$, para obtener:

$$\Delta_y B(x,y) = (6y-x)\Delta y + 3\Delta y^2$$

B. Se sustituye $x = 200$ e $y = 150$ en las expresiones anteriores:

$\Delta_x\ B(200,150) = 250\Delta x + \Delta x^2$ $\quad$ $\Delta_x\ B(200,150) = 700\Delta y + 3\Delta y^2$

C. Al aumentar la producción de A $(es\ decir, \Delta x = 2)$, el beneficio se incrementa en

$$\Delta_x\ B(200,150)(2) = 504\ u.m.$$

Mientras que si $\Delta y = 2$ entonces el beneficio se incrementa en

$$\Delta_y B(200,150)(2) = 1\,412\ u.m.$$

Por tanto es preferible incrementar la producción de B.Incrementos totales:
Si f: $D \subset\subset R^n \rightarrow R$ es una función escalar definida en un abierto D y $x \subset D$, se denominafunción de incrementos de f a la función:

$$\Delta f(x) = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots., x\_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots., x_n)$$

De esta manera la función de incrementos de una función f es otra función cuyas variables son las de f más la nueva variable Δx, y permite calcular el incrementoque experimenta f cuando cada variable x_i se incrementa en la cantidad Δx_i. Si se particulariza a un punto p queda una función de las variables Δx_i.

Ejemplo: Continuando con el ejemplo visto anteriormente.

Con el mismo enunciado del ejemplo analizado previamente responda:

Calcula la función de incrementos de $\boldsymbol{B}$.

a) La producción actual de la empresa es $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{200}, \mathbf{150})$. Calcula la función de incrementos para esta producción.
b) La empresa tiene la posibilidad de incrementar en 2 unidades la producción de
c) $\boldsymbol{A}$ y en 1 unidad la de $\boldsymbol{B}$. Determine el incremento de beneficio que obtendrá.

Solución:

a) Aplicando lo conceptualizado:

$$\Delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$
$$= (x + \Delta x)^2 + 3(y + \Delta y)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) - 20 - (x^2 + 3y^2 - xy - 20)$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3(y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2) - (xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) - 20$$
$$- \; x^2 - 3y^2 + xy + 20$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3y^2 \; + 6y\Delta y + 3\Delta y^2 - \; xy - \; x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y - 20$$
$$- \; x^2 - 3y^2 + xy + 20$$

b) La producción actual de la empresa es $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{200}, \mathbf{150})$. La función de incrementos es:

$$\Delta \boldsymbol{B}(\mathbf{200}, \mathbf{150}) = \mathbf{250}\Delta \boldsymbol{x} + \mathbf{700}\Delta \boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + +\mathbf{3}\Delta \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + -\Delta \boldsymbol{x}\Delta \boldsymbol{y}$$

c) Si el vector de incrementos es (□x,□y) = (2,1), el beneficio se incrementa en

$$\Delta \boldsymbol{B}(\mathbf{200}, \mathbf{150})(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = \mathbf{250} * \mathbf{2} + \mathbf{700} * \mathbf{1} + \mathbf{2\hat{}2} + \mathbf{3} * \mathbf{1}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} * \mathbf{1} = \mathbf{1\,205}\ \boldsymbol{u.m.}$$

4.5 Resumen del capítulo. Aplicaciones prácticas en la administración y la economía.

Resumen del capítulo:

Funciones de varias variables.

La función $\boldsymbol{f}$ se representa $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^\wedge\boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{R}$. El conjunto D sobre el que está definida la función $\boldsymbol{f}$ se llama dominio de $\boldsymbol{f}$ y, dado $\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{D}$, el número $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ se llama imagen de $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{f}$. Si una función tiene una interpretación económica, conviene considerarla definida en un conjunto menor que su dominio.

Por ejemplo, la función $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C0}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C0}\ (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{t}}$ es una función escalar cuyo dominio es:

$$\boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{C0}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{t})\boldsymbol{R}^{3} \mid \boldsymbol{i} > -\boldsymbol{1}\}$$

Límites.

Un punto $\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{R}$ es el límite de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ cuando x tiende a $\boldsymbol{p}$ (y se representa por $\lim\limits_{(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l}$) si para todo $\boldsymbol{\epsilon} > \boldsymbol{0}$ existe $\boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{0}$ tal que $si\ \boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{D}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}\ y\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \boldsymbol{\delta}$, entonces $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{l}\| < \boldsymbol{\epsilon}. Si\ \boldsymbol{\epsilon}$ es muy pequeño, la condición $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{l}\| < \boldsymbol{\epsilon}$ significa que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es casi igual a $\boldsymbol{l}$.

Las propiedades de los límites que se plantearon fueron:

1. Para que tenga sentido calcular $\boldsymbol{\lim} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es necesario que $\boldsymbol{p}$ sea un punto de acumulación del dominio de $\boldsymbol{f}$, es decir, que nos podamos acercar a $\boldsymbol{p}$ porpuntos donde esté definida $\boldsymbol{f}$.

2. En la definición sólo se considera el valor de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ en los puntos $\boldsymbol{x}$ cercanos a $\boldsymbol{p}$ distintos del propio $\boldsymbol{p}$, por lo que el límite de una función en un punto $\boldsymbol{p}$ sólo depende de la definición de $\boldsymbol{f}$ en los puntos alrededor de p distintos del propio $\boldsymbol{p}$.

3. Si una función tiene límite en un punto, el límite es único, es decir, una función no puede tener dos límites distintos en el mismo punto.

Continuidad.

Una función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subset\subset \boldsymbol{R} \subset \hat{}\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{R}$ es continua en un punto $\boldsymbol{p} \subset \boldsymbol{D}$ si existe $\boldsymbol{lim}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$.

Se ha de verificar las siguientes propiedades para comprobar que $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{p}$:

1. $\boldsymbol{f}$ está definida en $\boldsymbol{p}$ (es decir, existe $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$).
2. Existe $\lim\limits_{(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p})} \boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$.
3. Se da la igualdad $\lim\limits_{(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p})} \boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$.

La continuidad tiene las propiedades que se mencionan a continuación:

1. La continuidad de una función $\boldsymbol{f}$ en un punto $\boldsymbol{p}$ depende únicamente de los valores que toma $\boldsymbol{f}$ alrededor de $\boldsymbol{p}$.
2. Una función vectorial $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f1}, \ldots, \boldsymbol{f_m})$ es continua en un punto $\boldsymbol{p}$ si y sólo si lo son todas sus funciones coordenadas $\boldsymbol{f_i}$.

Incremento de las funciones.

Las funciones pueden incrementarse de forma parcial o total. En el primer caso,se analiza el incremento desde el punto de vista de las variables de forma puntual,es decir, por separado; en el segundo caso, el incremento es analizado en todaslas variables de la función a la vez, es decir, cómo influye la variación de todas lasvariables en la función.

Si el incremento es parcial se define como: si $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subset\subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{R}$ es una funciónescalar definida en un abierto $\boldsymbol{D}\ y\ \boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{D}$, se denomina función de incrementos parciales de f respecto de la variable x, a la función:

$$\Delta_{xi}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_i} + \Delta\boldsymbol{x_i}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) - \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_i}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$$

En el caso del incremento total se define como: Si $\boldsymbol{f}\!: \boldsymbol{D} \subset\subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{R}$ es una funciónescalar definida en un abierto $\boldsymbol{D}\ y\ \boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{D}$, se denomina función de incrementos de f a la función:

$$\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x_1} + \Delta\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n} + \Delta\boldsymbol{x_n}) - \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$$

Ejercicios relacionados con la administración y la economía:

1. Se estima que la demanda de un producto en un mercado está en función delprecio $\boldsymbol{p}$ y de la renta media r de los consumidores:

$$D(r,p)=\frac{20rp^2}{r^3+p^3}e^{r}/p$$

Actualmente la renta es $\boldsymbol{r}=\mathbf{5}$ usd y el precio es $\boldsymbol{p}=\mathbf{2}$ usd. Determina el dominio matemático de la función $\boldsymbol{D}$ y el subdominio con sentido económico. Estudia lacontinuidad en uno y otro. Calcula la demanda actual del producto, así como elincremento esperado si $\Delta\boldsymbol{p}=\mathbf{1}$. Igual si $\Delta\boldsymbol{r}=\mathbf{1}$. Interpreta el resultado. ¿Cuál seríael incremento si tanto la renta como el precio se duplicaran, es decir, si se pasaraa $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})=(\mathbf{10},\mathbf{4})$? Interprétalo. Calcula $\boldsymbol{D}(\mathbf{5},\mathbf{0.05})$ e interpreta el resultado.

2. Se estima que la función de costes de una empresa es:

$$C(x,y)=150\ ln(3+x+2y)$$

Donde $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{y}$ son las cantidades producidas de los dos artículos que fabrica la empresa. La producción actual es $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\mathbf{100},\mathbf{100})$. Determina el dominio matemático de la función $\boldsymbol{C}$ así como el subdominio con sentido económico. Estudia la continuidad de $\boldsymbol{C}$ en uno y otro. Determina los costes fijos dela empresa y la función de costes variables. Calcula el incremento $\Delta\boldsymbol{C}$ que experimentan los costes si la producción se incrementa en $\Delta\boldsymbol{x}=\mathbf{4}$. Igual si $\Delta\boldsymbol{y}=\mathbf{4}$. Igual si, simultáneamente, $\Delta\boldsymbol{x}=\mathbf{3}$ y $\Delta\boldsymbol{y}=\mathbf{2}$. Escribe el vector de incremento de laproducción en cada uno de los tres casos. Repite el problema suponiendo que elvector de producción actual es $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\mathbf{50},\mathbf{30})$.

3. Una editorial distribuye una enciclopedia y una historia del arte a través de un equipo de 10 vendedores. Cada uno de ellos tiene un salario anual de 7 000usd más una comisión de 30 usd por cada enciclopedia vendida y 35 usd porcada historia del arte. Además, si las ventas anuales conjuntas superan las 2000 unidades el equipo recibe un suplemento de 5 000 usd repartido enproporción a las ventas de cada miembro. Calcula la función de costes anuales $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ que le supone a la editorial su equipo de ventas, donde x e y son las unidades vendidas de la enciclopedia y la historia, respectivamente. Indica su dominio económico y estudia su continuidad. El

beneficio de la editorial (sin contar el coste del equipo) es de 130 usd por cada enciclopedia vendiday de 140 usd por cada historia del arte. Calcula la función de beneficio neto $\boldsymbol{B(x,y)}$ (es decir, descontando el coste del equipo), estudia su continuidad, calcula $\boldsymbol{B(15,20)}$ e interpreta el resultado.

4. La función de costes de una empresa en un instante $\boldsymbol{t}$ (expresado en años) es:

$$\boldsymbol{C(x,y,t) = (100 + 20x + 10y)e^{0'01t}}$$

Donde $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{e}$ y son las cantidades producidas de cada uno de los dos artículosque fabrica.

Calcula el dominio matemático de la función $\boldsymbol{C}$ y el subdominio con sentido económico. Se entiende que $\boldsymbol{t = 0}$ es el año actual, pero la empresa ya existíaen años anteriores.

Suponiendo que la producción no se altera de un año al siguiente, ¿en quéporcentaje aumentará el coste de la producción? (Es decir, se pregunta el porcentaje de aumento que supone pasar de $\boldsymbol{t}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{t+1}$.) En el año actual $t=0$ la producción ha sido $\boldsymbol{(x,y) = (50,30)}$, mientras que para el año siguiente seprevé $\boldsymbol{(x,y) = (51,32)}$. Calcula $\Delta\boldsymbol{C}$ para este periodo.

5. Depositamos un capital de 30 000 usd durante 5 años a un 8% de interés continuo anual. Calcula el capital final y el interés efectivo anual. Calcula el incremento medio anual del capital.

6. Enviar una carta de primera clase tiene un costo de 10 usd por cada gramo ofracción menor. Analice la continuidad de la función de costo $f(x)$ que resultade enviar una carta que pesa x gramos si $\boldsymbol{0 \leq x \leq 8}$.

7. Después de consultar a un matemático, un fabricante sabe que el costo de producir $\boldsymbol{x}$ artículos puede simularse por:

$$\boldsymbol{C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1\,000}$$

- Determine el incremento en el costo cuando el número de unidades se incrementa de 30 a 70.

- Calcule el costo promedio por unidad adicional de incremento en la producción de 40 a 70 unidades.

- Calcule el costo promedio por unidad adicional en el incremento de producción de 70 a 90 unidades.

8. Sea $C(x) = mx + b$ con $m > 0$ y $b > 0$ una función de costo lineal. Verifique que el costo promedio por unidad adicional es siempre el mismo, independientementede los niveles de producción. Ilustre gráficamente.

9. Cuando el precio de cierto artículo es igual a p, el número de artículos quepueden venderse por semana (demanda) está dado por la fórmula:

$$x = \frac{1000}{\sqrt{p+1}}$$

- Determine el incremento de la demanda cuando el precio de incrementa de4 usd a 9 usd.
- Determine el incremento en el ingreso bruto cuando el precio del artículo se incrementa de 1 usd a 4 usd.
- Calcule el incremento promedio del ingreso total por unidad de incremento en el precio cuando éste se incrementa de 1 usd a 9 usd.

10. Durante el período de 1990 a 2010, el producto nacional bruto de cierto país se encontraba dado por la fórmula:

$$I = 5 + 0.1x^2$$

En miles de millones de dólares (x en años y x=0 corresponde al año 1990). Determineel crecimiento promedio del PNB por año entre 2000 y 2005.

Capítulo V: La Derivada.

Contenidos:

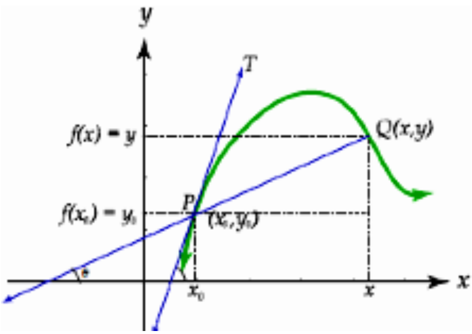
A continuación trataremos uno de los conceptos fundamentales del Cálculo,que es el de la derivada. Esta herramienta tiene muchas aplicaciones en los campos de la administración y la economía, lo que la hace una de los elementos matemáticos más importantes en el presente libro. Este concepto es un límite queestá estrechamente ligado a la recta tangente, a la velocidad instantánea y en general a la razón de cambio de una variable con respecto a otra. Por lo tanto esnecesario comenzar por refrescar brevemente el problema de la tangente.

5.1- El problema de la tangente: un breve repaso.

Muchos de los problemas importantes del análisis matemático puedentransferirse o hacerse depender de un problema básico que ha sido de interés para los matemáticos desde los griegos. Es éste el problema de trazar una rectatangente a una curva dada en un punto específico a ella.

Este problema fue resuelto por métodos especiales en un gran número de ejemplosaislados aún en la temprana historia de las matemáticas. Sin embargo, no fue sino hasta el tiempo de Isacc Newton (1642-1727) y de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que se dio un método general sistemático para obtener la solución.En este sentido se acredita a estos dos hombres la invención del cálculo.

Aunque el problema de la tangente pueda parecer de poco interés a los no matemáticos, el hecho es que las técnicas desarrolladas para resolver el problema son la mera columna vertebral de gran parte de la ciencia y las tecnologías actuales.Por ejemplo, la dirección del movimiento de un objeto a lo largo de una curva en cadainstante se define en términos de la dirección de la recta tangente a la trayectoria de movimiento.



Como al conocer la pendiente de unarecta y un punto de ella, la recta queda completamente determinada, se tieneque el problema de trazar una rectatangente a una curva dada, por unpunto de ésta, se reduce a encontrarla pendiente de la recta.

Considere la representación gráfica de una curva con ecuación $y = f(x)$, donde $f$es una función continua.

Se desea trazar la recta tangente en un punto $P(x_0; y_0)$ dado de la curva. Sea PQ larecta secante que pasa por los puntos $P(x_0; y_0)$ y $Q(x; y)$ de la curva. La pendiente de esta secante, denotada m_s está dada por:

$$m_s = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$$

Como la pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo que forma la rectacon la parte positiva del eje X, y como θes ese ángulo para la recta secante, entonces:

$$m_s = tan\,\theta = f(x) - f(x_0)/(x - x_0)$$

Suponga que existe una recta tangente a la curva en $P(x_0; y_0)$. Sea PT dicha recta. Se mantiene ahora el punto P fijo y se hace que el punto Q se aproxime a P, a lo largode la curva. Cuando esto sucede, la inclinación θ de la recta secante se aproxima ala inclinación de α de la recta tangente, lo que puede escribirse como:

$$\lim_{Q \to P} \theta = \alpha$$

En igual forma, la pendiente de la secante tiende a la pendiente de la tangente,es decir:

$$\lim_{Q \to P} \tan\theta = \tan\alpha$$

Además, cuando Q tiende hacia P, la abscisa x tiende hacia x_0 por lo que:

$$\lim_{Q \to P} \tan\theta = \tan\alpha \to \lim_{x \to x_0} \tan\theta = \tan\alpha \to \lim_{x \to x_0} \tan\theta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan\alpha$$

Si se denota por $m_t(x_0)$ la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(x_0; y_0)$, entonces: $x - x_0$

$$m_t(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Por lo tanto, La pendiente de la recta tangente a la curva con ecuación $y = f(x)$ enel punto $(x_0; y_0)$, denotada $m_t(x_0)$ es igual al límite mencionado previamente,siempre que este límite exista.

Ejemplo: La recta tangente a la curva.

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $f(x) = x^2 - 3x$, en el punto (1,-2). La ecuación de la recta tangente es: $y = mx + b$. Utilizando la definición anterior vamos a averiguar la pendiente en (1,-2).

Solución:

$$m_t(1) = \lim_{x - 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$m_t(1) = \lim_{x - 1} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x - 1}$$

$$m_t(1) = \lim_{x - 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$m_t(1) = \lim_{x - 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1}$$

$$m_t(1) = \lim_{x - 1} (x - 2) = -1$$

Luego $\boldsymbol{m_t(1) = -1}$, por lo que $\boldsymbol{y = -x + b}$. Para averiguar $\boldsymbol{b}$, sustituimos el punto $\boldsymbol{(1; -2)}$
como sigue: $\boldsymbol{-2 = -(1) + b}$ de donde $\boldsymbol{b = -1}$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = -x - 1$.

5.2- Derivada de una función.

Se retoma lo planteado en el epígrafe anterior, donde la a recta tangente a una curva $\boldsymbol{y = f(x)}$ en el punto $[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f(x_0)}]$ ha sido definida como la recta que tiene por pendiente:

$$\mathbf{m_t(x_0) = \lim_{x-x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

En el supuesto caso de que este límite exista.
Cuando este límite existe lo llamamos la derivada de la función f en x_0 y lo detonamos por $\boldsymbol{f'(x0)}$. Es decir:

$$\mathbf{f'(x_0) = \lim_{x-x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Si se hace $\boldsymbol{x - x0 = h}$ *(o sea* $\boldsymbol{x = x0 + h}$*)*, se puede escribir:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{h-0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

A veces se usa $\boldsymbol{\Delta x}$ (incremento de $\boldsymbol{x}$) en lugar *de* $\boldsymbol{h}$ *y* $\boldsymbol{\Delta y}$ en lugar de $\boldsymbol{f(x0 + \Delta x) - f(x0)}$,en cuyo caso:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Entonces ahora se puede definir que si existe:

$$\mathbf{f'(x_0) = \lim_{x-x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \boldsymbol{\lim_{h-0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Se dice que: la función f es derivable en x_0 y que $f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0. Si no existe $f(x_0)$, se puede afirmar que la función f no es derivable en x_0 o bien que lafunción f no tiene derivada en x_0.

La derivada de la función, $f'(x_0\ )$, puede tener otras notaciones para reconocerla:

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|\mathrm{x = x\,0}',\frac{df}{dx}\Big|\mathrm{x = x\,0}',\frac{dy}{dx}\,|\mathrm{x = x\,0}'\,\mathrm{y}'(\mathrm{x}_0)$$

Considerando la definición de la derivada de $y = f(x)$ en $x0$, ya estudiada, se puede plantear que para obtener la derivada de f en $x0$ se tiene que calcular:

1. $f(x_0)\ o\ bien\ f(x_0 + h)$.
2. El incremento de la función: $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$.
3. El cociente de incrementos o cociente diferencial:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

4. El límite del cociente diferencial

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Algunos expertos en el tema a este proceso de cálculo de la derivada de unafunción le llaman "la regla de los cuatro pasos". Esta regla se visualizará mejor mediante el siguiente ejemplo:

Calcular la derivada de la función $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 6x + 7\ en\ x = a$.

Se emplea la igualdad $f'(a) = lim\ \Delta y\ =\ lim\ f(x) - f(a)$
Primer paso: $f(a) = 4a^3 - 5a^2 - 6a + 7$
Segundo paso:

$$\Delta y = f(x) - f(a) = (4ax^3 - 5x^2 - 6x + 7) - (4a^3 - 5a^2 - 6a + 7)$$
$$= 4(x^3 - a^3\ ) - 5(x^2 - a^2\ ) - 6(x - a)$$

Tercer paso:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{4\left(x^3-a^3\right)-5\left(x^2-a^2\right)-6(x-a)}{(x-a)}=4\left(x^2+ax+a^2\right)-5(x+a)-6$$

Para: $x \neq a$

Cuarto paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}4(x^2+ax+a^2)-5(x+a)-6$$

$$=4(a^2+a^2+a^2)-5(a+a)-6=4(3a^2)-5(2a)-6=12a^2-10a-6$$

Entonces,

$f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=12a^2-10a-6$ para cualquier a $\in$ R

5.3- Técnicas de derivación.

La derivada de las funciones elementales se calcula recurriendo directamente a la definición, como en los siguientes ejemplos, aunque en algunos casos los límites indeterminados que aparecen pueden ser complicados de calcular.

Ejemplo A: Derivada de una función constante $f(x)=k$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Ejemplo B: Derivada de $f(x)=x^2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Ejemplo C: Derivada de $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)}-\sqrt{x}}{h}}$$

$$\boldsymbol{=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{(x+h)}-\sqrt{x})(\sqrt{(x+h)}-\sqrt{x})}{h(\sqrt{(x+h)}-\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x)}{h(\sqrt{(x+h)}-\sqrt{x})}}$$

Álgebra de derivadas.

Conocidas las derivadas de las funciones elementales, un conjunto de propiedadesconocidas como álgebra de derivadas, permiten calcular la derivada de otrasfunciones construidas combinando aquellas mediante operaciones aritméticas ycomposición de funciones.

Álgebra de derivadas	
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
$f(x) = g(x) * h(x)$	$f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{h(x)^2}, si\ h(x) \neq 0$
$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(x) * h'(x) \rightarrow (Regla\ de\ la\ cadena)$

Tabla de derivadas de las funciones elementales			
Funciones elementales		**FuncionesCompuestas**	**(Usando Reglade la Cadena)**
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = ag(x)$	$f'(x) = ag'(x)$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$f(x) = ag(x) + b$	$f'(x) = ag'(x)$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = g(x)^2$	$f'(x) = 2g(x)g'(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'x$
$f(x) = x^n\ (n \neq 0)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = g(x)^n$	$f'(x) = ng(x)^{n-1}g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^{g(x)}$	$f(x) = e^{g(x)}g'(x)$
$f(x) = ax\ (a > 0)$	$f'(x) = a^x\ ln(a)$	$f(x) = a^{g(c)}$	$f(x) = a^{g(c)}In(a)g'(x)$
$f(x) = ln(x)$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = ln(g(x))$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x)$
$f(x) = log_b(x)$	$f(x) = \frac{1}{xln(b)}$	$f(x) = log_b(g(x))$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)In(b)} g'(x)$

Es necesario aclarar que con el objetivo de aglomerar en una sola tabla todas las derivaciones de funciones elementales, incluyendo las funciones compuesto que se derivan utilizando la Regla de la Cadena, contenido que se estudiaráposteriormente en este capítulo.

5.4- Derivadas parciales.

Las funciones de incrementos estudiadas en el capítulo anterior suelen ser complicadas. Sin embargo, si se está dispuesto a renunciar a calcular el valor exactode los incrementos de una función y sustituirlo por una aproximación razonable,podemos obtener una fórmula relativamente sencilla.

Sea $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D}\ \boldsymbol{R}^{n} \rightarrow \boldsymbol{R}$ una función escalar definida en un abierto $\boldsymbol{D}$, para cada punto $\boldsymbol{p} \subset \boldsymbol{D}$, se define la derivada parcial de $\boldsymbol{f}$ respecto a la variable $\boldsymbol{x_i}$ en el punto $\boldsymbol{p}$ como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} | \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{xi}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})}{\Delta \boldsymbol{x_i}} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}_1, \ldots \boldsymbol{p}_i + \Delta \boldsymbol{x}_{i,} \ldots \boldsymbol{p}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)}{\Delta \boldsymbol{x_i}}$$

Se observa ante todo que una derivada parcial es un límite y, por lo tanto, no tienepor qué existir. En el supuesto de que exista, de acuerdo con la interpretación del límite vista en el tema anterior, se tiene que si $\Delta \boldsymbol{x}_i$ es suficientemente pequeño,entonces:

$$\frac{\Delta_{xi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})}{\Delta \boldsymbol{x}_i} \approx \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_i} | \boldsymbol{p} \Delta_{xi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) \approx \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_i} | \boldsymbol{p} \Delta \boldsymbol{x}_i$$

Esta fórmula contiene la interpretación de las derivadas parciales. Para enunciarla matemáticamente conviene introducir el vocabulario usual en economía: "Una unidad marginal de una magnitud es una unidad pequeña en comparación con el valor que toma dicha magnitud. Un incremento marginal de una magnitud es un incremento pequeño en comparación con el valor que toma dicha magnitud."

En la mayoría de los ejemplos que se van a considerar será fundamental que lasunidades consideradas sean marginales. Por ejemplo, si la inversión de una empresaen producción es del orden de varios miles de dólares, se podrá tomar como unidad monetaria (marginal) para estudiarla un centenar de dólares, mientras que si queremos estudiar el gasto mensual de cierta familia (por ejemplo, del orden de 300 usd), un centenar de dólares no servirá como unidad marginal, pero sí servirá,en cambio, un dólar. En estos términos, la interpretación de la fórmula anterior es:

"La derivada parcial de una función $\boldsymbol{f}$ respecto de una variable $\boldsymbol{x}$ en un punto $\boldsymbol{p}$ representa el incremento que experimenta $\boldsymbol{f}$ por cada unidad marginal queaumenta la variable $\boldsymbol{x}$ alrededor del punto $\boldsymbol{p}$ (suponiendo que las demás variablesno se alteran).

Sea f: $\boldsymbol{D} \subset \subset \boldsymbol{R}^{n} \rightarrow \boldsymbol{R}$ una función vectorial definida en un abierto $\boldsymbol{D}$, dado $\boldsymbol{p} \subset \boldsymbol{D}$, sedice que f es derivable en $\boldsymbol{p}$ si existen las derivadas parciales respecto de todas las variables de sus funciones coordenadas, es decir existen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p), i = 1, \dots n, j = 1, \dots m \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = (\frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \dots \frac{\partial f_m}{a x_i}(p))$$

Si una función tiene derivada parcial respecto de una variable en todos los puntosde su dominio, entonces la derivada parcial es otra función con las mismas variables:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: \mathrm{D} \subset \quad [\![\mathrm{R}^n \rightarrow R$$

Como la función que a cada punto $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{D}$ le asigna la derivada parcial de $\boldsymbol{f}$ respectode $\boldsymbol{x_i}$ en dicho punto.

Continuando con el ejemplo analizado en el epígrafe sobre los incrementos en las funciones, trabajándolo sobre la base de lo visto en este epígrafe.

Ejemplo: Calcula las derivadas parciales de la función de beneficios

$$\boldsymbol{B(x,y) = x^2 + 3y^{\,2} - xy - 20}$$

Solución:

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{y}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x \mathrm{B}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6y - x)\Delta y + 3\Delta y^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x - y + \Delta x = 2x - y$$

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{y}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y \mathrm{B}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(6y - x)\Delta y + 3\Delta y^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} 6y - x + 3\Delta y = 6y - x$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial B}{\partial y}|(200,150) = 250 \qquad \frac{\partial B}{\partial y}|(200,150) = 700$$

De acuerdo con la interpretación de la derivada, un incremento de 2 unidades en la producción de A produce un incremento de beneficios de

$$\Delta_x B\,(200,150)(2) \approx \partial B_{(200,150)}\frac{\Delta x}{\partial x} = 250 * 2 = 500\, u.m.$$

Mientras que el mismo incremento en la producción de B da lugar a un incrementode los beneficios de

$$\Delta_x B\,(200,150)(2) \approx \frac{\partial B}{\partial y}(200,150)\,\Delta y = 700 * 2 = 1\,400\, u.m.$$

Estas estimaciones no son exactas, pues los incrementos exactos se calcularon en el último epígrafe del capítulo anterior y eran de 504 y 1 412 $u.m.$ respectivamente,pero se observó que la aproximación con las derivadas parciales es buena y, como severá enseguida, es mucho más fácil de calcular.

Al comparar la definición de derivada parcial con la definición de derivada de una función de una variable se llega fácilmente a la siguiente conclusión: "La derivada parcial de una función f respecto de una variable x_i puede calcularse con las mismasreglas de derivación válidas para funciones de una variable sin más que considerar como constantes a las demás variables de f."

5.5- Derivadas en la administración y la economía.

En economía es frecuente referirse a la derivada de una magnitud añadiéndole aesta el calificativo "marginal". Por ejemplo, si $C(x, y)$ es una función de costes, donde x e y son las cantidades producidas de dos artículos, la derivada $\partial C / \partial x$, es el coste marginal respecto de x, es decir, el (incremento del) coste que ocasionaría aumentar en una unidad la producción del primer artículo.

Igualmente, si $B(t)$ son beneficios de una empresa en un tiempo t, entonces el beneficio marginal es dB/dt, que se interpreta como el beneficio que se obtiene alpasar una unidad (marginal) de tiempo.

Si $\boldsymbol{U(x,y)}$ es la utilidad que obtiene un consumidor al adquirir cantidades $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{e}$ y dedos productos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, entonces la utilidad marginal respecto de $\boldsymbol{y}$ es la derivada $\boldsymbol{\partial U}/_{\boldsymbol{\partial y}}$, es decir, (el incremento de) la utilidad que obtendría el consumidor al gastar una unidad monetaria más en el producto $\boldsymbol{B}$, entre otras. Es importante señalar que ´estas y todas las interpretaciones específicas del adjetivo "marginal"en su uso en economía son casos exclusivos de la interpretación general de las derivadas parciales.

A menudo se usa la palabra "acumulado" por oposición a "marginal". Por ejemplo,si se dice que el beneficio acumulado por una empresa en un tiempo $\boldsymbol{t}$ (expresadoen años) es $\boldsymbol{B(t) = 50\,000\ ln\ (1+t) usd}$, esto significa que en su primer año seobtuvo $\boldsymbol{B(1) = 34657\ usd}$, en los dos primeros años $\boldsymbol{B(2) = 54930\ usd}$ (con lo que el beneficio acumulado durante el segundo año únicamente fue de $\boldsymbol{B(2) - B(1) = 20\,273\ usd}$, etc. Por otra parte, el beneficio marginal será:

$$\boldsymbol{B_m(t) = \frac{50\,000 usd/\text{año}}{1+t}}$$

Lo cual significa que la empresa comenzó acumulando beneficios a un ritmo de $\boldsymbol{Bm(0) = 50\,000\ usd/\text{año}}$, pero al final de su primer año la tasa de incrementode los beneficios se había reducido a $\boldsymbol{Bm(1) = 25000\ usd/\text{año}}$, entre otros. Es frecuente que no se especifique si una función corresponde a cantidadesacumuladas o marginales, pues esto puede deducirse de las unidades: si sehabla de unos beneficios de $\boldsymbol{5\,000t\ usd}$ hay que entender que son beneficios acumulados, pero si dicen $\boldsymbol{5\,000t\ usd/\text{año}}$ entonces han de ser beneficios marginales.

En general, las unidades de una derivada $\boldsymbol{\partial f}/_{\boldsymbol{\partial x}}$ son unidades de $\boldsymbol{f}$ con respecto a la unidad de $\boldsymbol{x}$. Por ejemplo, un coste o una utilidad marginales se expresa en unidades monetarias/unidad de producto, entre otros.

Es necesario recordar que un incremento puede representar un aumento o unadisminución según sea su signo positivo o negativo. Como consecuencia: "La derivadade una función $\boldsymbol{f}$ respecto de una variable $\boldsymbol{x_i}$ será positiva si un aumento de $\boldsymbol{x}$ da lugara un aumento de $\boldsymbol{f}$, y será negativa si, por el contrario, un aumento de $\boldsymbol{x}$ da lugar auna disminución de $\boldsymbol{f}$."

Por ejemplo, en condiciones normales, la derivada de la demanda de un producto respecto de su precio será negativa, pues un aumento del precio da lugar a unadisminución de la demanda. Sin embargo, la derivada de la demanda respecto al gasto en publicidad será positiva, pues un aumento del gasto publicitario da lugar aun aumento en la demanda.

Introduciéndonos en el tema de los incrementos porcentuales, Si una función $\boldsymbol{F}$ depende (entre otras) de la variable $\boldsymbol{x}$, la derivada $\boldsymbol{\partial F}/_{\boldsymbol{\partial x}}$ representa el incremento absoluto que produce en $\boldsymbol{F}$ un incremento de una unidad en $\boldsymbol{x}$, aunque a menudo es más útil determinar el incremento relativo al valor de $\boldsymbol{F}$, es decir, es más informativosaber que el paro ha descendido en un 2% que no saber cuántos parados menos hay.Para obtener un incremento porcentual basta con observar en lugar de tomar el valorde $\boldsymbol{F}$ como el 100%, la derivada anterior supone un porcentaje de

$$\Delta_{\%}\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{100}}{\boldsymbol{F}}\frac{\boldsymbol{\partial F}}{\boldsymbol{\partial x}}$$

Si no se pone el 100 se tendrá el tanto por ciento de incremento. Por ejemplo, la tasa de crecimiento porcentual de un capital sujeto a un interés continuo $\boldsymbol{i}$ respecto del tiempo, es decir, la tasa de crecimiento porcentual de la función $\boldsymbol{C = C0\ e^{it}}$ respecto de $\boldsymbol{t}$, es

$$\frac{\boldsymbol{100}}{\boldsymbol{C}}\frac{\boldsymbol{\partial C}}{\boldsymbol{\partial x}} = \frac{\boldsymbol{100}}{\boldsymbol{C_o e^{it}}}\boldsymbol{iC_o e^{it} t = 100i}$$

Si no se pone el 100, se concluye que i es el tanto por uno de incremento que experimenta el capital en cada instante. Más concretamente: "El interés continuo esel interés generado por cada unidad de capital en una unidad marginal de tiempo."

Hay casos en que la disparidad entre las unidades de la función y de la variable hacen aconsejable considerar otro índice de crecimiento relativo. Por ejemplo, si $\boldsymbol{D}$ es la demanda de un producto y $\boldsymbol{p}$ es su precio, un valor grande (normalmente negativo) para $\boldsymbol{\partial D}/_{\boldsymbol{\partial p}}$ indicará que una pequeña variación en el precio provoca una gran variación en la demanda, mientras que un valor pequeño de la derivada indica que la demanda apenas se altera por la variación del precio.

Ahora bien, se ha de tener presente que no se puede estimar si la derivada es grande o pequeña sin tener en cuenta las unidades que se están considerando,principalmente porque la demanda vendrá dada en unidades de producto y el precio en unidades monetarias.

Para evitar este inconveniente lo usual es considerar incrementos relativos tantode la variable como de la función. Es decir, suponga que el precio del artículo seincrementa en un 1%. Esto significa que:

$$\Delta\Delta\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{100}}$$

De acuerdo con la interpretación de la derivada, el incremento que esto ocasionaráen la demanda será de aproximadamente

$$\Delta D = \frac{\partial D}{\partial p}\frac{p}{100}$$

¿Qué porcentaje de la demanda supone este incremento? La respuesta es:

$$\frac{100\Delta D}{D} = \frac{100}{D}\frac{\partial D}{\partial p}\frac{p}{100} = \frac{p}{D}\frac{\partial D}{\partial p} = E(D,p)$$

Este valor recibe el nombre de elasticidad de la función D respecto de la variable p (hay quien lo define con un signo negativo para que sea positiva en el caso dela demanda/ precio) y, según se acaba de ver, representa el porcentaje en que seincrementa la función D por cada 1% que se incrementa la variable p. Este valor esindependiente de las unidades en que se expresen D y p. Este término económico está muy familiarizado con las materias de microeconomía y macroeconomía.

Por ejemplo, la elasticidad respecto del tiempo de un capital sujeto a un interés continuo i es

$$E(C,t) = \frac{t}{c}\frac{\partial C}{\partial t} = it$$

Esto se interpreta como que, cuanto más tiempo pasa, el incremento del capital sevuelve más sensible al paso del tiempo.

5.6- Composición y homogeneidad de funciones.

En este epígrafe se estarán analizando las funciones compuestas y las funciones homogéneas. Ambos tópicos permitirán comprender en toda su magnitud las funciones compuestas mostradas en la tabla de las derivaciones y sus derivadas.

Composición de funciones.

Si $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{n} \rightarrow \boldsymbol{R}^{m}$ y $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{R}^{m} \rightarrow \boldsymbol{R}^{k}$ son funciones tales que $\boldsymbol{f}\,[\boldsymbol{A}] \subset \boldsymbol{B}$, se define como función compuesta $\boldsymbol{g} \ \boldsymbol{o} \ \boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R}^{n} \rightarrow \boldsymbol{R}^{k}$ como la función dada por $(\boldsymbol{g} \ \boldsymbol{o} \ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}))$.

Expresado de otra forma, $\boldsymbol{g} \ \boldsymbol{o} \ \boldsymbol{f}$ es la función que a cada punto x le asigna el resultadode aplicar $\boldsymbol{f} \ a \ \boldsymbol{x}$ y después aplicar g al resultado $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Ejemplo: Demanda

La demanda de una empresa está dada por la función:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \frac{\mathbf{50}}{\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2} = \frac{\mathbf{50}}{(\mathbf{3}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)(\mathbf{3}\boldsymbol{q}_1 + \mathbf{2}\boldsymbol{q}_2)}$$

En la práctica, calcular una composición de funciones consiste en sustituir unas funcionesen otras. Es muy importante no confundir la función $\boldsymbol{D}\ (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ con la función compuesta $\boldsymbol{D}\ (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$. Es frecuente que se use el mismo nombre para ambas (en este caso $\boldsymbol{D}$), y entoncesse distinguen por las variables.

Para ver la relación entre el ejemplo anterior y la definición previa se ha de considerar lasfunciones $\boldsymbol{q}_1$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{q}_2$ comolascomponentesdeunafunciónvectorial $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$,deformaque:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\,) = (\mathbf{3}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_1 + \mathbf{2}\boldsymbol{q}_2)$$

El dominio es $\boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \boldsymbol{q}_1 > \mathbf{0}, \boldsymbol{q}_2 > \mathbf{0}\}$, pues no tiene sentido considerar precios menores o iguales que 0. A su vez, la función de demanda $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\,)$ es una función $\boldsymbol{D}: \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}$, donde $\boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\,) \in \boldsymbol{R}^n \mid \boldsymbol{p}_1 > \mathbf{0}, \boldsymbol{p}_2 > \mathbf{0}.\}$, La función $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ es, en términos de la conceptualización de la función compuesta, la función $D \ o$ $\boldsymbol{f}$. Para calcular $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ se aplica primero $\boldsymbol{f} \ a \ (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ para obtener $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ y luego $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ para obtener la demanda correspondiente.

Regla de la Cadena: sean $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^m \rightarrow \boldsymbol{R}^n$ y $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}^k$ dos funciones definidas en abiertos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ tales que $\boldsymbol{f}\,[\boldsymbol{A}] \in \boldsymbol{B}$. Suponga que $\boldsymbol{f}$es diferenciable en un punto$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{A}$ y que $\boldsymbol{g}$ es diferenciable en $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{g}$ o $\boldsymbol{f}$es diferenciable en $\boldsymbol{p}$ y:

$$\boldsymbol{d}\,(\boldsymbol{g} \ \boldsymbol{o} \ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{p})) * \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$$

Ejemplo: Beneficios estimados.

Una empresa estima que sus beneficios vienen dados por la función:

$$\boldsymbol{B(t,p) = \frac{4 + 0.2t}{\sqrt{p^2 - 5}}}$$

Donde el numerador es una estimación de la demanda futura en función deltiempo $\boldsymbol{t}$ y el denominador es una corrección en función del ***IPC*** p. El tiempoactual es ***t=1*** y el ***IPC*** es $\boldsymbol{p = 3}$ usd. No hay ninguna previsión fiable de la evolucióndel ***IPC***, pero la empresa estima que en la actualidad

$$\boldsymbol{\frac{dp}{dt}|1 = 0.2}$$

Según estas estimaciones, ¿los beneficios de la empresa van a aumentar o adisminuir a corto plazo?

Solución: Puesto que la función de beneficios depende del tiempo y del ***IPC*** el cual, a su vez, depende del tiempo, se puede asegurar que existe una función (compuesta) en la que los beneficios dependen del tiempo como única variable.

En consecuencia, se puede establecer una función compuesta del modo siguiente:

$$\boldsymbol{(B\ o\ f)\ (t)\ =\ B(t)}$$

Se conoce explícitamente la expresión de $\boldsymbol{B(t,p)}$ y se sabe que el momento actual se corresponde con $\boldsymbol{t = 1}$ *y* $\boldsymbol{p = 3}$. Sin embargo, en la expresión de $\boldsymbol{f}$ sólo se conoce la primera función coordenada. De la segunda función coordenada no se conoce su expresión pero se sabe que:

$$\boldsymbol{\frac{dp}{dt}|1 = 0.2 \qquad y \qquad p(1) = 3}$$

Para responder a la pregunta del problema se necesita conocer $\boldsymbol{\frac{dB}{st}}$ $|\boldsymbol{1}$, es decir, la derivada de la función compuesta. Claramente:

$$\boldsymbol{\frac{dB}{dt}(1) = \frac{\partial B}{\partial t}(1,3)\frac{dt}{dt}(1) + \frac{\partial B}{\partial t}(1,3)\frac{dp}{dt}(1)}$$

Se sustituyen los valores de las derivadas:

$$\frac{dB}{dt}(1) = 0.1 * 1 - 1.575 * 0.2 = -0.215$$

Por tanto, a corto plazo los beneficios de la empresa disminuirán.

Si se hubiese calculado $\partial B / \partial t\ (t, p)$ no se estaría respondiendo a la pregunta porqueesta derivada nos indica la variación de los beneficios con el tiempo suponiendoconstante el ***IPC***. Puesto que en el problema aseguran que el ***IPC*** depende del tiempo, ésta última hipótesis es falsa.

Homogeneidad de funciones.

Una función $f: D \subset R^n \to R$ definida en un abierto D es homogénea de grado $m \subset R$ para todo $x \subset D$ y todo $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \subset D$ se cumple que $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$.

Sean $f, g: D \subset R^n \to R$ funciones definidas en un abierto D. Entonces:

1) Si f y g son homogéneas de grado m, entonces $f + g$ también es homogénea de grado m.
2) Si f es homogénea de grado m y $\alpha \subset R$, entonces αf también es homogéneade grado m.
3) Si f es homogénea de grado m y g es homogénea de grado r, entonces fg es homogénea de grado $m + r$.
4) Si f es homogénea de grado m, g es homogénea de grado r y g no se anula en D, entonces f/g es homogénea de grado $m - r$.
5) Si f es de clase C^1 *en* D y es homogénea de grado m, entonces sus derivadasparciales son homogéneas de grado $m - 1$.

Con relación a este tema, de las funciones homogéneas hay dos aplicacionesrelevantes en la administración y la economía.

Ejemplo I: La ilusión monetaria

Suponga que ante un aumento en su salario, un trabajador piensa que ha aumentado su renta y esto provoca un incremento en su consumo. Sin embargo,si los precios han aumentado en la misma proporción (o mayor) que el salario, la renta real del trabajador no ha aumentado y en este caso se dice que estáafectado por la ilusión monetaria.

Con mayor formalidad, suponga un mercado con n bienes de precios $\boldsymbol{p1, p2, \ldots p_m}$.Para un consumidor determinado con una renta $\boldsymbol{R}$, la demanda del bien $\boldsymbol{i}$ viene dada por la función:

$$\boldsymbol{x_i = x_i(p_1, p_2, \ldots p_m, R)}$$

Si los precios y la renta varían en una proporción $\boldsymbol{\lambda}$, los consumidores no sufriránilusión monetaria si:

$$\boldsymbol{x_i\,(\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots \lambda p_m, \lambda R) = x_i\,(p_1, p_2, \ldots p_m, R) = \lambda^0\, x_i(p_1, p_2, \ldots p_m, R)}$$

Eso significa que si las funciones de demanda son homogéneas de grado 0, no seda la ilusión monetaria.

Ejemplo II: Rendimientos a escala.

Se considera una función de producción $\boldsymbol{Q(x1, x2, \ldots xn\,)}$ donde $\boldsymbol{x_i}$ es el i-enésimo factorproductivo. Suponga que $\boldsymbol{Q}$ es una función homogénea de grado $\boldsymbol{m}$, es decir se cumple que:

$$\boldsymbol{Q(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n) = \lambda^m Q(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

Donde $\boldsymbol{\lambda}$ representa la proporción en la que varían los factores productivos y se denomina factor de escala, donde es claro que:

1) Si $\boldsymbol{m = 1}$ la producción y los factores productivos aumentan en la misma proporción. En este caso se dice que hay rendimientos a escala constantes.
2) Si $\boldsymbol{m > 1}$ la producción aumenta más que los factores productivos. En este caso se dice que hay rendimientos a escala crecientes.
3) Si $\boldsymbol{m < 1}$ la producción aumenta menos que los factores productivos. En este caso se dice que hay rendimientos a escala decrecientes.

5.7- Aplicación práctica de la optimización de funciones.

La optimización de funciones es un término económico que se relaciona con la obtención de máximos y mínimos, es decir, el punto más alto de la curva o lo más bajo. Para el hallazgo de estos máximos y mínimos es necesario que se lleven a cabo dos condiciones que utilizan las derivadas como eje central de llegar a su resolución:

- <u>Condición de primer orden para el máximo o el mínimo:</u> Para que una función deuna variable alcance su valor máximo o valor mínimo en un punto, la derivadaen ese punto (si existe) debe ser 0.

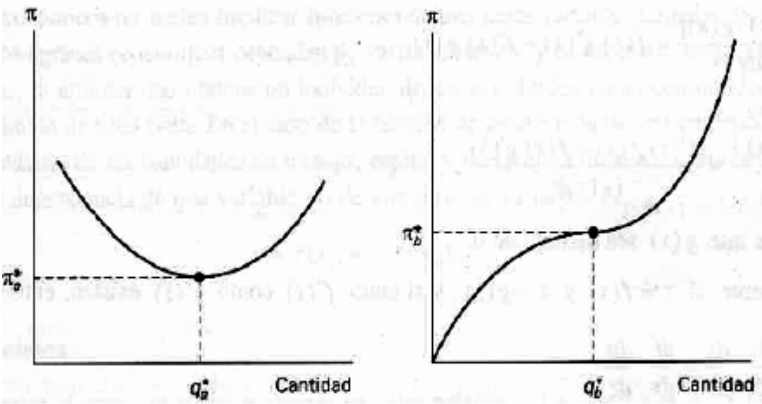
- <u>Condición de segundo orden:</u> La condición de primer orden es una condición necesaria para alcanzar un máximo, pero no es una condición suficiente. Para garantizar que el punto elegido es, en efecto, un punto máximo, se debe imponer una segunda condición, la segunda derivada.

A continuación se irá profundizando en la teoría y cálculo de ambas condiciones,haciendo hincapié en la condición de segundo orden.

Si un directivo de una empresa fuera capaz de estimar la función $\boldsymbol{f(q)}$, donde lavariable $\boldsymbol{q}$, es la cantidad producida, teóricamente sería posible encontrar el punto en el que $\boldsymbol{{}^{df}/_{df}} =$ **0** En este punto óptimo (por ejemplo $\boldsymbol{q^*}$), se cumpliría que:

$$\frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{d1}}|\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} *= \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{condición\ de\ primer\ orden}\ (\boldsymbol{CPO})$$

Sin embargo, un directivo no experimentado podría llamarse al engaño si aplicarade forma ingenua sólo esta regla. Por ejemplo, suponga que la función beneficiostiene la forma de los gráficos que se muestran a continuación, donde ω son los beneficios recibidos:



Si la función beneficios es la que se muestra en el gráfico de la izquierda, entonces el directivo, al producir $\boldsymbol{d\pi}/\boldsymbol{dq} = \mathbf{0}$ elegiría el punto q_a*. Este punto constituye un mínimo y no un máximo, de los beneficios. Análogamente, si la función de beneficios es la que se muestra en el gráfico de la derecha, entonces elegiría el punto $\boldsymbol{q_b}*$, que, aunque ofrece un beneficio superior al de cualquier nivel de producción inferior a $\boldsymbol{q_b}^*$, es sin duda, inferior a cualquier producción superior a $\boldsymbol{q_b}^*$.

Estas situaciones indican que el hecho matemático de que $\boldsymbol{d\pi}/\boldsymbol{dq} = \mathbf{0}$ es una condición necesaria para alcanzar el óptimo, pero no es una condición suficiente. Para garantizar que el punto elegido sea un punto máximo, se debe imponer una segunda condición.

Intuitivamente, esta condición es evidente: el beneficio disponible produciendo, o bien un poco más o bien un poco menos que $\boldsymbol{q}^*$, debe ser menos que el que seobtiene con $\boldsymbol{q}^*$. Si esta condición no se cumple, el directivo podrá buscar un nivel deproducción mejor que $\boldsymbol{q}^*$. Matemáticamente, esto significa que $\boldsymbol{d\pi}/\boldsymbol{dq} < \mathbf{0}$ cuando $\boldsymbol{q} > \boldsymbol{q}^*$ y debe ser $\boldsymbol{d\pi}/\boldsymbol{dq} < \mathbf{0}$ cuando $\boldsymbol{q} > \boldsymbol{q}^*$. Por tanto, en $\boldsymbol{q}^*$, $\boldsymbol{d\pi}/\boldsymbol{dq}$ debe estar disminuyendo. Otra manera de decir lo mismo es que la derivada de $\boldsymbol{d\pi}/\boldsymbol{dq}$ debe ser negativa en $\boldsymbol{q}^*$.

Segunda derivada de una función.

La derivada de una derivada se denomina segunda derivada y se escribe como:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} \, o \, \frac{d^2 f}{dq^2} \, o \, f''(q)$$

La condición adicional para que q^* represente un máximo (local) es por tanto:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2}|q = q *= f''(q)|q = q *< 0 \text{ condición de segundo orden } (CSO)$$

De aquí que, aunque la ecuación ${d\pi}/{dq} = 0$ es una condición necesaria para alcanzar un máximo o un mínimo, esa ecuación debe combinarse con la ecuación ${d^2\pi}/{dq^2} < 0$ para garantizar que el punto es un máximo o mínimo local de la función. Por tanto, ambas ecuaciones son condiciones suficientes para alcanzar este máximo o mínimo.

Ejemplo: Maximización de beneficios.

Suponga que la relación entre beneficios *(π)* y cantidad producida *(q)* viene dadapor:

$$\pi = 1\,000q - 5q^2$$

El valor de q que maximiza los beneficios se puede calcular aplicando la derivación de funciones cuadráticas:

$${d\pi}/{dq} = 1000 - 10q = 0(CPO)q *= 100$$

En q=100 la ecuación muestra que los beneficios son iguales a 50 000 usd, el mayor valor posible. Si, por ejemplo, la empresa decidiera producir $q = 50$, los beneficios serían iguales a 37 500 usd y en $q = 200$, los beneficios serían iguales a cero.

El que $q = 100$ es el máximo "global" se puede demostrar calculando la segunda derivada de la función beneficios:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = 10(CSO)$$

De aquí que la tasa de crecimiento de los beneficios disminuya; hasta ***q=100*** estatasa de crecimiento sigue siendo positiva, pero por encima de este nivel pasa a ser negativa. En este ejemplo, $q = 100$ es el único valor máximo local de la función ω. Sin embargo, con funciones más complejas, puede haber varios máximos y mínimos.

Segunda derivada parcial de una función.

Como mismo se ha estudiado la segunda derivada de una función, es necesario analizarla segunda derivada parcial de una función. La derivada parcial de una derivada parciales directamente análoga a la derivada segunda de una función de una variable y sedenomina derivada parcial de segundo orden y se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{ij}$$

Por lo general, el orden en que se calculan las derivadas parciales para calcularderivadas parciales de segundo orden no importe. Es decir,$f_{ij} = f_{ji}$ para cualquierpar de variables x_i, x_j. A este resultado se le conoce a veces como el "teorema de Young". Esta capacidad de la segunda derivada parcial ofrece una forma muy fácil de mostrar predicciones que realizan los modelos económicos sobre elcomportamiento.

Optimización de funciones con varias variables.

Empleando derivadas parciales, se puede analizar ahora la optimización de funcionescon varias variables. Suponga que un agente quiere encontrar un conjunto x que maximice el valor de $y = f(x_1, x_2, \ldots .. x_n)$. El agente puede intentar maximizar sólo una delas variables, digamos que x_1, al tiempo que mantiene constantes todas las demás. Lavariación de y (es decir, dy), que se derivaría de una variación de x_1 viene dada por:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 = f_1 dx_1$$

Esta expresión afirma que la variación de y es igual a la variación de x_1 por la pendiente calculada en la dirección de x_1.

Si varían todas las variables independientes en una pequeña cuantía, el efecto totalsobre la suma de todos los efectos. Por tanto, la variación total de y se define como:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots f_n dx_n$$

Esta expresión se denomina derivada total de fy es directamente análoga a laexpresión del caso de una variable.

Al igual que con las funciones de una sola variable, una condición necesaria paraun óptimo de una función $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ es que $dy = 0$ para cualquier combinación de pequeñas variaciones de las variables independientes. La única forma de que se cumpla esta condición es que, en el punto analizado $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$. El puntoen el que se cumple esta ecuación se denomina punto crítico. Se podría encontrar este punto máximo (o mínimo) encontrando un punto donde y no reacciona a movimientos muy pequeños de cualquiera de las variables independientes. Esteresultado es extremadamente importante para el análisis económico ya que afirmaque cualquier actividad podría llevarse al punto en que su contribución marginal al objetivo es cero. Si se detuviera antes de ese punto, no se lograría optimizar y.

Para las funciones con varias variables, las condiciones de primer orden mencionadas tampoco son suficientes para garantizar el máximo o el mínimo se necesita unacondición de segundo orden similar a la estudiada con las funciones de una variable,para garantizar que el punto calculado utilizando la ecuación $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$que es un máximo local. Como en el caso de una única variable, esto implica necesariamente fijarse en las derivadas parciales de segundo orden de la función f. Estas parciales de segundo orden deben cumplir determinadas restricciones (iguales a la restricción derivada en el caso de una única variable) para que el punto crítico calculado con la ecuación $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$ sea un máximo local.

Maximización con restricciones.

Hasta ahora se ha centrado el foco en calcular el valor máximo de una función sin restringir las elecciones sobre las x disponibles. En muchas ocasiones, por ejemplo se exigen todas las variables independientes positivas. Este requisitose cumpliría para el problema de un empresario que elige el nivel de producciónque maximiza sus beneficios, por lo tanto no tendría sentido un nivel productivonegativo. En otros casos, los valores de las x pueden estar restringido por cuestiones económicas, como es el caso de cuando se eligen los artículos quese van a consumir porque el individuo no puede elegir cualquier cantidad que desee; por el contrario, sus elecciones están restringidas por su poder adquisitivodisponible, es decir, su restricción presupuestaria. Estas restricciones pueden reducir el valor óptimo de la función que se quiere optimizar.

Un método para resolver los problemas de optimización con restricciones es elmétodo del multiplicador lagrangiano, que utiliza un inteligente truco matemáticoque también tiene una interpretación económica útil. La racionalidad de este métodoes bastante sencilla, aunque aquí no se intentará hacer presentaciones rigurosas.

Suponga que se quiere calcular los valores $de\ x_1, x_2, \ldots \ldots x_n$ que maximizan $y = f(x_1, x_2, \ldots \ldots x_n)$ sujeta a una restricción que sólo permite utilizar determinados valores de las x. Una forma general de escribir esta restricción es $g\ (x_1, x_2, \ldots \ldots x_n) = 0$, dondela función g representan la relación que debe cumplirse en las x.

Para el cálculo de la ***CPO***, el método del multiplicador lagrangiano parte de la formulación de la expresión $L = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ donde λ es una variable adicional denominada multiplicador lagrangiano. Si se restringe la atención exclusivamente a los valores de x que cumplen la restricción, el cálculo del valormáximo (o mínimo) restringido de f es equivalente al cálculo del valor crítico de L. Entonces se procederá a este cálculo, considerando que λ es también una variable independiente:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1 = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2 + \lambda g_2 = 0, \ldots \frac{\partial L}{\partial x_n} = f_n + \lambda g_n = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_{1,} x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Estas ecuaciones son las condiciones para obtener un punto crítico de la función L. Observe que hay $n + 1$ ecuaciones y $n + 1$ incógnitas. Las ecuaciones se pueden resolver, por lo general, para $x1, x2, \ldots \ldots x_n$ y para λ. Esta solución tiene dos propiedades:

1. Las x cumplirán la restricción por la ecuación anterior impone esta condición.

2. Entre todos aquellos valores de x que satisfacen la condición, aquellos que también satisfagan las ecuaciones anteriores harán que $L\ (y\ por\ tanto\ f)$ sea lo más grande posible (suponiendo que se cumplen la CSO).

Solo en el caso de que la restricción sea ineficaz (en cuyo caso, $\boldsymbol{\lambda}$ es cero) se obtendrála misma solución para las ecuaciones restringidas y sin restringir, ya que seríanlas mismas. Estas condiciones marginales tienen una interpretación económica en muchas situaciones distintas.

El multiplicador lagrangiano tiene una aplicación en los análisis económicos cuando se relacionan coste-beneficio. Utilizando la interpretación económica de este término:

$$\frac{f_1}{-g_1} = \frac{f_2}{-g_2} = \cdots = \frac{f_n}{-g_2} = \lambda$$

Donde en el punto máximo, el cociente f_i respecto a g_i es el mismo para cada x_i. Perolos numeradores de las fracciones son simplemente las contribuciones marginales de cada x a la función f. Muestran el beneficio marginal que tendrá una unidad más

de x_i en la función que se está intentando maximizar. Traducido esto para la relación coste-beneficio, indica que, para los valoresóptimos de las x, el cociente del beneficio marginal de incrementar x_i frente al coste marginal de incrementar x_i debería ser el misma para cada x. A la luz de esteanálisis el multiplicador lagrangiano es:

$$\lambda = \frac{beneficio\ marginal\ x_i}{coste\ marginal\ x_i}$$

Si se relajara ligeramente la restricción, no importaría cuál de las x cambiara puesto que, en el margen, cada una ofrece el mismo cociente de beneficios respecto a los costes. El multiplicador lagrangiano ofrece pues un indicador de cómo afectaría esta relajación general de la restricción al valor y. En esencia, λ asigna un preciosombra a la restricción.

El análisis anterior indica que hay una clara relación entre el problema de maximizar una función sujeta a restricciones y el problema de asignar valores alas restricciones. Esto refleja lo que se conoce como el principio matemático de ladualidad: cualquier problema de maximización con restricciones tiene asociado un problema de minimización con restricciones del problema original.

Condiciones de segundo orden.

Hasta ahora la optimización se ha centrado principalmente en las condiciones necesarias ***(CPO)*** para encontrar el máximo. Para garantizar que el punto analizado en si es un máximo, tiene que disminuir cuando se aleja del mismo, por lo tanto lo que se debe comprobar es si y está aumentado antes de alcanzarla "meseta" de la curva y se disminuye luego. Entonces lo que se requiere es quedy disminuya para pequeños incrementos del valor de $\boldsymbol{x}$. En otras palabras, ***CSO***,exige que la función $\boldsymbol{f}$ tenga una forma cóncava en el punto crítico.

Funciones	**Ecuación de la CSO**
Función de una variable	$f''(x) < 0$
Función con dos variables	$f_{11}f_{22} - f_{12}2 > 0$
Función con restricciones	$f_{11}f_{22} - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_12 < 0$

Las funciones que cumplen con la condición de que las derivadas parciales segundas ($\boldsymbol{f_{11}}$ y $\boldsymbol{f_{22}}$)sean suficientemente grandes como para compensar cualquier efecto perverso posible de las derivadas parciales cruzadas ($\boldsymbol{f_{12}} = \boldsymbol{f_{21}}$) se denominan funcionescóncavas. Estas funciones dejan claro que un punto plano en este tipo de función es,de hecho, un auténtico máximo porque la función tiene siempre pendiente negativaa partir de ese punto.

Las funciones cuasi cóncavas tienen la propiedad de que el conjunto de todos los puntos para el que esa función toma un valor mayor que cualquier constante predeterminada es un conjunto convexo (es decir, dos puntos cualesquiera del conjunto se pueden unir por una línea que está totalmente dentro del conjunto).

Veamos a continuación un ejemplo integrador.

Ejemplo: Vallas óptimas y maximización con restricciones

Suponga que un agricultor tiene una valla de determinada longitud $\boldsymbol{P}$ y quiere cercarel área rectangular más grande posible. ¿Qué área debería cercar el agricultor?

Solución: Se trata claramente de un problema de maximización con restricciones. Para resolverlo, sea $\boldsymbol{x}$ la longitud de un lado del rectángulo $\boldsymbol{e}$ y la longitud del otro lado.

El problema consiste en elegir $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ de forma que se maximice el área del campo(dado por $\boldsymbol{A = x * y}$), sujeto a la restricción de que el perímetro es fijo e igual a $\boldsymbol{P = 2x + 2y}$.

Partiendo de la expresión lagrangiana estudiada

$$\boldsymbol{\left(L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)\right): L = x * y + \lambda(P - 2X - 2Y)}$$

Donde $\boldsymbol{\lambda}$ es la incógnita del multiplicador lagrangiano. Las CPO para el máximo son:

$$\boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial x} = x - 2\lambda = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial x} = P - 2x - 2y = 0}$$

Las tres ecuaciones deben resolverse simultáneamente para $\boldsymbol{x, y}$ $\boldsymbol{y \lambda}$. Las dos primeras dicen que:

$$\boldsymbol{\frac{y}{2} = \frac{x}{2} = \lambda}$$

Por lo que $\boldsymbol{x}$ debe ser igual a $\boldsymbol{y}$ (el campo debe ser cuadrado). También implica que se debe elegir $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{y}$ de forma que el cociente de los beneficios marginales respecto a los costees marginales sea el mismo para ambas variables. El beneficio(en términos del área cercada) de una unidad más de $\boldsymbol{x}$ viene dado por $\boldsymbol{y}$ (el áreaaumenta en $\boldsymbol{1 * y}$), y el coste marginal (en términos de perímetro) es 2 (el perímetro disponible se reduce en 2 por cada unidad que aumenta la longitud del lado $\boldsymbol{x}$).Las condiciones de máximo afirman que este cociente debe ser igual para cada una de las variables.

Puesto que se ha demostrado que $\boldsymbol{x = y}$, se puede utilizar la restricción para demostrar que:

$$\boldsymbol{x = y = {}^{P}\!/_{4} \in y = 2\lambda \subset \lambda = {}^{P}\!/_{8}}$$

Si el agricultor estuviera interesado en saber cuánto campo puede cercar añadiendo una yarda más de valla, el $\boldsymbol{\lambda}$ sugiere que podría calcularlo dividiendoel perímetro actual por 8.

Ahora suponga que el campo actual tiene 400 yardas. Si el agricultor ha hecho una planificación óptima, el campo será un cuadrado de 100 yardas de lado. El área cercada tendrá 10 000 yardas cuadradas.

Suponga ahora que el perímetro aumentara una yarda. Entonces $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{P}/\mathbf{8}$ predeciría que el área total aumentaría en aproximadamente 50 yardas cuadradas.

El problema dual de esta situación de maximización con restricciones es que, para una determinada área de un campo rectangular, un agricultor quiere minimizar el tamaño de la valla para cercar el campo. Matemáticamente, el problema consisteen minimizar:

$$\boldsymbol{P = 2x + 2y \; sujeto \; a \; la \; restricción \; A = x * y}$$

Escribiendo la expresión lagrangiana: Escriba aquí la ecuación.(donde $\boldsymbol{D}$ indica el hecho de que se trata del problema dual) se obtienen las siguientes $\boldsymbol{CPO}$ para el mínimo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^D}{\partial x} = 2 - \lambda^D * y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^D}{\partial y} = 2 - \lambda^D * x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^D}{\partial \lambda} = A - x * y = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones como antes, se obtiene el resultado: $\boldsymbol{x = y = \sqrt{A}}$. Esto demuestra que el campo debe ser cuadrado si se quiere minimizar la longitud de lavalla. El valor de $\boldsymbol{\lambda}$ en esta situación es:

$$\lambda^D = \frac{2}{y} = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{A}}$$

Al igual que antes, este multiplicador lagrangiano indica la relación entre el objetivo (minimizar la longitud de la valla) y la restricción (la necesidad de cercar el campo).Si el campo tuviera 10 000 yardas cuadradas, como se vio antes, sería necesaria unavalla de 400 yardas de longitud. El incremento del campo en una yarda cuadrada exigiría aproximadamente 0.02 yardas de valla.-

Para demostrar las condiciones de segundo orden en el caso de las restricciones: Para analizar las CSO se calcula:

$$f_1 = f_x = y$$

$$f_2 = f_y = x$$

$$f_{11} = f_{xx} = 0$$

$$f_{22} = f_{yy} = 0$$

$$f_{12} = f_{xy} = 1$$

Haciendo las sustituciones pertinentes en la ecuación: $f_{11}\, f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 < 0$

$$0 * x^2 - 2 * 1 * y * x + 0 * y^2 = -2xy$$

Puesto que x y y son ambas positivas en este problema, se cumplen las CSO paraun máximo con restricciones.

5.8- Resumen del capítulo. Aplicaciones prácticas en la administración yla economía.

Resumen del capítulo:

Derivada de una función.

Si se denota por $m_t\,(x_0)$ la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(x_0; y_0)$, entonces:

$$m_t(x_0) \lim_{x - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Por lo tanto, La pendiente de la recta tangente a la curva con ecuación ***y=f(x)*** en el punto $(x_0; y_0)$, denotada $m_t\,(x_0\,)$ es igual al límite mencionado previamente,siempre que este límite exista.

En el supuesto caso de que este límite exista.

Cuando este límite existe lo llamamos la derivada de la función f en x_0 y lo denotamos por $f'(x0)$. Es decir:

Entonces ahora se puede definir que si existe:

$$f'(x_0) = \lim_{x - x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{(h-0)} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{(\Delta x - 0)} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se dice que: la función f es derivable en x_0 y que $f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0. Sino existe $f'(x_0)$, se puede afirmar que la función f no es derivable en x_0 o bien que lafunción $f$no tiene derivada en x_0.

La derivada de la función, $f'(x_0)$, puede tener otras notaciones para reconocerla:

$$\frac{df(x)}{dx}\bigg| x = x0, \frac{df}{dx}\bigg| x = x0 \frac{dy}{dx} | x = x0, y'(x_0)$$

Derivadas parciales.

Sea $f: D \subset\subset R^n \rightarrow R$ una función escalar definida en un abierto D, para cada punto $p \subset D$, se define la derivada parcial de f respecto a la variable x_i en el punto p como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} |p = \lim_{\Delta x_i} \frac{\Delta_{xi}}{f(p)} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{(f(p1, \dots, pi + \Delta xi, \dots, pn) - f(p1, \dots, pn)}{\Delta x_i}$$

Si Δx_i es suficiente pequeño, entonces:

$$\frac{\Delta_{xi} f(p)}{\Delta_{xi}} \approx \frac{\partial f}{\partial x_i} | p \rightarrow \Delta_{xi} f(p) \approx \frac{\partial f}{\partial x_i} | \Delta x_i$$

Sea $f: D \subset [\![R]\!] n \rightarrow R$ una función vectorial definida en un abierto D, dado $p \in D$, se dice que f es derivable en p si existen las derivadas parciales respecto de todas las variables de sus funciones coordenadas, es decir existen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p), i = 1, \dots n, j = 1, \dots m \Rightarrow \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = \frac{(\partial f(p)}{\partial x_i}, \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(p))$$

Si una función tiene derivada parcial respecto de una variable en todos los puntos de su dominio, entonces la derivada parcial es otra función con las mismas variables:

$$\partial f : D \subset n \to [R]^n \to R$$

En economía es frecuente referirse a la derivada de una magnitud añadiéndole aesta el calificativo "marginal". Por ejemplo, si $C(x, y)$ es una función de costes, donde x e y son las cantidades producidas de dos artículos, la derivada $\partial C/_{\partial x'}$es el coste marginal respecto de x, es decir, el (incremento del) coste que ocasionaría aumentar en una unidad la producción del primer artículo.

En general, las unidades de una derivada $\partial f/_{\partial x}$son unidades de f con respecto a la unidad de x. Por ejemplo, un coste o una utilidad marginales se expresa en unidades monetarias/unidad de producto, entre otros. Composición y homogeneidad de las funciones.
Si $f: A \in R^n \to R^m$ y $g: B \in R^m \to R^k$ son funciones tales que $f[A] \in B$, se define como función compuesta $g\ o\ f: A \in R^n \to R^k$ como la función dada por $(g\ o\ f)(x) = g(f(x))$.

Expresado de otra forma, $g\ o\ f$ es la función que a cada punto x le asigna elresultado de aplicar f a x y después aplicar g al resultado $f(x)$.

Regla de la Cadena: sean $f: A \in R^m \to R^n$ y $g: B \in R^n \to R^k$ dos funciones definidas en abiertos A y B tales que $f[A] \in B$. Suponga que $f$es diferenciable en un punto $p \in A$ y que g es diferenciable en $f(p) \in B$, entonces $g\ o\ f$ es diferenciable en p y:

$$d(g\ o\ f)(p) = jg\big(f(p)\big) * Jf(p)$$

Una función $f: D \subset R^n \to R$ definida en un abierto D es homogénea de grado $m \in R$ para todo $x \in D$ y todo $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in D$ se cumple que $f(\lambda x) = \lambda m\ f(x)$.

Sean $f, g: D \subset R^n \to R$ funciones definidas en un abierto D. Entonces:

1. Si f y g son homogéneas de grado m, entonces $f + g$ también es homogéneade grado m.

2. Si f es homogénea de grado m y $\alpha \in R$, entonces αf también es homogéneade grado m.

3. Si f es homogénea de grado m y g es homogénea de grado r, entonces fg es homogénea de grado $m + r$.

4. Si f es homogénea de grado m, g es homogénea de grado r y g no se anula en D, entonces f/g es homogénea de grado $m - r$.

5. Si f es de clase C^1 en D y es homogénea de grado m, entonces sus derivadas parciales son homogéneas de grado $m - 1$.

Optimización de funciones.

La optimización de funciones es un término económico que se relaciona con la obtención de máximos y mínimos, es decir, el punto más alto de la curva o lo más bajo. Para el hallazgo de estos máximos y mínimos es necesario que se lleven a cabo dos condiciones que utilizan las derivadas como eje central de llegar a su resolución:

- Condición de primer orden para el máximo o el mínimo: $\frac{df}{dq}|q = q *$
- Condición de segundo orden: $\frac{d^2\pi}{dq^2} = q = q *= f''(q)|q = q *< 0$

La derivada parcial de una derivada parcial es directamente análoga a la derivada segunda de una función de una variable y se denomina derivada parcial de segundoorden y se puede escribir como: $\partial^2 f \, \partial x_j \, \partial x_i = f_{ij}$. Por lo general, el orden en que se calculan las derivadas parciales para calcular derivadas parciales de segundo ordenno importe $(f_{ij} = f_{ji})$ para cualquier par de variables x_i, x_j. Si varían todas las variables independientes en una pequeña cuantía, el efecto total sobre la suma de todos los efectos. Por tanto, la variación total de y se define como:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots f_n dx_n$$

Esta expresión se denomina derivada total de f y es directamente análoga a la expresión del caso de una variable.

Un método para resolver los problemas de optimización con restricciones es el método del multiplicador lagrangiano. El método del multiplicador lagrangiano partede la formulación de la expresión $L = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ donde λ es una variable adicional denominada multiplicador lagrangiano. Considerando que λ es también una variable independiente, entonces se calcula:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1 = \frac{0, \partial L}{\partial x_2} = f_2 + \lambda g_2 = 0, \dots \frac{\partial L}{\partial x_{n<}} = f_n + \lambda g_n = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

Estas ecuaciones son las condiciones para obtener un punto crítico de la función ***L*** (CPO). La solución de estas ecuaciones tiene dos propiedades:

i. Las ***x*** cumplirán la restricción por la ecuación anterior impone esta condición.

ii. Entre todos aquellos valores de x que satisfacen la condición, aquellos que también satisfagan las ecuaciones anteriores harán que ***L*** (y por tantof) sea lo más grande posible (suponiendo que se cumplen la ***CSO***).

Para garantizar que el punto analizado en si es un máximo, tiene que disminuir cuando se aleja del mismo, En otras palabras, la ***CSO***, exige que la función f tenga una forma cóncava en el punto crítico.

Funciones	**Ecuación de la CSO**
Función de una variable	$f''(x) < 0$
Función con dos variables	$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$
Función con restricciones	$f_{11}f_{12}^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 < 0$

Ejercicios relacionados con la administración y la economía:

1) Indica el signo que tendrán en condiciones normales las derivadas siguientes:

   a. La derivada del salario de un trabajador respecto al tiempo.
   b. La derivada parcial de la demanda de un artículo respecto de su precio.
   c. La derivada parcial del volumen de ventas de una empresa respecto desu inversión en publicidad.
   d. La derivada parcial del ahorro medio de los habitantes de un paísrespecto del índice de precios.
   e.

f. La derivada respecto al tiempo de la población de un país en el que cada familia tiene una media de 1.8 hijos.

g. La derivada del índice general de la bolsa de Madrid respecto del tiempo.

2) Si $\boldsymbol{P(t)}$ es el producto interior bruto de un país en un tiempo $\boldsymbol{t}$**,** ¿qué es la derivada $\boldsymbol{\partial P / \partial x}$?

a. La inflación del país en un tiempo t,

b. El crecimiento económico del país en un tiempo t,

c. No tiene interpretación económica.

3) El precio del petróleo es una función $\boldsymbol{P}$ que depende, entre otras variables, de laoferta x de crudo en el mercado. ¿Cuál será, en condiciones normales, el signo de la derivada $\boldsymbol{\partial P / \partial x}$?

4) Una editorial $\boldsymbol{A}$ es una de las principales suministradoras de libros a una pequeña ciudad, aunque tiene una única competidora $\boldsymbol{B}$. La empresa estima quela demanda de sus libros en la ciudad depende del precio medio al que los vendep_1, del precio medio a que vende los libros la editorial B y del precio medio delos artículos de primera necesidad. Si la función de demanda de los libros de Aes $\boldsymbol{D(p_1, p_2, p_3)}$ y la empresa estima que, para los precios actuales $\boldsymbol{p_0}$, se tiene:

$$\frac{\partial D}{\partial p_1}\Big|p_0 = -2, \frac{\partial D}{\partial p_2}\Big|p_0 = -1, \frac{\partial D}{\partial p_3}|p_0 = 2$$

¿Cuál de las variables $\boldsymbol{p_2, p_3}$ representa, presumiblemente, a los precios de la editorial $\boldsymbol{B}$ y cuál a los precios de los artículos de primera necesidad? ¿Quéefecto tendría para la editorial una rebaja media de sus precios de 0.8 usd?

5) Sea $\boldsymbol{C(x,y)}$ la función de costes de una empresa, donde $\boldsymbol{x}$ ***e*** y son las cantidades producidas de dos artículos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Explica la diferencia de interpretación entre

$$\frac{\partial C}{\partial x}\Big|_{(400,200)} \;\; y \;\; \frac{\partial C}{\partial x}\Big|_{(40,20)}$$

6) Calcule el costo marginal $C'(x)$ y el ingreso marginal $R'(x)$ de las funcionesde costo e ingreso siguientes:

a. $C(x) = 40 + (In2)x^2$

b. $R(x) = x - 0.01x^2$

c. $C(x) = 0.0001x^3 - 0.09x^2 + 20x + 1200$

d. $R(x) = 5x - 0.01x^{5/2}$

7) Si la función de demanda es $\boldsymbol{x + 4p = 1\,000}$ y la de costo es $\boldsymbol{C(x) = 1\,000 + 5x}$, calcule la utilidad marginal con respecto a x cuando $\boldsymbol{p = 150}$.

8) Si la función de demanda es $\boldsymbol{\sqrt{x} + p = 10}$ y la de costo es $\boldsymbol{C(x) = 60 + x}$, calcule la utilidad marginal con respecto a $\boldsymbol{x}$ cuando $\boldsymbol{p = 7}$.

9) El editor de una revista descubre que si fija el precio de 1.00 usd a su revista,vende, al mes, 20 000 ejemplares; sin embargo, si el precio fijado es de 1.50usd, sus ventas sólo serán de 15 000 ejemplares. Si el costo de producircada ejemplar es de 0.80 usd y tiene costos fijos de 10 000 usd al mes,suponiendo una ecuación de demanda lineal:

a. Calcule su función de utilidad marginal y determine el precio de la revista que haga qué la utilidad marginal sea igual a cero. Evalúe lautilidad misma cuando el precio es:

i. 1.80 usd.

ii. 1.90 usd.

iii. 2.00 usd.

10) La Secretaría de Finanzas indica que a partir del 2001, el impuesto predial sobre una casa de tres habitaciones es de $\boldsymbol{P(x) = 60x^{1/2} + 40x + 1200}$ usd, donde x se mide en años. Estime el cambio del monto del impuesto predial durante la primera mitad del año 2005.

11) En determinada fábrica, la producción es de $\boldsymbol{Q = 600K^{1/2} L^{1/3}}$ unidades donde K representa la inversión en capital y $\boldsymbol{L}$ el número de obreros. Estime el incremento porcentual que se generará en la producción a partir de un aumentode 2%

en el número de obreros, si la inversión de capital no cambia. Comparecon el incremento porcentual real.

12) El IPC de un cierto país en un instante t (expresado en años) viene dado por la fórmula:

$$P = e\sqrt{(1 + t/50)^3}$$

a. Calcula la inflación del país, es decir, el porcentaje de aumento de los precios:

$$I = \frac{100}{P}\frac{\partial I}{\partial t}$$

b. Estudia el comportamiento de la inflación en $t=0$. ¿Está aumentando o disminuyendo?

c. Calcula la tasa de incremento de la inflación en el país, es decir,

$$T = \frac{100}{I}\frac{\partial I}{\partial t}$$

d. ¿Cuánto vale en $t = 0$?

e. ¿Cómo varía la tasa de incremento de la inflación del país?, ¿crece o decrece?

13) El capital de una empresa durante un periodo de diez años [0,10] viene dado porla función:

$$C(t) = 500e^{3e^{0.01t}} - 3$$

Determina el capital con que contaba la empresa al principio del periodo y el capital final. Determina el beneficio marginal $B_m(t)$ de la empresa en cada instante t. Determina la rentabilidad de la empresa en cada instante t, es decir,el beneficio generado por cada unidad de capital disponible en un instante t:

$$R(t)\frac{B_m(t)}{C(t)}$$

Calcula la rentabilidad inicial y final de la empresa. Determina el tanto por ciento de incremento anual de la rentabilidad de la empresa.

14) Una empresa exporta un producto a tres países en cantidades $\boldsymbol{x, y, z}$; respectivamente. La empresa tiene unos costes variables de transportede $\boldsymbol{x\text{-}y}$ usd por cada unidad del producto enviada al primer país, $\mathbf{3}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{z}$usd. por cada unidad enviada al segundo país y $\mathbf{4}\boldsymbol{z} - \mathbf{2}\boldsymbol{y}$ usd por cada unidad transportada hasta el tercero. Además, la empresa ha calculado que suscostes fijos son de 800 usd. Su cuota de exportación es de 1 500 unidades en total.

a. Calcula las cantidades que se exportarán a cada país si el objetivo de laempresa es minimizar sus costes totales de transporte.
b. Razona el efecto que produciría una pequeña disminución de la cuota de exportación.

15) Los impuestos en un país determinado se calculan según fórmula:

$$\boldsymbol{T = 0.01I^2}$$

donde T representa los impuestos, en miles de dólares, e I representa larenta en miles de dólares. A partir de esta fórmula, responda a las siguientespreguntas:

a. ¿Cuántos impuestos pagan los individuos con rentas de 10 000 usd, 30000 usd y 50 000 usd?¿Cuáles son los tipos impositivos medios paraestos niveles de renta?¿Para qué nivel de renta es igual la carga fiscal a larenta total?
b. Haga un gráfico de los impuestos. Utilice su gráfico para estimar los tipos marginales de los niveles de renta especificados en el inciso anterior. Muestre también los tipos medios de estos niveles de renta en su gráfico.
a. Los tipos marginales, en el país, se pueden estimar con más precisión calculando los impuestos adeudados si las personas con las rentas del inciso (a) obtienen un dólar adicional. Haga este cálculo para los tres nivelesde renta. Compare sus resultados calculando la función del tipo marginalutilizando los métodos de cálculo.

Ejercicios de repaso de la Unidad No. 2.

1) Un banco nos ofrece comprar unos bonos por 5.000 C por los que dentro de3 años nos dará 7 000 usd, mientras que otro nos ofrece bonos por valor de 4 000 usd, por los que dentro de 5 años nos dará 7 000 usd. Determina el tipo deinterés continuo que nos ofrece cada banco. ¿Qué inversión es más rentable?

2) En la teoría del consumidor se considera una función de utilidad que expresala satisfacción que obtiene un consumidor con cada adquisición posible.Por ejemplo, si consideramos un mercado con cuatro productos $\boldsymbol{A, B, C, D}$ y representamos las adquisiciones posibles como cuádruplas $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x, y, z, w})$ (donde $\boldsymbol{x}$ es la cantidad adquirida de $\boldsymbol{A}$, y la cantidad de $\boldsymbol{B}$, etc.) entonces una función de utilidad podría ser:

$$\boldsymbol{U(x, y, z, w) = x(y + z)(2 - e^{-w})}$$

Determina el dominio matemático de $\boldsymbol{U}$ y el subdominio con sentido económico. Estudia la continuidad de $\boldsymbol{U}$ en uno y otro. ¿Qué utilidad tiene para el consumidoruna compra con ***x=0***?, ¿cómo se interpreta esto? Dos de los bienes son sustitutivos, ¿cuáles? Justifica la respuesta. Supongamos que un consumidor considera satisfactoria la utilidad proporcionada por ***x=10, y=5, z=1*** y que lascentésimas de utilidad le resultan inapreciables. ¿Cuál es la máxima cantidad deD que le interesaría adquirir? (Observa que desde un punto de vista estrictamentematemático la respuesta sería "infinito".)

3) El costo de producir x unidades de cierto artículo está dado por la función: $\boldsymbol{C(x) = 10x + 420}$ y el ingreso obtenido por la venta de x unidades está dada por: $\boldsymbol{I(x) = 1000x - x^2}$.

a. Se están produciendo 200 unidades y se desea incrementar la producción a 210 unidades.

b. Calcule los incrementos correspondientes en el costo, el ingreso y la utilidad.

c. Determine el cambio promedio del costo, ingreso y utilidad por las unidades adicionales vendidas.

4) (Televidentes) Después de consultar a un matemático, una nueva empresa de televisión por cable pudo simular la proporción de familias que utilizaban suservicio t años después por medio de la fórmula:

$$p = 1 - e^{-0.1t}$$

Determine el crecimiento de p entre $t = 1$ y $t = 2$ y la tasa de cambio promediode p por año.

5) El ingreso semanal total R obtenido por la producción y venta de x unidadesde cierto artículo está dado por:

$$R = f(x) = 500x - 2x^2$$

Determine la tasa promedio de ingresos por unidad extra cuando el númerode unidades producidas y vendidas por semana se incrementa de 120 a 150.

6) La relación de demanda de cierto artículo está dada por $2q + \sqrt{(p + 4)} = 11$. Determine:

a. El precio marginal con respecto a la demanda a un nivel de $q = 3$ unidades.
b. El ingreso marginal con respecto al precio cuando $p = 21$.

7) Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - {}^{1}/_{20x^2}$ en donde x es el nivel de producción. Si éste es igual a 5 actualmente y está creciendo a una tasa de 0.7 por año, calcule la tasa a la que los costos de producción se estánelevando.

8) Se estima que la producción semanal de una cierta planta es $Q(x) = -x^3 + 60x^2 + 1\,200x$ unidades, donde x es el número de trabajadores empleados en la planta. Generalmente hay 30 trabajadores empleados en laplanta. Use el análisis marginal para estimar el cambio en la producción semanalque resultaría de añadir un trabajador más a la fuerza de trabajo y compare conel cambio real.

9) Un estudio de productividad sobre el turno matutino en una fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8:00 a.m. habrá montado $\boldsymbol{f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15}$ teléfonos celulares x horas después.

   a. Obtenga una fórmula para el ritmo al que el trabajador estará montando teléfonos después de x horas.
   b. ¿A qué ritmo estará montando teléfonos el trabajador a las 9:00 a.m.?
   c. ¿Cuántos teléfonos montará realmente el trabajador entre las 9:00 y las 10:00 a.m.?

10) Suponga que el costo total en dólares de la fabricación de q unidades es:

$$\boldsymbol{Cq = 3q^2 + q + 500.}$$

   a. Utilice el análisis marginal para estimar el costo de la fabricación de la cuadragésima primera unidad.
   b. Calcule el costo real de fabricación de la cuadragésima primera unidad.
   c. ¿Qué costo de fabricación aproxima $\boldsymbol{C''(41)}$?
   d. Halle el costo promedio y el costo promedio marginal de fabricar q unidades.

11) Una compañía de autobuses alquila un autobús de 50 plazas a grupos de 35 o más personas. Si un grupo contiene exactamente 35 personas, cada persona paga 600 usd. En grupos mayores, la tarifa de todos se reduce en 100 usd porcada persona que sobrepase las 35. Determinar el tamaño del grupo para el cuallos ingresos de la compañía serán mayores así como los ingresos máximos

12) Por cada cargamento de materiales en bruto, un fabricante debe pagar gastos de pedido para cubrir empaque y transporte. Cuando llegan los materiales en bruto deben ser almacenados hasta que se necesiten, por lo que hay un costo de almacenamiento. Si cada cargamento de materiales en bruto es grande,son necesarios pocos cargamentos y los costos de pedido serán bajos, pero los costos de almacenamiento, sin embargo serán altos. Si cada cargamentoes pequeño, los costos de pedido serán altos porque se necesitarán muchoscargamentos, pero los costos de almacenamiento serán bajos. Así, el costo total está dado por:

$$\boldsymbol{C_T = C_A + C_P + C}$$

donde C_A es el costo de almacenamiento, C_p es el costo del pedido y C es el costototal del material. Un fabricante desearía determinar el tamaño del cargamento que minimizaría el costo total.

a. Ejemplo: Un fabricante de bicicletas compra 6 000 llantas al año a un distribuidor y está tratando de decidir la frecuencia de sus pedidos. Los gastos de pedido son de 20 usd por cargamento, el costo de almacenamiento es de 96 centavos por llanta por año y cada llanta cuesta25 centavos. Suponga que las llantas se usan a un ritmo constante a lolargo del año, y que cada cargamento llega justo cuando el cargamentoprecedente ha sido terminado. ¿Cuántas llantas debería pedir cada vez el fabricante para minimizar el costo? (Nota: Si x representa el número de llantas en cada pedido, entonces con objeto de simplificar se puede suponer que en todo momento se tienen $x=2$ llantas almacenadas).

13) La función de utilidad de un consumidor respecto de dos productos A y B es:

$$U(x,y) = ln(1 + xy)$$

Donde ***x e*** y son las cantidades de producto que adquiere. Suponga que actualmente consume $(x,y) = (10,10)$.

a) Calcula la utilidad marginal respecto del producto ***a***. Interpreta su signo.
b) Justifica matemáticamente esta afirmación: "por cada unidad que aumenta el consumo de ***a***, la utilidad marginal disminuye, es decir, el consumidor obtiene cada vez menos satisfacción adicional al incrementar su consumo de ***A***".
b. Justifica matemáticamente esta afirmación: "Por cada unidad que aumentael consumo de ***B*** la utilidad marginal de A aumenta, es decir, si el consumidor aumenta el consumo de ***B***, entonces le es más útil aumentar el consumo de ***A***."
c. Pon un ejemplo de dos productos para los que estas propiedades sean razonables.

14) Un inversor desea comprar dos activos cuyos rendimientos son del 10% y el 6% respectivamente. Si las cantidades invertidas son $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{e}$ y, el inversor ha aproximadoel riesgo por la siguiente forma cuadrática:

$$\boldsymbol{R(x,y) = 0.025x^2 + 0.005y^2 + 0.04xy(usd)^2}$$

a. Si el inversor está dispuesto a asumir un riesgo de 1 331 ***(usd)²***, ¿qué cantidad debe invertir en cada activo para maximizar el rendimiento total?

b. Si el inversor quiere obtener una rentabilidad total de 22 usd, ¿qué cantidaddebe invertir en cada activo para minimizar el riesgo?

c. Analiza la relación entre los problemas de los dos apartados anteriores.

15) Suponga que los ingresos totales de una empresa dependen de la cantidad producida q según la función: $\boldsymbol{IT = 70q - q^2}$, los costes totales también dependen de q y su ecuación es: $\boldsymbol{CT = q^2 + 30q + 100}$.

a. ¿Qué nivel de producción debe producir la empresa para maximizar los beneficios ($\boldsymbol{IT - CT}$)? ¿A cuánto ascenderán los beneficios?

b. Demuestre que se cumplen las condiciones de segundo orden ***(CSO)*** para el máximo nivel de producción obtenido en el inciso anterior

UNIDAD 3

El Cálculo Diferencial en la Administración y la Economía.

Unidad No. 3: El Cálculo Integral en la Administración y la Economía.

La Unidad No. 3 se centrará en el Cálculo Integral y las herramientas matemáticasque lo componen que aportan importantes análisis en la Administración y laEconomía. El cálculo integral tiene un empleo explícito en estas áreas de lasciencias sociales. Las aplicaciones del cálculo integral se pueden encontrar en materias tales como: microeconomía, macroeconomía, análisis de costos, de beneficios, de utilidades, entre otras.

Objetivo de la Unidad: Evaluar modelos matemáticos aplicando los conceptos deintegrales en la solución de problemas afines a la Economía y la Administración.

Para que el contenido de la unidad se presente de forma coherente y a su vez abarque todos los temas relevantes; la unidad se estructura de la siguiente forma:

Capítulo VI: Cálculo integral 1ra Parte: Integral indefinida.

Capítulo VII: Cálculo integral 2da Parte: Integral definida.

Los capítulos mencionados cuentan con los siguientes componentes que forman su estructura:

- Contenido teórico.
- Ejemplos prácticos en la administración y la economía.
- Resumen de lo tratado.
- Set de ejercicios.

Además, al finalizar la unidad, se presenta otro set de ejercicios que abarcantodas las materias estudiadas.

Los economistas sostienen que algunas veces es más fácil obtener los datos que reflejan los incrementos ocasionados en los costos e ingresos, obtenidos con laproducción y venta adicional de un determinado artículo, es por esta razón queno es posible determinar directamente las funciones costo e ingreso total a las quecorresponden dichos datos, pero se pueden conocer la funciones costo e ingreso marginal a las que corresponden, de esta manera se pueden determinar las funcionescosto e ingreso total de la siguiente manera.

El cálculo diferencial permitió observar que al emplear distintas funciones comolas compuestas, logarítmicas, exponenciales, entre otras; cobraron importancia losaspectos marginales para medir los cambios que tiene una variable cuando otras semodifica, a fin de explicar una situación determinada.

Dentro de las funciones marginales se habló de costos e ingresos y cómo se modifican estos cuando cambia la cantidad producida de artículos, lo cual haceposible determinar las utilidades generadas por una empresa.

En la teoría del comportamiento del consumidor se afirma que éste escoge entre las posibilidades de que dispone, de manera que maximice la satisfacción derivada del consumo o uso de los artículos. Esto implica que el consumidor conoce las opciones yes capaz de evaluarlas. Toda la información relevante respecto de la satisfacción que un consumidor obtiene de las diversas cantidades de los artículos está contenida ensu función de utilidad.

La función de utilidad para una empresa se basa en parte en la teoría sobre el consumidor, pero toma un sentido diferente en el cual lo que interesa es la cantidad monetaria que ganará al realizar una venta de los artículos que produce y el costo en el que incurre para producirlos. Recordemos que la función de utilidad de una empresa se determina como la diferencia entre ingresos y costos $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$, donde se espera que la empresa obtenga la mayor ganancia posible. Es de esperarse que si las ventas de una empresa disminuyen, su ingreso también lo hará y, porlo tanto, la utilidad que espera obtener no será la deseada. De igual manera, lautilidad no será grande si los costos se incrementan.

De lo anterior se desprende que para un individuo la utilidad estará en función del número de bienes que puede adquirir con una cantidad de dinero, y parala empresa, la utilidad estará en función de la cuantía de artículos producidosque se demandan en el mercado. En ocasiones nos interesa no sólo conocer la utilidad total que- produce un artículo, o la ganancia que obtiene una empresa alvender cierta cantidad de artículos, sino también determinar la utilidad marginal.

Una empresa espera que su utilidad se incremente al vender una mayor cantidadde artículos, por lo que tiene que incrementar su producción, pero también debeconsiderarse que al aumentar su producción debe subir sus costos, ya que puede ser necesario, además de adquirir una mayor cantidad de materia prima, contratarmás personal o utilizar una mayor cantidad de maquinaria y equipo, cuestiones que si crecen demasiado llegarán a un punto donde los costos sobrepasen a losingresos, provocando que las ganancias se conviertan en pérdidas. En términosmatemáticos podemos decir que al integrar la función de utilidad marginal obtenemos la utilidad total.

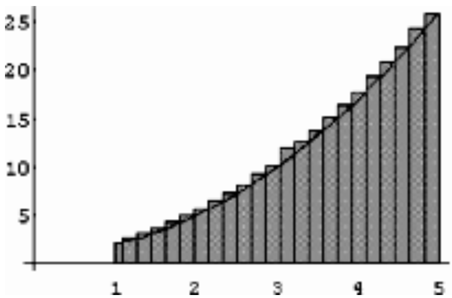
Capítulo VI: Cálculo integral 1ra Parte: Integral indefinida.

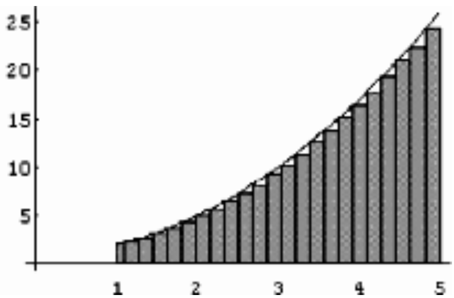
Contenidos:

Al igual que la derivada, el concepto de integral surge como una herramienta dela mecánica clásica desarrollada fundamentalmente por Newton y Leibnitz. La aplicación y el uso de cálculo dentro de las propias matemáticas no solo se ha concretado en pocas aplicaciones sino que han dado formalidad a un sin número deáreas, hasta ser elemento clave en la interpretación de fenómenos.

6.1- Integrales indefinidas.

Una de las nociones fundamentales de la integral representa el área bajo la curva. Laforma más sencilla de hacerlo es una aproximación del área con rectángulos.





Dividiendo el área en rectángulos por arriba o por debajo de la curva, se puede lograruna buena aproximación, y esta será cada vez más próxima entre más pequeña seala longitud de los rectángulos. El área de cualquier rectángulo es base por altura. Para cualquiera de los casos anteriores, podemos considerar el área del primerrectángulo como $\Delta x_i\, f(x_i)$:

$$A_1 = \Delta x_1\, f\,(x_1), A_2 = \Delta x_2\, f(x_2\,), \ldots, A_i = \Delta x_i\, f(x_i\,)$$

Si se suman todas las áreas de la curva se obtendría la siguiente ecuación:

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_i)$$

Esta área es una aproximación del área bajo la curva que puede aproximarsemejor si se hace crecer el número de rectángulos que cubren el área bajo la curva,lo que significa que los incrementos son cada vez más pequeños. La forma máseficiente de llegar un valor más próximo es llevar el límite de la longitud de los rectángulos a cero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{\Delta x \to 0}^{\infty} \Delta x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} dx_1 f(x_i) = \int f(x)dx$$

Esta es la definición de integral a partir del cálculo de área bajo la curva. Comopuede verse, la integral, es otra función. A esta integral se le denomina integralindefinida, pues aún no se le han colocado los límites en los cuales debe integrarse.

Como se puede notar, la derivada y la integral tienen una relación intrínseca puestoque son procesos inversos uno de otro. Para profundizar en esta afirmación se necesita conocer a que se denomina primitiva de una función, que es la antiderivada. Una función $\boldsymbol{F}$ es una primitiva de *f*, en un intervalo $\boldsymbol{I}, si\ \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ para$ todo $\boldsymbol{x}$ en I.

Por ejemplo, la derivada de $\boldsymbol{x^2}$ es ***2x***, por lo tanto $\boldsymbol{x^2}$ es la antiderivada de $\boldsymbol{2x}$.Es muy importante señalar que $\boldsymbol{x^2}$ no es la única antiderivada de ***2x***. Sumandoa $\boldsymbol{F(x)}$ una constante arbitraria $\boldsymbol{C}$ se obtiene de nuevo una primitiva, ya que la derivada sigue siendo $\boldsymbol{f(x)}$. Entonces toda primitiva $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{f}$ debe ser de la forma $\boldsymbol{G(x) = F(x) + C}$, donde $\boldsymbol{C}$ es una constante.

Ahora, la operación de hallar todas las primitivas de una función se llama integración:

$$\boldsymbol{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

El símbolo $\int$ es el símbolo integral. La función $\boldsymbol{f}$ que ha de ser integrada es el integrando, y la constante $\boldsymbol{C}$ es llamada constante de integración. La familia de funciones $\boldsymbol{F(x) + C}$ es la integral indefinida de $\boldsymbol{f}$. El adjetivo "indefinida" enfatiza que el proceso de integración no produce una función definida, sino más bien todo un conjunto de funciones.

Ejemplo: Función utilidad.

Una empresa comercializa entre otros productos pan de caja y un vino francés. La función de utilidad marginal del pan está dada por $\boldsymbol{f(x) = 40 - 5x}$ y la utilidad marginaldel vino está dada por $\boldsymbol{g(x) = 30 - x}$. Encuentre lo siguiente:

a. La función de utilidad total del pan.

b. La función de utilidad total del vino.

c. Si el consumidor desea adquirir tres paquetes de pan y tres de vino, cuál delos artículos le producirá mayor utilidad (satisfacción).

Solución: Para encontrar la función de utilidad de ambos bienes es necesario integrarlas funciones $\boldsymbol{f(x)\ y\ g(x)}$, por lo que se emplea la fórmula:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde $\boldsymbol{C}$ es la constante de integración estudiada previamente.

a. La función de utilidad total para el pan se representa por:

$$U1\ (x) = \int\ (40 - 5x)\ dx$$

Si se emplea la fórmula descrita se tiene:

$$U_1\ (x) = \int (40 - 5x)\ dx = 40\int dx - 5\int\ xdx$$

Entonces, la función utilidad total del pan es:

$$U_1(x) = 40x\ - \frac{5\,x^2}{2} + C$$

Donde se hace **C=0**, ya que si no se compra ningún artículo la utilidad será cero.

b. La función de utilidad para el caso del vino se define por:

$$U_2\,(x) = \int (30 - x) \int dx$$

Al emplear las fórmulas de integración se tiene que:

$$U_2(x) = \int (30 - x)\, dx = 30\int dx - \int x dx$$

Así, la función de utilidad total del vino es:

$$U2\,(x) = 30\,x\, - \frac{1\,x^2}{2} + C$$

Donde se hace *C=0*, ya que si no se compra ningún artículo la utilidadserá cero.

c. La utilidad que le produce al consumidor adquirir tres paquetes de pan, considerando que x=3 es:

$$U\,(x) = 40(3) - \frac{5}{2}(3)^2 = 97.5$$

Cuando el consumidor adquiere tres unidades de vino, su utilidad es:

$$U_2\,(x) = 30(3) - \frac{1}{2}(3)^2 = 85.5$$

Como puede observarse, el pan le produce una mayor utilidad a unindividuo que el vino.

En este tipo de problemas, la función de utilidad de un consumidor es un tanto subjetiva, ya que no aporta gran información. El único objetivo es determinar quéartículo le da mayor utilidad a un individuo.

La función de utilidad de una empresa es más específica y más objetiva en elsentido de que permite conocer el monto monetario en el cual se encuentran sus ganancias dependiendo del nivel de producción que mantenga.

6.2- Técnicas de integración.

Actualmente se puede obtener una gran variedad de resultados de integrales detodas las funciones que se han estudiado con anterioridad, en niveles anteriores, como son: algebraicas, polinomiales, entre otras; y a partir de estos, construir tablas de integrales indefinidas para poder hacer la aplicación directa en problemas particulares. A continuación se revelan las fórmulas básicas de integración:

$$\int f'(x)dx = F(x) + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int adx = ax + C$$

$$\int adx = ax + C$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, si\ m \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = In|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{In\ a} + C\ siendo\ a > 0\ y\ a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \log x\ \ dx = x \log x + C$$

$$\int \operatorname{In} x\ \ dx = x \operatorname{In} x + C$$

$$\int e^{ax+b}\ dx = e\frac{(ax+b)}{a} + C, con\ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x2+1}} = In\,|\,x + \sqrt{x2+1}\,| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x2+1}} = In\,|\,x + \sqrt{x2-1}\,| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x2+1}} = \frac{1}{2}\ In\,|\,\frac{x-1}{x+1}| + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} In\,|\,\frac{1+x}{1-x}| + C$$

En todos los casos se observa el valor constante C la constante de integración. Gráficamente, la integral indefinida es una serie gráficas paralelas que se obtienen dando diferentes valores a la constante C. Las curvas son paralelas porque para cualquier valor de x en el dominio de las funciones. La derivada es la misma y por tanto las curvas tienen la misma pendiente.

La integral indefinida tiene dos propiedades:

1. Distribuye en la suma algebraica:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

2. La integral del producto de una constante por una función, es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int a * f(x)\, dx = a \int f(x) dx$$

Integración por sustitución.

La integración por sustitución o mediante el cambio de una variable consiste en sustituir una parte del integrando $\boldsymbol{g(x)}$ por una nueva variable $\boldsymbol{g(x) = u}$:

$$\int \boldsymbol{f\,[g(x)]\, g'(x) dx \to [\, g(x) = u \to g'(x) dx = du] \to \int f(u)\, du}$$

Integración por partes.

A pesar de existir una gran variedad de fórmulas resuelta de integrales, en algunos casos no es posible aplicar ni una de ellas, por lo que se recurre a un método denominado integración por partes y consiste en dividir la función que se quiere integrar en un producto de funciones, con una de ellas derivable.

Si las funciones $\boldsymbol{u(x)\ y\ v(x)}$ son continuas y diferenciables en un intervalo $[\boldsymbol{a, b}]$ y sobre este intervalo existe la integral $\int \boldsymbol{vdu}$, entonces sobre este mismo intervalo existe también la integral $\int \boldsymbol{udv}$ y además $\int \boldsymbol{udv = uv - \int vdu}$

Ejemplo: Análisis de ganancias o pérdidas.

Una empresa dedicada a la fabricación de artículos de limpieza determinó que si se producen $x = 100$ artículos por semana, entonces el costo marginal está determinadopor $\boldsymbol{C(x)=ln\ x}$ y el ingreso marginal está dado por $\boldsymbol{I(x) = x\ ln\ x}$, donde el costo y el ingreso se calculan en miles de pesos. Con estos datos determine:

a. El ingreso total si $\boldsymbol{C = 50}$.

b. El costo total si los costos fijos son $\boldsymbol{C = 80}$.

c. La utilidad total.

Solución: Como se puede apreciar, las funciones que se nos proporcionan son logarítmicas, por lo cual la forma adecuada de resolver este problema es mediantela utilización del método de integración por partes. La fórmula empleada en la integración por partes es la estudiada con anterioridad.

a. La función de ingreso total se define por:

$$\boldsymbol{I(x) = \int\ x\ (ln\ x)\ dx}$$

Elija $\boldsymbol{u = ln\ x}$, por lo que $\boldsymbol{du = \frac{dx}{x}}$, $\boldsymbol{dv = xdx}$, con lo cual $\boldsymbol{v = \frac{x^2}{2}}$

Entonces:

$$\boldsymbol{I(x) = \int x\ (ln\ x)\ dx\ = \frac{x^2\ ln\ x}{2} - \int \frac{x\ dx}{2} = \frac{x^2 ln\ x}{2} - \frac{x^2}{4} + C}$$

Se sabe que $\boldsymbol{x=100}$ y $\boldsymbol{C=50}$, por lo que al sustituir:

$$\boldsymbol{I(x) = 100^2\ \frac{ln\ 100}{2} - \frac{100^2}{4} + 50\ =\ 20\,575.85}$$

b. La función de costo total es:

$$\boldsymbol{C(x) = \int (ln\ x)\ dx}$$

Elija $\boldsymbol{u=ln\ x}$, por lo que $\boldsymbol{du\ = \frac{dx}{x}}$, $\boldsymbol{dv = dx}$, con lo cual $\boldsymbol{v = x}$

Entonces:

$$C\ (x) = \int\ (ln\ x)\ dx\ = x\ (ln\ x)\ - \int\ dx = \ x\ (ln\ x\ )\ -\ x\ +\ C$$

Se sustituye $x\ =\ 100\ y\ C = 80$:

$$C\ (x) = 100\ (ln\ 100\ ) - 100\ +\ 80\ =\ 440.52$$

C. Con los datos obtenidos, la utilidad total es:

$$U(x) = I(x) - C\ (x) = 20\ 575.85 - 440.52 = 20\ 135.33$$

6.3- Aplicaciones en la administración y la economía.

Las aplicaciones de las integrales indefinidas se encuentran en su capacidadde reversar la derivación de las funciones de costos e ingresos para hallar losrespectivos totales de cada uno, al igual que pasa con la función utilidad, que como se conoce es la resta de los ingresos con los costos. También se aplica en laformación de capital y cálculo de los inventarios. A continuación, en este epígrafe se planteará un ejemplo práctico de la aplicación de las integrales indefinidas encada uno de estos elementos administrativos.

Costo marginal.

Si la función costo marginal está dada por:

$$C\,'\,(x)\ =\ \frac{dC(x)}{dx}$$

Entonces, el costo total será la integral con respecto a x de la función costomarginal:

$$\int C'(x)\ dx\ =\ C\ (x)\ +\ k$$

En este caso, por identificarse la función del costo marginal con C, la constantede integración la definiremos con la letra k. Entonces para obtener una únicafunción costo total, al integrar dicha función, debe especificarse una condición inicial, la cual es el costo fijo.

Ejemplo: Integración de los costos marginales.

Una agencia de seguros sabe que la función costo marginal por producir x segurosde gastos médicos es $\boldsymbol{C'(x) = 32x + 92}$ donde x es el número de unidades producidas y $\boldsymbol{C'(x)}$ es el costo marginal dado en dólares. Encontrar la función costo total, si el costo fijo es de $\boldsymbol{\$10}$.

Solución:

$$C(x) = \int (32x + 92)\, dx = 16x^2 + 92x + k$$

Sustituyendo la condición inicial ***C(0)=10*** ; se obtiene que ***k=10***; entonces, lafunción de costo total es:

$$C(x) = 16x^2 + 92x + 10$$

Ingreso marginal.

El ingreso marginal que depende de la cantidad demandada, es la derivada delingreso total con respecto a ***x***; es decir,

$$dI(x) = I'(x)dx$$

Por tanto, la función ingreso total es la integral, con respecto a x; de la funcióningreso marginal:

$$I(x) = \int I'(x)\, dx = I(x) + k$$

Se tiene que especificar una condición inicial para obtener una única función ingresototal. Para evaluar la constante de integración puede usarse la condición inicial de que el ingreso es nulo cuando la cantidad de demanda es nula.

Ejemplo: Integración de los ingresos marginales.

La aseguradora del ejemplo anterior fija un precio de 680 usd por unidad de venta de unseguro de gastos médicos. De aquí se tiene que la función del ingreso marginal por ventases ***I´(x) = 680*** usd. Para obtener la función ingreso total por ventas ***I(x)***, se integra:

$$I(x) = \int 680x = 680x + k$$

Como $\boldsymbol{I(0) = 0}$; entonces, la función ingreso total por la venta de ***x*** seguros degastos médicos es $\boldsymbol{I(x) = 680x}$.

Utilidad

Como se mencionó anteriormente la utilidad para una empresa es la cantidad monetaria que espera ganar al efectuar una venta luego de descontar los costosde los artículos que produjo y vendió.

Ejemplo: Cálculo de la utilidad.

Un empresario sabe que sus funciones de ingreso y costo marginales son
$\boldsymbol{I(x) = 8 - 6x + 2x^2 \; y \; C(x) = 2 + 60x - x^2}$.

Con esta información, se desea conocer:

a. La función de ingreso total y el ingreso total si se producen 50 artículos y ***C=200***.

b. La función de costo total y el costo total si se producen 50 artículos y losgastos generales son de 800.

c. La utilidad total.

Solución

a. Sea la función diferenciable I´(x)=8–6x+2x^2, la función de ingreso totalse define por:

$$\boldsymbol{I(x) = \int (8 - 6x + 2x^2)\ dx = 8 \int\ dx - 6 \int xdx + 2 \int x^2\, dx}$$

Cuando empleamos las fórmulas de integración la función de ingresototal es:

$$\boldsymbol{I(x) = 8x - 3x^2 + {}^2/_3\, x^3 + k}$$

Como queremos encontrar el ingreso total si x=50 y C=200:

$$\boldsymbol{I\,(50) = 8\,(50) - 3\,(50)\,v + {}^2/_3\,(50)^3 + 200 = 76\,433.33}$$

b. Con la función $\boldsymbol{C\ (x)\ =\ 2\ +\ 60\,x - x2}$, el costo total es:

$$\boldsymbol{C(x) = \int (2\ +\ 60x -\ x^2)\,dx = 2\int\ dx + 60\int\ xdx - \int x^2\,dx}$$

Al aplicar las reglas de integración, la función de costo total es:

$$\boldsymbol{C\ (x) =\ 2x\ +\ 30x^2 - {}^1\!/_3\,x^3\ + k}$$

Dado que $\boldsymbol{x = 50}$ y los gastos generales $\boldsymbol{C = 800}$, tenemos:

$$\boldsymbol{C\ (50)\ =\ 2\ (50)\ +\ 30\ (50)^2 - {}^1\!/_3\,(50)^3\ +\ 800\ =\ 34\,233.33}$$

Se sabe que el ingreso total es de $\boldsymbol{76\,433.33}$ y el costo total es de $\boldsymbol{34\,233.33}$. Es necesario recordar que la utilidad se obtiene restando al ingreso y el costo totales.De esta manera, la utilidad total es: $\boldsymbol{U(x) = I(x) - C(x)}$ y por lo tanto en $\boldsymbol{U(50) = 76\,433.33 - 34\,233.33 = 42\,200}$.

Formación de capital.

Una decisión a la que se enfrentan muchas organizaciones es la de determinar el punto óptimo en el tiempo en que deben sustituir una pieza importante de equipo.Dicho equipo se caracteriza con frecuencia por dos componentes de costo: el costocapital y el costo de operación. El costo capital es el costo de compra menos el valorde recuperación. Por ejemplo, si una máquina cuesta 100 000 usd y posteriormentese vende en 20 000 usd, el costo capital es de 80 000 usd. El costo de operaciónincluye los costos de propiedad y mantenimiento de una pieza de equipo. La gasolina, el aceite, el seguro y los costos de reparación asociados con tener y operar un vehículo pueden considerarse costos de operación.

El costo de capital es útil para determinar el momento en el cual se debe reemplazaralgún equipo, además de establecer el monto en el que habrá de incrementar odisminuir la ganancia de una empresa. Es en este sentido en el que se consideraeste rubro como un agotamiento de recurso, ya que la tecnología es un recursoindispensable en la mayoría de las actividades que desarrollan individuos o empresas,y si el equipo ya cumplió su vida útil es de esperarse que se reduzca su rendimiento,lo cual provoca que se incrementen los costos.

Entonces, formación de capital es un proceso que se da a través del tiempo de manera continua, donde se incrementa la cantidad acumulada de los bienes de capital. La acumulación de bienes de capital puede expresarse en función deltiempo, ***K(t)***.

La tasa de formación de capital $\boldsymbol{dK(t)}/\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{K'(t)}$ es igual al flujo de inversiónneta, representada por ***i(t)***. Por lo tanto, la acumulación de bienes de capital es
la integral con respecto al tiempo de la inversión neta:

$$\boldsymbol{K\,(t) = \int K'(t) = \int i\,(t)\,dt, donde\; i\,(t)\,dt = K\,(t) + k}$$

Se debe poner atención a la formación de capital en el sentido de que al acabarsela vida útil de algún equipo es necesario reponerlo y, además, en ocasiones resulta necesario adquirir mayores recursos tecnológicos para poder incrementarel nivel de producción.

Ejemplo: Inversión.

Si el flujo de inversión en una empresa está dado por:

$$i(t) = 6t^{2/5}$$

y la acumulación de capital inicial de bienes de capital $en\ t = 0\ es\ K(0)$, determine:

a. La función que representa el capital K.

b. El capital en el periodo $t = 3, con\ C = 100$.

Solución:

a. La función que representa el capital es:

$$K = 6\int t^{2-5}dt = \frac{42t^{-7.5}}{5} + C$$

b. Dado que *t=3* y *C=100*, tenemos:

$$K = \frac{42(3)^{-7/5}}{5} + 100 = 139.11$$

El capital para el periodo $t = 3$ es de \$ 139.11.

Inventarios.

Un problema común en las organizaciones es determinar cuánto se debe tener en existencia de un cierto artículo. Para el vendedor a menudeo, el problema puede referirse a cuántas unidades de cada producto debe tener en existencia, ya que novende grandes cantidades.

Para los productores, el problema puede implicar qué cantidad de cada materiaprima debe tener en existencia a fin de que si de pronto se incrementa la demanda de sus productos, éste sea capaz de cubrir las necesidades de los consumidores sin tener problemas de abastecimiento.

Un inventario comprende las existencias de cualquier artículo, material o recurso utilizado en una organización en los procesos de fabricación y/o distribución. Las materias primas, las partes componentes, los subensambles y los productosterminados son parte del inventario, así como los diversos abastecimientos requeridos en el proceso de producción y distribución.

Este problema se identifica con un área denominada control de inventario o administración de inventarios. Respecto a la pregunta de qué cantidad de inventariose debe tener a mano, puede haber costos asociados con el hecho de tener muy pocoo demasiado inventario.

La necesidad de los inventarios surge de las diferencias entre el tiempo y la localizaciónde la demanda y el abastecimiento, por lo que se usan como amortiguador entrela oferta y la demanda. Las políticas de inventarios de materias primas, productos en proceso o artículos terminados, deben tender a lograr un flujo continuo entre funciones de producción y distribución.

En general, los problemas de inventario se relacionan con la respuesta de cuánto sedebe ordenar (o producir) y con qué frecuencia se debe reordenar (o producir), a finde minimizar los costos de llevar el inventario, de producir u ordenar, de escasez ode faltante.

Cuando se habla de inventarios es necesario describir tres tipos de costos:

1. Costos de compra: se refieren al costo que involucra comprar artículos o materia prima para adquirir mercancía que habrá de utilizarse como protección ante una posible escasez o desabasto en el mercado.

2. Costos de tener: Este tipo de costo es aquel que se tiene cuando esnecesario mantener un nivel satisfactorio de materia prima o producto terminado, incluye los costos de manejo, daños y pérdidas provocados por el manejo de los artículos, fletes, papelería y todos los requerimientosde registro del almacén, además de tener que reponer mercancía que haya sido empleada.

3. Costo de mantener: Costos que se generan por el hecho de tener unartículo en inventario, incluyen costos de capital invertido, costos de deterioro, obsolescencia, robos, seguros e impuestos y los costos deespacio, gastos de instalación, depreciación del edificio y equipo dealmacén, renta de la superficie ocupada (aun cuando el edificio fuerapropio) y seguridad.

El costo de comprar se caracteriza por ser una especie de costo promedio de laforma:

$$\boldsymbol{Costo\ de\ comprar} = \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{X}}$$

Donde S es el costo de la mercancía que habrá de almacenarse y $\boldsymbol{x}$ es el númerode artículos o de materia prima que se almacena. El costo de tener es de la forma: $\boldsymbol{S(x)}$. Esto indica que tener en inventario tiene un costo para cada unidad.

Por último, el costo de mantener es un costo fijo para todo el lote que esté en elinventario.

Ejemplo: Movimiento de inventarios.

Un vendedor de bicicletas examinó los datos acerca de los costos y determinó unafunción que expresa cambio en el costo anual de comprar y tener el inventario como función del tamaño (número de unidades) de cada orden que vende de bicicletas. La función de cambio en el costo es: $\boldsymbol{C(x) = 4\,860(x)^{-2} + 15}$. En donde $\boldsymbol{C'(x)}$ es el cambio en el costo anual del inventario y $\boldsymbol{x}$ es el número de bicicletas ordenadascada vez que el vendedor se reabastece. Si el costo de mantener el inventario es $\boldsymbol{C = 750\,000\ usd}$, determine a cuánto se espera que ascienda el costo anual del inventario si se ordenan $\boldsymbol{x = 18}$ bicicletas cada vez que el vendedor se reabastece.

Solución:

En primer lugar obtenga el costo anual del inventario, para ello integre lafunción de cambio:

$$C(x) = \int (-4\,860x2 + 15)\,dx = -4\,860 \int x2\,dx + 15 \int dx = \frac{4\,860}{x} + 15x + k$$

Como el costo de mantener el inventario es ***C=750 000 usd***, el costo anual del inventario se representa por:

$$C(x) = \frac{4\,860\,x}{x} + 15\,x + 750\,000$$

Dado que se quiere conocer el costo cuando se ordenan 18 bicicletas, se tiene:

$$C\,(18) = \frac{4\,860}{(18)} + 15\,(18) + 750\,000 = 750\,540\,usd$$

Entonces, El costo anual del inventario cuando se ordenan 18 bicicletas es de 750 540.00 usd.

6.4- Ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial ordinaria de primer grado es una ecuación de la forma$y' = f(x, y)$, donde $y = y(x)$ es una función desconocida. Resolver la ecuación es encontrar todas las funciones y que la satisfacen. Por ejemplo, la ecuación diferencial$y' = xy$ tiene entre sus soluciones a la función $y(x) = e^{x2}/2 = xy$, tal y como exige la ecuación.

En este tema veremos algunos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de este tipo. Hay que advertir que es posible plantear y resolver ecuaciones diferencialesmucho más generales: una ecuación ordinaria de grado n es una ecuación en la queaparecen las derivadas de la función incógnita hasta el orden n. El adjetivo “ordinaria”

se opone a “ecuación en derivadas parciales”, que es una ecuación cuya funciónincógnita tiene varias variables y en la que aparecen las derivadas parciales de la misma. También es posible plantear sistemas de ecuaciones diferenciales convarias incógnitas. Pero aquí se estudiará únicamente el caso que hemos descrito.

En general, una ecuación diferencial tiene infinitas soluciones, de modo que la familia de todas ellas depende de una constante de integración. Por ejemplo, lasolución completa de la ecuación anterior es $y = Ce^{x2}/_{2}$, donde C es un número realarbitrario. Para cada valor de C tenemos una solución distinta.

Una solución concreta de una ecuación diferencial queda determinada si seespecifica el valor en un punto de la función incógnita. Por ejemplo, la únicasolución de la ecuación anterior que cumple $y(0) = 3$ es la función $y(0) = 3e^{x2}/_{2}$

A menudo es frecuente usar la notación $^{dy}/\ dx$ en lugar de y´ en las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la ecuación anterior puede expresarse también como

$$\frac{dy}{dx} = xy\ o\ incluso\ dy = xy\ dx$$

Ecuaciones con variables separables.

Las ecuaciones más fáciles de resolver son las de variables separables. Sonaquellas que pueden escribirse como

$$u\ (y)\ dy\ =\ v\ (x)\ dx$$

Donde u y v son dos funciones. En tal caso, basta con integral los dos miembros.

$$\int u\ (y)\ dy\ =\ \int v\ (x)\ dx$$

Para encontrar la solución general. Para resolver la ecuación diferencial $y´ = xy$ es necesario acotar que la ecuación es de variables separables, entonces se puedeescribir en la forma

$$\frac{dy}{y} = xdx\ y$$

Para darle solución a esta ecuación se hace lo siguiente:

$$\int dy/y = \int xdx$$

Lo que da como resultado

$$ln\ y\ =\ x^2\ +\ C\ 2$$

Se despeja la y se calcula la exponencial de ambos miembros:

$$y = e^{x2}/_{2}k$$

Si llamamos $C = e^k$ queda la ecuación que habíamos indicado anteriormente: $y = Ce^{x2}/_2$

La aplicación que tiene esta herramienta matemática se encuentra en la matemática financiera, donde se utiliza para el cálculo de la capitalización con interés variable. Sise invierte un capital C_0, éste variará con el tiempo, es decir, se tendrá una función $C(t)$con $C(0) = C_0$. El interés instantáneo de la inversión es la tasa (o, equivalentemente)tanto por ciento de incremento del capital en un instante, es decir:

$$i_\infty (t) = \frac{1}{C}\frac{dC}{dt}$$

Si se conoce el interés se tiene una ecuación diferencial que nos permite calcular elcapital en un instante dado. Si el interés es constante se obtiene la fórmula usual decapitalización continua:

$$\frac{dC}{C} = i_\infty dt \subset ln \subset C = i_\infty (t) + K \subset C = e^k e^{i\infty t} \subset C = C_0 e^{i\infty t}$$

No obstante, la ecuación diferencial puede resolverse igualmente para intereses variables.

Ejemplo: Capitalización con interés variable

Si se deposita un capital de 1 000 usd a un interés continuo variable, que ha resultadoser $i_\infty (t) = 0.05 + 0.01t$, *el capital se obtiene como*:

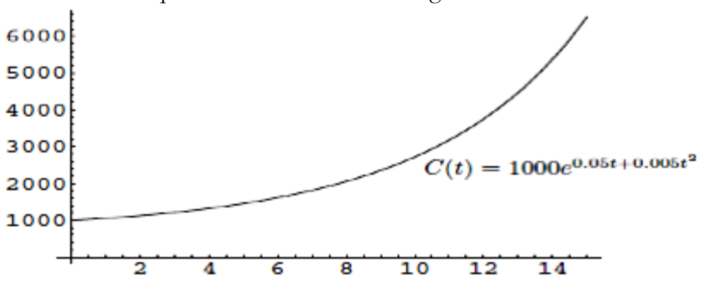
$$C(t) = C_0 e^{(0.05+0.01t)t} = C_0 e^{(0.05+0.01t^2)}$$

Solución: Como en el instante inicial se depositan 1 000 usd se tiene $C_0 = C(0) = 1000$

Entonces, el capital se puede expresar en función del tiempo como:

$$C(t) = 1000e^{(0.05+0.01t^2)}$$

La gráfica de la solución que hemos obtenido es la siguiente:



Ecuaciones lineales.

Son las ecuaciones de la forma:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Se resuelven haciendo el cambio de variable ***y(x)=u(x)v(x)***.

Para resolver la ecuación diferencial lineal, como por ejemplo, $y' + 2xy = x$, es necesario hacer el cambio $y = uv$, con lo que $y' = u'v + uv'$ y como resultado de esto se obtiene:

$$u'v + uv' + 2xuv = x$$

Se saca el factor común u y queda:

$$u(v' + 2xv) + u'v - x = 0$$

Ahora se elige v de modo que anule el paréntesis, es decir, ***v´+2xv=0***.

Esta ecuación es de variables separables:

$$dv = -2xv\,dx \subset dv/v = -2x\,dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int 2x\,dx\,v$$

$$\ln v = -x^2\, v = e^{-x^2}$$

No se pone ninguna constante de integración porque nos basta una solución. Sustituyendo v en $\boldsymbol{u\,(v' + 2xv)\; +\; u'v\; -\; x\; = 0}$ queda la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{u'e^{-x^2} - x = 0}$$

Esta ecuación también es de variables separables:

$$\boldsymbol{du = xe^{x^2}\,dx \subset u = \int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + k}$$

La solución es, por tanto:

$$\boldsymbol{y = uv = e^{-x^2}\frac{1}{2}\,e^{x^2} + k)}$$

La aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales está en el cálculo del precio enfunción del tiempo. Vean un ejemplo.

Ejemplo: Precio en función del tiempo.

Suponga que las funciones de oferta y demanda de un bien son:

$$\boldsymbol{Q_d = 12 - p \text{ y } Q_s = -6 + 2p}$$

La tasa de cambio del precio respecto al tiempo (en días) es un tercio de la demanda excedente $\boldsymbol{Q_d - Q_s}$.

a. Calcula la función $p(t)$.

b. Calcula el precio esperado dentro de 2 días si el precio actual es $\boldsymbol{p(0) = 4\,usd}$.

c. Calcula el precio esperado dentro de 10 días suponiendo $\boldsymbol{p(0) = 4\,usd}$ y, alternativamente, $\boldsymbol{p(0) = 8\,usd}$. Interpreta el resultado.

Solución:

a. La tasa de cambio de precio es su derivada respecto al tiempo, luego eldato es que:

$$\boldsymbol{p' = \frac{1}{3}(Q_d - Q_s) = \frac{1}{3}\,(12 - p + 6 - 2p) = 6 - p}$$

Tenemos, pues, una ecuación diferencial lineal. Para resolverla hacemosp=uv, con lo que $\boldsymbol{p' = u'v + uv'}$ y al sustituir queda:

$$\boldsymbol{u'v + uv' = 6 - uv \subset u'v + uv' + uv = 6 \subset u(v' + v) + u'v = 6}$$

Se resuelve $\boldsymbol{v' + v = 0}$, *es decir*:

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dt} = -v \subset \frac{dv}{dt} = -dt \subset \int \frac{dv}{v} = -\int dt \subset \ln v = -t}$$

Despejando, $\boldsymbol{v = e^{-t}}$. Para este valor de $\boldsymbol{v}$, la ecuación se reduce a $\boldsymbol{u'e^{-t} = 6}$, luego $\boldsymbol{u' = 6e^{t}}$:

$$\boldsymbol{u = \int \subset 6e^{t} \subset dt = 6e^{t} + k}$$

La función precio será $\boldsymbol{p(t) = uv = (6e^{t} + k)\, e^{-t} = 6 + ke^{-t}}$.

b. Sabiendo el precio inicial $\boldsymbol{p(0) = 4}$ podemos calcular la constante k:

$$\boldsymbol{4 = p\,(0) = 6 + ke^{0} = 6 + k \subset k = -2}$$

La función precio es $\boldsymbol{p(t) = 6 - 2e^{-t}}$y para $\boldsymbol{t = 2}$ queda $\boldsymbol{p(5) = 6 - 2e^{5} = 5.72\ usd}$.

c. Para $\boldsymbol{p(0) = 4}$ se ha visto que el precio es $\boldsymbol{p(t) = 6 - 2e^{-t}}$, de donde se obtiene que $\boldsymbol{p(10) = 5.99991 \approx 6\ usd}$.

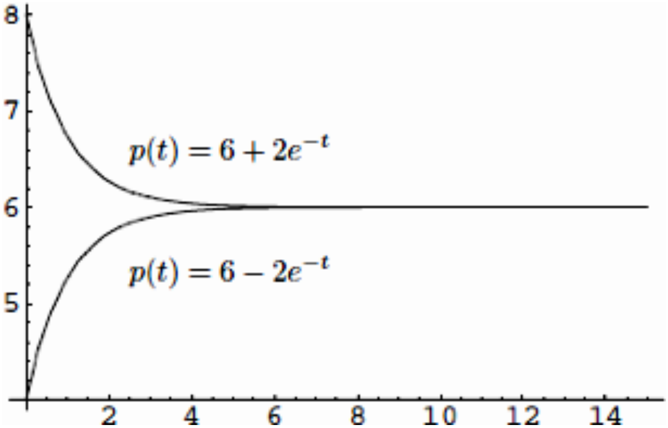
Para $\boldsymbol{p(0) = 8}$ la constante $\boldsymbol{k}$ es:

$$\boldsymbol{8 = 6 + ke^{-0} \subset k = -2}$$

Luego $\boldsymbol{p(t) = 6 + 2e^{-t} y\ p(10) = 6.00009 \approx 6\ usd}$.

Se obtiene aproximadamente el mismo resultado porque el precio tiende alprecio de equilibrio, que, como es fácil comprobar, es de 6 usd.

Si se representa gráficamente las funciones $p(t)=6+2e^{-t}$ y $p(t)=6-2e^{-t}$ seobserva claramente que ambas tienden al precio de equilibrio $p=6$ ***usd***.



6.5- Resumen del capítulo. Aplicaciones prácticas en la administración y la economía.

Resumen del capítulo:

Integral Indefinida.

Primitiva de una función:

Una función $\boldsymbol{F}$ es una primitiva de $\boldsymbol{f}$, en un intervalo I, si $\boldsymbol{F'(x)} = \boldsymbol{f(x)}$ para todo $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{I}$. Sumando a ***F(x)*** una constante arbitraria $\boldsymbol{C}$ se obtiene de nuevo una primitiva,ya que la derivada sigue siendo ***f(x)***. Entonces toda primitiva $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{f}$ debe ser de laforma $\boldsymbol{G(x)} = \boldsymbol{F(x) + C}$, donde $\boldsymbol{C}$ es una constante.

La operación de hallar todas las primitivas de una función se llama integración:

$$\int \boldsymbol{f\,(x)\,dx = F\,(x) + C}$$

Fórmulas básicas de integración:

$$\int f'(x)dx = F(x) + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int adx = ax + C$$

$$\int adx = ax + C$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, si\ m \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = In|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{In\ a} + C\ siendo\ a > 0\ y\ a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \log x\ \ dx = x \log x + C$$

$$\int \ln x\ \ dx = x \ln x + C$$

$$\int e^{ax+b}\ dx = e\frac{(ax+b)}{a} + C, con\ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x2+1}} = In\,|\,x + \sqrt{x2+1}\,| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x2+1}} = In\,|\,x + \sqrt{x2-1}\,| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x2+1}} = \frac{1}{2}\ In\,|\ \frac{x-1}{x+1}\,| + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}In\,|\ \frac{1+x}{1-x}\,| + C$$

En todos los casos se observa el valor constante C la constante de integración. Propiedades:

1. $\int [\,\boldsymbol{f(x) + g(x)}\,]\ \boldsymbol{dx}\ = \int \boldsymbol{f\ (x)\ dx}\ + \int\ \boldsymbol{g\ (x)\ dx}$
2. $\int \boldsymbol{a}\ *\ \boldsymbol{f\ (x)\ dx}\ =\ \boldsymbol{a}\ \int \boldsymbol{f\ (x)\ dx}$

Integración por sustitución.

La integración por sustitución o mediante el cambio de una variable consiste en sustituir una parte del integrando ***g(x)*** por una nueva variable $\boldsymbol{g(x) = u}$**.**

Integración por partes.

Si las funciones $\boldsymbol{u(x)}$ y $\boldsymbol{v(x)}$ son continuas y diferenciables en un intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ y sobre este intervalo existe la integral $\int \boldsymbol{vdu}$, entonces sobre este mismo intervalo existe también la integral $\int \boldsymbol{udv}$ y además $\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$.

Aplicaciones en:

1. Costo total es la integral con respecto a x de la función costo marginal:

$$\int \boldsymbol{C'(x)\,dx = C\,(x) + k}$$

2. La función ingreso total es la integral, con respecto a x; de la funcióningreso marginal:

$$\boldsymbol{I\,(x) = \int I'(x)\,dx = I\,(x) + k}$$

3. La formación de capital es un proceso que se da a través del tiempo de manera continua, donde se incrementa la cantidad acumulada de losbienes de capital.

$$\boldsymbol{K\,(t) = \int K'(t) = \int i(t)\,dt\ , donde\ i\,(t)\,dt = K\,(t) + k}$$

4. Un inventario comprende las existencias de cualquier artículo, material o recurso utilizado en una organización en los procesos de fabricación y/o distribución.

$$\boldsymbol{Costo\ de\ comprar = \frac{S}{x}}$$

Ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial ordinaria de primer grado es una ecuación de la forma $\boldsymbol{y' = f(x,y), donde\ y = y(x)}$ es una función desconocida.

Las ecuaciones de variables separables son aquellas que pueden escribirse como:

$$u\,(y)\,dy = v\,(x)\,dx$$

Donde u y v son dos funciones. En tal caso, basta con integral los dos miembros.

$$\int u\,(y)\,dy = \int v\,(x)\,dx$$

Para resolver la ecuación diferencial lineal, es necesario hacer el cambio $\boldsymbol{y = uv}$,con lo que $\boldsymbol{y' = u'v + uv'}$ y como resultado de esto se obtiene:

$$u'v + uv' + 2xuv = x$$

Se saca el factor común u y queda:

$$u(v' + 2xv) + u'v - x = 0$$

Ejercicios relacionados con la administración y la economía:

1. Las funciones de ingreso y costo marginal de una empresa que se dedica a la venta de seguros son $\boldsymbol{I(x) = 4 + 80x - x^2\ y\ C(x) = 12 - 4x + x^2}$ respectivamente,y si la empresa conoce que para el ingreso $\boldsymbol{C = 80}$ y para los costos $\boldsymbol{C = 100}$, determina la utilidad total al vender $\boldsymbol{x = 20}$ unidades.

2. Si la utilidad marginal de una tienda que vende aparatos electrodomésticos es $\boldsymbol{U(x) = x^3\ ln\ x}$, determina la utilidad total si $\boldsymbol{x = 20\ y\ C = 300}$.

3. Una agencia de viajes determina que su función de utilidad marginal se define por $\boldsymbol{U'(x) = (x^2 + 1)x\ dx}$. Si la agencia tuvo $\boldsymbol{x = 10}$ ventas y si $\boldsymbol{C = 100}$, determina la utilidad total.

4. Una agencia de publicidad realizó un estudio para conocer la utilidad que tuvo el mes pasado y determinó las siguientes funciones de ingreso marginal y costo marginal:

$$\boldsymbol{I'(x)\frac{15x^4}{x^5 + 7} \quad y\ \ C'(x) = 2x(x^2 + 5)^{-1}}$$

El costo y el ingreso (en miles de pesos) están en función del número de servicios que prestó la agencia. Determine:

   a. La función de ingreso total y el ingreso total al prestar 35 servicios si $\boldsymbol{C = 20}$.

   b. La función de costo total y el costo total cuando se dan 35 servicios y se tienen gastos generales de $\boldsymbol{C = 15}$.

   c. La utilidad total cuando se dan 35 servicios.

5. El departamento de planeación de una empresa que fabrica calzado considera realizar una inversión a fin de actualizar sus procesos productivos. Al hacer un estudio, encontró que su flujo de inversión está dado por ***i(t)=ln t***. Determine el

desembolso que debe realizar en el cuarto año, si el flujo está en unidades que representan $\mathbf{20\ 000}\ \boldsymbol{usd}$

6. Un distribuidor de pelotas de tenis se siente satisfecho porque este deportese convirtió en uno de los más populares del país. Uno de los principales problemas del distribuidor es abastecer la demanda de pelotas de tenis, las cuales compra periódicamente a un fabricante de artículos deportivos.El cambio en el costo de comprar y tener el inventario de pelotas estádefinido por la función:

$$\boldsymbol{C'(x) = -120\ 000x^2 + 0.12}$$

En donde x es el tamaño de cada orden (en docenas de pelotas de tenis) y***C(x)*** es el cambio en el costo anual del inventario. Si la empresa determinaque el costo de mantener el inventario es ***C=2 000 000***, determinemosel monto al cual ascienden los costos de inventario si se ordenan 1 000docenas de pelotas.

7. Un distribuidor de refacciones para automóvil tiene una alta demandade esos productos, por lo cual decide establecer una política de inventarios a fin de no quedarse sin artículos. Al efectuar un estudioencontró que el cambio que tiene el costo de tener un inventario es ***C (x)=3 ln x***, y el costo de mantener el inventario es de ***15 000***,determinemos el costo por tener y mantener en inventario 50 artículos.

8. Una empresa determina que su flujo de inversión es $\boldsymbol{i(t) = 15t^{1/4}}$, la acumulación del capital a ***t=0*** es 30; encontrar la función que representael capital, ***K***.

9. Un fabricante determinó una función de costos que expresa el cambioen el costo anual de comprar y tener su inventario de materias primascomo función del tamaño de cada orden. La función de cambio en el costo es $\boldsymbol{C'(x) = -9000x^2 + 10}$.

10. Sea p el precio de un bien, y supongamos que la oferta y la demanda vienen dadas por: $\boldsymbol{S(p) = 2p\ y\ D(p) = 100 - 8p}$. Calcula el precio deequilibrio. Supongamos que el precio p varía con el tiempo $\boldsymbol{p = p(t)}$ yque $\boldsymbol{p' = 0.5(D(p) - S(p))}$. Interpreta económicamente esta condición y calcule $\boldsymbol{p(t)}$.

11. Depositamos un capital de 1 000 usd. durante 10 años a un interéscontinuo variable, que ha resultado ser $\boldsymbol{i_{\infty}(t)=0.04+0.009t}$. Calcula el capital final.

Capítulo VII: Cálculo integral 2da Parte: Integral definida.

Contenidos

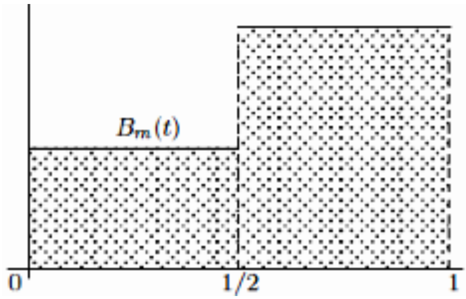
La integral definida, al igual que su homogénea, tiene aplicaciones en la administración y la economía, donde resuelve problemas con un grado de sofisticación mayor. Su diferencia con la integral indefinida es que esta se acota a un intervalo, es decir, estádefinida entre dos puntos. En este capítulo se estará profundizando en este aspectoy sus aplicaciones.

7.1 - Integrales definidas.

Suponga que una empresa ha tenido a lo largo de un año unos beneficios marginales constantes de $\boldsymbol{200\ usd./año}$. Así, durante cada mes (1/12 de año) ganó $\boldsymbol{200/12} = \boldsymbol{16.6\ usd}$, lo cual tiene sentido. También se puede decir que cada segundo estuvo ganando $\boldsymbol{0.00000038\ usd}$, lo cual no tiene sentido económico, pero esto no importa, pues las hipótesis serán aceptables si, efectivamente, cada mes la empresaincrementó sus beneficios en $\boldsymbol{16.6\ usd}$. Así, si una empresa tiene unos beneficios marginales constantes de $\boldsymbol{200\ usd/año}$, se puede decir que al cabo de un año sus beneficios acumulados pasan a ser de $\boldsymbol{200\ usd}$.

Supongamos ahora que los beneficios marginales no han sido constantes, sino quefueron de $\boldsymbol{100\ usd/año}$ el primer semestre y de $\boldsymbol{200\ usd/año}$ el segundo semestre.Más concretamente:

$$\boldsymbol{B_m(t) = \begin{cases} 100\ si\ 0 \le t \le {}^{1}/_{2} \\ 200\ si\ {}^{1}/_{2} \le t \le 1 \end{cases}}$$



Donde t es el tiempo expresado en años.

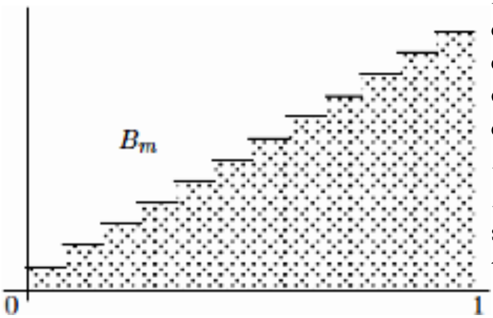
En este caso, los beneficios acumulados son:

$$B = 100 * {}^1/_2 + 200 * {}^1/_2 = 150\ usd$$

Conviene observar que los beneficios coinciden con el área que queda por debajo de la gráfica de la función de beneficios marginales (la zonasombreada en la figura).

Suponga ahora que los beneficios marginales no han sido constantes durante cada semestre, sino que han variado cada mes. Diga que han sido de ***20 usd/ año*** en enero, de ***40 usd/año*** en febrero, etc. Para expresar matemáticamente este caso, o bien se distingue doce casos en la definición de B_m, o bien usamos la función parte entera $E(x)$:

$$Bm\,(t) = 20\,[\,E\,(12t) + 1\,]$$



Para calcular el beneficio acumulado seha de descomponer el año en los doceperiodos (los doce meses) en los que elbeneficio marginal es constante. En eneroel beneficio acumulado es de ***20/12 = 16.6 usd***, en febrero seacumuló ***40/12 = 16.6 usd*** que hay que sumar a las de enero,y así sucesivamente, con lo que el beneficioacumuladoal terminardiciembreresultaser:

$$B = 20 + 40 + \cdots + 240 = 130\ usd$$

El resultado es también el área que deja bajo su gráfica la función de beneficiomarginal.

La expresión del beneficio marginal es complicada porque matemáticamente es complicado tratar con saltos bruscos, y aquí se está suponiendo que el beneficiomarginal aumenta a saltos. Matemáticamente es más fácil trabajar si se supone queel beneficio marginal varía de forma continua con el tiempo, lo cual es tan artificial como toda variación continua, pero a menudo un modelo matemático con este tipo de hipótesis se ajusta bien a la realidad en sus predicciones y es mucho más fácil de tratar.

Suponga ahora que el beneficio marginal de la empresa viene dado por la función:

$$B_m\,(t) = 240t$$

Esto significa que, por ejemplo, a finales de febrero la empresa tenía una tasa de beneficios de $Bm(2/12) = \ 40\ usd/año$, igual que en el caso anterior, pero la diferenciaes que esto no fue constante durante todo el mes de febrero, sino que a principio demes sus beneficios eran de *20 usd/año* y fueron ascendiendo gradualmente hasta llegar a las $40\ usd/año$ a fin de mes. Para calcular el beneficio acumulado en este caso necesitaremos el cálculo integral, por lo que conviene empezar a introduciralgunos de los conceptos en los que se basa.

Una función f: $[a, b]$ está acotada en el intervalo $[a, b]$ si existen números reales $m \ \leq \ M$ tales que para todo $x \ \subset \ [a, b]$ se cumple $m \leq f(x) \leq \ M.$ En tal caso se dice que m esuna cota inferior de $f\ y\ que\ M$ es una cota superior.

Volviendo al ejemplo que se estaba estudiando la función $f \ = B_m$, definida en el intervalo $[0, 1]$ en el que, ciertamente, está acotada. Una cota inferior es *m=0* y una cota superior es $M \ = 240.$ Para calcular el beneficio acumulado consideramos una particióndel intervalo, por ejemplo la partición en meses; es decir, $t_0 = 0, t_1 = {}^1/_{12}, t2 = {}^2/_{12}$, etc.

En el intervalo $[t_0, t_1\ ]$, la función B_m pasa de 0 a 20, luego se tiene que $m_1\ B_m = 0$ *y*
$M_1\ B_m = 20$.

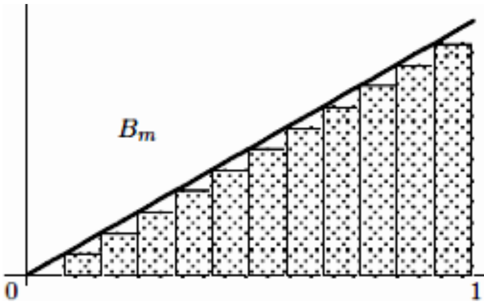
De forma similar $m_2\ B_m = 20\ y\ M_2\ B_m = 40$, etc.

Todavía no se conoce como calcular el beneficio acumulado cuando el beneficio marginal es B_m, pero sí que podemos resolver un problema más simple: ¿Cuál seríael beneficio acumulado si en cada intervalo $[t_i - 1, t_i]$ (o sea, en cada mes) el beneficio marginal se mantuviera constante igual a $m_i\ B_m$? Entonces el beneficio en enerosería nulo (pues $m_1\ B_m=0$), el de febrero sería ${}^{20}/_{12}$, pues $m_2\ B_m= 20$, etc.

En total se tendría

$$s(B_m)= \sum_{i=1}^{12} m_i(B_m)\frac{1}{12} = 110usd$$

Esto no es el beneficio acumulado realmente, pues se ha redondeado hacia abajoel beneficio marginal en cada intervalo. Por ejemplo, en enero se ha consideradoque no se acumula beneficio porque el primer segundo de enero era así, peroa lo largo del mes el beneficio marginal crece y eso no se ha tenido en cuenta. Similarmente, se ha considerado que el beneficio marginal de febrero era de ***20usd/año***, cuando eso sólo es así el primer segundo y no se ha tenido en cuentaeste crecimiento.

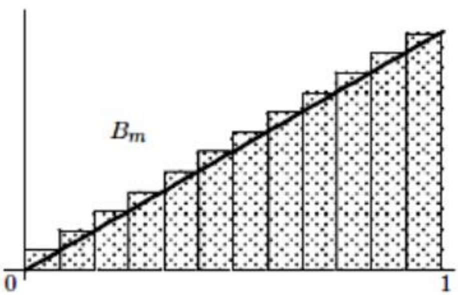


La figura muestra la diferencia entre lo que se ha calculado y lo que sequiere calcular. Se ha calculado laregión sombreada y lo que queremoscalcular es el área que deja la función B_m bajo su gráfica. Encima de cada columna de área que se ha contadohay un triángulo que corresponde a los beneficios acumulados como consecuencia del aumento de B_m que no se haconsiderado. Se tiene, pues, que la suma que se ha calculado queda por debajodel beneficio acumulado B que se quiere calcular:

$$110 = s(B_m) \leq B$$

Por otra parte, también se sabe calcular el beneficio acumulado si se supone queel beneficio marginal en cada mes $[t_i - 1, t_i]$ permanece constantemente igual a $M_i(B_m)$. En tal caso sería:

$$S(B_m) = \sum_{i=1}^{12} m_i(B_m)\frac{1}{12} = 110usd$$



Ahora nuestro cálculo supera el valor B que quiere calcular, pues, por ejemplo, se ha supuesto que durante el mes deenero se ha tenido unos beneficios marginales de 20 usd/año cuando esto sólo ha sido así a final de mes. La figuramuestra unos triángulos de exceso de lasuma respecto al valor que buscamos.En resumen se tiene que:

$$110 = s(B_m) \leq B \leq S(B_m) = 130$$

No se ha calculado el beneficio acumulado pero ahora se conoce que está entre 110y 130 usd. De forma general:

Si $\boldsymbol{f}\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ es una función acotada y $\boldsymbol{P}$ es una partición de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, se define la suma superior de Riemann y la suma inferior de Riemann de $\boldsymbol{f}$.

Si la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ representa el incremento marginal de una cierta magnitud $\boldsymbol{M}$ (es decir, lo que aumenta $\boldsymbol{M}$ por cada unidad marginal que aumenta x en un puntodado), entonces las sumas $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{f})$ y $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{f})$ son aproximaciones por defecto y por exceso al incremento acumulado de M en el intervalo ***[a,b]***. Más concretamente, la suma inferior es la aproximación que resulta de suponer que en cada intervalo $[\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{1}, \boldsymbol{x_i}]$ el incremento marginal $\boldsymbol{f}$ permanece constantemente igual al menor valor que realmentetoma en él. La suma superior es la aproximación que resulta de tomar como valor constante para $\boldsymbol{f}$ el mayor valor que realmente toma.

La clave para llegar al valor exacto del beneficio acumulado es que cuando tomamos particiones de norma cada vez más pequeña el error que cometemos se hace cadavez menor.

Entonces, el beneficio acumulado B tiene que cumplir:

$$\mathbf{120}\frac{(\mathbf{1}-\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}} \leq \boldsymbol{B} \leq \mathbf{120}\frac{(\mathbf{1}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}}$$

Como el límite cuando n tiende a infinito de los dos extremos es 120, ha de ser $\boldsymbol{B} = \mathbf{120}$.

Sea $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ una función acotada. Se definen la integral inferior de Darboux y laintegral superior de Darboux de $\boldsymbol{f}$ en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ como:

$$\int_{\boldsymbol{a}^{*}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{sup}\ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{f}) \qquad \boldsymbol{y} \qquad \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}^{*}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{inf}\ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{f})$$

En otras palabras, la integral inferior es el mayor valor al que se puede acercar mediante sumas inferiores y la integral superior es el menor valor al que se puedeacercar mediante sumas superiores.

Se dice que la función $\boldsymbol{f}$ es integrable Riemann en $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ si ambas integrales coinciden, y entonces al valor común se le representa por:

$$\int_{a^{*}}^{b} f(x)dx = \int_{b}^{a^{*}} f(x)dx = \int_{a^{*}}^{b} f(x)dx$$

Por ejemplo, se ha comprobado que la función $\boldsymbol{B_m(t) = 240t}$ es integrable Riemann en $[0,1]$ y

$$\int_{0}^{1} 240t\, dt = 120$$

En conclusión, la interpretación marginal de la integral de Riemann es la siguiente: "Si la función $\boldsymbol{f(x)}$ representa el incremento marginal de una función $\boldsymbol{F}$ para cadavalor de x, entonces $\int \boldsymbol{f(x)\, dx}$ representa el incremento acumulado de $\boldsymbol{F}$ en elintervalo $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, es decir, es igual a $\boldsymbol{F(b) - F(a)}$."

Toda la discusión precedente se resume en que la suma de los infinitos incrementos infinitamente pequeños $\boldsymbol{dB}$ es matemáticamente la integral de esta función (sobre el intervalo de tiempo en que se acumulan los beneficios).

Para que una integral $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\, dx}$ tenga una interpretación económica el integrando $\boldsymbol{f(x)}$ ha de ser siempre una magnitud marginal respecto de la variable dx, es decir,si $\boldsymbol{x}$ es tiempo, entonces el integrando tendría que ser un beneficio marginalrespecto del tiempo, o un ahorro marginal respecto del tiempo, etc. En particular tendrá que estar expresado en "unidades de lo que sea" / unidades de tiempo. Si $\boldsymbol{x}$ es la cantidad producida de un bien, el integrando tendrá que ser el coste marginalrespecto a la producción, o el beneficio marginal respecto de la producción, etc.

En la práctica, el único criterio que se verá para reconocer funciones integrables esel siguiente: "Si una función acotada $\boldsymbol{f}$: $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ es continua en todo $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ salvo a losumo en un número finito de puntos entonces es integrable Riemann en $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. En particular, toda función continua en un intervalo $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ es integrable Riemann."

Para el cálculo explícito de integrales, basta aplicar lo siguiente: "*Si* $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ es una función continua en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ entonces existe una función $\boldsymbol{F}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ continua en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ y derivable en $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tal que $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$ y si F es cualquier función que cumpla esto entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)"$$

Cualquier función $\boldsymbol{F}$ en las condiciones de lo antes expuesto se denomina primitiva de la función $\boldsymbol{f}$, dicho en otras palabras a como se estudió en el capítulo anterior, loque en este caso, haciendo referencia a las integrales indefinidas.

Respecto al cálculo de integrales definidas en la práctica, se observa lo siguiente: Enlas condiciones del ejemplo que se ha estado estudiando, se llama ***B(t)*** a la funciónque nos da el beneficio acumulado en el instante t. Suponga que es derivable en todopunto. Entonces $\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{t})$ es el aumento que experimenta el beneficio acumulado en t por cada unidad marginal de tiempo que pasa, es decir, es el beneficio marginal en t. Con la notación que se emplea: $\boldsymbol{B_m}\ (\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{t})$. Según se ha visto, $\int_s^b \boldsymbol{B_m}\ (\boldsymbol{t})\, \boldsymbol{dt}$ es el beneficio acumulado desde el instante a hasta el instante ***b***:

$$\int_a^b \boldsymbol{B(t)\, dt = B\ (b) - B(a)}$$

Por ejemplo, para calcular $\int_0^1 \boldsymbol{240t\, dt}$ basta con observar que $\boldsymbol{F(t) = 120t^2}$ es una primitiva de $\boldsymbol{240t}$, para luego:

$$\int_0^1 \boldsymbol{240t\, dt = F(1) - F(0) = 120 - 0 = 120}$$

Un poco más general, se cumple lo siguiente: "sea ***f:[a,b]*** una función integrable Riemann en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Entonces la función $\boldsymbol{F}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ dada por $\boldsymbol{F(t) = \int f(x)\, dx}$ es continua en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ y si ***f*** es continua entonces $\boldsymbol{F}$ es derivable y $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$."

Descubre tu próxima lectura

Si quieres formar parte de nuestra comunidad,
regístrate en https://www.grupocompas.org/suscribirse
y recibirás recomendaciones y capacitación

compÁs

Grupo de capacitación e investigación pedagógica

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

ISBN: 978-9942-33-514-2

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica