compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Ecuaciones diferenciales

Andrés Fernando Morocho Caiza
Cristian Luís Inca Balseca
Joseph David Guerra Chávez
Evelyn Geovanna Inca Balseca

Ecuaciones diferenciales

© Andrés Fernando Morocho Caiza
Cristian Luís Inca Balseca
Joseph David Guerra Chávez
Evelyn Geovanna Inca Balseca

Título del libro

Ecuaciones diferenciales

ISBN: 978-9942-33-620-0

Publicado 2022 por acuerdo con los autores.

Guayaquil-Ecuador

Cita.
Morocho, A., Inca, C., Guerra, J., Inca, E. (2022) Ecuaciones diferenciales. Editorial Grupo Compás.

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

INDICE

1 INTRODUCCIÓN

Muchos fenómenos del mundo real pueden modelarse matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales. El crecimiento de una población, la desintegración radiactiva, los modelos de depredador-presa y los sistemas masas resortes son cuatro ejemplos de estos fenómenos.

1.1 Concepto de Ecuación Diferencial

Una ecuación diferencial es una igualdad que está formada por derivadas o diferenciales de una variable dependiente respecto a una o más variables independientes.

1.2 Clasificación

Las ecuaciones diferenciales se presentan en dos grupos generales: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP).

Las EDP se caracterizan por estar formadas por diferenciales de una variable respecto a dos o más variables independientes.

Por otro lado, las EDO se forman por diferenciales de una variable dependiente y de la variable independiente. En este libro se analizarán únicamente este tipo de ecuaciones diferenciales.

Dentro de cada uno de estos grupos, las ecuaciones diferenciales se las puede clasificar de acuerdo a lo siguiente:

Orden: El orden de una ecuación diferencial está definida por el número de veces que se ha derivado una variable dependiente con respecto a su variable independiente.

Grado: El grado de una ecuación diferencial está definido por el exponente entero positivo de la derivada de mayor orden.

Linealidad: Una ecuación diferencial es lineal cuando cumple lo siguiente:

- La variable dependiente y todas sus derivadas están elevadas al exponente UNO.
- Los coeficientes de las derivadas de la ecuación (1.1) y $P(x)$ son funciones únicamente de la variable independiente.

$$\alpha_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\alpha_{n-1}(x)\frac{dy^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}}+\alpha_1(x)\frac{dy}{dx}+\cdots+\alpha_0(x)y=P(x) \qquad (1.1)$$

No lineal: Una ecuación que no cumpla con los parámetros anteriores se la denomina no lineal.

Ejercicios resueltos

Determinar el tipo, orden, grado y si es lineal las siguientes ecuaciones diferenciales.

- **a)** $y' = 3x - 5$

- Como no intervienen derivadas parciales es una EDO
- Es de primer orden
- Es de grado UNO
- Es lineal en y

- **b)** $xy''' = y' - 56y''$

Se puede dejar expresado de la siguiente forma:

$$xy''' + 56y'' - y' = 0$$

- Como no intervienen derivadas parciales es una EDO.
- Es de tercer orden.
- Es de grado UNO.
- Es lineal en "y"

- **c)** $(y''')^3 + 2(y')^5 - 4y = 20$

- Como no intervienen derivadas parciales es una EDO.
- Es de tercer orden.
- Es de grado TRES.
- Es no lineal por los exponentes en las derivadas.

- **d)** $(y')^2 + 7x(y'')^5 - 4y''' = 0$

- Como no intervienen derivadas parciales es una EDO.
- Es de tercer orden
- Es de grado UNO.
- Es no lineal por los exponentes en las derivadas.

- **e)** $U_{xy} + 8U_x = \frac{y^2-x^2}{y}$

- Como presenta derivadas parciales es una EDP.
- Es de primer orden por el término U_{xy}
- Es de grado UNO
- Es lineal en U

- **f)** $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t+6} = \sin^4 t$

- Como no intervienen derivadas parciales es una EDO.
- Es de primer orden
- Es de grado UNO
- Es lineal en " y "

- **g)** $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 5t^2 - x^2$

- Como presenta derivadas parciales es una EDP.
- Es de primer orden
- Es de grado UNO
- Es lineal en "U"

Ejercicios propuestos:

Resolver los ejercicios siguientes diferenciando el orden, grado y linealidad.

a) $y'' - 5y' + 4y = \tan x$

b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x+1} = \cos y^3$

c) $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + 8u = \frac{1-x}{y}$

d) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 5t - x$

e) $(y') + 11x(y')^2 - 6y'' = 0$

f) $(6y'')^2 + 7(y''')^2 - 6y' = 4$

g) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x+6} = \operatorname{sen}^3 x$

1.3 Nomenclatura de una ecuación diferencial

La derivada de una función puede venir expresada en una de las siguientes formas:

$$\frac{dy}{dx},\ y',\ \dot{y};\frac{d^2y}{dx^2},\ y'',\ \ddot{y};\ \ \dots\ ;\ \frac{d^ny}{dx^n},\ y^n$$

Una ecuación diferencial puede ser representada por derivadas o por diferenciales. Por ejemplo, para las ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

En cambio, para ecuaciones diferenciales de orden superior estas se suelen expresar como la ecuación (1.1) o también de la siguiente forma:

$$\alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots . + \alpha_0(x)y = P(x) \qquad (1.2)$$

1.4 Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Las ecuaciones diferenciales se utilizan para representar modelos matemáticos que permiten conocer la dinámica de un sistema eléctrico, físico, geométrico, químico, etc. En esta introducción se enfocarán a los siguientes aspectos:

1.4.1 Problemas de carácter geométrico

El aspecto geométrico de una ecuación diferencial representa en forma global una familia de curvas como rectas, parábolas, elipses, etc. Los axiomas y teoremas de la geometría analítica son las propiedades que permiten representar estos aspectos en forma de ecuación diferencial.

Ejercicios resueltos

Resolver cada uno de los siguientes problemas de carácter geométricos planteados

- **a)** Encontrar la ecuación diferencial que representa a las rectas que pasan por un punto fijo (h, k)

De acuerdo a la ecuación de la recta se tiene:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \implies y - k = m(x - h)$$

$$\implies m = \frac{y - k}{x - h}$$

Geométricamente, la derivada de una curva representa la pendiente de la recta tangente; por ende, se tiene:

$$y' = \frac{y - k}{x - h} \implies \boxed{(x - h)y' = y - k}$$

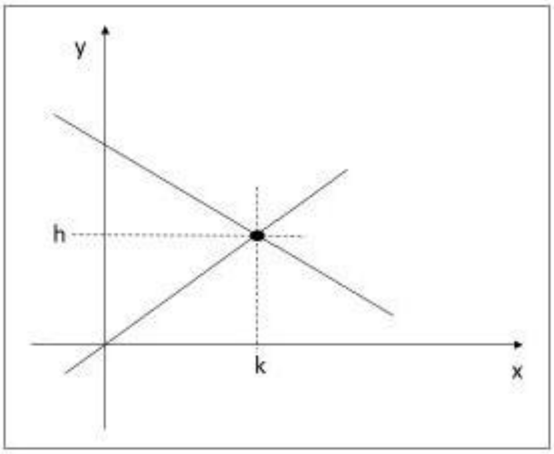


Figura 1.1: Rectas que pasan por el punto $P(h, k)$

- **b)** Encontrar la ecuación diferencial que represente a rectas que tengan la pendiente del mismo valor a la intersección con el eje de las ordenadas.

De la Figura 1.2 se puede determinar qué los puntos de intersección son de la forma $P1(0, m)$ y $P2(x_2, 0)$. Para encontrar la ecuación diferencial que representa las rectas con pendiente igual a la intersección con el eje y usamos la ecuación.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \implies m = \frac{m - 0}{0 - x_2}$$
$$\implies m = -\frac{m}{x_2}$$
$$\implies x_2 = -1$$

Lo que significa que las rectas deben pasar por el punto fijo $P2(-1,0)$. Por lo tanto, procediendo en forma similar al ejercicio a de esta sección.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \implies y - 0 = m(x + 1)$$
$$\implies m = \frac{y}{x + 1}$$

Como la pendiente representa la derivada:

$$y' = \frac{y}{x + 1} \implies \boxed{(x + 1)y' = y}$$

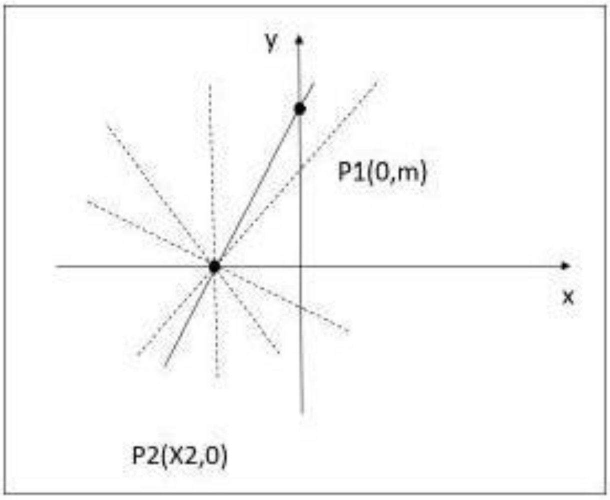


Figura 1.2: Rectas con pendiente y ordenada del mismo valor.

- **c)** Encontrar la ecuación diferencial que defina las circunferencias de radio fijo r y tangentes al eje de las abscisas:

De la *Figura* 1.3 se determina el punto centro de la circunferencia.

$$c = (h, k) \implies c = (\pm x_1, \pm r)$$

De acuerdo a la ecuación de la circunferencia, se tiene:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \Rightarrow (x \pm x_1)^2 + (y \pm r)^2 = r^2$$

Por lo tanto, es necesario derivar con respecto a x para eliminar el término x_1

$$2(x \pm x_1) + 2(y \pm r)y' = 0 \implies x \pm x_1 = -(y \pm r)y'$$

Reemplazando en la ecuación de la circunferencia:

$$[-(y \pm r)y']^2 + (y \pm r)^2 = r^2 \implies \boxed{(y \pm r)^2(y')^2 + (y \pm r)^2 = r^2}$$

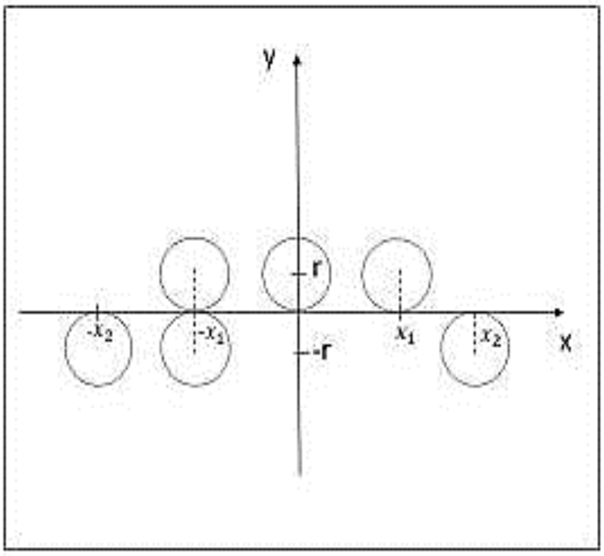


Figura *1.3*: Circunferencias de radio r y tangentes al eje de las abscisas.

- **d)** Encontrar la ecuación diferencial que defina las circunferencias con centro en cualquier punto y de cualquier valor de radio.

De la ecuación de la circunferencia se tiene:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Se deriva tres veces para eliminar los términos h, k, r. Derivando por primera vez:

$$2(x-h)+2(y-k)y'=0 \implies x-h+(y-k)y'=0$$

Derivando por segunda vez:

$$1+y'y'+(y-k)y''=0 \implies 1+(y')^2+(y-k)y''=0$$

Derivando por tercera vez:

$$2y'y''+y'y''+(y-k)y'''=0 \implies y-k=\frac{-3y'y''}{y'''}$$

Reemplazando en la segunda derivada:

$$1+(y')^2-\frac{3y'y''}{y'''}(y'')=0 \implies \boxed{[1+(y')^2]y'''-3y'(y'')^2=0}$$

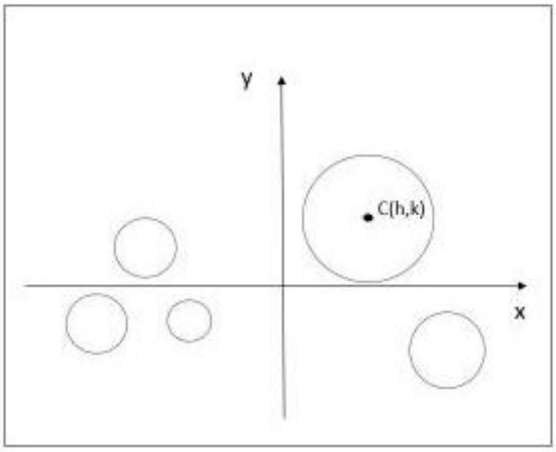


Figura 1.4: Circunferencias de cualquier radio y centro.

- **e)** Encontrar la ecuación diferencial que defina las parábolas con su eje paralelo al eje de las abscisas y de foco de valor b

La ecuación de la parábola es:

$$(y-k)^2 = 4P(x-k)$$

Donde h y k son los puntos del vértice y P es el foco. Por lo tanto, de acuerdo al enunciado se expresa como:

$$(y-k)^2 = 4b(x-h)$$

Es necesario derivar dos veces para eliminar los términos h, k. Derivando por primera vez:

$$2(y-k)y' = 4b \Rightarrow (y-k)y' = 2b$$

Derivando por segunda vez:

$$(y')^2 + (y-k)y'' = 0 \Rightarrow y-k = -\frac{(y')^2}{y''}$$

Reemplazando en la primera derivada:

$$-\frac{(y')^2}{y''}y' = 2b \Rightarrow \boxed{2by'' + (y')^3 = 0}$$

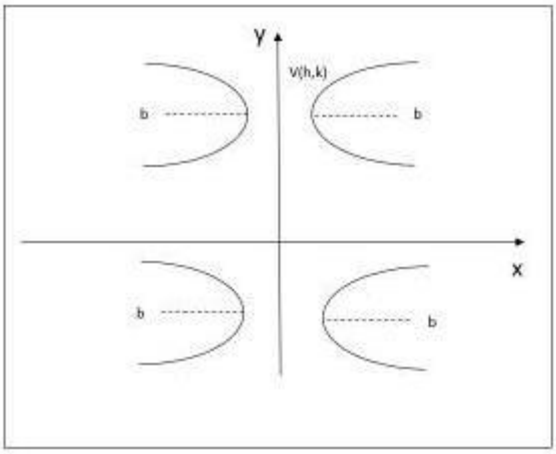


Figura 1.5: Parábolas de foco b y su eje paralelo a la abscisa.

- **f)** Encontrar la ecuación diferencial que defina las parábolas con el vértice y el foco sobre el eje de las abscisas.

De la ecuación de la parábola se tiene:

$$(y-k)^2 = 4P(x-h) \implies y^2 = 4P(x \pm h)$$

Es necesario derivar dos veces para eliminar los términos P y h. Derivando por primera vez:

$$2yy' = 4P \implies yy' = 2P$$

Derivando por segunda vez:

$$\boxed{(y')^2 + yy'' = 0}$$

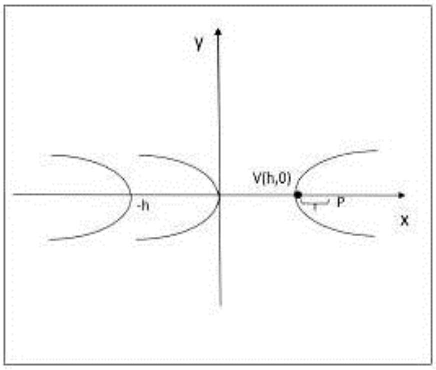


Figura 1.6: Parábolas de foco y vértice sobre el eje de la abscisa.

- **g)** Encontrar la ecuación diferencial que defina a las estrofoides de la Figura 1.7

La función de la estrofoide de la Figura 1.7 es:

$$y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$$

Se debe derivar una vez para eliminar el término: a

Para ello se despejará este término:

$$a = \frac{xy^2 + x^3}{y^2 - x^2}$$

Derivando la función:

$$0 = (xy^2 + x^3)'(y^2 - x^2) - (xy^2 + x^3)(y^2 - x^2)'$$
$$0 = (y^2 + 2xyy' + 3x^2)(y^2 - x^2) - (xy^2 + x^3)(2yy' - 2x)$$
$$0 = [y^4 + 2xy^3y' + 3x^2y^2 - x^2y^2 - 2x^3yy' - 3x^4] -$$
$$[2xy^3y' + 2x^3yy' - 2x^2y^2 - 2x^4]$$
$$0 = -4x^3yy' + y^4 + 4x^2y^2 - x^4 \Longrightarrow \boxed{4x^3yy' + x^4 - 4x^2y^2 - y^4 = 0}$$

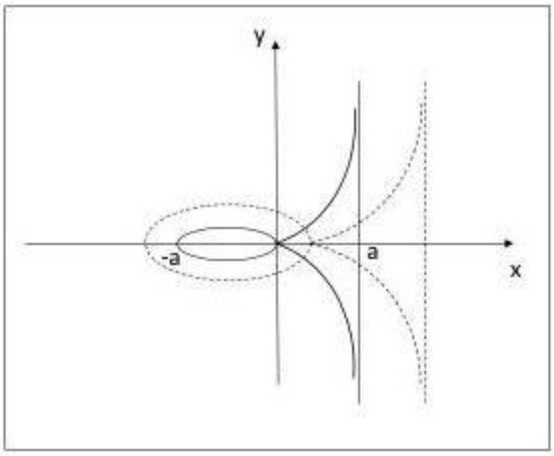


Figura 1.7: Estrofoides.

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios de carácter geométrico.

a) Obtener la ecuación diferencial de la familia de curvas de Parábola con el vértice y el foco sobre el eje (x) cuando $\mathrm{v}(-\mathrm{h}, 0)$ utilizando la ecuación general de la parábola.

b) Obtener la ecuación diferencial de la familia de curvas de las trisectrices de Maclaurin cuando $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$.

c) Hallar la ecuación de las curvas, tales que la parte de cada tangente, comprendida entre el eje de las x y el punto de tangencia, está dividido en dos partes iguales por el eje de las y.

d) La tangente en cualquier punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen forman un triángulo isósceles con base en el eje de las x. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto $(3,3)$.

e) Hallar la línea para la cual la subnormal en cualquier punto sea a la suma de la abscisa y la ordenada como la ordenada de este punto es la abscisa.

f) Obtener la ecuación diferencial de la familia de curvas de los cisoides $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$

g) Encontrar la ecuación diferencial de los estrofoides dados de la ecuación $y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$.

1.4.2 Problemas de carácter físico

En el aspecto físico, una ecuación diferencial contiene información correspondiente a cinemática, estática, dinámica, movimiento armónico simple, fluidos, etc. Las leyes de la física son las encargadas de representar estos sistemas en una ecuación diferencial.

Ejercicios resueltos

Resolver cada uno de los siguientes problemas de carácter físicos planteados

- **a)** Plantear la ecuación diferencial que defina la dinámica de un péndulo de longitud L y de masa m.

  Al aplicar la segunda ley de Newton de fuerzas en la Figura 1.8.

$$-mg\,\text{sen}\,\theta = ma \implies mg\,\text{sen}\,\theta + ma = 0$$

$$\implies a + g\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Se conoce que la aceleración a es:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} \implies \frac{d^2s}{dt^2} + g\,\text{sen}\,\theta = 0$$

El espacio "s" que recorre el péndulo es la longitud de arco.

$$s = R\theta = L\theta$$

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\,\text{sen}\,\theta = 0 \implies \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen }\theta}$$

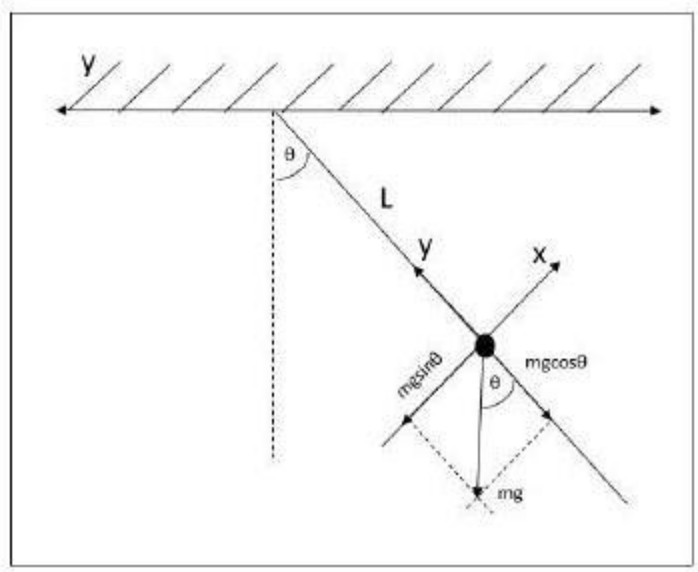


Figura 1.8: Péndulo simple diagrama de cuerpo libre.

- **b)** Encontrar la ecuación diferencial que defina la caída libre despreciando la resistencia del aire.

Al aplicar la segunda ley de Newton de fuerzas en la Figura 1.9.

$$-mg = ma \implies -g = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\implies \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + g = 0}$$

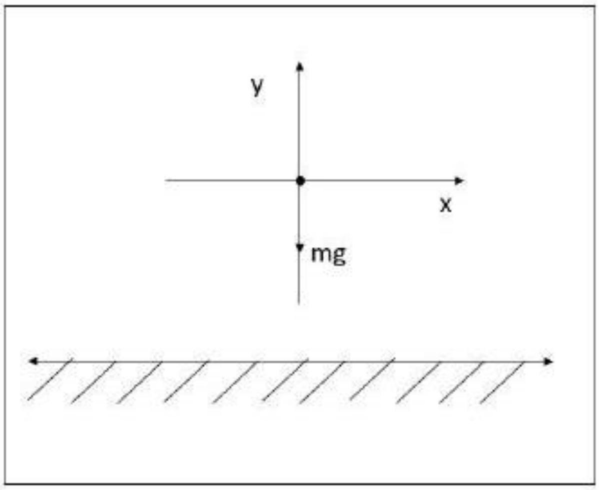


Figura 1.9: Caída libre de un cuerpo.

- **c)** Encontrar la ecuación diferencial que defina el proceso de vaciado de un recipiente cilíndrico de radio R y altura h, a través de un orificio de radio r en la base.

Según la mecánica de fluidos, el flujo que pasa a través de un orificio es:

$$Q = kvA \Longrightarrow V = kvAt$$
$$\Longrightarrow dV = kvAdt$$

Donde Q: flujo, k: constante de vaciado, v: velocidad, t:tiempo, V: volumen y A: área

El volumen del líquido del cilindro es:

$$V = \pi R^2 y$$

La disminución de volumen del líquido es:

$$dV = -\pi R^2 dy$$

El signo menos representa que se trata de disminución. Se iguala esta ecuación con el volumen a través del orificio:

$$kvAdt = -\pi R^2 dy \Longrightarrow kv\pi r^2 dt = -\pi R^2 dy$$
$$\Longrightarrow kvr^2 dt = -R^2 dy$$
$$\Longrightarrow y' = -\frac{kr^2}{R^2} v$$

La velocidad de la caída del líquido es:

$$v = \sqrt{2gy} \Longrightarrow \boxed{y' = -\frac{kr^2}{R^2}\sqrt{2gy}}$$

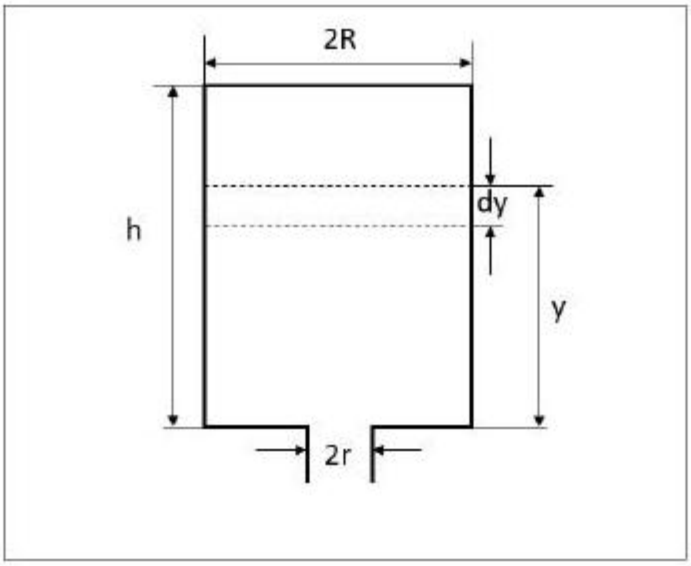


Figura 1.10: Vaciado de un cilindro.

- **d)** Encontrar la ecuación diferencial que defina la dinámica del circuito eléctrico de bobina, capacitor y resistencia en serie.

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff.

$$-V_{in} + V_R + V_L + V_C = 0$$

Donde V_R: Voltaje en la resistencia, V_L: voltaje en la bobina, V_C: voltaje en el capacitor.

$$\left.\begin{aligned} V_R &= iR \\ V_L &= L\frac{di}{dt} \\ V_C &= \frac{q}{C} \end{aligned}\right\} - V_{in} + Ri + Li' + \frac{q}{C} = 0$$

Además, se conoce que:

$$i = \frac{dq}{dt} \Longrightarrow -V_{in} + Rq' + Lq'' + \frac{q}{C} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{Lq'' + Rq' + \frac{q}{c} = Vin}$$

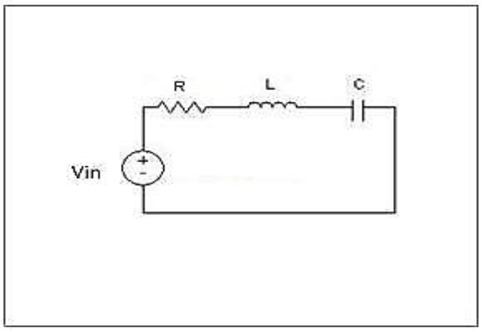


Figura 1.10: Circuito RLC en serie.

- **e)** Plantear una ecuación diferencial que defina la atracción de un cuerpo que se encuentra afuera de la Tierra. De acuerdo a Newton la fuerza de atracción es:

$$F = \frac{k}{s^2} \;\Longrightarrow\; F = mgR^2\frac{1}{s^2}$$

Donde m: es la masa del cuerpo, R: radio de la Tierra, g: gravedad de la Tierra, s: distancia.

$$-F = ma \Longrightarrow -mgR^2\frac{1}{s^2} = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + gR^2\frac{1}{s^2} = 0$$

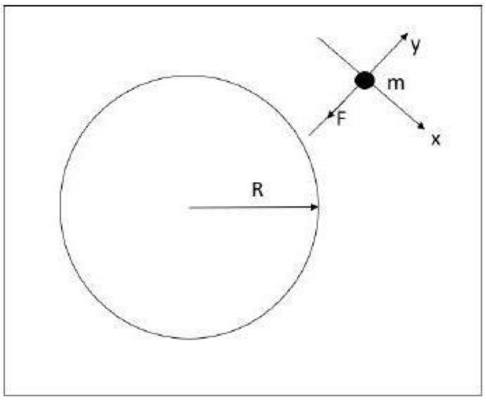


Figura 1.11: Objeto atraído hacia la Tierra.

- **f)** Encontrar la ecuación diferencial del proceso de vaciado de un recipiente de forma esférica de radio R y que presenta un orificio en la base de radio r.

El flujo a través de un orificio es:

$$Q = kvA \implies V = kvAt$$

$$\implies dV = kvAdt$$

El volumen de líquido de una pequeña parte en la esfera es:

$$dV = -\pi x^2 dy$$

El signo menos representa la disminución de volumen. Igualando las dos últimas ecuaciones:

$$-\pi x^2 dy = kvAdt \implies -\pi x^2 dy = kv\pi r^2 dt$$

$$\implies x^2 dy + kvr^2 dt = 0$$

La velocidad de la caída de líquido es:

$$v = \sqrt{2gy} \implies x^2 dy + k\sqrt{2gy}dt = 0$$

$$\implies x^2 y' + k\sqrt{2gy} = 0$$

La ecuación de la circunferencia de la Figura 1.12 es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \implies x^2 - (y-R)^2 = R^2$$

$$\implies x^2 = R^2 + (y-R)^2$$

Reemplazando en la ecuación diferencial queda:

$$\boxed{[R^2 + (y-R)^2]y' + k\sqrt{2gy} = 0}$$

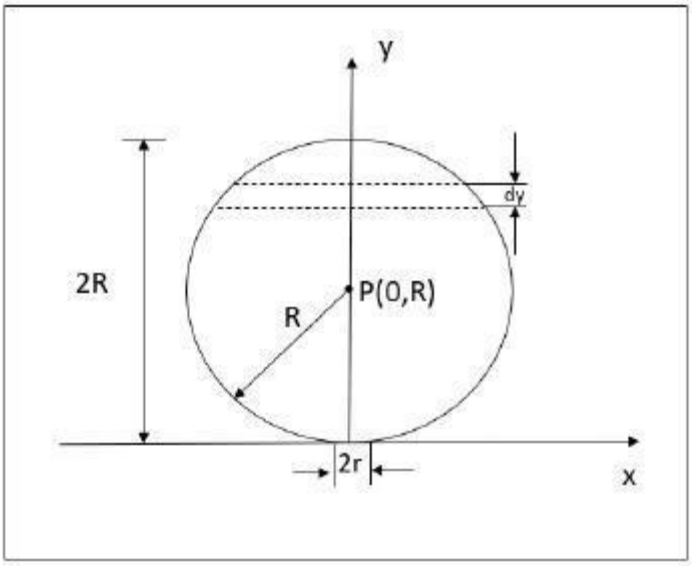


Figura 1.12: Vaciado de un tanque esférico.

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios de carácter físico.

a) Hallar la ecuación del movimiento de un punto sabiendo que la dependencia a la aceleración del tiempo se expresa por la formula $a = 2{,}4t$, si para $t = 0$, la distancia $s = 0$ y para $t = 5$ la distancia s $= 40$.

b) El camino recorrido por un cuerpo durante el tiempo t. Si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en $10\ s$ el cuerpo recorre 100 mts y en $15\ s$ recorre 200 mts.

c) Platear la ecuación diferencial con el cálculo del interés según un capital (c) en un tiempo (t) bajo una tasa (α)

d) Establecer la ecuación diferencial de la velocidad de crecimiento de la población infectada si es proporcional al número de habitantes infectados y no infectados. Se sabe que la población es de N habitantes que no aumenta.

e) Se tiene un disco plano conductor de calor con un radio r, y su temperatura es $u(r, \theta, 0) = \frac{T_0 r}{q} \sin(v0)$ para un tiempo $t > 0$, la frontera de disco disipa calor al ambiente que se mantiene en cero grados.

f) Hallas la temperatura de una esfera de radio r_0, cuya superficie se mantiene nula, si en el instante inicial la temperatura de la esfera es de $u|_{t=0} = f(r),\ 0 \leq r < r_0$

1.5 La primitiva

La solución de una ecuación diferencial lleva a encontrar una función llamada primitiva. Dichas funciones pueden contener una o más variables independientes.

Ejercicios resueltos

Demostrar que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales planteadas en cada literal.

- **a)** $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x};\ \ xy' + y = cos\ x$

Derivando una vez la función:

$$y' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$x\left(\frac{\text{xcos}\, x - \operatorname{sen} x}{x^2}\right) + \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos x \Longrightarrow \frac{\text{xcos}\, x - \operatorname{sen} x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos x$$

$$\frac{\text{xcos}\, x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x}{x} = \cos x \Longrightarrow \frac{x\cos x}{x} = \cos x$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos x = \cos x}\ \text{l.q.q.d}$$

- **b)** $y = c_1 x(x - c_1) + c_2 :\ y' + \frac{1}{4}(y'')^2 = xy''$

Derivando por primera vez la función:

$$y = c_1x^2 - c_1^2x + c_2\ \Longrightarrow\ y' = 2c_1x - c_1^2$$

Derivando por segunda vez:

$$y'' = 2c_1$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$2c_1x - c_1^2 + \frac{1}{4}(2c_1)^2 = x(2c_1) \implies 2c_1x - c_1^2 + c_1^2 = 2c_1x$$

$$\implies \boxed{2c_1x = 2c_1x} \text{ l.q.q.d}$$

- **c)** $y = x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$: $xy' = y + x\operatorname{sen} x$

Derivando la función como producto:

$$y' = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt + x\left[\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]_{(t=x)} = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt + \operatorname{sen} x$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$x\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt + \operatorname{sen} x\right) = x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt + \operatorname{sen} x \implies$$

$$\boxed{x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt + \operatorname{sen} x = x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt + \operatorname{sen} x} \text{ l.q.q.d}$$

- **d)** $y = 2x^2e^{-2x} + 2e^x + 3e^{-2x}$: $y' + 2y = 6e^x + 4xe^{-2x}$

Derivando la función se tiene:

$$y' = 4xe^{-2x} - 4x^2e^{-2x} + 2e^x - 6e^{-2x}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 4xe^{-2x} - 4x^2e^{-2x} + 2e^x - 6e^{-2x} + 2(2x^2e^{-2x} + 2e^x + 3e^{-2x}) \\ &= 6e^x + 4xe^{-2x} \end{aligned}$$

$$\boxed{6e^x + 4xe^{-2x} = 6e^x + 4xe^{-2x}} \text{ l.q.q.d}$$

- **e)** $y = 4e^{2x} + 2e^{-3x}$; $y'' + y' - 6y = 0$

Derivando por primera vez la función:

$$y' = 8e^{2x} - 6e^{-3x}$$

Derivando por segunda vez

$$y'' = 16e^{2x} + 18e^{-3x}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$16e^{2x} + 18e^{-3x} + 8e^{2x} - 6e - 3x - 6(4e^{2x} + 2e^{-3x}) = 0 \Longrightarrow \boxed{0 = 0} \text{ l.q.q.d}$$

Encontrar la ecuación diferencial a partir de la función dada en cada literal

- **a)** $y \operatorname{sen} x - xy^2 = c$

Derivando la función respecto a x :

$$y' \operatorname{sen} x + y \cos x - y^2 - 2xyy' = 0 \implies \boxed{(\operatorname{sen}\ x - 2xy)y' + y\cos\ x = y^2}$$

- **b)** $y = A \operatorname{sen}(3x) - B \cos(3x)$

Es necesario derivar dos veces para eliminar los términos A y B. Derivando por primera vez queda:

$$y' = 3A \cos 3x + 3B \operatorname{sen} 3x$$

Derivando por segunda vez:

$$y'' = -9A \operatorname{sen} 3x + 9B \cos 3x \implies y'' = -9(A \operatorname{sen} 3x - B\cos\ 3x)$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial queda:

$$y'' = -9y \implies \boxed{y'' + 9y = 0}$$

- **c)** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

Es necesario derivar dos veces para eliminar los términos c_1 y c_2. Derivando por primera vez queda:

$$y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$$

Derivando por segunda vez:

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \implies c_1 e^{2x} = \frac{y''}{4} - \frac{c_2}{4} e^{-x}$$

Reemplazando en la primera derivada se tiene:

$$y' = 2\left(\frac{y''}{4} - \frac{c_2}{4} e^{-x}\right) = \frac{y''}{2} - \frac{c_2}{2} e^{-x} \Rightarrow c_2 e^{-x} = y'' - 2y'$$

Reemplazando en el término anterior.

$$c_1 e^{2x} = \frac{y''}{4} - \frac{1}{4}(y'' - 2y') \implies c_1 e^{2x} = \frac{y'}{2}$$

Reemplazando en la función se tiene:

$$y = \frac{y'}{2} + y'' - 2y' = -\frac{3}{2} y' + y'' \Rightarrow \boxed{2y'' - 3y' - 2y = 0}$$

- **d)** $y = c_1 e^x + C_2 x$

Es necesario derivar dos veces para eliminar los términos c_1 y c_2. Derivando la primera vez se tiene:

$$y' = c_1 e^x + c_2$$

Derivando la segunda vez se tiene:

$$y'' = c_1 e^x$$

Reemplazando en la primera derivada se tiene:

$$y' = y'' + c_2 \implies c_2 = y' - y''$$

Reemplazando en la función se tiene:

$$y = y'' + (y' - y'')x = y'' - xy'' + xy' \implies \boxed{(1-x)y'' + xy' - y = 0}$$

- **e)** $y = c_1 x^3 + c_2 x$

Es necesario derivar dos veces para eliminar los términos c_1 y c_2. Derivando la primera vez se tiene:

$$y' = 3c_1 x^2 + c_2$$

derivando por segunda vez se tiene:

$$y'' = 6c_1 x \implies c_1 = \frac{y''}{6x}$$

Reemplazando en la primera derivada se tiene:

$$y' = 3\left(\frac{y''}{6x}\right)x^2 + c_2 = \frac{x}{2}y'' + c_2 \implies c_2 = y' - \frac{x}{2}y''$$

Reemplazando en la función se tiene:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{y''}{6x}\right)x^3 + \left(y' - \frac{x}{2}y''\right)x \\ &= \frac{x^2}{6}y'' + xy' - \frac{x^2}{2}y'' \\ &= -\frac{x^2}{3}y'' + xy' \end{aligned}$$

$$\boxed{x^2 - 3xy' + 3y = 0}$$

Ejercicios propuestos:

Encontrar la ecuación diferencial a partir de la función dada en cada literal de los siguientes ejercicios propuestos.

a) $y = A\sin{(x)}$

b) $y = Ae^{-x} - B$

c) $y\cos\ x + xy^2 = C$

d) $y = Ae^{x} - Bx^2$

e) $y = A\cos{(ax)} + B\text{sen}\ (ax)$

f) $\ln\ y = Ax^2 + Bx^2$

g) $y = \frac{Ae^{x}+Be^{-x}}{2}$

2 PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO

Una ecuación diferencial de primer orden y primer grado puede ser representada como:

$$M(x,y)dx + N(x,y) = 0 \tag{2.1}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales se presenta los siguientes métodos:

2.1 Variable Separable

Este método se aplica cuando los coeficientes M y N de la ecuación (2.1) se pueden separar en funciones de solo x (variable independiente) y solo y (variable dependiente) mediante métodos de factorización; quedando expresada de la siguiente manera.

$$\alpha(x)dx + \beta(y)dy = 0 \tag{2.2}$$

La ecuación diferencial se resuelve por integración directa. En algunos casos puede venir expresada directamente como la ecuación (2.2)

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de separación de variables.

- **a)** $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

$$\frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{1+y^2}dy = 0 \implies \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{1+y^2}dy = \int 0dx$$

$$\implies \boxed{\arctan(x) + \arctan(y) = C}$$

- **b)** $x^2y^2 - 4x^2 = (x^2y^2 - 9y^2)\frac{dy}{dx}$

$$x^2(y^2-4)dx - y^2(x^2-9)dy = 0 \Longrightarrow \int \frac{x^2}{x^2-9}dx - \int \frac{y^2}{y^2-4}dy = 0$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x^2-9+9}{x^2-9}dx - \int \frac{y^2-4+4}{y^2-4}dy = 0$$

$$\int \frac{x^2-9}{x^2-9}dx + \int \frac{9}{x^2-9}dx - \int \frac{y^2-4}{y^2-4}dy - \int \frac{4}{y^2-4}dy = 0$$

$$\boxed{x - y + \frac{3}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{x-3}{x+3}\right) - \ln\left(\frac{y-2}{y+2}\right) = C}$$

- **c)** $(e^y+1)\cos\ x dx + e^y(\mathrm{sen}\ x+1)dy = 0$

$$\frac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x+1}dx + \frac{e^y}{e^y+1}dy = 0 \Longrightarrow \int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x+1}\bigg) dx + \int \frac{e^y}{e^y+1}dy = 0$$

$$\int \frac{d(\mathrm{sen}\ x+1)}{(\mathrm{sen}\ x+1)} + \int \frac{d(e^y+1)}{(e^y+1)} = 0 \Longrightarrow \ln(\mathrm{sen}\ x+1) + \ln(e^y+1) = C$$

$$\boxed{(\mathrm{sen}\ x+1)(e^y+1) = C}$$

- **d)** $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-xy-x+y}{xy-y^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x-y)-(x-y)}{y(x-y)} = \frac{(x-y)(x-1)}{y(x-y)} = \frac{x-1}{y}$$

$$\int y dy - \int (x-1)dx = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + x = c}$$

- **e)** $\frac{dx}{dy} = \frac{ay+b}{cy+d}$

$$\int \frac{ay+b}{cy+d}dy - \int dx = 0 \Longrightarrow \int\left(\frac{a}{b} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cy+d}\right)dy - \int dx = 0$$

$$\boxed{\frac{a}{c}y + \frac{\mathrm{bc-ad}}{\mathrm{c}^2}\ln\left(y+\frac{d}{c}\right) - x = C_1}$$

- **f)** $(y^2+xy^2)\frac{dy}{dx}+x^2-x^2y=0$

$$(y^2+xy^2)dy+(x^2-x^2y)dx=0 \implies y^2(1+x)dy+x^2(1-y)dx=0$$

$$\int\frac{x^2}{x+1}dx+\int\frac{y^2}{1-y}dy=0 \implies \int\frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx-\int\frac{(y^2-1)+1}{y-1}dy=0$$

$$\int\ \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx-\int\ \frac{(y-1)(1+y)+1}{y-1}dy=0$$

$$\int\ \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}+\int\ \frac{dx}{x+1}-\int\ \frac{(y-1)(y+1)}{y-1}dy-\int\ \frac{dy}{y-1}=0$$

$$\frac{x^2}{2}-x+\ln\,(x+1)-\frac{y^2}{2}-y-\ln\,(y-1)=C$$

$$\boxed{x^2-y^2-2x-2y+2\ln\,\left(\frac{x+1}{y-1}\right)=C}$$

- **g)** $e^x\operatorname{sen}y\,dx+(1+e^x\,)\operatorname{sen}y\tan y\,dy=0\ \therefore\ y=60, x=0$

$$\frac{e^x}{(1+e^x)}dx+\tan y\,\mathrm{dy}=0 \implies \int\ \frac{e^x}{1+e^x}dx+\int\ \ \tan y\,\mathrm{dy}=0$$

$$\ln(1+e^x)-\ln(\cos y)=c \implies \ln\left(\frac{1+e^x}{\cos y}\right)=0$$

$$\implies \boxed{1+e^x=\cos y}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de separación de variables.

a) $(1+y^2)dx=\left(y-\sqrt{1+y^2}\right)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dy$

b) $(1+y+y^2)dx + x(x^2-4)dy = 0$

c) $\operatorname{sen}(4x)\,dx + 2y\cos^3(4x)\,dy = 0$

d) $2xydx - (1+x^2)dy = 0$

e) $\frac{dy}{dx} - (y-3) = 0$

f) $(x+xy^2)dx + (yx^2-y)dy = 0$

g) $b^2dx = x\sqrt{x^2-b^2}dy$

2.2 Coeficientes homogéneos

Los coeficientes M y N de la ecuación (2.1), se dicen que son funciones homogéneas si cumplen con la siguiente definición:

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^k M(x,y) \\ N(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^k N(x,y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Donde k es el grado de homogeneidad de las funciones M y N y que deben ser iguales. Por lo tanto, el método consiste en realizar los siguientes cambios posibles de variable:

$$y = zx \Longrightarrow dy = zdx + xdz$$
$$x = zy \Longrightarrow dx = zdy + ydz$$

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de coeficientes homogéneos.

- **a)** $\left[x\csc\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + xdy = 0$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x,y) = x\csc\left(\frac{y}{x}\right) - y \Longrightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\csc\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) - \lambda y$$
$$\Longrightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda\left[x\csc\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]$$

$$N(x,y) = x \Longrightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx \Longrightarrow dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\left[x \csc\left(\frac{zx}{x}\right) - zx\right] dx + x(zdx + xdz) = 0$$

$$(\csc z - z)dx + zdx + xdz = 0 \ \Longrightarrow \ \csc z \, dx + xdz = 0$$

Se resuelve por el método de separación de variable:

$$\frac{dx}{x} + \operatorname{sen} z \, dz = 0 \ \Longrightarrow \ \ln{(x)} - \cos z = C$$

Se regresa a variables originales:

$$z = \frac{y}{x} \ \Longrightarrow \ \boxed{\ln(x) + \cos\left(\frac{y}{x}\right) = C}$$

- **b)** $xy' \ln\frac{y}{x} = x + y \ln\frac{y}{x}$

Se expresa de la forma diferencial como la ecuación (2.1):

$$\left[x + y \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx - x \ln\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x,y) = x + y \ln\left(\frac{y}{x}\right) \Longrightarrow \mathrm{M}(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y \ln\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$\mathrm{M}(\lambda x, \lambda y) = \lambda \left[x + y \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$N(x,y) = -x \ln\left(\frac{y}{x}\right) \Longrightarrow N(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x \ln\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda \left[-x \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx \implies dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\left[x + zx\ln\left(\frac{zx}{x}\right)\right]dx - x\ln\left(\frac{zx}{x}\right)(zdx + xdz) = 0$$

$$(1 + z\ln z)dx - \ln z\,(zdx + xdz) = 0 \implies dx - x\ln z\,dz = 0$$

Se resuelve por el método de variable separable:

$$\frac{dx}{x} - \ln z\,dz = 0 \implies \ln x - (z\ln z - z) = C$$

$$\implies \ln x - z(\ln z - 1) = C$$

Se regresa a variables originales:

$$z = \frac{y}{x} \implies \boxed{\ln(x) - \frac{y}{x}\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right] = C}$$

- **c)** $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x,y) = y \implies M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y$$

$$N(x,y) = 2\sqrt{xy} - x \implies N(\lambda x, \lambda y) = 2\sqrt{\lambda^2 xy} - \lambda x = \lambda[2\sqrt{xy} - x]$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = zy \rightarrow dx = zdy + ydz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$y(zdy + ydz) + \left(2\sqrt{zy^2} - zy\right)dy = 0 \implies zdy + ydz + \left(2\sqrt{z} - z\right)dy = 0$$

$$\implies 2\sqrt{z}dy + ydz = 0$$

Se resuelve por el método de variable separable:

$$2\frac{dy}{y}+\frac{dz}{\sqrt{z}}=0 \Longrightarrow 2\ln y+2\sqrt{z}=c \;\Longrightarrow\; \ln y+\sqrt{z}=C$$

Se regresa a variables originales:

$$z=\frac{x}{y} \Longrightarrow \boxed{\ln y+\sqrt{\frac{x}{y}}=C}$$

- **d)** $(6x^2-7y^2)dx-14xydy=0$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x,y)=6x^2-7y^2 \;\Longrightarrow\; M(\lambda x,\lambda y)=6(\lambda x)^2-7(\lambda y)^2$$
$$\Longrightarrow\; M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2(6x^2-7y^2)$$

$$N(x,y)=-14xy \;\Longrightarrow\; N(\lambda x,\lambda y)=-14(\lambda x)(\lambda y)$$
$$\Longrightarrow\; N(\lambda x,\lambda y)=\;-14\lambda^2xy$$
$$\Longrightarrow\; N(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2(-14xy)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y=zx \;\Longrightarrow\; dy=zdx+xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(6x^2-7z^2x^2)dx+14x^2z(zdx+xdz)=0 \Longrightarrow (6-7z^2)dx-14z(zdx+xdz)=0$$
$$\Longrightarrow (6-21z^2)dx-14xzdz=0$$

Se resuelve por el método de variables separables:

$$\frac{dx}{x}-\frac{14z}{6-21z^2}dz=0 \;\Longrightarrow\; \frac{dx}{x}-\frac{14z}{21\left(z^2-\frac{2}{7}\right)}dz=0$$
$$\Longrightarrow\; \ln x+\frac{14}{42}\ln\left(z^2-\frac{2}{7}\right)=C$$

Se regresa a variables originales:

$$z=\frac{y}{x}\Longrightarrow \ln x+\frac{1}{3}\ln\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{2}{7}\right]=C$$

$$\Longrightarrow\ 3\ln x+\ln\left(\frac{7y^2-2x^2}{7x^2}\right)=C$$

$$\Longrightarrow \ln\left[x^3\left(\frac{7y^2-2x^2}{7x^2}\right)\right]=C$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(7y^2-2x^2)=C}$$

- **e)** $(x^2+3xy+y^2)dx-x^2dy=0$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x,y)=x^2+3xy+y^2\Longrightarrow M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2+3\lambda^2xy+\lambda^2y^2$$
$$\Longrightarrow M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2(x^2+3xy+y^2)$$

$$N(x,y)=-x^2\Longrightarrow N(\lambda x,\lambda y)=-\lambda^2x^2=\lambda^2(-x^2)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y=zx\Longrightarrow dy=zdx+xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(x^2+3x^2z+z^2x^2)dx-x^2(zdx+xdz)=0$$
$$(1+3z+z^2)dx-zdx-xdz=0\Longrightarrow\ (z^2+2z+1)dx-xdz=0$$

Se resuelve por el método de separación de variables:

$$\frac{dx}{x}-\frac{dz}{(z+1)^2}=0\Longrightarrow \ln x+\frac{1}{z+1}=C$$

Se regresa a variables originales:

$$z=\frac{y}{x}\Longrightarrow \ln x+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=C\Longrightarrow \boxed{\ln x+\frac{x}{x+y}=C}$$

- **f)** $\left[x-y\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx+x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x,y) = x - y\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y \arctan\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$\Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda\left[x - y\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$N(x,y) = x\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \arctan\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$\Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda\left[x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx \Rightarrow dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\left[x - xz\arctan\left(\frac{xz}{x}\right)\right]dx + x\arctan\left(\frac{xz}{x}\right)(zdx + xdz) = 0$$

$$(1 - z\arctan z)dx + \arctan z\,(zdx + xdz) = 0 \Rightarrow dx + x\arctan z\,dz = 0$$

Se resuelve por el método de variables separables:

$$\frac{dx}{x} + \arctan z\,dz = 0 \Rightarrow \ln x + z\arctan z - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) = C$$

Se regresa a variables originales:

$$z = \frac{y}{x} \rightarrow \boxed{\ln x + \frac{y}{x}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = C}$$

- **g)** $\left(y - \sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xdy = 0;\ x = \sqrt{3},\ y = -1$

Se verifica si los coeficientes de los diferenciales son funciones homogéneas:

$$M(x,y) = y - \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y - \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}$$

$$\Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda\left(y - \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$N(x,y) = -x \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x = \lambda(-x)$$

$$\Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda(-x)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = zx \Rightarrow dy = zdx + xdz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\left(zx - \sqrt{x^2 + x^2 z^2}\right) dx - x(zdx + xdz) = 0$$

$$\left(z - \sqrt{1 + z^2}\right) dx - zdx - xdz = 0 \ \Rightarrow -\sqrt{1 + z^2} dx - xdz = 0$$

Se resuelve por el método de variables separables:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = 0 \Rightarrow \ln\ x + \ln\ \left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = c$$

Se regresa a variables originales:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln x + \ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) = C$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln\left(\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right) = C$$

$$\Rightarrow \ln\left[x\left(\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right)\right] = C$$

$$\Rightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$$

Mediante las condiciones iniciales se encuentra el valor de c :

$$y(\sqrt{3}) = -1 \ \Rightarrow -1 + \sqrt{3 + 1} = C$$

$$\Rightarrow C = 1$$

Se reemplaza en la solución:

$$\boxed{y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de coeficientes homogéneos.

a) $xy' = 2y + 4xe^{-\frac{y}{x}}$

b) $x^2y' = 6x^2 + 9xy + 2y^2$

c) $2xdy - 2ydx = \sqrt{4x^2 + 4y^2}dx$

d) $2xdy - 2ydx = \sqrt{4x^2 + 4y^2}dx$

e) $y' = \frac{4xy}{3x^2 - 2y^2}$

f) $\frac{dy}{dx} = 4\frac{y}{x} + \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$

g) $2x\frac{dy}{dx} = xe^{\frac{4}{x}} + 3y,\ y(1) = 0$

2.3 Coeficientes no homogéneos

Para resolver mediante este método, la ecuación diferencial debe tener el siguiente formato:

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \tag{2.4}$$

Se debe resolver el sistema de ecuaciones de primer orden, formado por los coeficientes de los diferenciales, para continuar con el siguiente cambio:

$$\begin{aligned} x = t + h \Longrightarrow dx = dt \\ y = w + k \Longrightarrow dy = dw \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donde h y k, de las ecuaciones (2.5), son las soluciones del sistema de ecuaciones. Lo que se busca es reducir a una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos.

En el caso que el sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones, el cambio de variable es el siguiente

$$z = a_1x + b_1y \tag{2.6}$$

Donde es necesario despejar cualquier variable, como puede ser x o y, y calcular su diferencial; para luego ser reemplazado en la ecuación (2.4)

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de coeficientes no homogéneos.

- **a)** $y' = \frac{x+y-1}{x-y+1}$

Se expresa como la ecuación (2.4):

$$(x+y-1)dx + (-x+y-1)dy = 0$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ -x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ -x+y=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=0 \\ \mathrm{k}=1 \end{cases}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = t \implies dx = dt$$

$$y = w+1 \implies dy = dw$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(t+w+1-1)dt + (-t+w+1-1)dw = 0 \implies (t+w)dt + (w-t)dw = 0$$

Se resuelve por el método de coeficientes homogéneas:

$$t = zw \implies dt = zdw + wdz$$

$$(zw+w)(zdw+wdz) + (w-zw)dw = 0$$

$$(z+1)(zdw+wdz) + (1-z)dw = 0 \Rightarrow (z^2+1)dw + w(z+1)dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{w} + \frac{z+1}{z^2+1}dz = 0$$

$$\Rightarrow \ln w + \frac{1}{2}\ln(z^2+1) + \arctan z = C$$

Se regresa a variables originales:

$$\left.\begin{array}{r} t = x \\ w = y-1 \\ z = \dfrac{x}{y-1} \end{array}\right\} \ln(y-1) + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^2}{(y-1)^2}+1\right] + \arctan\left(\frac{x}{y-1}\right) = C$$

$$2\ln(y-1) + \ln\left[\frac{x^2}{(y-1)^2}+1\right] + 2\arctan\left(\frac{x}{y-1}\right) = C$$

$$\ln\left\{(y-1)^2\left[\frac{x^2+(y-1)^2}{(y-1)^2}\right]\right\} + 2\arctan\left(\frac{x}{y-1}\right) = C$$

$$\boxed{\ln[x^2+(y-1)^2] + 2\arctan\left(\frac{x}{y-1}\right) = C}$$

- **b)** $(x-4y-9)dx + (4x+y-2)dy = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x-4y-9=0 \\ 4x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-4y=9 \\ 4x+y=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=1 \\ k=-2 \end{cases}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = t+1 \implies dx = dt$$

$$y = w-2 \implies dy = dw$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(t+1-4w+8-9)dt + (4t-4+w-2-2)dw = 0$$

$$(t-4w)dt + (4t+w)dw = 0$$

Se resuelve por el método de coeficientes homogéneos:

$t = zw \;\rightarrow\; dt = zdw + wdz$

$(zw - 4w)(zdw + wdz) + (4zw + w)dw = 0$

$(z - 4)(zdw + wdz) + (4z + 1)dw = 0 \;\Longrightarrow\; \dfrac{z^2 + 1}{z - 4}dw + wdz = 0$

$\dfrac{dw}{w} + \dfrac{z - 4}{1 + z^2}dz = 0 \;\Longrightarrow\; \ln w + \dfrac{1}{2}\ln(1 + z^2) - 4\arctan z = C$

$\ln[w^2(1 + z^2)] - 8\arctan z = C$

Se regresa a variables originales:

$$\left.\begin{aligned} t &= x - 1 \\ w &= y + 2 \\ z &= \frac{x - 1}{y + 2} \end{aligned}\right\} \; \ln\left\{(y + 2)^2\left[1 + \left(\frac{x - 1}{y + 2}\right)^2\right]\right\} - 8\arctan\left(\frac{x - 1}{y + 2}\right) = C$$

$$\boxed{\ln[(y + 2)^2 + (x - 1)^2] + 8\arctan\left(\frac{x - 1}{y + 2}\right) = C}$$

- **c)** $(x - 3y + 2)dx + 3(x + 3y - 4)dy = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 3x + 9y - 12 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 3y = -2 \\ 3x + 9y = 12 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$x = t + 1 \Longrightarrow dx = dt$

$y = w + 1 \Longrightarrow dy = dw$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$(t + 1 - 3w - 3 + 2)dt + (3t + 3 + 9w + 9 - 12)dw = 0$

$(t - 3w)dt + (3t + 9w)dw = 0$

Se resuelve mediante el método de coeficientes homogéneos:

$$t = zw \Longrightarrow dt = zdw + wdz$$

$$(zw - 3w)(zdw + wdz) + (3zw + 9w)dw = 0$$

$$(z - 3)(zdw + wdz) + (3z + 9)dw = 0 \ \Longrightarrow \ (z^2 + 9)dw + (z - 3)wdz = 0$$

$$\frac{dw}{w} + \frac{z - 3}{z^2 + 9}dz = 0 \Longrightarrow \ln w + \frac{1}{2}\ln(z^2 + 9) - \arctan\left(\frac{z}{3}\right) = C$$

$$\ln\left[w^2(z^2 + 9)\right] - 2\arctan\left(\frac{z}{3}\right) = C$$

Se regresa a variable originales:

$$\left.\begin{array}{r} t = x - 1 \\ w = y - 1 \\ z = \dfrac{x - 1}{y - 1} \end{array}\right\} \ln\left\{(y - 1)^2\left[\left(\frac{x - 1}{y - 1}\right)^2 + 9\right]\right\} - 2\arctan\left[\frac{x - 1}{3(y - 1)}\right] = C$$

$$\ln[(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2] - 2\arctan\left[\frac{x - 1}{3(y - 1)}\right] = C$$

- **d)** $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+1}{3x-2y-5}$

Se expresa como la ecuación (2.4):

$$(2x + 3y + 1)dx + (-3x - 2y - 5)dy = 0$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ -3x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = t + 1 \Longrightarrow dx = dt$$

$y = w - 1 \Longrightarrow dy = dw$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$(2t + 2 + 3w - 3 + 1)dt + (-3t - 3 + 2w - 2 + 5)dw = 0$

$(2t + 3w)dt + (-3t + 2w)dw = 0$

Se resuelve mediante el método de coeficientes homogéneos:

$t = zw \Longrightarrow dt = zdw + wdz$

$(2zw + 3w)(zdw + wdz) + (-3zw + 2w)dw = 0$

$(2z + 3)(zdw + wdz) + (-3z + 2)dw = 0$

$(2z^2 + 2)dw + (2z + 3)wdz = 0 \Longrightarrow 2\frac{dw}{w} + \frac{2z + 3}{z^2 + 1}dz = 0$

$2\ln w + \ln(z^2 + 1) + 3\arctan z = C \Longrightarrow \ln[w^2(z^2 + 1)] + 3\arctan z = C$

Se regresa a variables originales:

$$\left.\begin{array}{r} t = x - 1 \\ w = y + 1 \\ z = \dfrac{x - 1}{y - 1} \end{array}\right\} \ln\left\{(y + 1)^2\left[\left(\frac{x - 1}{y + 1}\right)^2 + 1\right]\right\} + 3\arctan\left(\frac{x - 1}{y + 1}\right) = C$$

$$\boxed{\ln[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] + 3\arctan\left(\frac{x - 1}{y + 1}\right) = C}$$

- **e)** $(2 + y)dx + (2y - x) = 0$ Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2 + y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h = -4 \\ k = -2 \end{cases}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$x = t - 4 \Longrightarrow dx = dt$

$y = w - 2 \;\Longrightarrow\; dy = dw$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(2 + w - 2)dt + (2w - 4 - t + 4)dw = 0 \implies wdt + (2w - t)dw = 0$$

Se resuelve mediante el método de coeficientes homogéneos:

$$t = zw \Longrightarrow dt = zdw + wdz$$

$$w(zdw + wdz) + (2w - zw)dw = 0 \Longrightarrow zdw + wdz + (2 - z)dw = 0$$

$$2dw + wdz = 0 \Longrightarrow 2\frac{dw}{w} + dz = 0$$

$$\Longrightarrow 2\ln w + z = C$$

Se regresa a variables originales:

$$\left.\begin{aligned} t &= x + 4 \\ w &= y + 2 \\ z &= \frac{x+4}{y+2} \end{aligned}\right\} \boxed{2\ln(y+2) + \frac{x+4}{y+2} = C}$$

- **f)** $(x + y - 2)dx + (x + y + 3)dy = 0$

No se puede resolver el sistema de ecuaciones lineales; por lo tanto, se realiza el cambio de variable de la ecuación 1.6:

$$z = x + y \implies y = z - x$$

$$\Longrightarrow dy = dz - dx$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(z - 2)dx + (z + 3)(dz - dx) = 0 \Longrightarrow (z + 3)dz - 5dx = 0$$

$$\frac{z^2}{2} + 3z - 5x = C$$

Se regresa a variables originales:

$$z = x + y \Longrightarrow \frac{(x+y)^2}{2} + 3(x + y) - 5x = C$$

$$\Longrightarrow\ (x+y)^2+6x+6y-5x=C$$
$$\Longrightarrow \boxed{(x+y)^2+x+6y=C}$$

- **g)** $(x+y-2)dx+(2x+2y-5)=0$

No se puede resolver el sistema de ecuaciones lineales; por lo tanto, se realiza el cambio de variable de la ecuación (2.6)

$$z=x+y \Longrightarrow y=z-x$$
$$\Longrightarrow dy=dz-dx$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(z-2)dx+(2z-5)(dz-dx)=0$$

$$(2z-5)dz+(-z+3)dx=0 \Longrightarrow -\frac{2z-5}{z-3}dz+dx=0$$

$$-2z-\ln(z-3)+x=C$$

Se regresa a variables originales:

$$z=x+y \Longrightarrow -2(x+y)-\ln(x+y-3)+x=C$$
$$\Longrightarrow \boxed{\ln(x+y-3)+x+2y=C}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de coeficientes no homogéneos.

a) $(x-4y-9)dx+(4x+y-2)dy=0$

b) $(5x+4y)dx+(y+3)dy=0$

c) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y-5}{x-y-1}$

d) $y'=-\frac{3x+4y+7}{y+2x+15}$

e) $y \cos x \, dx + (2y - \operatorname{sen} x)dy = 0$

f) $(3x + 4y + 1)dx + (5x + 3y + 1)dy = 0$

g) $(2x + y - 1)dx + (x - 2y + 3)dy = 0$

2.4 Exactas

Se dice que la ecuación (2.1) es exacta si cumple con la siguiente definición:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.7}$$

Cuando cumple con la igualdad de la ecuación (2.7) se resuelve siguiendo los siguientes pasos:

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \tag{2.8}$$

El término $g(y)$ se le conoce como función arbitraria que resulta luego de la integral con respecto a x. Derivando tenemos:

$$\frac{\partial[\int M(x, y)dx]}{\partial y} + g'(y) = N(x, y) \tag{2.9}$$

Luego es necesario encontrar la función arbitraria; por lo tanto, despejando de la ecuación (2.9) se tiene:

$$g(y) = \int N(x, y)dy - \int \left[\frac{\partial[\int M(x, y)dx]}{\partial y}\right] dy$$

Finalmente, la solución se define como:

$$\int M(x, y)dx + g(y) = C \tag{2.10}$$

De forma análoga, se puede empezar con el coeficiente $N(x, y)$ y siguiendo los mismos pasos anteriores.

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + g(x)$$

$$\frac{\partial[\int N(x,y)dy]}{\partial x} + g'(x) = M(x,y)$$

$$g(x) = \int M(x,y)dx - \int \left[\frac{\partial[\int \; N(x,y)dy]}{\partial x}\right] dx$$

$$\int N(x,y)dy + g(x) = C$$

Este proceso se lo realiza en caso que el coeficiente $N(x,y)$ es más fácilmente integrable.

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de Exactas:

- **a)** $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2)dy = 0$

Se realiza derivadas parciales de los coeficientes para verificar si cumple con la ecuación (2.7):

$$M(x,y) = \frac{y}{x} + 6x \Longrightarrow \; M_y = \frac{1}{x}$$

$$N(x,y) = \ln x - 2 \Longrightarrow N_x = \frac{1}{x}$$

Se emplea la ecuación (2.8):

$$f(x,y) = \int \left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + g(y) = y \ln x + 3x^2 + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$\begin{aligned} \ln x + g'(y) = \ln x - 2 &\Longrightarrow g'(y) = -2 \\ &\Longrightarrow \; g(y) = -2y \end{aligned}$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$\boxed{y \ln x + 3x^2 - 2y = C}$$

Otra forma de resolver: $\int M(x,y)dx \ \therefore \int N(x,y)dy$

$$\int \left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx = \underline{y \ln x} + 3x^2; \ \int (\ln x - 2)dy = \underline{y \ln x} - 2y$$

Se asocia en un solo diferencial las funciones iguales tengan las dos variables:

$$d(y \ln x) + d(3x^2) - d(2y) = 0 \Longrightarrow \boxed{y \ln x + 3x^2 - 2y = C}$$

- **b)** $4x^3 - e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$

Se debe representar como la ecuación (2.1):

$$(4x^3 - ye^{xy})dx - xe^{xy}dy = 0$$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes para verificar si cumple con la ecuación (2.7):

$$M(x,y) = 4x^3 - ye^{xy} \Longrightarrow M_y = -e^{xy} - xye^{xy}$$

$$N(x,y) = -xe^{xy} \Longrightarrow N_x = -e^{xy} - xye^{xy}$$

Se emplea la ecuación (2.8):

$$f(x,y) = \int (4x^3 - ye^{xy})dx + g(y) = x^4 - e^{yx} + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$-xe^{xy} + g'(y) = -xe^{xy} \Longrightarrow g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$x^4 - e^{xy} + c_1 = C \Longrightarrow \boxed{x^4 - e^{xy} = C}$$

Otra forma de resolver: $\int M(x,y)dx \ \therefore \int N(x,y)dy$

$$\int (4x^3 - ye^{xy})dx = x^4 - \underline{e^{xy}}; \ -\int xe^{xy}dy = \underline{e^{xy}}$$

Se asocia en un solo diferencial las funciones iguales tengan las dos variables:

$$d(-e^{xy}) + d(x^4) = 0 \Longrightarrow \boxed{x^4 - e^{xy} = C}$$

- **c)** $(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes para verificar si cumple con la ecuación (2.7):

$$M(x,y) = 2xy^2 + 2y \Longrightarrow M_y = 4xy + 2$$

$$N/(x,y) = 2x^2y + 2x \Longrightarrow N_x = 4xy + 2$$

Se emplea la ecuación (2.8):

$$f(x,y) = \int (2xy^2 + 2y)dx + g(y) = x^2y^2 + 2xy + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$2x^2y + 2x + g'(y) = 2x^2y + 2x \Longrightarrow g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$x^2y^2 + 2xy + c_1 = C \Longrightarrow \boxed{x^2y^2 + 2xy = C}$$

Otra forma de resolver: $\int M(x,y)dx \ \therefore \int N(x,y)dy$

$$\int (2xy^2 + 2y)dx = \underline{x^2y^2} + \underline{\underline{2xy}}; \ \int (2x^2y + 2x)dy = \underline{x^2y^2} + \underline{\underline{2xy}}$$

Se asocia en un solo diferencial las funciones iguales tengan las dos variables:

$$d(x^2y^2) + d(2xy) = 0 \Longrightarrow \boxed{x^2y^2 + 2xy = C}$$

- **d)** $(e^x\sin\ y - 2y\sin\ x)dx + (e^x\cos\ y + 2\cos\ x)dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes para verificar si cumple con la ecuación (2.7):

$$M(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \Longrightarrow M_y = e^x \cos y - 2 \operatorname{sen} x$$

$$N(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x \Longrightarrow N_x = e^x \cos y - 2 \operatorname{sen} x$$

Se emplea la ecuación (2.8):

$$f(x,y) = \int (e^x \operatorname{sen} y - 2y \sin x)dx + g(y) = e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$e^x \cos y + 2\cos x + g'(x) = e^x \cos y + 2\cos x \Longrightarrow g'(y) = 0 \ \Longrightarrow \ g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x + c_1 = C \Longrightarrow \boxed{e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = C}$$

Otra forma de resolver: $\int M(x,y)dx \ \therefore \int N(x,y)dy$

$$\int (e^x \operatorname{sen} y - 2y\sin x)dx = \underline{e^x \operatorname{sen} y} + \underline{\underline{2y\cos x}}\,;$$

$$\int (e^x\cos\ y + 2\cos\ x)dy = \underline{e^x\operatorname{sen}\ y} + \underline{\underline{2y\cos x}}$$

Se asocia en un solo diferencial las funciones iguales tengan las dos variables:

$$d(e^x\operatorname{sen}\ y) + d(2y\cos x) = 0 \Longrightarrow \boxed{e^x\operatorname{sen}\ y + 2y\cos\ x = C}$$

- **e)** $(1 + y^2 + xy^2)dx + (x^2y + y + 2xy)dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes para verificar si cumple con la ecuación (2.7):

$$M(x,y) = 1 + y^2 + xy^2 \Longrightarrow M_y = 2y + 2xy$$

$$N(x,y) = x^2y + y + 2xy \Longrightarrow N_x = 2y + 2xy$$

Se emplea la ecuación (2.8):

$$f(x,y) = \int (1 + y^2 + xy^2)dx + g(y) = x + xy^2 + \frac{x^2}{2}y^2 + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$2xy + x^2y + g'(y) = x^2y + y + 2xy \Longrightarrow g'(y) = y \ \rightarrow \ g(y) = \frac{y^2}{2}$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$\boxed{x + xy^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^2}{2} = C}$$

Otra forma de resolver: $\int M(x,y)dx \ \therefore \int N(x,y)dy$

$$\int (1 + y^2 + xy^2)dx = x + \underline{\underline{xy^2}} + \underline{\frac{x^2y^2}{2}}; \int (x^2y + y + 2xy)dy = \underline{\frac{x^2y^2}{2}} + \frac{y^2}{2} + \underline{\underline{xy^2}}$$

Se asocia en un solo diferencial las funciones iguales que tengan las 2 variables:

$$d(xy^2) + d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) + d(x) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{x + xy^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^2}{2} = C}$$

- **f)** $\left(\frac{y}{x} + 6\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes para verificar si cumple con la ecuación (2.7):

$$M(x,y) = \frac{y}{x} + 6x \Longrightarrow M_y = \frac{1}{x}$$

$$N(x,y) = \ln x - 2 \Longrightarrow N_x = \frac{1}{x}$$

Se emplea la ecuación (2.8):

$$f(x,y) = \int \left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + g(y) = y \ln x + 3x^2 + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$\ln x + g'(y) = \ln x - 2 \Longrightarrow g'(y) = -2 \Longrightarrow g(y) = -2y$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$\boxed{y \ln x + 3x^2 - 2y = C}$$

Otra forma de resolver: $\int M(x,y)dx \ \therefore \int N(x,y)dy$

$$\int \left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx = \underline{y \ln x} + 3x^2 \ ; \ \int (\ln x - 2)dy = \underline{y \ln x} - 2y$$

Se asocia en un solo diferencial las funciones iguales que tengan las 2 variables:

$$d(y \ln x) + d(3x^2) - d(2y) = 0 \Longrightarrow \boxed{y \ln x + 3x^2 - 2y = C}$$

- **g)** $[y + y\cos(xy)]dx + [x + x\cos(xy)]dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes para verificar si cumple con la ecuación (2.7):

$$M(x,y) = y + y\cos(xy) \Longrightarrow M_y = 1 + \cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy)$$

$$N(x,y) = x + x\cos(xy) \Longrightarrow N_x = 1 + \cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy)$$

Se emplea la ecuación (2.8):

$$f(x,y) = \int [y + y\cos(xy)]dx + g(y) = xy + \text{sen}(xy) + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9):

$$x + x\cos(xy) + g'(y) = x + x\cos(xy) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10):

$$xy + \text{sen}(xy) + c_1 = C \;\Rightarrow \boxed{xy + \text{sen}(xy) = C}$$

Otra forma de resolver: $\int M(x,y)dx \;\therefore \int N(x,y)dy$

$$\int [y + y\cos(xy)]dx = \underline{xy} + \underline{\underline{\text{sen}(xy)}}\,; \int [x + x\cos(xy)]dy = \underline{xy} + \underline{\underline{\text{sen}(xy)}}$$

Se asocia en un solo diferencial las funciones iguales que tengan las 2 variables:

$$d(xy) + d[\sin(xy)] = 0 \Rightarrow \boxed{xy + \text{sen}(xy) = C}$$

- **h)** $[\text{sen}(xy) + xy\cos(xy)]dx + x^2\cos(xy)\,dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes para verificar si cumple con la ecuación (2.7)

$$M(x,y) = \text{sen}(xy) + xy\cos(xy) \Rightarrow M_y = 2x\cos(xy) - x^2y\,\text{sen}(xy)$$

$$N(x,y) = x^2\cos(xy) \Rightarrow N_x = 2x\cos(xy) - x^2y\,\text{sen}(xy)$$

Se emplea la ecuación (2.8)

$$f(x,y) = \int [\text{sen}(xy) + xy\cos(xy)]dx + g(y)$$

$$f(x,y) = -\frac{1}{y}\cos(xy) + x\,\text{sen}(xy) + \frac{1}{y}\cos(xy) + g(y) = x\,\text{sen}(xy) + g(y)$$

Se continua con la ecuación (2.9)

$$x^2\cos(xy) + g'(y) = x^2\cos(xy) \to g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = c_1$$

Se reemplaza en la ecuación (2.10)

$$x\,\mathrm{sen}(xy) + c_1 = C \Longrightarrow \boxed{x\,\mathrm{sen}(xy) = C}$$

Otra forma de resolver: $\int M(x,y)dx \ \ \therefore \int N(x,y)dy$

$$\int [\mathrm{sen}(xy) + xy\cos(xy)]dx = -\frac{1}{y}\cos(xy) + x\,\mathrm{sen}(xy) + \frac{1}{y}\cos(xy) = \underline{x\,\mathrm{sen}(xy)}$$

$$\int x^2\cos(xy)\,dy = \underline{x\,\mathrm{sen}(xy)}$$

Se asocia en un solo diferencial las funciones iguales que tengan las 2 variables:

$$d(x\,\mathrm{sen}(xy)) = 0 \Longrightarrow \boxed{x\,\mathrm{sen}(xy) = C}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de exactas.

a) $(\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y - xe^y)dy = (e^y + \cos x\cos y)dx)$

b) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

c) $(3x^4 + 6xy^2)dx + (6x^2 + 4y^3) = 0$

d) $(y\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,y)dx - (x\cos y + \cos x)dy = 0$

e) $(3x^2 + 3xy^2)dx + (3x^2y + 3y^2 - 2y)dy = 0$

f) $\frac{2x}{y}dy + \left(2\ln\ 5y + \frac{1}{x}\right) = 0$

g) $(ax^2 + 2bx + cy^2)dx + (bx^2 + 2cxy - y^2) = 0$

2.5 Factor integrante

En el caso que no se cumpla la ecuación (2.7) se podría encontrar un factor que multiplique a la ecuación diferencial de la ecuación (2.1) para resolverla por el método de exactas de la sección (2.4).

Para encontrar el factor integrante (FI) se tiene lo siguientes casos:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x) \tag{2.11}$$

El término $f(x)$ representa una función que depende únicamente de la variable x. Por lo tanto, el factor integrante viene definido como:

$$FI = e^{\int f(x)dx} \tag{2.12}$$

De forma análoga, se puede encontrar una función que dependa únicamente de la variable y

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=f(y) \tag{2.13}$$

Donde el factor integrante viene definido como:

$$FI = e^{\int f(y)dy} \tag{2.14}$$

También se puede tener un factor integrante que dependa de las dos variables x e y. Cuando los coeficientes M y N de la ecuación (2.1) son funciones homogéneas del mismo grado y cumplen que $M+N \neq 0$. El factor integrante se define como:

$$FI = \frac{1}{Mx+Ny} \tag{2.15}$$

Por último, si los coeficientes M y N de la ecuación (2.1) no son funciones homogéneas y se pueden representar como:

$$yf(x,y)dx + xg(x,y)dy = 0 \tag{2.16}$$

Donde $f(x,y) \neq g(x,y)$, entonces el factor integrante viene definido como:

$$FI = \frac{1}{Mx - Ny} \tag{2.17}$$

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de Factor integrante.

- **a)** $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes de la ecuación diferencial:

$M(x,y) = 1 - x^2y \Longrightarrow M_y = -x^2$

$N(x,y) = (y - x)x^2 \Longrightarrow N_x = 2xy - 3x^2$

Se aplica la definición (2.11) y (2.12) para el factor integrante:

$$FI = e^{\int \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y-x)}dx} = e^{\int \frac{2x^2 - 2xy}{x^2(y-x)}dx} = e^{-2\int \frac{x(y-x)}{x^2(y-x)}dx} = x^{-2}$$

Se multiplica por FI en la ecuación diferencial:

$(x^{-2} - y)dx + (y - x)dy = 0$

Se resuelve por el método de exacta:

$$d(-x^{-1}) - d(xy) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C}$$

- **b)** $y^2dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes de la ecuación diferencial:

$M(x,y) = y^2 \Longrightarrow M_y = 2y$

$N(x,y) = x^2 - 2xy \Longrightarrow N_x = 2x - 2y$

Se aplica la definición (2.11) y (2.12) para el factor integrante:

$$FI = e^{\int \frac{2y-2x+2y}{x^2-2xy}dx} = e^{\int \frac{4y-2x}{x(x-2y)}dx} = e^{-2\int \frac{x-2y}{x(x-2y)dx}} = x^{-2}$$

Se multiplica por FI en la ecuación diferencial:

$$x^{-2}y^2dx + (1 - 2x^{-1}y)dy = 0$$

Se resuelve por el método de exacta:

$$f(x,y) = \int x^{-2}y^2dx + g(y) = -x^{-1}y^2 + g(y)$$

$$-2x^{-1}y + g'(y) = 1 - 2x^{-1}y \Longrightarrow g'(y) = 1 \Longrightarrow g(y) = y$$

$$\boxed{-x^1y^2 + y = C}$$

NOTA: El ejercicio puede ser resuelto por el método de coeficientes homogéneos.

- **c)** $(e^x + xe^y)dx + xe^ydy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes de la ecuación diferencial:

$$M(x,y) = e^x + xe^y \Longrightarrow M_y = xe^y$$

$$N(x,y) = xe^y \Longrightarrow N_x = e^y$$

Se aplica la definición (2.11) y (2.12) para el factor integrante:

$$FI = e^{\int\frac{xe^y-e^y}{xe^y}dx} = e^{\int\frac{x-1}{x}dx} = e^{x-\ln x} = \frac{e^x}{x}$$

Se multiplica por FI en la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{e^{2x}}{x} + e^xe^y\right)dx + e^xe^ydy = 0$$

Se resuelve por el método de exacta:

$$f(x,y) = \int \left(\frac{e^{2x}}{x} + e^x e^y \right) dx + g(y) = \int \frac{e^{2x}}{x} dx + e^x e^y + g(y)$$

$$e^x y^x + g'(y) = e^x e^y \Longrightarrow g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = c_1$$

$$\int \frac{e^{2x}}{x} dx + e^x e^y + c_1 = C \Longrightarrow \boxed{\int \frac{e^{2x}}{x} dx + e^x e^y = C}$$

- **d)** $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes de la ecuación diferencial:

$$M(x,y) = 2xy^2 - 3y^3 \Longrightarrow M_y = 4xy - 9y^2$$

$$N(x,y) = 7 - 3xy^2 \Longrightarrow N_x = -3y^2$$

Se aplica la definición (2.13) y (2.14) para el factor integrante:

$$FI = e^{\int \frac{-3y^2 - 4xy + 9y^2}{2xy^2 - 3y^3} dy} = e^{\int \frac{-4xy + 6y^2}{y^2(2x-3y)} dy} = e^{-2\int \frac{y(2x-3y)}{y^2(2x-3y)} dy} = y^{-2}$$

Se multiplica por FI en la ecuación diferencial:

$$(2x - 3y)dx + (7y^{-2} - 3x)dy = 0$$

Se resuelve por el método de exacta:

$$\int d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d(-3xy) + d(-7y^{-1}) = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} - 3xy - \frac{7}{y} = C}$$

- **e)** $dx + \left(\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right) dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes de la ecuación diferencial:

$$M(x,y) = 1 \Longrightarrow M_y = 0$$

$$N(x,y) = \frac{x}{y} - \operatorname{sen}(y) \Longrightarrow N_x = \frac{1}{y}$$

Se aplica la definición (2.13) y (2.14) para el factor integrante:

$$FI = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

Se multiplica por FI en la ecuación diferencial:

$$ydx + (x - y \operatorname{sen} y)dy = 0$$

Se resuelve por el método de exacta:

$$d(xy) + d(y \cos y - \operatorname{sen} y) = 0 \Longrightarrow \boxed{xy + y \cos y - \operatorname{sen} y = C}$$

- **f)** $(x - 2y^3)dy - ydx = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes de la ecuación diferencial:

$$M(x, y) = -y \Longrightarrow M_y = 1$$

$$N(x, y) = x - 2y^3 \Longrightarrow N_x = 1$$

Se aplica la definición (2.13) y (2.14) para el factor integrante:

$$FI = e^{\int \frac{1+1}{-y} dy} = e^{-2 \ln y} = y^{-2}$$

Se multiplica por FI en la ecuación diferencial:

$$(xy^{-2} - 2y)dy - y^{-1}dx = 0$$

Se resuelve por el método de exacta:

$$d(-xy^{-1}) - d(y^2) = 0 \Longrightarrow -\frac{x}{y} - y^2 = C \Longrightarrow \boxed{y^2 + \frac{x}{y} = C}$$

- **g)** $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes de la ecuación diferencial

$$M(x, y) = x + y \Longrightarrow M_y = 1$$

$$N(x,y) = -x + y \Longrightarrow N_x = -1$$

Se aplica la definición (2.15) para el factor integrante:

$$FI = \frac{1}{x^2 + xy - xy + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Se multiplica por "FI" en la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = 0$$

Se resuelve por el método de exacta:

$$f(x,y) = \int \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + g(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \arctan\frac{x}{y} + g(y)$$

$$\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}(-xy^{-2}) + g'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{-y^2}{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{y^2}\right) + g'(y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} \Longrightarrow g'(y) = 0 \;\rightarrow\; g(y) = c_1$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c_1 = C \Longrightarrow \boxed{\ln(x^2 + y^2) + 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = C}$$

NOTA: El ejercicio puede ser resuelto por el método de coeficientes homogéneos

- **h)** $(2x^2y + y^3)dx + (x^3 - xy^2)dy = 0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes de la ecuación diferencial:

$$M(x,y) = 2x^2y + y^3 \Longrightarrow M_y = 2x^2 + 3y^2$$

$$N(x,y) = x^3 - xy^2 \Longrightarrow N_x = 3x^2 - y^2$$

Se aplica la definición (2.15) para el factor integrante:

$$FI = \frac{1}{2x^3y + xy^3 + x^3y - xy^3} = \frac{1}{3x^3y} = \frac{1}{3}x^{-3}y^{-1}$$

Se multiplica por FI en la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{2}{3}x^{-1}+\frac{1}{3}x^{-3}y^2\right)dx+\left(\frac{y^{-1}}{3}-\frac{x^{-2}}{3}y\right)dy=0$$

Se resuelve por el método de exacta:

$$d\left(\frac{2}{3}\ln x\right)+d\left(\frac{-1}{6}x^{-2}y^2\right)+d\left(\frac{1}{3}\ln y\right)=0$$

$$\frac{2}{3}\ln x+\frac{1}{3}\ln y-\frac{1}{6}x^{-2}y^2=C\Rightarrow\boxed{\ln(x^2y)-\frac{y^2}{2x^2}=C}$$

- **i)** $(xy+2y^2)dx+(xy-x^2)dy=0$

Se realizan derivadas parciales de los coeficientes de la ecuación diferencial

$$M(x,y)=xy+2y^2\Rightarrow M_y=x+4y$$

$$N(x,y)=xy-x^2\Rightarrow N_x=y-2x$$

Se aplica la definición 2.15 para el factor integrante:

$$FI=\frac{1}{x^2y+2xy^2+xy^2-x^2y}=\frac{1}{3xy^2}=\frac{1}{3}x^{-1}y^{-2}$$

Se multiplica por FI en la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{1}{3}y^{-1}+\frac{2}{3}x^{-1}\right)dx+\left(\frac{y^{-1}}{3}-\frac{xy^{-2}}{3}\right)dy=0$$

Se resuelve por el método de exacta:

$$d\left(\frac{2}{3}\ln x\right)+d\left(\frac{1}{3}\ln y\right)+\left(\frac{1}{3}xy^{-1}\right)=0\Rightarrow\frac{2}{3}\ln x+\frac{1}{3}\ln y+\frac{xy^{-1}}{3}=C$$

$$\Rightarrow\boxed{\ln(x^2y)+\frac{x}{\mathrm{y}}=\mathrm{C}}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de Factor integrante.

a) $y(1 + xy)dx - xdy = 0$

b) $(1 + xy)dx + x\left(\frac{1}{y} + x\right)dy = 0$

c) $[x + \text{sen}(x) + \text{sen}(y)]dx + \cos(y)\, dy = 0$

d) $[2(x + y)(\sec^2 x + \tan x)]dx + \tan x\, dy = 0$

e) $e^x(x + 1)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$

f) $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$

g) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

2.6 Lineales

Una ecuación diferencial lineal de primer orden viene definida como:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{2.18}$$

Donde los términos P y Q son funciones que dependen únicamente de la variable independiente. A la ecuación (2.18) se la conoce como lineal en y. De igual manera, se puede tener definido de la siguiente forma:

$$x' + P(y)x = Q(y) \tag{2.19}$$

A la ecuación (2.19) se la conoce como lineal en x. La solución para la ecuación (2.18) se define como:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right] \tag{2.20}$$

De forma análoga, la solución para la ecuación (2.19) se la define como:

$$x = e^{-\int P(y)dy}\left[\int e^{\int P(y)dy} Q(y)dy + C\right] \tag{2.21}$$

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de Lineales.

- **a)** $(1+y^2)dx = \left(\sqrt{1+y^2}\operatorname{sen} y - xy\right)dy$

Se verifica si cumple con las expresiones (2.18) o (2.19) :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1+y^2}\operatorname{sen} y - xy}{(1+y^2)} \Rightarrow x' + \frac{xy}{(1+y^2)} = \frac{\sqrt{1+y^2}\operatorname{sen} y}{(1+y^2)}$$

Se resuelve mediante la ecuación 2.21:

$$x = e^{-\int \frac{y}{1+y^2}dy}\left[\int e^{\int \frac{y}{1+y^2}dy}\, \frac{\sqrt{1+y^2}\operatorname{sen} y}{(1+y^2)}dy + C\right]$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[\int \frac{(1+y^2)\operatorname{sen} y}{1+y^2}dy + C\right] = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}(-\cos y + C)$$

$$\boxed{\sqrt{1+y^2}x + \cos y = C}$$

- **b)** $y' = \frac{1}{x\operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} 2y}$

Se verifica si cumple con las expresiones (2.18) o (2.19) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen}(2y)} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x\operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen}(2y) \Rightarrow x' - x\operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen} 2y$$

Se resuelve mediante la ecuación (2.21)

$$\boxed{x + 4(\cos y - 1) = Ce^{\cos y}}$$

- **c)** $y(1+y^2)dx = 2(1-2xy^2)dy$

Se verifica si cumple con las expresiones (2.18) o (2.19) :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2-4xy^2}{y(1+y^2)} \rightarrow x' + \frac{4y}{1+y^2}x = \frac{2}{y(1+y^2)}$$

Se resuelve mediante la ecuación (2.21)

$$x = e^{-\int \frac{4y}{1+y^2}dy}\left[\int e^{\int \frac{4y}{1+y^2}dy} \frac{2}{y(1+y^2)}dy + C\right]$$

$$x = \frac{1}{(1+y^2)^2}\left[\int (1+y^2)^2 \frac{2}{y(1+y^2)}dy + C\right]$$

$$x = \frac{1}{(1+y^2)^2}\left[2\int \left(\frac{1}{y}+y\right)dy + C\right] \Rightarrow \boxed{(1+y^2)^2 x = 2\ln y + y^2 + C}$$

- **d)** $\frac{dy}{dx} + xy = 2x$

Se verifica si cumple con las expresiones (2.18) o (2.19) :

$$y' + xy = 2x$$

Se resuelve mediante la ecuación (2.20):

$$y = e^{-\int xdx}\left[\int e^{\int xdx} 2xdx + C\right]$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[2e^{\frac{x^2}{2}} + C\right] \Rightarrow \boxed{y = 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}}$$

- **e)** $\frac{dy}{dx} = \frac{3+xy}{2x^2}$

Se verifica si cumple con las expresiones (2.18) o (2.19) :

$$y' - \frac{y}{2x} = \frac{3}{2x^2}$$

Se resuelve mediante la ecuación (2.20)

$$y = e^{\int \frac{1}{2x}dx}\left[\frac{3}{2}\int e^{-\int \frac{1}{2x}dx}\,\frac{1}{x^2}\,dx + C\right] = \sqrt{x}\left[\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx + C\right]$$

$$y = \sqrt{x}\left(-\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + C\right) \Longrightarrow \boxed{y + \frac{1}{x} = C\sqrt{x}}$$

- **f)** $y' + 2y = x^2 + 2x$

Se resuelve mediante la ecuación (2.20)

$$y = e^{-\int 2dx}\left[\int e^{\int 2dx}(x^2 + 2x)dx + C\right] = e^{-2x}\left[e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + C\right]$$

$$\boxed{4y = 2x^2 + 2x - 1 + 4Ce^{-2x}}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de Lineales.

a) $\frac{dy}{dx} + y = e^{6x}$

b) $y' + 5x^2y = x^2$

c) $(6 + x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$

d) $x' = \csc y + x\cot y$

e) $y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy$

f) $udx + (1 - 3u)xdu = 3udu$

g) $\cos^3 x\,\mathrm{sen}\,x\,dy + y\cos x\,dx = 0$

2.7 Bernoulli

Para aplicar este método la ecuación diferencial debe estar definida como:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.22}$$

La ecuación (2.22) claramente es no lineal por el termino y^n que acompaña al Q.

Este método consiste en convertir la ecuación (2.22) en lineal mediante un proceso algebraico y un cambio de variable.

A la ecuación (2.22) se divide por el termino y^n

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{2.23}$$

El cambio de variable es $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$.

$$\begin{gathered} \frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x) \\ z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \end{gathered} \tag{2.24}$$

Por lo tanto, la ecuación (2.24) es lineal en z y se resuelve con el método de la sección 2.6

$$z = e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left[\int e^{\int(1-n)P(x)dx}(1-n)Q(x)dx + C\right] \tag{2.25}$$

Finalmente, regresando a variables originales de la expresión (2.25) queda definida como:

$$y^{1-n} = e^{-(1-n)\int P(x)dx}\left[(1-n)\int e^{(1-n)\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right] \tag{2.26}$$

De forma análoga, la expresión (2.22) puede ser definida para x.

$$x' + P(y)x = Q(y)x^n \tag{2.27}$$

La solución de la expresión (2.27) se la encuentra siguiendo los mismos pasos recién empleados.

$$x^{1-n} = e^{-(1-n)\int P(y)dy}\left[(1-n)\int e^{(1-n)\int P(y)dy}Q(y)dy + C\right] \tag{2.28}$$

Para evitar memorizarse las expresiones (2.26) y (2.28), es necesario tener en cuenta el proceso algebraico y el cambio de variable, para reducir la expresión (2.22) o (2.27) en una ecuación lineal.

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de Bernoulli

- **a)** $3\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=2x^4y^4$

Se divide a la ecuación diferencial para $3y^4$:

$$y^{-4}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-3}=\frac{2}{3}x^4$$

Se realiza el cambio de variable de acuerdo a la expresión (2.24):

$$z=y^{-3}\Longrightarrow-\frac{z'}{3}=y^{-4}y'$$

Se resuelve con el método de lineales:

$$z=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left(-2\int x^4e^{-3\int xdx}dx+C\right)=x^3\left(-2\int xdx+C\right)=x^3(-x^2+C)$$

Se regresa a variables originales:

$$z=y^{-3}\Longrightarrow\frac{1}{y^3}=x^3(-x^2+C)\Longrightarrow\boxed{1=-x^3y^3(-x^2+C)}$$

- **b)** $\cos x\frac{dy}{dx}-y\operatorname{sen}x+y^2=0$

Se divide a la ecuación diferencial para $y^2\cos x$:

$$y^{-2}y'-(\tan x)y^{-1}=-\frac{1}{\cos x}$$

Se realiza el cambio de variable de acuerdo a la expresión (2.24):

$$z = y^{-1} \Longrightarrow -z' = y^{-2}y'$$

Se resuelve con el método de lineales:

$$z = e^{\ln(\cos x)}\left[\int e^{-\ln(\cos x)}\frac{1}{\cos x}dx + C\right] = \cos x\left(\int \sec x\, dx + C\right)$$

$$z = \cos x\,(\tan x + C)$$

Se regresa a variables originales:

$$z = y^{-1} \Longrightarrow \frac{1}{y} = \cos x\,(\tan x + C) = \operatorname{sen} x + C\cos x$$

$$\boxed{1 = y(\operatorname{sen} x + C\cos x)}$$

- **c)** $2x\frac{dy}{dx} + 2y = xy^3$

Se divide a la ecuación diferencial para $2xy^3$:

$$y^{-3}y' + \frac{1}{x}y^{-2} = \frac{1}{2}$$

Se realiza el cambio de variable de acuerdo a la expresión 2.24:

$$z = y^{-2} \Longrightarrow -\frac{z'}{2} = y^{-3}y'$$

$$-\frac{z'}{2} + \frac{1}{x}z = \frac{1}{2} \Longrightarrow z' - \frac{2}{x}z = -1$$

Se resuelve con el método de lineales:

$$z = e^{2\int\frac{dx}{x}}\left[-\int e^{-2\int\frac{dx}{x}}dx + C\right] = x^2\left[-\int x^{-2}dx + C\right]$$

$$z = x^2\left(\frac{1}{x} + C\right) = x + Cx^2$$

Se regresa a variables originales:

$$z = y^{-2} \Longrightarrow \frac{1}{y^2} = x + Cx^2 \Longrightarrow \boxed{1 = y^2(x + Cx^2)}$$

- **d)** $3xdy = y(1 + x\operatorname{sen} x - 3y^3 \operatorname{sen} x)dx$

Se busca llegar a la forma de la ecuación (2.22) o (2.27) :

$$3x\frac{dy}{dx} = y(1 + x\operatorname{sen} x - 3y^3 \operatorname{sen} x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1 + x\operatorname{sen} x}{3x}y = -\frac{\operatorname{sen} x}{x}y^4$$

Se divide a la ecuación diferencial para y^4:

$$y^{-4}y' - \frac{1 + x\operatorname{sen} x}{3x}y^{-3} = -\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Se realiza el cambio de variable de acuerdo a la expresión (2.24):

$$z = y^{-3} \Longrightarrow -\frac{z'}{3} = y^{-4}y'$$

Se resuelve con el método de lineales:

$$z = e^{-\ln x + \cos x}\left[3\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}e^{\ln x - \cos x}dx + C\right]$$

$$z = \frac{e^{\cos x}}{x}\left[3\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}(xe^{-\cos x})dx + C\right] = \frac{e^{\cos x}}{x}\left(3\int e^{-\cos x}\operatorname{sen} x\, dx + C\right)$$

Se regresa a variables originales:

$$z = y^{-3} \Longrightarrow \frac{1}{y^3} = \frac{e^{\cos x}}{x}(3e^{-\cos x} + C) = \frac{1}{x}(3 + Ce^{\cos x})$$

$$\boxed{x = y^3(3 + Ce^{\cos x})}$$

- **e)** $y' + \frac{\cot x}{2}y = \frac{\csc x}{2}y^{-1}$

Se divide para y^{-1}

$$yy' + \left(\frac{1}{2}\cot x\right)y^2 = \frac{1}{2}\csc x$$

Se realiza el cambio de variable de acuerdo a la expresión(2.24):

$$z = y^2 \Rightarrow \frac{z'}{2} = yy'$$

$$\frac{z'}{2} + \left(\frac{1}{2}\cot x\right)z = \frac{1}{2}\csc x \Rightarrow z' + (\cot x)z = \csc x$$

$$z = y^2 \Rightarrow \frac{z'}{2} = yy'$$

$$\frac{z'}{2} + \left(\frac{1}{2}\cot x\right)z = \frac{1}{2}\csc x \Rightarrow z' + (\cot x)z = \csc x$$

Se resuelve con el método de lineales:

$$z = e^{-\int \cot x dx}\left[\int \csc x\, e^{\int \cot x dx} dx + C\right] = e^{-\ln(\operatorname{sen} x)}\left[\int dx + C\right] = \frac{1}{\operatorname{sen} x}(x + C)$$

Se regresa a variables originales:

$$z = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{\operatorname{sen} x}(x + C) \Rightarrow \boxed{y^2 \operatorname{sen} x = x + C}$$

- **f)** $(x^2 + y^2 + 1)dx + xydy = 0$

Se busca llegar a la forma de la ecuación (2.22) o (2.27):

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = -\frac{x^2 + 1}{x}y^{-1}$$

Se multiplica a la ecuación diferencial para y:

$$yy' + \frac{1}{x}y^2 = -\frac{x^2 + 1}{x}$$

Se realiza el cambio de variable de acuerdo a la expresión (2.24):

$$z = y^2 \Longrightarrow \frac{z'}{2} = yy'$$

Se resuelve con el método de lineales:

$$z = e^{-2\ln x}\left[-2\int e^{\int 2\ln x}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx + C\right] = \frac{1}{x^2}\left[-2\int x(x^2+1)dx + C\right]$$

$$z = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{x^2} + C\right)$$

Se regresa a variables originales:

$$z = y^2 \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{x^2} + C\right) \Longrightarrow \boxed{x^2y^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x^2} = C}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de Bernoulli.

a) $3x\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{x^3}{y^2}$

b) $2\cos(y)\,dx - (x\,\mathrm{sen}(x) - x^3)dy = 0$

c) $dy + \frac{y}{x}dy = 3x^2y^2dx$

d) $dy + ydx = 2xy^2e^xdx$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^2+y+1}$

f) $dx + \left(\frac{2}{y}\right)xdy = 2x^2y^2dy$

g) $3xdy = y(1 + x\,\mathrm{sen}\,x - 3y^3\,\mathrm{sen}\,x)dx$

2.8 Riccati

Para aplicar este método la ecuación diferencial debe estar definida como:

$$y' = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) \tag{2.29}$$

Donde los términos P,Q,R son funciones únicamente de la variable independiente. Cuando se conozca la solución particular de la ecuación (2.29) se puede encontrar la solución general a esta expresión.

$$y = \phi(x) + z \Longrightarrow y' = \phi'(x) + z' \tag{2.30}$$

Donde el término ϕ es una solución particular conocida de la ecuación (2.29).

Reemplazando ambos términos de la expresión (2.30) en la ecuación (2.29) se reduce como:

$$\phi'(x) + z' = P(x)[\phi(x) + z] + Q(x)[\phi(x) + z]^2 + R(x)$$

$$z' + \phi'(x) = P(x)\phi(x) + P(x)z + Q(x)\phi^2(x) + 2Q(x)\phi(x)z + Q(x)z^2 + R(x)$$

$$\begin{aligned} z' - [P(x) + 2Q(x)\phi(x)]z \\ = Q(x)z^2 - [\phi' - P(x)\phi(x) - Q(x)\phi(x)^2 - R(x)] \end{aligned} \tag{2.31}$$

Como $y = \phi(x)$ es una solución particular se asemeja al término $\phi'(x) - P(x)\phi(x) - Q(x)\phi(x)^2 - R(x)$ y de acuerdo con la ecuación 2.29 eso se reduce a cero. Por lo tanto, la expresión 2.31 se define como:

$$z' - [P(x) + 2Q(x)\phi(x)]z = Q(x)z^2 \tag{2.32}$$

La ecuación (2.32) es una expresión que se resuelve por el método de Bernoulli de la sección 2.7.

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de Riccati.

- **a)** $y' = y^2 - \frac{1}{x}y + 1 - \frac{1}{4x^2}$; $\phi(x) = \frac{1}{2x} + \tan x$

Se realiza el siguiente cambio de variable de acuerdo a (2.30) :

$$y = z + \frac{1}{2x} + \tan x \Rightarrow y' = z' - \frac{1}{2x^2} + \sec^2 x$$

$$z' - \frac{1}{2x} + \sec^2 x = -\frac{1}{x}\left(z + \frac{1}{2x} + \tan x\right) + \left(z + \frac{1}{2x} + \tan x\right)^2 + 1 - \frac{1}{4x^2}$$

$$z' + \sec^2 x = -\frac{z}{x} - \frac{1}{x}\tan x + z^2 + 2z\left(\frac{1}{2x} + \tan x\right) + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x}\tan x + \sec^2 x - \frac{1}{4x^2}$$

$$z' = -\frac{z}{x} + z^2 + \frac{z}{x} + (2\tan x)z \Rightarrow z' - (2\tan x)z = z^2$$

Se resuelve por el método de Bernoulli:

$$z^{-2}z' - (2\tan x)z^{-1} = 1 \;\therefore\; u = z^{-1} \Rightarrow -u' = z^{-2}z'$$

$$-u' - (2\tan x)u = 1 \Rightarrow u' + (2\tan x)u = -1$$

$$u = e^{-2\int \tan x dx}\left[-\int e^{2\int \tan x dx} dx + C\right] = e^{\ln(\cos^2 x)}\left[-\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + C\right]$$

$$u = \cos^2 x\,(-\tan x + C) \Rightarrow \frac{1}{z} = \cos^2 x\,(-\tan x + C)$$

Se regresa a variables originales:

$$z = y - \frac{1}{2x} - \tan x \Rightarrow \frac{1}{y - \frac{1}{2x} - \tan x} = \cos^2 x\,(-\tan x + C)$$

$$\boxed{\frac{2x}{2xy - 2x\tan x - 1} = \cos^2 x\,(-\tan x + C)}$$

- **b)** $x^3y' = x^2y + y^2 - x^2; \phi(x) = x$

Se realiza el siguiente cambio de variable de acuerdo a (2.30) :

$$y = z + x \Rightarrow y' = z' + 1$$

$$y' = \frac{y^2}{x^3} + \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \Rightarrow z' + 1 = \frac{(z+x)^2}{x^3} + \frac{z+x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$z' = \frac{z^2}{x^3} + \frac{2z}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{z}{x} + 1 - \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow z' = \frac{z^2}{x^3} + \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)z$$

Se resuelve por el método de Bernoulli:

$$z^{-2}z' - \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)z^{-1} = \frac{1}{x^3} \quad \therefore u = z^{-1} \Rightarrow -u' = z^{-2}z'$$

$$-u' - \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)u = \frac{1}{x^3} \Rightarrow u' + \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)u = -\frac{1}{x^3}$$

$$u = e^{-\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx}\left[\int e^{\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx}\left(\frac{-1}{x^3}\right)dx + C\right] \Rightarrow u$$
$$= e^{\frac{2}{x}-\ln x}\left[-\int e^{-\frac{2}{x}+\ln x}\left(\frac{1}{x^3}\right)dx + C\right]$$

$$u = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x}\left[-\frac{1}{2}e^{\frac{-2}{x}} + c\right] \Rightarrow \frac{1}{z} = -\frac{1}{2x} + \frac{ce^{\frac{2}{x}}}{x}$$

Se regresa a variables originales:

$$z = y - x \Rightarrow \frac{1}{y-x} = -\frac{1}{2x} + \frac{ce^{\frac{2}{x}}}{x}$$

$$\boxed{\frac{x}{y-x} = -\frac{1}{2} + ce^{\frac{2}{x}}}$$

- **c)** $x(x-1)\frac{dy}{dx} - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0\ ;\ \phi(x) = x$

Se realiza el siguiente cambio de variable de acuerdo a (2.30) :

$$y = z + x \ \Rightarrow\ y' = z' + 1$$

$$x(x-1)y' - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)(z'+1) - (2x+1)(z+x) + (z+x)^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)z + x(x-1) - z(2x+1) - x(2x+1) + z^2 + 2xz + x^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)z' - z + z^2 = 0$$

Se resuelve por el método de variables separables:

$$\int \frac{dz}{z^2 - z} + \int \frac{dx}{x^2 - x} = 0 \Longrightarrow \ln\left(\frac{z-1}{z}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = C$$

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right) = C$$

Se regresa a variables originales:

$$z = y - x$$

$$\left(\frac{y-x-1}{y-x}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right) = C \Longrightarrow \boxed{y = \frac{1 + Cx^2}{1 + Cx}}$$

- **d)** $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1\ ;\ \phi(x) = 1$

Se realiza el siguiente cambio de variable de acuerdo a (2.30) :

$$y = z + 1 \Longrightarrow y' = z'$$

$$z' - x(z+1)^2 + (2x-1)(z+1) = x - 1$$

$$z' - xz^2 - 2xz - x + 2xz - z + 2x - 1 = x - 1$$

$$z' - xz^2 - z = 0 \Longrightarrow z' - z = xz^2$$

Se resuelve por el método de Bernoulli:

$$z^{-2}z' - z^{-1} = x \ \therefore\ u = z^{-1} \Longrightarrow -u' = z^{-2}z'$$

$$-u' - u = x \Longrightarrow u' + u = -x$$

$$u = e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}(-x)dx + C\right] \Longrightarrow u = e^{-x}\left[-\int e^{x}(x)dx + C\right]$$

$$u = e^{-x}[-xe^{x} + x + C] \Longrightarrow \frac{1}{z} = xe^{-x} + Ce^{-x} - x$$

Se regresa a variables originales:

$$z = y - 1 \Longrightarrow \frac{1}{y-1} = xe^{-x} + Ce^{-x} - x$$

$$\boxed{y = \frac{1}{xe^{-x} + Ce^{-x} - x} + 1}$$

- **e)** $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1;\ \phi(x) = 1$

$$y' - y^2 \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} y + \cos^2 x = 0;\ \phi(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable de acuerdo a (2.30) :

$$y = z + \cot x \Longrightarrow y' = z' - \csc^2 x$$

$$z' - \csc^2 x - (z + \cot x)^2 \operatorname{sen}^2 x + \frac{z + \cot x}{\operatorname{sen} x \cos x} + \cos^2 x = 0$$

$$z' - \csc^2 x - (z^2 + 2z \cot x + \cot^2 x) \operatorname{sen}^2 x + \frac{u}{\operatorname{sen} x \cos x} + \csc^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$z' - z^2 \operatorname{sen}^2 x - 2z \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x + \frac{z}{\operatorname{sen} x \cos x} + \cos^2 x = 0$$

$$u' - \left(\operatorname{sen} 2x - \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}\right) z = z^2 \operatorname{sen}^2 x$$

Se resuelve por el método de Bernoulli:

$$z' - \left(\operatorname{sen} 2x - \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}\right) z = z^2 \operatorname{sen}^2 x \ \therefore\ z^{-2} \frac{dz}{dx} - \left(\operatorname{sen} 2x - \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}\right) z^{-1} = \operatorname{sen}^2 x$$

$$u = z^{-1}\ u' = -z^{-2} z'$$

$$-z' - \left(\operatorname{sen} 2x - \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}\right) z = \operatorname{sen}^2 x \Longrightarrow u' + \left(\operatorname{sen} 2x - \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}\right) u = -\operatorname{sen}^2 x$$

$$u = e^{-\int\left(\operatorname{sen} 2x - \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}\right)dx} \left[\iint e^{\int\left(\operatorname{sen} 2x - \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}\right)dx} (-\operatorname{sen}^2 x) dx + C\right]$$

$$u = e^{\frac{1}{2}\cos 2x - \ln(\tan x)} \left[-\int e^{-\frac{1}{2}\cos 2x - \ln(\tan x)} (\operatorname{sen}^2 x) dx + C\right]$$

$$z = e^{\frac{1}{2}\cos 2x} \tan x \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\cos 2x} + C\right] \Rightarrow z = -\frac{1}{2}\tan x + Ce^{\frac{1}{2}\cos 2x} \tan x$$

Se regresa a variables originales:

$$u = \frac{1}{z};\ z = y - \cot x \Rightarrow u = \frac{1}{y - \cot x}$$

$$\frac{1}{y - \cot x} = -\frac{1}{2}\tan x + Ce^{\frac{1}{2}\cos 2x \tan x} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{Ce^{\frac{1}{2}\cos 2x \tan x} - \frac{1}{2}\tan x} + \cot x}$$

- **f)** $y' = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1);\ \phi(x) = \mathrm{x}$

Se realiza el siguiente cambio de variable de acuerdo a (2.30) :

$$y = ux \rightarrow y' = u' + 1$$

$$u' + 1 = -8x(u + x)^2 + 4x(4x + 1)(u + x) - 8x^3 - 4x^2 + 1$$

$$u' = -8x(x^2 + 2xu + z^2) + 4x(4xu + u + 4x^2 + x) - 8x^3 - 4x^2$$

$$u' = -8x^3 - 16x^2u - 8xu^2 + 16x^2u + 4xu + 16x^3 + 4x^2 - 8x^3 - 4x^2$$

$$u' = -8xu^2 + 4xu$$

Se resuelve por el método de Bernoulli:

$$u' - 4xz = -8xu^2\ \therefore\ u^{-2}\frac{du}{dx} - 4xu^{-1} = -8x$$

$$z = u^{-1}dz = -u^{-2}du$$

$$z = e^{-\int 4xdx}\left[\int e^{\int 4xdx}(8x)dx + C\right] \Rightarrow z = e^{-2x^2}\left[8\int e^{2x^2}(x)dx + C\right]$$

$$z = e^{-2x^2}\left[2e^{2x^2} + C\right] \Rightarrow z = 2 + Ce^{-2x^2}$$

Se regresa a variables originales:

$$z = \frac{1}{u}\ ;\ u = y - x \Longrightarrow z = \frac{1}{y - x}$$

$$\frac{1}{y - x} = 2 + Ce^{-2x^2} \Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2 + Ce^{-2x^2}} + x}$$

- **g)** $y' + y^2 \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$; $\phi(x) = \frac{1}{\cos x}$

Se realiza el siguiente cambio de variable de acuerdo a (2.30) :

$$y = z + \sec x \Longrightarrow y' = z' + \sec x \tan x$$

$$z' + \sec x \tan x + (z + \sec x)^2 \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$z' + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + (z^2 + 2z \sec x + \sec^2 x) \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$z' + z^2 \operatorname{sen} x + 2z \tan x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \Longrightarrow z' + 2z \tan x + z^2 \operatorname{sen} x = 0$$

Se resuelve por el método de Bernoulli:

$$z' + 2z \tan x = -z^2 \operatorname{sen} x \therefore z^{-2}\frac{dz}{dx} + 2 \tan x\, z^{-1} = -\operatorname{sen} x$$

$$u = z^{-1}\ du = -z^{-2} du$$

$$-\frac{du}{dx} + 2 \tan x = -\operatorname{sen} x \Longrightarrow \frac{du}{dx} - 2 \tan x = \operatorname{sen} x$$

$$z = e^{2\int \tan x dx}\left[\int e^{-2\int \tan x dx} (\operatorname{sen} x) dx + C\right]$$

$$u = e^{-2\ln(\cos x)}\left[\int e^{2\ln(\cos x)} (\operatorname{sen} x) dx + C\right]$$

$$u = \sec^2 x\left[-\frac{\cos^3 x}{3} + C\right] \Longrightarrow u = C \sec^2 x - \frac{\cos x}{3}$$

Se regresa a variables originales:

$$u = \frac{1}{z};\ z = y - \sec x \Longrightarrow u = \frac{1}{y - \sec x}$$

$$\frac{1}{y - \sec x} = C\sec^2 x - \frac{\cos x}{3} \Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{C\sec^2 x - \frac{\cos x}{3}} + \sec x}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de Riccati.

a) $y' + y^{2x} - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0;\ y = e^x$

b) $y' = \frac{2\cos^2 x - \text{sen}^2\ x + y^7}{2\cos\ x};\ \varphi(x) = \text{sen}\ x$

c) $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2;\ \varphi(x) = \frac{1}{x}$

d) $y' = \text{a}\cos(ax)\,y^2 + \tan(ax)\,y$

e) $y' = y^2 - (\text{sen}\,x)y + \cos x$

f) $y' = \text{a}\,\text{sen}(ax)\,y^2 + \cos(ax)\,y - 1$

g) $xy' = xy^2 - (4x^2 - 1)y + 4x^3$

2.9 Cambio de Variable

En el caso que no se pueda aplicar los métodos anteriores es necesario aplicar otro cambio de variable. Se puede sugerir lo siguiente:

- **Único término:** Cuando en el argumento de un logaritmo, función trigonométrica, un exponencial o en radicales, intervengan las dos variables dependiente e independiente.

- **Término repetido:** cuando los coeficientes M y N de la ecuación (2.1) presentan un término que involucra a las dos variables y que se repiten.

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de Cambio de Variable.

- **a)** $y' = \cos(x + y + 2)$

El cambio de variable será el argumento de la función trigonométrica:

$$z = x + y + 2 \Longrightarrow y' = z' - 1$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$z' - 1 = \cos z \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \cos z \Longrightarrow \frac{dz}{1 + \cos\ z} - dx = 0$$

$$\tan\left(\frac{z}{2}\right) - x = C$$

Se regresa a variables originales:

$$\boxed{\tan\left(\frac{x + y + z}{2}\right) - x = C}$$

- **b)** $y' = (2x + y - 1)\ln(2x + y - 1) - 2$

El cambio de variable sería el argumento de la función logarítmica:

$$z = 2x + y - 1 \Longrightarrow y' = z' - 2$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$z' - 2 = z\ln z - 2 \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = z\ln z \Longrightarrow \frac{dz}{z\ln \mathrm{z}} - dx = 0$$

$$\ln(\ln z) - x = C$$

Se regresa a variables originales:

$$\ln[\ln(2x + y - 1)] - x = C \Longrightarrow \boxed{\ln(2x + y - 1) = Ce^x}$$

- **c)** $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

El cambio de variable es el argumento del radical:

$$z^2 = y - 2x + 3 \Longrightarrow y' = 2zz' + 2$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$2zz' + 2 = 2 + z \rightarrow 2zz' = z \Longrightarrow 2z' = 1 \rightarrow 2dz - dx = 0$$

$$2z - x = C$$

Se regresa a variables originales:

$$\boxed{2\sqrt{y - 2x + 3} - x = C}$$

- **d)** $y' = 1 + e^{y-x+5}$

El cambio de variable es el argumento del exponencial:

$$z = y - x + 5 \Longrightarrow y' = z' + 1$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$z' + 2 = 1 + e^z \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = e^z$$
$$\Longrightarrow e^{-z}dz - dx = 0$$

$$-e^z - x = C \Longrightarrow e^z - x = C$$
$$\Longrightarrow e^{y-x+5} - x = C$$
$$\Longrightarrow \boxed{y - x + 5 = \ln(x + C)}$$

- **e)** $y' = (2x + y + 3)^2$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$z = 2x + y + 3 \Longrightarrow y' = z' - 2$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$z' - 2 = z^2 \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 2 \Longrightarrow \frac{dz}{z^2+2} - dx = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) - x = C \Longrightarrow \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}x = C$$

Se regresa a variables originales:

$$\boxed{\arctan\left(\frac{2x+y+3}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}x = C}$$

- **f)** $ye^{\frac{x}{y^2}}dx + \left(y^2 - 2xe^{\frac{x}{y^2}}\right)dy = 0$

Se realiza el cambio de variable del término que se repite:

$$z = e^{\frac{1}{y^2}} \Longrightarrow x = y^2 \ln z$$

$$\Longrightarrow dx = (2y \ln z)dy + \frac{y^2}{z}dz$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$yz(2y \ln z)dy + \frac{y^2}{z}dz + (y^2 - 2zy^2 \ln z)dy = 0$$

$$(2zy \ln z)dy + ydz + (1 - 2z \ln z)dy = 0 \Longrightarrow ydz + dy = 0 \Longrightarrow \; z + \ln y = C$$

Se regresa a variables originales:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}} + \ln y = C}$$

- **g)** $(x^2y^2)dx + 2x^2dy = 0$ Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = \frac{z}{x} \Longrightarrow dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\left(x^2\frac{z^2}{x^2}+1\right)dx+2x^2\left(\frac{xdz-zdx}{x^2}\right)=0$$

$$(z^2+1)dx+2xdz-2zdx=0 \Longrightarrow (z^2-2z+1)dx+2xdz=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{2}{z^2-2z+1}dz=0 \Longrightarrow \ln x-\frac{2}{z-1}=C$$

Se regresa a variables originales:

$$z=xy \Longrightarrow \boxed{\ln x-\frac{2}{xy-1}=C}$$

- **h)** $(x-2\operatorname{sen} y)+3dx+(2x-4\operatorname{sen} y-3)\cos y\,dy=0$

$$(x-2\operatorname{sen} y+3)dx+[2(x-2\operatorname{sen} y)-3]\cos y\,dy=0$$

Se realiza el cambio de variable del término que se repite:

$$z=x-2\operatorname{sen} y \Longrightarrow dz=dx-2\cos y\,dy \Longrightarrow \cos y\,dy=\frac{dx-dz}{2}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$(z+3)dx+(2z-3)\left(\frac{dx-dz}{2}\right)=0 \Longrightarrow 2(z+3)dx+(2z-3)dx-(z-3)dz=0$$

$$(4z+3)dx-(z-3)dz=0 \Longrightarrow dx-\frac{z-3}{4z+1}dz=0$$

$$\Longrightarrow x-\frac{z}{4}+\frac{13}{16}\ln(4z+1)=C$$

Se regresa a variables originales:

$$x-\frac{1}{4}(x-2\operatorname{sen} y)+\frac{13}{16}\ln(4x-8\operatorname{sen} y+1)=C$$

$$\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} y+\frac{13}{16}\ln(4x-8\operatorname{sen} y+1)=C$$

$$\boxed{12x+8\operatorname{sen} y+13\ln(4x-8\operatorname{sen} y+1)=C}$$

- **i)** $\cos\, y' = 0$

$$y' = \frac{\pi}{2}(2\pi + 1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y - \frac{\pi}{2}(2n + 1)x = C}$$

- **j)** $e^{y'} = 1$

$$y' = \ln(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = C}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de Cambio de Variable.

a) $y' = \operatorname{sen}(x - y + 1)$

b) $(x + y - 2)dx + (x + y + 5)dy = 0$

c) $(x^2 + 2x + y)dx(1 - x)^2 - y)dy = 0$

d) $y' = (8x + 2y - 1)^2 + 2(8x + 2y - 1) + 1$

e) $(x + 2x + y)dx(1 - x^- y)dy = 0$

f) $(2x + 4y - 1)^2 + 2(x + 6y - 6) = y'$

g) $y' \ln(x - y) = 1 + \ln(x - y)$

2.10 Aplicaciones de ecuaciones de primer orden

El construir un modelo matemático representa una ecuación diferencial que defina la dinámica de un sistema; que puede ser físico, química, eléctrico, etc.

En esta sección se realizarán diferentes aplicaciones y se dará mayor énfasis a circuitos eléctricos.

2.10.1 Circuitos eléctricos simples.

Es necesario conocer la ley de Kirchhoff de voltajes: "La suma de todos los voltajes en un lazo es igual a cero". Además, es necesario conocer la ley de corriente: "La suma de todos las corrientes en un nodo es igual a cero". De igual manera, se necesita conocer la definición del voltaje en una resistencia:

$$V_R = iR \tag{2.33}$$

Donde i: corriente (A) y R:resistencia (Ω) y V: voltaje (V). Se conoce que la corriente se define como:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{2.34}$$

Donde q: carga eléctrica, se mide en coulomb (c) y t: tiempo, se mide en segundos (s). El voltaje en un capacitor de define por:

$$V_c = \frac{q}{C} \tag{2.35}$$

Donde C: capacitancia, se mide en faradios (F). La corriente en el capacitor se define como:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c \Rightarrow i_c = C\frac{dV_c}{dt} \tag{2.36}$$

El voltaje en una bobina (V_L) se define como:

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{2.37}$$

Donde L: inductancia, se mide en henrios (H) y i_L: corriente en la bobina. Es necesario tener en claro que el sentido de la corriente se la representa comúnmente del mayor potencial al menor. También se debe conocer que la bobina y el condensador son elementos que almacenan flujo magnético y carga eléctrica respectivamente. La resistencia en cambio consume energía eléctrica y la disipa en calor (Ley de Joule).

Finalmente, es necesario tener en cuenta que un elemento activo (Fuente de energía eléctrica) entrega energía y un elemento pasivo, la recibe. Cuando la corriente eléctrica pasa por un elemento pasivo polariza de mayor a menor potencial.

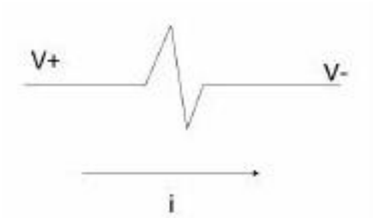
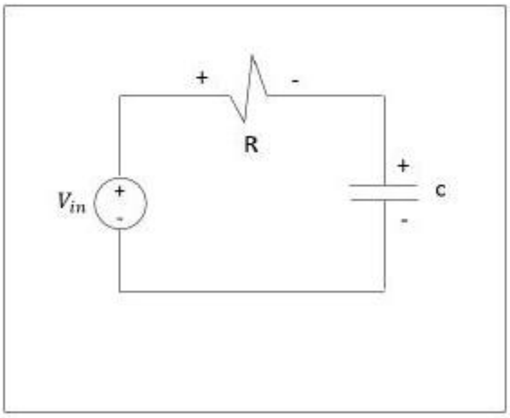


Figura 2.1: Corriente eléctrica a través de un elemento pasivo

Ejercicios resueltos

- **a)** Calcular y dibujar el voltaje, corriente y carga a través del capacitor del siguiente circuito conectado a una fuente de voltaje de corriente directa. Asumir que inicialmente el condensador esta sin carga.



- *Figura 2.2*: Circuito RC en serie

Según la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$-V_{in} + V_R + V_C = 0$$

De acuerdo a las ecuaciones 2.33 y 2.35 se tiene:

$$-V_{in} + iR + \frac{q}{c} = 0 \Rightarrow -V_{in} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow q' + \left(\frac{1}{RC}\right)q = \frac{V_{in}}{R}$$

Esta ecuación diferencial lineal es de primer orden que representa el modelo del circuito eléctrico, la misma que engloba la dinámica del sistema planteado. Dicha ecuación diferencial se resuelve por el método de lineales:

$$q = e^{-\frac{t}{RC}}\left[\int \frac{V_{in}}{R} e^{\frac{t}{RC}} dt + k\right] = e^{-\frac{t}{RC}}\left[CV_{in} e^{\frac{t}{RC}} + k\right]$$

Donde k: constante de integración. La condición inicial es $q(0) = 0$ porque inicialmente el capacitor se encuentra sin carga. A continuación, se realizará el análisis dimensional de RC, conocido como constante de tiempo τ

$$R = \frac{V}{i} = \frac{[V]}{[A]}\ ;\ C = \frac{q}{V} = \frac{i(t)}{V} = \frac{[A][s]}{[V]} \implies RC = \frac{[V]}{[A]}\frac{[A][s]}{[V]}$$

$$RC = [s] \implies \tau = RC = [s]$$

Por lo tanto, la carga de la solución de la ecuación diferencia se define como:

$$\left.\begin{matrix} q = CV_{in} + ke^{-\frac{t}{\tau}} \\ q(0) = 0 \end{matrix}\right\} 0 = CV_{in} + k \implies k = -CV_{in}$$

Reemplazando k en la carga:

$$q = CV_{in} - CV_{in}e^{-\frac{t}{\tau}} \implies \boxed{q = CV_{in}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \qquad (2.38)$$

Graficando la carga:

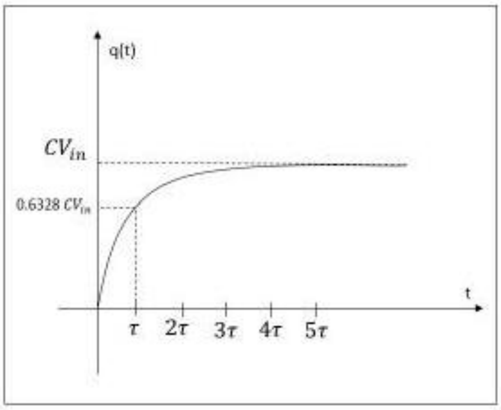


Figura 2.3: carga en un circuito RC en serie.

Se puede observar que el sistema se estabiliza en 5τ y que en su primer τ la carga alcanza el $63{,}2\%$ de su valor estacionario CV_{in}.

La corriente se encuentra derivando de acuerdo a la expresión (2.34):

$$i = \frac{CV_{in}}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V_{in}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.39}$$

Graficando la corriente:

Se puede observar que la corriente empieza en un valor $\frac{V_{in}}{R}$ y desaparece en 5τ. Además, en su primer instante de tempo τ la señal se reduce a un $36{,}8\%$ del valor inicial.

El voltaje en el capacitor se encuentra de acuerdo a la expresión (2.35)

$$V_C = V_{in}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{2.40}$$

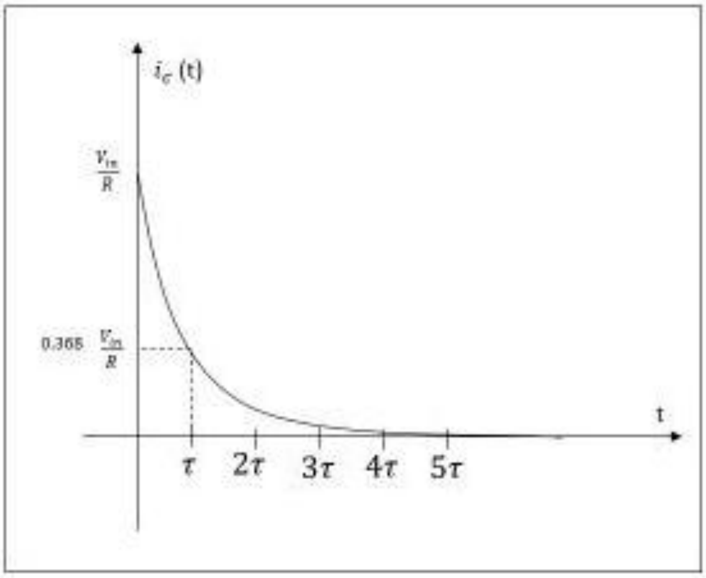


Figura 2.4: Corriente eléctrica en un circuito RC en serie

Graficando el voltaje:

Se puede observar que tiene el mismo efecto de la carga.

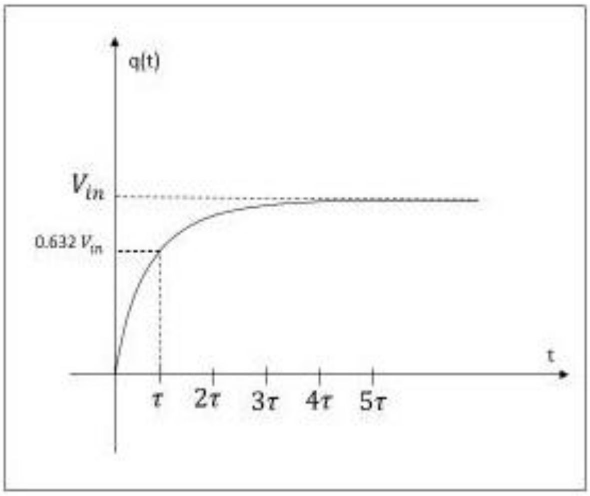


Figura 2.5: Corriente eléctrica en un circuito RC en serie

- **b)** En el ejercicio del literal anterior, considerar la condición inicial $q(0) = q_0$

La constante de integración k se expresaría como:

$$q_0 = CV_{in} + k \Longrightarrow k = q_0 - CV_{in}$$

Por lo tanto, la ecuación (2.38) se modificaría como:

$$q = CV_{in} + (q_0 - CV_{in})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Graficando sería:

Se observa que el sistema se estabiliza en 5τ al igual que en el literal anterior.

La corriente sería:

$$i_C = -\frac{(q_0 - CV_{in})}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} = \left(\frac{V_{in}}{R} - \frac{q_0}{RC}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \left(\frac{V_{in}}{R} - \frac{V_0}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Graficando la corriente:

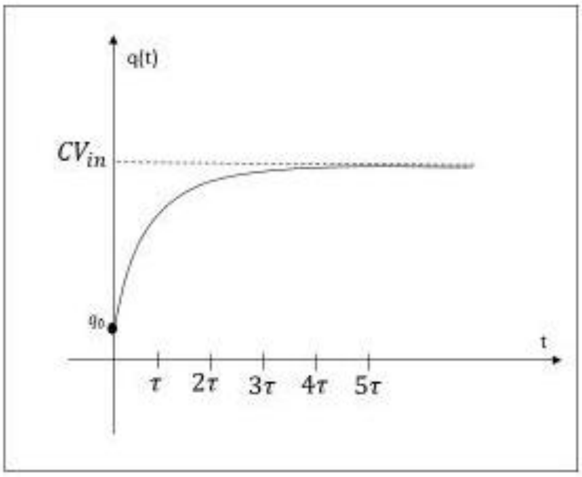


Figura 2.6: Carga en un circuito RC en serie con condición inicial

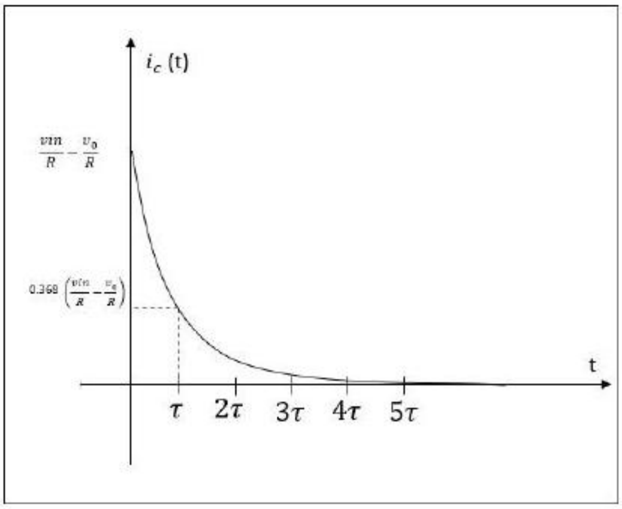


Figura 2.7: Corriente eléctrica en un circuito RC en serie con condición inicial

Se observa que el comportamiento es similar; lo que cambia es el valor referencial provocado por la carga inicial que obviamente presenta un voltaje inicial en el capacitor.

El voltaje sería:

$$V_c = \frac{CV_{in} + (q_0 - CV_{in})e^{-\frac{t}{\tau}}}{C} = V_{in} + \left(\frac{q_0}{C} - V_{in}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = V_{in} + (V_0 - V_{in})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Graficando el voltaje:

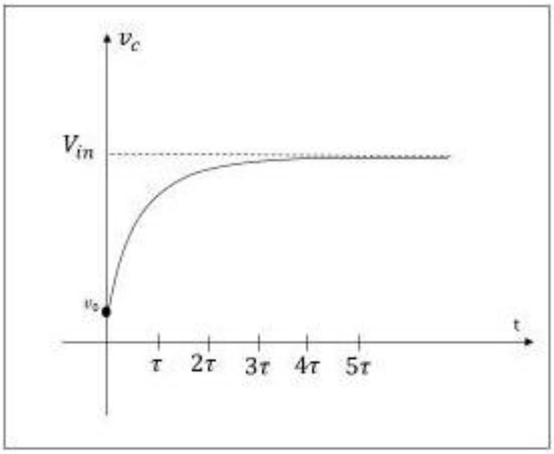


Figura 2.8: Voltaje en un circuito RC en serie

De igual manera el comportamiento en el voltaje es similar al literal anterior; con la diferencia que se empieza en un calor inicial de voltaje.

- **c)** En el mismo circuito del literal **a** considerar un voltaje de entrada de $V_p \sin(\omega t)$

$$q' + \left(\frac{1}{RC}\right) q = \frac{V_p}{R}\sin(\omega t) \Rightarrow q = e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{V_p}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}\sin(\omega t)dt + k\right]$$

$$q = e^{-\frac{t}{RC}}\left\{\frac{CV_p e^{\frac{t}{RC}}}{1+\omega^2R^2C^2}[\sin(\omega t) - \omega RC\cos(\omega t)] + k\right\}$$

$$q = \frac{CV_p}{1+\omega^2R^2C^2}\left[\sin(\omega t) - \omega RC\cos(\omega t) + ke^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

De acuerdo a la condición inicial $q(0) = 0$, el valor de k se expresa como:

$$0 = -\frac{\omega RC^2V_p}{1+\omega^2R^2C^2} + k \Rightarrow k = \frac{\omega RC^2V_p}{1+\omega^2R^2C^2}$$

Por ende, la carga se define como:

$$q = \frac{CV_p}{1+\omega^2R^2C^2}[\sin(\omega t) - \omega RC\cos(\omega t)] + \frac{\omega RC^2V_p}{1+\omega^2R^2C^2}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q = \frac{CV_p}{1+\omega^2R^2C^2}\left[\sin{(\omega t)} - \omega RC\cos{(\omega t)} + \omega RCe^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

En este caso el sistema se comporta como un filtro pasa bajos de primer orden, donde ω_c se llama frecuencia de corte:

$$\tau = RC \Longrightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \Longrightarrow F_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} \tag{2.41}$$

La ω_c tiene unidades de $\frac{\text{rad}}{s}$ y F_c de Hz. Por lo tanto, la carga se expresa como:

$$q = \frac{CV_p}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\left[\sin{(\omega t)} - \frac{\omega}{\omega_c}\cos{(\omega t)} + \frac{\omega}{\omega_c}e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \tag{2.42}$$

El voltaje en el capacitor de acuerdo a la expresión (2.35) sería:

$$V_c = \frac{V_p}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\left[\sin{(\omega t)} - \frac{\omega}{\omega_c}\cos{(\omega t)} + \frac{\omega}{\omega_c}e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \tag{2.43}$$

Si $\omega \ll \omega_c$ el término $\frac{\omega}{\omega_c}$ tiende a ser cero.

$$V_c = V_p\sin{(\omega t)} \tag{2.44}$$

En otras palabras, si la frecuencia de la fuente de entrada es mucho menor a la ω_c del filtro, el mismo voltaje de entrada se presenta a la salida. Lo que representa que deja pasar bajas frecuencias con respecto a ω_c. Si $\omega \gg \omega_c$ el voltaje en el capacitor se anularía:

$$V_c = 0 \tag{2.45}$$

Lo que significa que no deja pasar frecuencias superiores a la ω_c. Si $\omega = \omega_c$, el término $\frac{\omega}{\omega_c}$ es igual a la unidad:

$$V_c = \frac{V_p}{2}\left[\sin{(\omega t)} - \cos{(\omega t)} + e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \tag{2.46}$$

Para un tiempo infinito o en estado estacionario la expresión (2.46) se reduce:

$$V_c = \frac{V_p}{2}[\sin(\omega t) - \cos(\omega t)] \tag{2.47}$$

Se conoce que $\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ y $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
Por lo tanto, en la ecuación (2.47):

$$V_C = \frac{V_p}{2}\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\omega t)\right] = \frac{V_p}{2}\left[-2\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$V_c = \frac{V_p}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.48}$$

Cuando la frecuencia de entrada es igual a la de corte ω_c del filtro, el voltaje de salida se reduce en amplitud en $\frac{V_p}{\sqrt{2}}$ y con un desfase de 45º de acuerdo a la ecuación (2.48).

3 PRIMER ORDEN Y GRADO SUPERIOR

Los siguientes métodos pueden ser empleados también, en las ecuaciones diferenciales de la sección 2, en caso de cumplir con la definición correspondiente. Una ecuación diferencial de este tipo puede ser diferida como:

$$\alpha_n(y')^n + \alpha_{n-1}(y')^{n-1} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = \beta \tag{3.1}$$

Donde los coeficientes $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0, \beta$ son funciones que pueden estar respecto a las dos variables (dependiente e independiente) simultáneamente o una sola variable que puede ser cualquiera de ellas. En cada uno de los siguientes métodos se realiza la sustitución que se presenta en la ecuación 3.2.

$$\frac{dy}{dx} = P \tag{3.2}$$

3.1 Ecuaciones respecto a $\mathbf{P}$

Una vez realizada la sustitución de la ecuación 3.2 en 3.1 se debe expresar en factores mediante técnicas de factorización. Dicha expresión viene definida como:

$$(P - F_1)(P - F_2) \dots (P - F_n) = 0 \tag{3.3}$$

Como cada factor se iguala a cero, entonces se generan " n " ecuaciones diferenciales, como se presenta a continuación:

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x,y); \frac{dy}{dx} = F_2(x,y); \dots; \frac{dy}{dx} = F_n(x,y) \tag{3.4}$$

Por lo tanto, se debe resolver cada ecuación diferencial de la expresión 3.4

$$f_1(x,y,c) = 0; f_2(x,y,c) = 0; \dots; f_n(x,y,c) = 0 \tag{3.5}$$

Finalmente, la solución de este método viene definida en la expresión 3.6

$$f_1(x,y,c)f_2(x,y,c)\dots f_n(x,y,c)=0 \tag{3.6}$$

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método con respecto a P.

- **a)** $y'^2-(2x+y)y'+(x^2+xy)=0$

Se realiza la sustitución de la ecuación (3.2):

$$y'=P$$

$$P^2-(2x+y)P+(x^2+xy)=0$$

$$P_{1,2}=\frac{2x+y\pm\sqrt{(2x+y)^2-4(x^2+xy)}}{2}$$

$$P_{1,2}=\frac{2x+y\pm y}{2}$$

$$P_1=x+y\,;\ P_2=x$$

Se regresa a variables originales:

$$\frac{dy}{dx}=x+y;\ \frac{dy}{dx}=x$$

$$y=Ce^x-x-1;\ y=\frac{x^2}{2}+C$$

$$\boxed{(Ce^x-x-1)\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=0}$$

Ejercicios propuestos: Resolver los siguientes ejercicios

a) $p^2y-16y^3-24xy^2-9x^2y=0$

b) $x^2(1-p^2)+2x(2p+y)=(y+2)(-y+2)$

c) $xp^2 + (y - 1 - x^2)p - x(y - 1) = 0$

d) $x^2p - 3xy - 3y^2 = 2p(x - y) - 4y^2$

e) $\frac{p^2}{y^2} = \frac{x^2+18x+9}{x^2-8x+16}$

f) $[(1 + y^2 - x)p + y][(1 + x)p - x(y + 1 + x)] = 0$

g) $(xp + y)[(y + 1)p + x + 1](x^3 - 3xy^2p + y^3) = 0$

3.2 Ecuaciones respecto a $\boldsymbol{x}$

Una vez realizada la sustitución de la ecuación en (3.2) en (3.1), no hay como factorar para obtener la expresión (3.3); por ende, se debe poder despejar la variable x y se deriva con respecto a y.

Luego, en las nuevas derivadas se realiza la sustitución de la expresión (3.2); por lo tanto, no debe quedar la variable x en la nueva ecuación obtenida; apareciendo sólo P, P', y.

Finalmente, se debe dejar expresada en factores la última ecuación obtenida; se iguala a cero sólo el factor donde esté involucrado el término P. Se resuelve esta ecuación diferencial generada y se encuentra el valor de y en función del parámetro P; por ende, la variable x que se despejo al inicio también queda en función del parámetro P.

La solución de este método, generalmente, se expresa en funciones paramétricas.

Ejercicios Resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método respecto a x

- **a)** $y = xy' + y' + (y')^2$

Se realiza la sustitución de la ecuación 3.2 :

$$y = xP + P + (P)^2 \Longrightarrow xP = y - P - P^2$$

$$x = \frac{y}{P} - 1 - P$$

$$\frac{1}{P} = -P' + \frac{P - yP'}{P^2}$$

$$P = -P'P^2 + P - yP'$$

$$0 = P'(-P^2 - y)$$

$$dP = 0;\ P = C$$

Se sustituye P en las ecuaciones anteriores para dejar en forma paramétrica:

$$x = \frac{y}{C} - 1 - C$$

$$\boxed{y = xC + C + C^2}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos respecto a x.

a) $\frac{dx}{dy} = \frac{ay+b}{cy+d}$

b) $x''y - 4y' - 12y = 3e^{5x}$

c) $x\frac{dy}{dx} - y\frac{dy}{dx} - y = 0$

d) $xy' - y = y^3$

e) $(1 + x^2y^2)y + (xy - 1)^2xy'$

f) $(-xy\,\mathrm{sen}(x) + 2y\cos(x))dx + 2x\cos(x)\,dy = 0$

g) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

3.3 Ecuaciones con respecto a $\boldsymbol{y}$

Es un proceso análogo a la sección (3.2), con la diferencia que en este caso se despeja la variable y debido a que no se puede despejar la variable x y tampoco factorar para tener una expresión igual a (3.3).

De igual forma, la solución se expresa, generalmente, en funciones paramétricas.

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método respecto a y

- **a)** $y - 4x(y')^2 = 0$

Se realiza la sustitución de la ecuación 3.2:

$$y = 4xP^2$$

$$P = 4(P^2 + 2xPP') \Rightarrow \; 0 = 4P^2 - P + 8xPP'$$

$$0 = P(4P + 1 + 8xP') \Rightarrow 4P + 1 + 8xP' = 0$$

$$8x\frac{dP}{dx} = -(4P + 1)$$

$$\int -\frac{dP}{4P + 1} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x}$$

$$-2\ln(4P + 1) = \ln(x) + C$$

$$x = \frac{1}{C(4P + 1)^2} \Rightarrow P = \frac{\left(1 - (Cx)^{\frac{1}{2}}\right)}{4(Cx)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\boxed{y = 4\left(\frac{1}{C(4P + 1)^2}\right)P^2}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos respecto a y.

a) $3x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\left(\frac{dy}{dx}\right) - y = 0$

b) $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}}$

c) $x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{dy}{dx}$

d) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+e^x=2$

e) $y=2x\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}+1$

f) $y=(x+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

g) $y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{dy}{dx}\right)x$

3.4 Clairaut

Una vez realizada la sustitución de la ecuación 3.2 en 3.1, la nueva expresión debe estar definida como:

$$y=Px+f(P) \tag{3.7}$$

Por lo tanto, se realiza la sustitución siguiente:

$$P=C \tag{3.8}$$

Donde "C" es la constante de integración. Así, de esta manera se encontraría directamente la solución mediante este método.

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de Clairaut.

- **a)** $y=-x(y')^2+(y')^2+1$

$$y'=\frac{dy}{dx}=p\Longrightarrow dy=pdx$$

$$y=-xp^2+p^2+1$$

Se realiza la sustitución:

$$dy = -dxp^2 - 2xpdp + 2pdp \Longrightarrow pdx = -dxp^2 - 2xpdp + 2pdp$$

$$(p + p^2)dx = 2p(1 - x)dp$$

Se resuelve la ecuación diferencial por el método de variables separables:

$$\frac{dx}{(1-x)} = \frac{2pdp}{(p+p^2)} \Longrightarrow \int \frac{dx}{(1-x)} = \int \frac{2pdp}{(p+p^2)}$$

$$\int \frac{dx}{(1-x)} = \int \frac{2pdp}{p(1+p)} \Longrightarrow \int \frac{dx}{(1-x)} = \int \frac{2dp}{(1+p)}$$

$$\ln(c) + \ln(x-1) = 2\ln(1+p^2) \Longrightarrow \ln[c(x-1)] = \ln(1+p^2)^2$$

Por lo tanto, se utiliza la sustitución 3.8:

$$p = \sqrt{(cx - x)} - 1 \; y = -xp^2 + p^2 + 1$$

$$\boxed{y = -x(cx - c - 1) + cx - c - 1}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método de Clairaut.

a) $y = (y' - 1)x + ay' + b$

b) $y = xy' + \operatorname{sen}(y')$

c) $y = xy' + \cos(y')$

d) $xy''' + (y''')^2 = y''$

e) $y = x(y' - \operatorname{sen} y') + (1 - \cos y')^2$

f) $y = xy' + \frac{y'}{\sqrt{1-(y')^2}}$

3.5 Lagrange

Una vez realizada la sustitución de la ecuación (3.2) en (3.1), la nueva expresión debe estar definida como:

$$y = f(P)x + g(P) \tag{3.9}$$

Derivando (3.9) y dejando expresado en diferenciales se tiene:

$$dy = xf'(P)dP + f(P)dx + g'(P)dP \tag{3.10}$$

De la ecuación (3.2), se puede dejar expresado también como:

$$dy = Pdx \tag{3.11}$$

Reemplazando (3.11) en (3.10) se tiene:

$$Pdx = xf'(P)dP + f(P)dx + g'(P)dP \tag{3.12}$$

La expresión (3.12) resulta ser lineal en x, como se define a continuación:

$$\frac{dx}{dP} + \frac{f'(P)}{f(P) - P}x = \frac{g'(P)}{P - fP} \tag{3.13}$$

La solución final queda expresada como una función paramétrica (de parámetro P)

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el método de Lagrange.

- **a)** $y = \frac{3}{2}x\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^{\frac{dy}{dx}}$

Se realiza el siguiente cambio:

$$\frac{dy}{dx} = p \Longrightarrow y = \frac{3}{2}xp + e^{p}$$

Derivando (3.9) y dejando expresado en diferenciales se tiene:

$$dy = \frac{3}{2}(pdx + xdp) + e^p dp$$

$$dy = pdx \to pdx = \frac{3}{2}(pdx + xdp)e^p dp$$

$$-\frac{1}{2}pdx = \left(\frac{3}{2}x + e^p\right)dp$$

Se resuelve por el método de Lineales:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3x}{p} = -2\frac{e^p}{p} \;\; \to \;\; x = e^{-\int\frac{3}{p}dp}\left[\int\left(e^{\int\frac{3}{p}dp}\right)\left(-2\frac{e^p}{p}\right)dp + C\right]$$

$$x = e^{-3\ln p}\left[\int\left(e^{3\ln p}\right)\left(-2\frac{e^p}{p}\right)dp + C\right]$$

$$x = p^{-3}\left[\int(p^3)\left(-2\frac{e^p}{p}\right)dp + C\right]$$

$$x = p^{-3}\left[\int e^p(-2p^2)dp + C\right]$$

$$x = p^{-3}[-2(p^2 - 2p + 2)e^p + C]$$

$$x = [-2(p^{-1} - 2p^{-2} + 2p^{-3})e^p + Cp^{-3}]$$

$$\boxed{y = \frac{3}{2}[-2(p^{-1} - 2p^{-2} + 2p^{-3})e^p + Cp^{-3}]p + e^p}$$

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios propuestos por el método Lagrange.

a) $y = (x+6)\left(\frac{dy}{dx}\right)^8$

b) $y = x(y')^2 + \ln|y'|$

c) $3x^4y^{2'} - xy' - y = 0$

d) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{2} x \left(\frac{dy}{dx}\right) + e^{\frac{dy}{dx}}$

e) $x(x-2)(y')^{\cos x} + (2y - 2x' - x + 2)y' + y^2 + y$

f) $y = x\sqrt{y'} + \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{2}{3}(y')^{3/2}$

g) $3y'' - 7y'_6 y = 0$

4 LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

En esta unidad se presentarán los diferentes métodos para resolver una ecuación diferencial lineal de orden superior con coeficientes constantes, la misma que se define en la expresión (4.1).

En este tipo de ecuaciones pueden se homogéneas, donde se presenta una solución general y las no homogéneas que tienen una solución característica y una particular.

$$\alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = P(x) \tag{4.1}$$

Los términos $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ son constantes y $P(x)$ es una función que depende únicamente de la variable independiente.

4.1 Homogéneas de coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de orden superior lineal del tipo homogénea se define como:

$$\alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \tag{4.2}$$

Para alas ecuaciones diferenciales de orden superior, generalmente, se emplea el siguiente operador:

$$D = \frac{d}{dx} \tag{4.3}$$

Por lo tanto, la ecuación (4.2) se expresa de la siguiente forma:

$$\alpha_n D^n y + \alpha_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + \alpha_1 D y + \alpha_0 y = 0 \tag{4.4}$$

De la expresión (4.4), se puede factorizar y formar un polinomio en función de D.

$$y(\alpha_n D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \cdots + \alpha_1 D + \alpha_0) = 0 \tag{4.5}$$

El polinomio de la expresión de la ecuación (4.5) se debe factorizar mediante cualquier método de factorización del álgebra.

$$(D - r_1)(D - r_2) \dots (D - r_n) = 0 \qquad (4.6)$$

La expresión (4.6) puede presentar raíces diferentes, iguales e imaginarias. Por esta razón, se analizarán los tres casos.

Raíces Diferentes

Cuando las raíces son diferentes, la solución viene definida como:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x} \qquad (4.7)$$

Raíces Iguales

En el caso que exista multiplicidad de raíces la solución viene definida como:

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} + C_3 x^2 e^{rx} + \cdots + C_n x^{n-1} e^{rx} \qquad (4.8)$$

Raíces imaginarias

Las raíces pueden ser complejos conjugados definidos de la siguiente forma:

$$r = a \pm jb \qquad (4.9)$$

Por lo tanto, la solución se expresa a continuación:

$$y = e^{ax}(C_1 \cos\ bx + C_2 \text{sen}\ bx) \qquad (4.10)$$

En el caso que la expresión (4.9) se trate de un imaginario puro ($a = 0$), la solución se define como:

$$y = C_1 \cos\ bx + C_2 \text{sen}\ bx \qquad (4.11)$$

También, se puede tener la presencia de más raíces imaginarias.

$$r_1 = a_1 \pm jb_1;\ r_2 = a_2 \pm jb_2; \dots; r_n = a_n \pm jb_n \qquad (4.12)$$

Por ende, La solución se define como:

$$y = e^{a_1 x}(C_1 \cos b_1 x + C_2 \ \operatorname{sen} b_1 x) + \cdots \\ + e^{a_n x}(C_{2n-1} \cos b_n x + C_{2n} \operatorname{sen} b_n x) \tag{4.13}$$

En el caso que la expresión (4.12) se trate de sólo de imaginarios puros desaparece el termino exponencial.

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de orden superior del tipo homogénea.

- **a)** $y'' - 3y' + 2y = 0$

Se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.5):

$$y(D^2 - 3D + 2) = 0$$

Se factora el polinomio:

$$(D - 2)(D - 1) = 0$$

La solución se representa de acuerdo a la expresión (4.7):

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}}$$

- **b)** $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

Se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.5):

$$y(D^3 - 2D^2 - D + 2) = 0$$

Se factora el polinomio:

$$(D - 2)(D - 1)(D + 1) = 0$$

La solución se representa de acuerdo a la expresión (4.7):

$$\boxed{y = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + C_3e^{-x}}$$

- **c)** $y^{IV} - 2y'' - 3y' = 0$

Se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.5):

$$y(D^3 - 2D^2 - 3D) = 0$$

Se factora el polinomio:

$$D(D - 3)(D + 1) = 0$$

La solución se representa de acuerdo a la expresión (4.7):

$$\boxed{y = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{-x}}$$

- **d)** $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.5):

$$y(D^3 + 3D^2 + 3D + 1) = 0$$

Se factora el polinomio:

$$(D + 1)(D + 1)(D + 1) = 0$$

La solución se representa de acuerdo a la expresión (4.8):

$$\boxed{y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}}$$

- **e)** $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

Se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.5):

$$y(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1) = 0$$

Se factora el polinomio:

$$(D-1)(D-1)(D-1)(D-1)=0$$

La solución se representa de acuerdo a la expresión (4.8):

$$\boxed{y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x64e^x+C_4x^3e^x}$$

- **f)** $y^{IV}-2y'''+y''=0$

Se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.5):

$$y(D^4-2D^3+D^2)=0$$

Se factora el polinomio:

$$D^2(D-1)(D-1)=0$$

La solución se representa de acuerdo a (4.8) para cada raíz repetida:

$$\boxed{y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x}$$

- **g)** $y''+2y'+2y=0$

Se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.5):

$$y(D^2+2D+2)=0$$

Se factora el polinomio:

$$[D-(-1+j)][D-(-1-j)]=0\Longrightarrow r=-1\pm j$$

La solución se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.10):

$$\boxed{y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x)}$$

- **h)** $y''+y=0$

Se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.5):

$y(D^2 + 1) = 0$

Se factora el polinomio:

$(D - j)(D + j) = 0 \implies r = \pm j$

La solución se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.11):

$\boxed{y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x}$

- **i)** $y'' + y' + y = 0$

Se deja expresado de acuerdo a la expresión (4.5):

$y(D^2 + D + 1) = 0$

Se factora el polinomio:

$$\left[D - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[D - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La solución se deja expresado de acuerdo a la expresion4.10:

$$\boxed{y = e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]}$$

Ejercicios propuestos:

a) $3y'' - 7y' + 6y = 0$

b) $y'' - 6y' + 13 = 0$

c) $y'' - 4y = 0$

d) $y'' - y' = 0$

e) $76y + y'' - y$

f) $25y + 8y' = 0$

g) $17y' + 5yy' = y$

4.2 No homogéneas de coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de este tipo viene definida como la expresión (4.1). Por lo que, presenta una solución característica (y_c) y una solución particular (y_p).

$$y = y_c + y_p \tag{4.14}$$

La solución característica es la misma de la sección (4.1) y la solución particular presenta diferentes métodos que se detallan a continuación.

4.2.1 Solución mediante el operador D

La ecuación (4.1) debe expresarse mediante factores de grado uno, como se define a continuación:

$$y_p(D - r_1)(D - r_2) \dots (D - r_n) = P(x) \tag{4.15}$$

Por lo tanto, la solución particular se define como:

$$y_p = \frac{P(x)}{F(D)} = \frac{P(x)}{(D - r_1)(D - r_2) \dots (D - r_n)} \tag{4.16}$$

Donde $F(D)$ es una función representada por los factores de grado uno de la ecuación (4.15).

Entonces, de la expresión (4.16) se forman n ecuaciones diferenciales de primer orden para obtener la solución particular.

$$v = \frac{P(x)}{D - r_1} \tag{4.17}$$

Se resuelve la ecuación (4.17), obteniendo una solución $G_1(x)$

$$v = G_1(x) \tag{4.18}$$

Se continua con los siguientes factores, hasta culminar con el último factor donde se encuentra y_p

$$v = \frac{G_1(x)}{D - r_2}, v = \frac{G_2(x)}{D - r_3}, \dots, y_P = \frac{G_{n-1}(x)}{D - r_n} \quad (4.19)$$

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de orden superior mediante el operador D.

- **a)** $y''' + 4y' = x$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^3 - 4D) = x \Rightarrow D^3 - 4D = 0 \Rightarrow D(D-2)(D+2) = 0$$

$$y_c = C_1 + C_2e^{-2x} + C_2e^{2x}$$

Se expresa de acuerdo a (4.16) para encontrar la solución particular:

$$y_p = \frac{x}{D(D-2)(D+2)} \Rightarrow v = \frac{x}{D-2}$$

Se encuentra v mediante el método de lineales:

$$Dv - 2v = x \Rightarrow v' - 2v = x$$

$$\Rightarrow v = e^{-2x}\left(\int xe^{2x}dx\right)$$

$$v = e^{-2x}\left[e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Se continúa con las expresiones 4.19:

$$y_p = \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}}{D(D+2)} \Rightarrow v = \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}}{D+2}$$

$$\Rightarrow v' + 2v = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Se resuelve por el método de lineales:

$$v = e^{-2x}\left[\int \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2x}dx\right] = e^{-2x}\left[e^{2x}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right)\right] = v = \frac{x}{4}-\frac{1}{4}$$

Se continua con las expresiones (4.19):

$$y_p = \frac{\frac{x}{4}-\frac{1}{4}}{D} \Rightarrow y_p' = \left(\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right)$$
$$\Rightarrow dy_p = \left(\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right)dx$$
$$\Rightarrow y_p = \frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1 + C_2e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}}$$

- **b)** $y'' - y = 2\cos^2 x$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2-1) = 2\cos^2 x \Rightarrow D^2 - 1 = 0 \Rightarrow (D+1)(D-1) = 0$$

$$y_c = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$$

Se expresa de acuerdo a (4.16) para encontrar la solución particular:

$$y_p = \frac{2\cos^2 x}{(D+1)(D-1)} \Rightarrow v = \frac{2\cos^2 x}{D+1}$$
$$\Rightarrow v' + v = 2\cos^2 x$$

Se resuelve por el método de lineales:

$$v = e^{-x}\left[2\int \cos^2 x\, e^{x}dx\right] = e^{-x}\left[\int (1+\cos(2x))e^{x}dx\right]$$

$$v = e^{-x}\left[\frac{e^{x}}{5}(\cos(2x) + 2\,\mathrm{sen}(2x))\right] = \frac{1}{5}[\cos(2x) + 2\,\mathrm{sen}(2x)]$$

Se continua con las expresiones (4.19):

$$y_p = \frac{\frac{1}{5}[\cos(2x) + 2\,\text{sen}(2x)]}{D-1} \Longrightarrow y_p' - y_p = \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\text{sen}(2x)$$

$$y_p = e^x\left\{\int e^{-x}\left[\frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\text{sen}(2x)\right]dx\right\}$$

$$y_p = e^x\left[-\frac{e^x}{5}\cos(2x)\right] = -\frac{1}{5}\cos(2x)$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1e^{-x} + C_2e^x - \frac{1}{5}\cos(2x)}$$

- **c)** $(D^2 - 2D + 1)y = 6e^{-x} + 6x$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$D^2 - 2D + 1 = 0 \Longrightarrow (D-1)(D-1) = 0 \Longrightarrow y_c = C_1 + C_2x$$

Se expresa de acuerdo a (4.16) para encontrar la solución particular:

$$y_p = \frac{6e^{-x} + 6x}{(D-1)(D-1)} \Longrightarrow v = \frac{6e^{-x} + 6x}{D-1}$$
$$\Longrightarrow v' - v = 6e^{-x} + 6x$$

Se resuelve mediante el método de lineales:

$$v = e^x\left[\int e^{-x}(6e^{-x} + 6x)dx\right] = e^x\{-3e^{-2x}2e^x(x+1) + 1\}$$

$$v = -3e^{-x}[2e^x(x+1) + 1] = -6(x+1) - 3e^{-x}$$

Se continúa con las expresiones (4.19):

$$y_p = \frac{-3e^{-x} - 6(x+1)}{D-1} \Longrightarrow y_p' - y_p = -3e^{-x} - 6(x+1)$$

$$y_p = e^x\left[-3\int e^{-x}[e^{-x} + 2(x+1)]dx\right]$$

$$y_p = -3e^{x}\left[\int [e^{-2x} + 2e^{-x}(x+1)]dx\right]$$

$$y_p = -3e^{x}\left[-2e^{-x}(x+2) - \frac{1}{2}e^{-2x}\right] = 6(x+2) + \frac{3}{2}e^{-x}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1 + C_2x + \frac{3}{2}e^{-x} + 6(x+2)}$$

- **d)** $y'' - 3y' - 18y = e^{2x}$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 - 3D - 18) = e^{2x} \Longrightarrow D^2 - 3D - 18 = 0 \Longrightarrow (D-6)(D+3) = 0$$

$$y_c = C_1e^{-3x} + C_2e^{6x}$$

Se expresa de acuerdo a (4.16) para encontrar la solución particular:

$$y_p = \frac{e^{2x}}{(D-6)(D+3)} \Longrightarrow v = \frac{e^{2x}}{D-6}$$
$$\Longrightarrow v' - 6v = e^{2x}$$

Se resuelve mediante el método de lineales:

$$v = e^{6x}\left[\int e^{-6x}e^{2x}dx\right] = e^{6x}\left(-\frac{e^{4x}}{4}\right) = -\frac{1}{4}e^{2x}$$

Se continua con las expresiones (4.19):

$$y_p = \frac{\frac{-1}{4}e^{2x}}{D+3} \to y_p' + 3y_p = -\frac{1}{4}e^{2x} \Longrightarrow y_p = e^{-3x}\left[-\frac{1}{4}\int e^{3x}e^{2x}dx\right]$$

$$y_p = e^{-3x}\left(-\frac{1}{20}e^{5x}\right) = -\frac{1}{20}e^{2x}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = Ce^{-3x} + C_2e^{6x} - \frac{1}{20}e^{2x}}$$

- **e)** $y'' - 4y = 6 + e^{2x}$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 - 4) = 6 + e^{2x} \Longrightarrow D^2 - 4 = 0 \Longrightarrow (D+2)(D-2) = 0$$

$$y_c = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$$

Se expresa de acuerdo a (4.16) para encontrar la solución particular:

$$y_p = \frac{6 + e^{2x}}{(D+2)(D-2)} \Longrightarrow v = \frac{6 + e^{2x}}{D+2}$$
$$\Longrightarrow v' + 2v = 6v + e^{2x}$$

Se resuelve mediante el método de lineales:

$$v = e^{-2x}\left[\int e^{2x}(6 + e^{2x})dx\right] = e^{-2x}\left[3e^{2x} + \frac{1}{4}e^{4x}\right]$$

$$v = 3 + \frac{1}{4}e^{2x}$$

Se continua con las expresiones (4.19):

$$y_p = \frac{3 + \frac{1}{4}e^{2x}}{D-2} \Longrightarrow y_p' - 2y_p = 3 + \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$y_p = e^{2x}\left[\int e^{-2x}\left(3 + \frac{1}{4}e^{2x}\right)dx\right]$$

$$y_p = e^{2x}\left(-\frac{3}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4}x\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}xe^{2x}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{3}{2} + \frac{x}{4}e^{2x}$$

- **f)** $y'' - 10y' - 11 = 20e^x$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 - 10D - 11) = 20e^x \Longrightarrow D^2 - 10D - 11 = 0 \Longrightarrow (D - 11)(D + 1) = 0$$

$$y_c = C_1 e^{11x} + C_2 e^{-x}$$

Se expresa de acuerdo a (4.16) para encontrar la solución particular:

$$y_p = \frac{20e^x}{(D - 11)(D + 1)} \Longrightarrow v = \frac{20e^x}{D - 11}$$
$$\Longrightarrow v' - 11v = 21e^x$$

Se resuelve mediante el método de lineales:

$$v = e^{11x}\left[20\int e^x e^{-11x} dx\right] = e^{11x}\left(-\frac{20}{10}e^{-10x}\right) = -2e^x$$

Se continua con las expresiones 4.19:

$$y_p = \frac{-2e^x}{D + 1} \rightarrow y_p' + y_p = -2e^x \Longrightarrow y_p = e^{-x}\left[-2\int e^x e^x dx\right]$$
$$\Longrightarrow y_p = e^{-x}(-e^{2x}) = -e^x$$

La solución final se expresa de acuerdo a 4.14:

$$\boxed{y = C_1 e^{11x} + C_2 e^{-x} - e^x}$$

Ejercicios propuestos:

a) $(D^2 + D - 6)Y = 50 \operatorname{sen} x - 52 \cos Bx$

b) $(D^2 - 4D + 3)Y = 30 \operatorname{sen} 3x$

c) $x(D^2 + 4D + 1)Y = 18e^{-x} \cos 3x$

d) $y'' - 3y' - 4 = 30e^x$

e) $y'' - y = \operatorname{sen}^2 x$

f) $(D^2 - D - 2)y = 6e^{-x}$

g) $y'' - 3y + 3y = \operatorname{sen} e^x$

4.2.2 Variación de parámetros

La solución de la ecuación homogénea 4.4 se define como:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{4.20}$$

Por lo tanto, la solución particular se la expresa como:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n \tag{4.21}$$

Donde $v_1, v_2, \dots, v_n$ son funciones que dependen únicamente de la variable independiente x. Para encontrar estas funciones se forma un sistema de ecuaciones definida como:

$$\begin{cases} v_1' y_1 & +v_2' y_2 & \dots & +v_n' y_n & = 0 \\ v_1' y_1' & +v_2' y_2' & \dots & +v_n' y_n' & = 0 \\ v_1' y_1'' & +v_2' y_2'' & \dots & +v_n' y_n'' & = 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ v_1' y_1^{(n-1)} & +v_2' y_2^{(n-1)} & \dots & +v_n' y_n^{(n-1)} & = P(x) \end{cases} \tag{4.22}$$

La expresión (4.22) es un sistema de ecuaciones de $v_1', v_2', \dots, v_n'$. Es necesario encontrar las soluciones de estas variables, para luego buscar las funciones $v_1, v_2, \dots, v_n$ solo integrando y se reemplazan en (4.21).

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de orden superior mediante el método variación de parámetros.

- **a)** $y'' + 4y' + 3y = 3x + 2$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$y(D^2 + 4D + 3) = 3x + 2 \Longrightarrow D^2 + 4D + 3 = 0$

$$\Longrightarrow (D+3)(D+1)=0$$

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.21):

$$y_p = v_1 e^{-3x} + v_2 e^{-x}$$

Se plantea un sistema de ecuaciones de acuerdo a la expresión(4.22):

$$\begin{cases} v_1' e^{-3x} + v_2' e^{-x} = 0 \\ -3v_1' e^{-3x} - v_2' e^{-x} = 3x + 2 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$v_1' = -v_2' e^{2x} \Longrightarrow -3(-v_2' e^{2x})e^{-3x} - v_2' e^{-x} = 3x + 2$$

$$v_2' = \left(\frac{3}{2}x + 1\right) e^{x} \Longrightarrow v_2 = e^{3x}\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{2}\right)$$

$$v_1' = -\left(\frac{3}{2}x + 1\right) e^{2x} e^{x} = -\left(\frac{3}{2}x + 1\right) e^{3x} \Longrightarrow v_1 = e^{3x}\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

La solución particular se define de acuerdo a la ecuación 4.21:

$$y_p = e^{3x}\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\right) e^{-3x} + e^{3x}\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{2}\right) e^{-x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{6} + e^{2x}\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{2}\right)$$

La solución final se expresa de acuerdo a 4.14

$$\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + \frac{e^{2x}}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{x}{2} - \frac{1}{6}}$$

- **b)** $y'' + 9y = \operatorname{sen}(6x)$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 + 9) = \operatorname{sen}(6x) \Longrightarrow D^2 + 9 = 0 \Longrightarrow r = \pm j3$$

$$y_c = C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.21):

$$y_p = v_1 \cos(3x) + v_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Se plantea un sistema de ecuaciones de acuerdo a la expresión (4.22):

$$\begin{cases} v_1' \cos(3x) + v_2' \operatorname{sen}(3x) = 0 \\ -3v_1' \operatorname{sen}(3x) + 3v_2' \cos(3x) = \operatorname{sen}(6x) \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$v_1' = -v_2' \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)} \Rightarrow -3\left(-v_2' \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}\right) \operatorname{sen}(3x) + 3v_2' \cos(3x) = \operatorname{sen}(6x)$$

$$3v_2' \left(\frac{\sin^2 (3x)}{\cos (3x)} + \cos (3x)\right) = \operatorname{sen}(6x) \Rightarrow v_2' = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(6x) \cos(3x)$$

$$v_2 = -\frac{1}{54}[3\cos(3x) - \cos(9x)]$$

$$v_1' = -\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}(6x)\cos(3x)\right] \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)} = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(6x)\operatorname{sen}(3x)$$

$$v_1 = \frac{1}{54}[\operatorname{sen}(9x) - 3\operatorname{sen}(3x)]$$

La solución particular se define de acuerdo a la ecuación (4.21):

$$y_p = \frac{1}{54}[\operatorname{sen}(9x) - 3\operatorname{sen}(3x)]\cos(3x) - \frac{1}{54}[3\cos(3x) - \cos(9x)]\operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = \frac{1}{54}[\operatorname{sen}(9x)\cos(3x) - 6\operatorname{sen}(3x)\cos(3x) + \operatorname{sen}(3x)\cos(9x)]$$

$$y_p = \frac{1}{54}[\operatorname{sen}(12x) - 3\operatorname{sen}(6x)]$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14)

$$\boxed{y = C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{54}[\operatorname{sen}(12x) - 3\operatorname{sen}(6x)]}$$

- **c)** $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 - 2D + 1) = e^x \ln x \Rightarrow D^2 - 2D + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (D-1)(D-1) = 0$$

$$y_c = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.21):

$$y_p = v_1 e^x + v_2 x e^x$$

Se plantea un sistema de ecuaciones de acuerdo a la expresión (4.22):

$$\begin{cases} v_1' e^x + v_2' x e^x = 0 \\ v_1' e^x + v_2' e^x = e^x (1+x) \ln x \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$v_1' = -x v_2' \Rightarrow (-x v_2') e^x + v_2' e^x (1+x) = e^x \ln x$$

$$v_2' = \ln x \Rightarrow v_2 = x(\ln x - 1)$$

$$v_1' = -x \ln x \Rightarrow v_1 = -\frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1)$$

La solución particular se define de acuerdo a la ecuación (4.21):

$$y_p = -\frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) e^x + x^2 (\ln x - 1) e^x$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14)

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) e^x + x^2 e^x (\ln x - 1)$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{x^2 e^x}{4}(2 \ln x - 1 - 4 \ln x + 4)$$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{x^2 e^x}{4}(3 - 2 \ln x)}$$

- **d)** $y'' - 6y' - 16 = 3e^{-2x}$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 - 6D - 16) = 3e^{-2x} \Longrightarrow D^2 - 6D - 16 = 0$$
$$\Longrightarrow (D-8)(D+2) = 0$$

$$y_c = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-2x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.21):

$$y_p = v_1 e^{8x} + v_2 e^{-2x}$$

Se plantea un sistema de ecuaciones de acuerdo a la expresión (4.22):

$$\begin{cases} v_1' e^{8x} + v_2' e^{-2x} = 0 \\ 8v_1' e^{8x} - 2v_2' e^{-2x} = 3e^{-2x} \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$v_1' = -v_2' e^{-10x} \Longrightarrow 8(-v_2' e^{-10x})e^{8x} - 2v_2' e^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$$-8e^{-2x}v_2' - 2e^{-2x}v_2' = 3e^{2x} \Longrightarrow v_2' = -\frac{3}{10}$$

$$v_2 = -\frac{3}{10}x \Longrightarrow v_1' = \frac{3}{10}e^{-10x} \Longrightarrow v_1 = -\frac{3}{100}e^{-10x}$$

La solución particular se define de acuerdo a la ecuación (4.21):

$$y_p = -\frac{3}{100}e^{-10x}e^{8x} - \frac{3}{10}xe^{-2x} = -\frac{3}{100}e^{-2x} - \frac{3}{10}xe^{-2x} = -\frac{11}{100}e^{-2x}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14)

$$\boxed{y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-2x} - \frac{11}{100}e^{-2x}}$$

Ejercicios propuestos:

a) $y''' - 2y'' + y' + 2y = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$

b) $y''' - 6y" + 11y' - 6y = e^x$

c) $y" - 3y' + 2y = x^2\text{sen } 2x$

d) $y'' + 9y = \sin 3x$

e) $y'' + y'' = 3e^x + 4x^2$

f) $y' + 16y = e^{3x}$

g) $2y'' - 6y'' = x^2$

4.2.3 Coeficientes indeterminados

El polinomio $P(x)$ de la ecuación (4.1) puede venir expresado de diferentes formas como se detalla a continuación y por ende tiene su propia definición de y_P de acuerdo a cada caso.

$$P(x) = P_n(n) \Longrightarrow y_p = x^s(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \cdots + A_{n+1}x^n) \tag{4.23}$$

Donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n y s es la multiplicidad de raíces igual a cero 0 de la ecuación (4.6) las constates $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{(n+1)}$ deben encontrarse su valor correspondiente.

$$P(x) = \alpha e^{bx} \Longrightarrow y_p = Ae^{bx} \tag{4.24}$$

Donde α es una constante con un valor ya predeterminado por el ejercicio y A es una constante que se debe buscar su valor correspondiente.

$$p(x) = \operatorname{sen} \alpha x \Longrightarrow y_p = A \operatorname{sen} \alpha x + B \cos \alpha x \tag{4.25}$$

Donde α es la constante con un valor ya predeterminado por el ejercicio y A, B son contantes que se deben encontrar su valor correspondiente.

$$p(x) = e^{\alpha x} \operatorname{sen} bx \Longrightarrow y_p = Ae^{\alpha x} \operatorname{sen} bx + Be^{\alpha x} \operatorname{sen} bx \tag{4.26}$$

Donde α, b son constantes con un valor ya predeterminado por el ejercicio y A, B son contantes que se deben encontrar su valor correspondiente.

Para encontrar las incógnitas de las ecuaciones (4.23),(4.24),(4.25) y (4.26)se debe derivar de acuerdo al orden de la ecuación diferencial y reemplazar en la misma para encontrar sus valores.

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de orden superior por el método de coeficientes indeterminados.

- **a)** $y'' + 19y = e^{3x}$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 + 19) = e^{3x} \Longrightarrow D^2 + 19 = 0 \ \Longrightarrow \ r = \pm j\sqrt{19}$$

$$y_c = C_1 \cos(\sqrt{19}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{19}x)$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.24):

$$y_p = Ae^{3x}$$

Se deriva de acuerdo al orden de la ecuación diferencial:

$$y' = 3Ae^{3x} \Longrightarrow y'' = 9Ae^{3x}$$

$$9Ae^{3x} + 19Ae^{3x} = e^{3x} \Longrightarrow 28Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{1}{28}$$

$$y_p = \frac{1}{28}e^{3x}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1 \cos(\sqrt{19}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{19}x) + \frac{1}{28}e^{3x}}$$

- **b)** $y'' - y = 6e^{2x}$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 - 1) = 6e^{2x} \Longrightarrow D^2 - 1 = 0$$
$$\Longrightarrow (D + 1)(D - 1) = 0$$

$$y_c = C_1e^{-x} + C_2e^x$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.24):

$$y_p = Ae^{2x}$$

Se deriva de acuerdo al orden de la ecuación diferencial:

$$y' = 2Ae^{2x} \Longrightarrow y'' = 4Ae^{2x}$$

$$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = 6e^{2x} \Longrightarrow 3Ae^{2x} = 6e^{2x} \Longrightarrow A = 2$$

$$y_p = 2e^{2x}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1e^{-x} + C_2e^x + 2e^{2x}}$$

- **c)** $y'' - 4y = x^2 + 3$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 - 4) = x^2 + 3 \Longrightarrow D^2 - 4 = 0 \Longrightarrow (D + 2)(D - 2) = 0$$

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.23):

$$y_p = A_1 + A_2x + A_3x^2$$

Se deriva de acuerdo al orden de la ecuación diferencial:

$$y_p' = A_2 + 2A_3x \Longrightarrow y'' = 2A_3$$

$$2A_3 - 4A_1 - 4A_2x - 4A_3x^2 = x^2 + 3$$

$$-4A_3 = 1 \Rightarrow A_3 = -\frac{1}{4}; -4A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

$$2A_3 - 4A_1 = 3 \Rightarrow A_1 = -\frac{7}{8} \Rightarrow -\frac{7}{8} - \frac{x^2}{4}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{7}{8} - \frac{x^2}{4}}$$

- **d)** $D^3(D+1)y = 3x^3 + 1$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$D^3(D+1) = 0 \Rightarrow y_c = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.23):

$$y_p = x^3(A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3)$$

Se deriva de acuerdo al orden de la ecuación diferencial:

$$y_p'' = 6A_1x + 12A_2x^2 + 20A_3x^3 + 30A_4x^4$$

$$y_p''' = 6A_1 + 24A_2x + 60A_3x^2 + 120A_4x^3$$

$$y_p^{IV} = 24A_2 + 180A_3x + 360A_4x^2$$

$$24A_2 + 180A_3x + 360A_4x^2 + 6A_1 + 24A_2x + 60A_3x^2 + 120A_4x^3 = 3x^3 + 1$$

$$120A_4 = 3 \Rightarrow A_4 = \frac{1}{40}; 360A_4 + 60A_3 = 0 \Rightarrow A_3 = -\frac{3}{20}$$

$$180A_3 + 24A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{9}{8}; 24A_2 + 6A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = -\frac{13}{3}$$

$$y_p = x^3\left(-\frac{13}{3} + \frac{9}{8}x - \frac{3}{20}x^2 + \frac{x^3}{40}\right)$$

$$y_p' = 3A_1x^2 + 4A_2x^3 + 5A_3x^4 + 6A_4x^5$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x} + x^3\left(-\frac{13}{3} + \frac{9}{8}x - \frac{3}{20}x^2 + \frac{x^3}{40}\right)}$$

- **e)** $y'' + 12y' = \cos(6x)$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 + 12D) = \cos(6x) \Longrightarrow D(D + 12) = 0$$

$$y_c = C_1 + C_2e^{-12x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.25):

$$y_p = A\operatorname{sen}(6x) + B\cos(6x)$$

Se deriva de acuerdo al orden de la ecuación diferencial:

$$y_p' = 6A\cos(6x) - 6B\operatorname{sen}(6x) \Longrightarrow y_p'' = -36A\operatorname{sen}(6x) - 36B\cos(6x)$$

$$-36A\operatorname{sen}(6x) - 36B\cos(6x) + 72A\cos(6x) - 72B\operatorname{sen}(6x) = \cos(6x)$$

$$-36A - 72B = 0 \Longrightarrow A = -2B\ ;\ 72A - 36B = 1$$

$$-144B - 36B = 1 \Longrightarrow B = -\frac{1}{180} \Longrightarrow A = \frac{1}{90}$$

$$y_p = \frac{1}{90}\operatorname{sen}(6x) - \frac{1}{180}\cos(6x)$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$y = C_1 + C_2e^{-12x} + \frac{1}{90}\operatorname{sen}(6x) - \frac{1}{180}\cos(6x)$$

- **f)** $3y'' + 2y' - 5y = 7\operatorname{sen} x$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(3D^2 + 2D - 5) = 7\operatorname{sen} x \Longrightarrow (D-1)(3D+5) = 0$$

$$y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{5}{3}x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.25):

$$y_p = A\operatorname{sen} x + B\cos x$$

Se deriva de acuerdo al orden de la ecuación diferencial:

$$y_p' = A\cos x - B\operatorname{sen} x \Longrightarrow y_p'' = -A\operatorname{sen} x - B\cos x$$

$$-3A\operatorname{sen} x - 3B\cos x + 2A\cos x - 2B\operatorname{sen} x - 5A\operatorname{sen} x - 5B\cos x = 7\operatorname{sen} x$$

$$(-8A - 2B)\operatorname{sen} x + (2A - 8B)\cos x = 7\operatorname{sen} x$$

$$2A - 8B = 0 \;\rightarrow\; A = 4B\,;\; -8A - 2B = 7$$

$$-32B - 2B = 7 \Longrightarrow B = -\frac{7}{34} \Longrightarrow A = -\frac{14}{17}$$

$$y_p = -\frac{14}{17}\operatorname{sen} x - \frac{7}{34}\cos x$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{5}{3}x} - \frac{14}{17}\operatorname{sen} x - \frac{7}{34}\cos x}$$

- **g)** $y'' + 2y' + 12y = e^x \operatorname{sen} x$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 + 2D + 12) = e^x\operatorname{sen} x \Longrightarrow (D^2 + 2D + 12) = 0 \Longrightarrow r = -1 \pm j\sqrt{13}$$

$$y_c = e^{-x}\left[C_1\cos\left(\sqrt{13}x\right) + C_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{13}x\right)\right]$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.26):

$$y_p = e^x(A\operatorname{sen}x + B\cos x)$$

Se deriva de acuerdo al orden de la ecuación diferencial:

$$y_p' = e^x[(A - B)\operatorname{sen}x + (A + B)\cos x]$$

$$y_p'' = e^x[-2B\operatorname{sen}x + 2A\cos x]$$

$$e^x[-2B\operatorname{sen}x + 2A\cos x] + 2e^x[(A - B)\operatorname{sen}x + (A + B)\cos x] \\ +12e^x(A\operatorname{sen}x + B\cos x) = e^x\operatorname{sen}x$$

$$e^x[(-2B + 2A - 2B + 12A)\operatorname{sen}x + (2A + 2A + 2B + 12B)\cos x] = e^x\operatorname{sen}x$$

$$e^x[(14A - 4B)\operatorname{sen}x + (4A + 14B)\cos x] = e^x\operatorname{sen}x$$

$$4A + 14B = 0 \Longrightarrow A = -\frac{7}{2}B; 14A - 4B = 1 \Longrightarrow B = -\frac{1}{53}$$

$$A = \frac{7}{106} \Longrightarrow y_p = e^x\left(\frac{7}{106}\operatorname{sen}x - \frac{1}{53}\cos x\right)$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$y = e^{-x}\left[C_1\cos(\sqrt{13}x) + C_2\operatorname{sen}(\sqrt{13}x)\right] + e^x\left(\frac{7}{106}\operatorname{sen}x - \frac{1}{53}\cos x\right)$$

- **h)** $y'' + 9y' = 2e^x\cos x$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 + 9D) = 2e^x\cos x \Longrightarrow D(D + 9) = 0$$

$$y_c = C_1 + C_2e^{-9x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.26):

$$y_p = e^x(A\operatorname{sen}x + B\cos x)$$

Se deriva de acuerdo al orden de la ecuación diferencial:

$$y_p' = e^x[(A - B)\operatorname{sen} x + (A + B)\cos x]$$

$$y_p'' = e^x[-2B\operatorname{sen} x + 2A\cos x]$$

$$e^x[-2B\operatorname{sen} x + 2A\cos x] + 9e^x[(A - B)\operatorname{sen} x + (A + B)\cos x] = 2e^x\cos x$$

$$e^x[(-2B + 9A - 9B)\operatorname{sen} x + (2A + 9A + 9B)\cos x] = 2e^x\cos x$$

$$-11B + 9A = 0 \Longrightarrow A = \frac{11}{9}B; 11A + 9B = 2 \Longrightarrow B = -\frac{103}{81}$$

$$A = -\frac{1133}{729} \Longrightarrow y_p = e^x\left(-\frac{1133}{729}\operatorname{sen} x - \frac{103}{81}\cos x\right)$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$y = C_1 + C_2e^{-9x} - e^x\left(\frac{1133}{729}\operatorname{sen} x + \frac{103}{81}\cos x\right)$$

Ejercicios propuestos:

a) $4y'' - y = 12e^x + e^{1/2}$

b) $y'' + 74y = 48\sin\ 5x$

c) $y'' + 16 = 14\cos\ 3x$

d) $y'' + y = \sin\ 5x + 8\cos\ 5$

e) $(D^2 - 1)y = x^4$

f) $(D - 1)^2y = x^2 - 3x$

g) $y'' + \operatorname{sen}\ xy' = 67y$

4.2.4 Método abreviado

Al igual que la sección anterior se tiene diferentes casos donde se puede encontrar de forma más corta la solución particular a los métodos anteriores.

$$P(x) = e^{\alpha x} \Longrightarrow y_p = \frac{1}{F(a)} e^{\alpha x} \text{ si } F(a) \neq 0 \tag{4.27}$$

La ecuación (4.27) permite encontrar de forma directa el y_p siempre y cuando el denominador sea diferente de cero.

En el caso que el valor de a coincida con un valor de las raíces como se define a continuación.

$$\begin{aligned} P(x) = e^{r_1 x} \Longrightarrow y_p \quad &= \frac{e^{r_1 x}}{(D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_n)} \\ &= \frac{e^{r_1 x}}{(D - r_1)F(D)} = \frac{e^{r_1 x}}{(D - r_1)F(r_1)} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Donde $F(D) = (D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_n)$ se puede encontrar $F(r_1)$ por ende, la y_p de (4.28) se puede expresar como:

$$y_p = \frac{k e^{r_1 x}}{D - r_1} \tag{4.29}$$

Donde $k = \frac{1}{F(r_1)}$ lo que representa un valor numérico. Por lo tanto, la ecuación (4.29) se puede resolver por el método de lineales de primer orden.

$$P(x) \begin{cases} \sin{(ax + b)} \\ \cos{(ax + b)} \end{cases} \Rightarrow y_p = \frac{1}{F(D^2)} P(x) = \frac{1}{F(-a^2)} P(x) \tag{4.30}$$

En este caso es aplicable, cuando el polinomio (4.6) se puede dejar expresado en función de D^2 o de orden superior par.

$$P(x) = P_n(x) \rightarrow y_p = \frac{P_n}{F(D)} = \frac{P_n(x)}{\alpha_n D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \cdots + \alpha_1 D + \alpha_0} \tag{4.31}$$

Donde el término $\frac{1}{F(D)}$ se puede dividir dejando expresado de la siguiente forma:

$$y_p = (a_0 + a_1 D + a + 2D^2 + \cdots + a_n D^n) P_n(x)$$
$$y_p = a_0 P_n(x) + a_1 P_n'(x) + a_2 P_n''(x) + \cdots + a_n P_n^{(n)} \tag{4.32}$$

El orden de la derivada de la ecuación (4.32) depende del grado del polinomio $P_n(x)$.

$$P(x) = e^{ax} P_n \rightarrow y_p = e^{ax}\left[\frac{1}{F(D+a))} P_n(x)\right] \tag{4.33}$$

Este caso se aplica cuando se tiene una exponencial multiplicada por un polinomio, para lo cual se aplica la ecuación (4.33) y se procede con los mismos pasos para la ecuación (4.32).

Ejercicios resueltos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes indeterminados.

- **a)** $y^{IV} - 25y'' + 144y = 42e^{3x}$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^4 - 25D^2 + 144) = 42e^{3x} \Longrightarrow (D+4)(D-4)(D+3)(D-3) = 0$$

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-4x} + C_4 e^{4x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.28):

$$y_p = \frac{42e^{3x}}{(D+4)(D-4)(D+3)(D-3)} = \frac{42e^{3x}}{(7)(-1)(9)(D-3)} = -\frac{2}{3}\frac{e^{3x}}{D-3}$$

$$y_p' - 3y_p = -\frac{2}{3}e^{3x} \Longrightarrow y_p = e^{3x}\left[-\frac{2}{3}\int e^{-3x}e^{3x}dx\right] = -\frac{2}{3}xe^{3x}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-4x} + C_4 e^{4x} - \frac{2}{3}xe^{3x}}$$

- **b)** $4y'' - y = 12e^{x} + e^{\frac{x}{4}}$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(4D^2 - 1) = 12e^{x} + e^{\frac{x}{4}} \Longrightarrow (2D + 1)(2D - 1) = 0$$

$$y_c = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.27):

$$y_p = \frac{12e^{x}}{(2D + 1)(2D - 1)} + \frac{e^{\frac{x}{4}}}{(2D + 1)(2D - 1)}$$

$$y_p = \frac{12e^{x}}{(3)(1)} + \frac{e^{\frac{x}{4}}}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = 4e^{x} - \frac{4}{3}e^{\frac{x}{4}}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + 4e^{x} - \frac{4}{3}e^{\frac{x}{4}}}$$

- c) $y'' + 3y = 17\cos(3x)$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^2 + 3) = 17\cos(3x) \Longrightarrow (D^2 + 3) = 0 \Longrightarrow r = \pm j\sqrt{3}$$

$$y_c = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.30):

$$y_p = \frac{17\cos(3x)}{D^2 + 3} = \frac{17\cos(3x)}{-(3)^2 + 3} = -\frac{17}{6}\cos(3x)$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$y = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x) - \frac{17}{6}\cos(3x)$$

- d) $y^{IV} + 9y = 9\operatorname{sen} 5x$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$y(D^4+9) = 9\operatorname{sen} 5x \Rightarrow D^4 + 9 = 0$$
$$\Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \pm j\frac{\sqrt{6}}{2}\ r_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm j\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$y_c = e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)\right]$$
$$+ e^{-\frac{\sqrt{6}}{2}x}\left[C_3\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_4 s\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)\right]$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.30):

$$y_p = \frac{9\operatorname{sen} 5x}{[(D^2)^2+9]} = \frac{9\operatorname{sen} 5x}{[(-5^2)^2+9]} = \frac{9}{634}\operatorname{sen} 5x$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)\right] + e^{-\frac{\sqrt{6}}{2}x}\left[C_3\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_4 s\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)\right] + \frac{9}{634}\operatorname{sen} 5x}$$

- **e)** $(D^2-1)y = x^4$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$(D+1)(D-1) = 0 \Rightarrow y_c = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.32):

$$y_p = \frac{x^4}{D^2-1} = (-1 - D^2 - D^4 - \cdots)(x^4)$$

$$z = \underline{x^4} \Rightarrow z' = 4x^3$$
$$\Rightarrow z'' = \underline{12x^2}$$
$$\Rightarrow z''' = 24x$$
$$\Rightarrow z^{IV} = \underline{24}$$

$$\Longrightarrow \; z^{V} = 0$$

$$y_p = -x^4 - 12x^2 - 24$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - x^4 - 12x^2 - 24}$$

- **f)** $(D-3)^2 y = x^2 - 6x - 4$

Se encuentra la solución característica mediante los métodos de la sección (4.1):

$$(D-3)(D-3) = 0 \Longrightarrow y_c = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Se plantea la solución particular de acuerdo a la ecuación (4.32):

$$y_p = \frac{x^2 - 6x - 4}{D^2 - 6D + 9} = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27}D + \frac{1}{27}D^2 + \cdots\right)(x^2 - 6x - 4)$$

$$z = \underline{x^2 - 6x - 4} \Longrightarrow z' = \underline{2x - 6}$$
$$\Longrightarrow z'' = \underline{2}$$
$$\Longrightarrow z''' = 0$$

$$y_p = \frac{1}{9}(x^2 - 6x - 4) + \frac{1}{27}(2x - 6) + \frac{1}{27}(2) = \frac{x^2}{9} - \frac{16}{27}x - \frac{16}{27}$$

La solución final se expresa de acuerdo a (4.14):

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{x^2}{9} - \frac{16}{27}x - \frac{16}{27}}$$

5 TRANSFORMADA DE LAPLACE

La Transformada de Laplace es una herramienta útil para el cálculo, que nos permite llevar problemas del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Funciona como un operador lineal para la resolución de ecuaciones diferenciales y además proporciona una forma sencilla de resolver problemas que vienen de las ciencias e ingenierías que por algún otro método sería muy complejo resolverlo.

5.1 Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función de t (tiempo) definida para $t > 0$. La transformada de Laplace de $f(t)$ denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$, se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{5.1}$$

Donde s es una variable compleja y se define como $s = \delta + j\omega$

Al factor e^{-st} de la definición de la transformada de Laplace se le denomina Núcleo o Kernel; este factor permite llevar del dominio t al dominio transformado s.

Se dice que la transformada de Laplace de $f(t)$ existe, cuando la integral de su definición converge para algún valor de s; de otra manera, se dice que no existe.

La operación de obtener $F(s)$ a partir de una $f(t)$ dada, se llama **transformación de Laplace.** Por otra parte, la función $f(t)$ original de la definición (5.1) se llama *la transformada inversa o inversa de Laplace* de $F(s)$ y se denota por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{5.2}$$

Ejercicios resueltos

Determinar la transformada de Laplace, de las siguientes funciones elementales.

- **a)** Función constante $f(t) = k$

Aplicando la definición tenemos

$$\mathcal{L}\{k\} = \int_0^{\infty} e^{-st} k dt = -\frac{k}{s} e^{-st}\bigg|_0^{\infty} - \frac{k}{s}(0-1)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}}$$

- **b)** Función potencia n-ésima $f(t) = t^n$

Aplicando la definición tenemos

$$\mathcal{L}\{k\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = -\frac{t^n}{s} e^{-st}\bigg|_0^{\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

Al resolver el primer sumando $-\frac{t^n}{s} e^{-st}\Big|_0^{\infty}$, de acuerdo a la definición del límite se hace cero. Al continuar resolviendo la integral con el método de por partes, se tiene:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{n}{s}\left[-\frac{t^{n-1}}{s}(e^{-st})\bigg|_0^{\infty} + \frac{n-1}{s}\int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-st} dt\right]$$

Nuevamente el primer sumando se hace cero, de acuerdo a la definición del límite, por ende, el n-ésimo término de la integral sería:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{n(n-1)}{s}\int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-st} dt = -\frac{n!}{s^{n+1}}(e^{-st})\bigg|_0^{\infty}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

- **c)** Función constante $f(t) = e^{at}$ cuando $t \geq 0$, donde a es una constante

Aplicando la definición tenemos

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t}\bigg|_0^{\infty}$$

Por lo tanto, cuando $s - a > 0$:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}}$$

¿deberíamos seguir así y obtener la transformada de cada función de la definición? La respuesta es no y la razón de esto es debido a que la transformada de Laplace tiene muchas propiedades generales que facilitan su cálculo. Primero, la transformada de Laplace es una "operación lineal", similar a la diferenciación y la integración. Esto significa lo siguiente.

La transformada de Laplace tiene las siguientes propiedades

Linealidad: La transformada de Laplace es una operación lineal; es decir para cualesquiera funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Laplace existan y cualesquiera constantes α y β.

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\} \tag{5.3}$$

Ejercicios resueltos

Determinar la transformada de Laplace o su inversa de las siguientes funciones.

- **a)** $f(t) = \cosh at$

Aplicando la definición de $\cosh x$ y la definición (5.1)tenemos

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{at} + \frac{1}{2}e^{-at}\right\}$$

Aplicando la propiedad (5.3)

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{at}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{-at}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$

Cuando $s > a(\geq 0)$,

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}}$$

- **b)** Sea $F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}, a \neq b$. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Del Algebra Lineal la inversa de una transformación lineal es lineal, luego la transformada inversa de Laplace es lineal. Reduciendo $F(s)$ mediante fracciones parciales tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{(s-a)} - \frac{1}{(s-b)}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-b}\right\}\right]$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})}$$

	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s)}$		$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s)}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	6.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$	7.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
3.	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	8.	$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	9.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
5.	$t^\alpha, \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	10.	$\operatorname{senh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

5.1.1 Transformada de Laplace de algunas funciones especiales:

Como funciones especiales en Teoría de Control, se conoce a la función delta de Dirac o función impulso, escalón unitario o Heaviside y a la función rampa.

La función escalón unitario: llamada también función unitaria de Heaviside, es considerada una función causal porque se encuentra definida en el intervalo de $(0,\infty)$:

$$H(t) = u(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

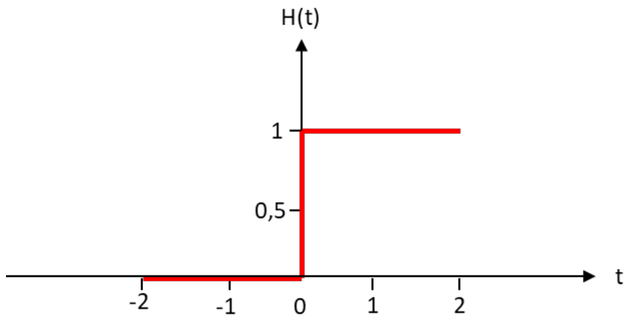


Figura 5.1 Gráfica de la función escalón unitario.

La transformada de Laplace de la función escalón unitario viene dada como:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s} \tag{5.4}$$

La función escalón unitario se puede encontrar desplazada un valor a, como se muestra a continuación:

$$H(t-\mathrm{a}) = u(t-\mathrm{a}) = 1(t-a) = \begin{cases} 0, & t < \mathrm{a} \\ 1, & t > \mathrm{a} \end{cases}$$

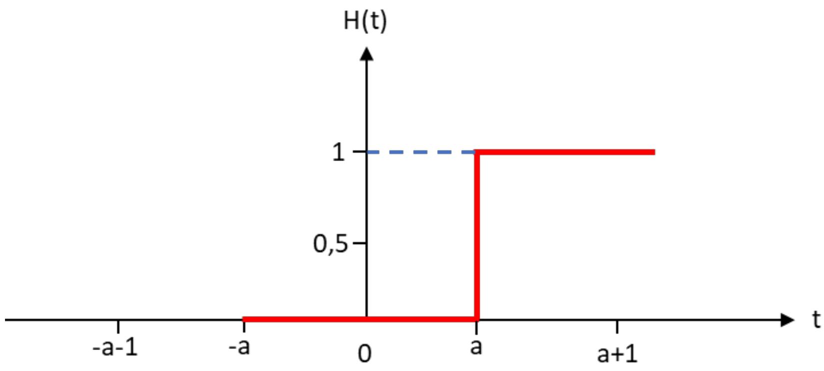


Figura 5.2 Gráfica de la función escalón unitario desplazada un valor a.

La transformada de Laplace de la función escalón unitario desplazada un valor a, viene dada como:

$$\mathcal{L}\{H(t-\mathrm{a})\} = \frac{e^{-\mathrm{a}t}}{s} \tag{5.5}$$

La función impulso, también llamada función delta de Dirac y se define como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

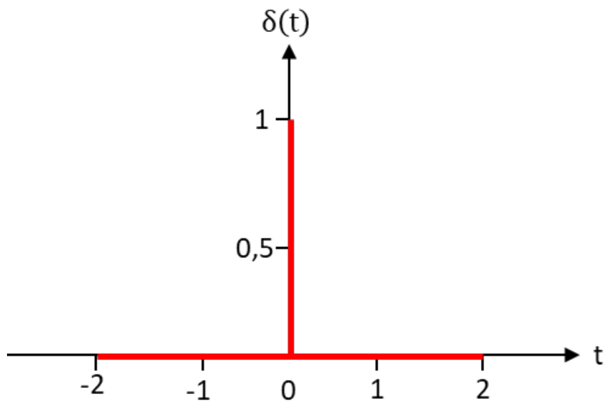


Figura 5.3 Gráfica de la función impulso.

La transformada de Laplace de la función impulso viene dada como:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{5.6}$$

La función impulso se puede encontrar desplazada un valor a, como se muestra a continuación:

$$\delta(t - \mathrm{a}) = \begin{cases} \infty, & t = \mathrm{a} \\ 0, & t \neq \mathrm{a} \end{cases}$$

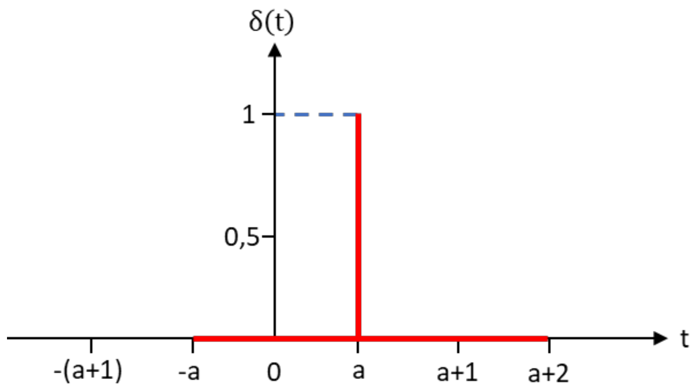


Figura 5.4 Gráfica de la función impulso desplazada un valor a.

La transformada de Laplace de la función impulso desplazada un valor a, viene dada como:

$$L\{\delta(t-\text{a})\} = e^{-\text{a}s} \tag{5.7}$$

La función Rampa viene definida como:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

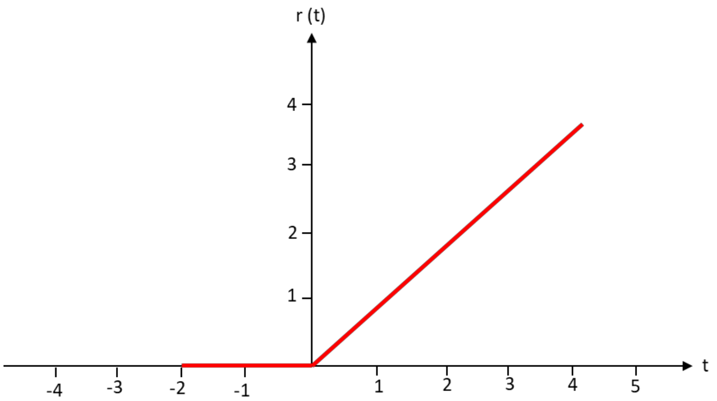


Figura 5.5 Gráfica de una función rampa.

La transformada de Laplace de la función rampa viene dada como:

$$L\{r(t)\} = \frac{1}{s^2} \tag{5.8}$$

Ejercicios resueltos

- **a)** Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función

$$f(t) = \begin{cases} 5, & t < 2 \\ -1, & 2 < t < 5 \\ 2. & t > 5 \end{cases}$$

La función $f(t)$ la podemos escribir usando la función escalón unitario como

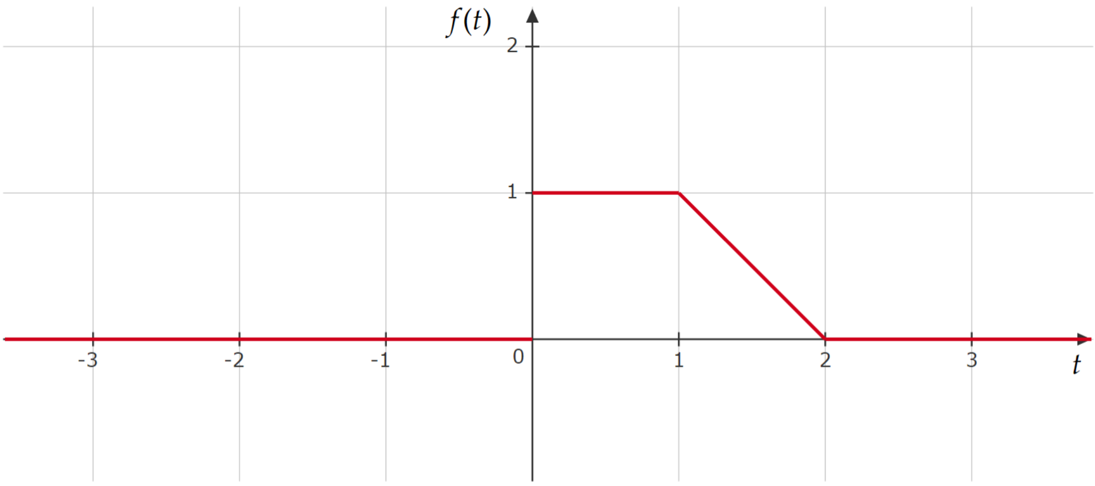
$$f(t) = 5 - 6H(t-2) + 3H(t-5)$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{5 - 6H(t-2) + 3H(t-5)\} \\ &= \mathcal{L}\{5\} - 6\mathcal{L}\{H(t-2)\} + 3\mathcal{L}\{H(t-5)\} \\ &= \frac{5}{s} - 6\frac{e^{-2s}}{s} + 3\frac{e^{-5s}}{s} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5 - 6e^{-2s} + 3e^{-5s}}{s}}$$

- **b)** Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función



La función $f(t)$ la podemos escribir usando la función escalón unitario y la función rampa como:

$$f(t) = H(t) - r(t-1) + r(t-2)$$

Luego, usando el resultado del ejercicio propuesto d) de esta sección tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{H(t) - r(t-1) + r(t-2)\}\\ &= \mathcal{L}\{H(t)\} - \mathcal{L}\{r(t-1)\} + \mathcal{L}\{r(t-2)\}\\ &= \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(s-1)e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}}$$

Ejercicios propuestos:

Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones usando la definición (5.1).

a) $f(t) = \cos(at)$

b) $f(t) = te^{-8t}$

c) $f(t) = te^{-at}$, donde a es una constante

d) la función dada por

$$f(t) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$

e) La función rampa desplazada a unidades dada por

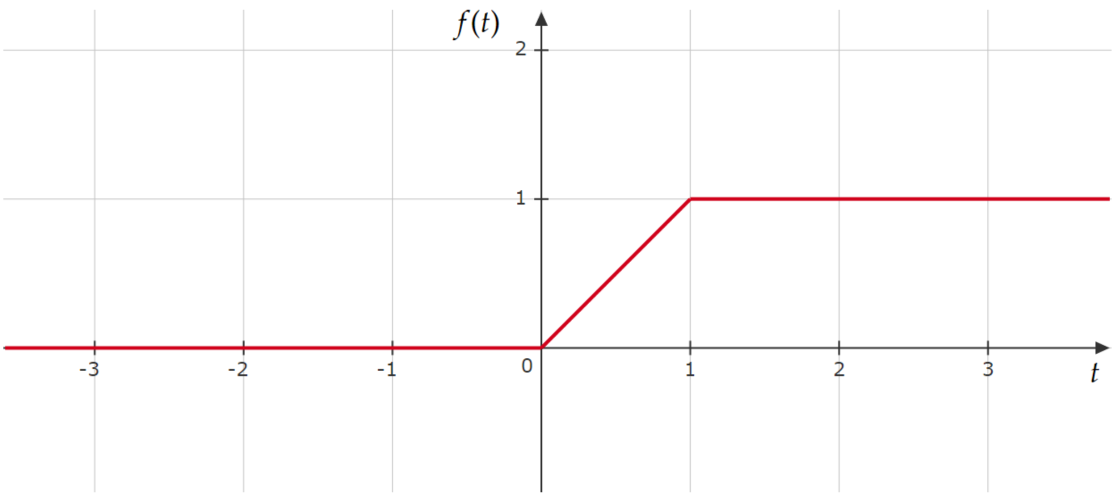
$$r(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ t-a & t \geq a \end{cases}$$

R. $\mathcal{L}\{r(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$

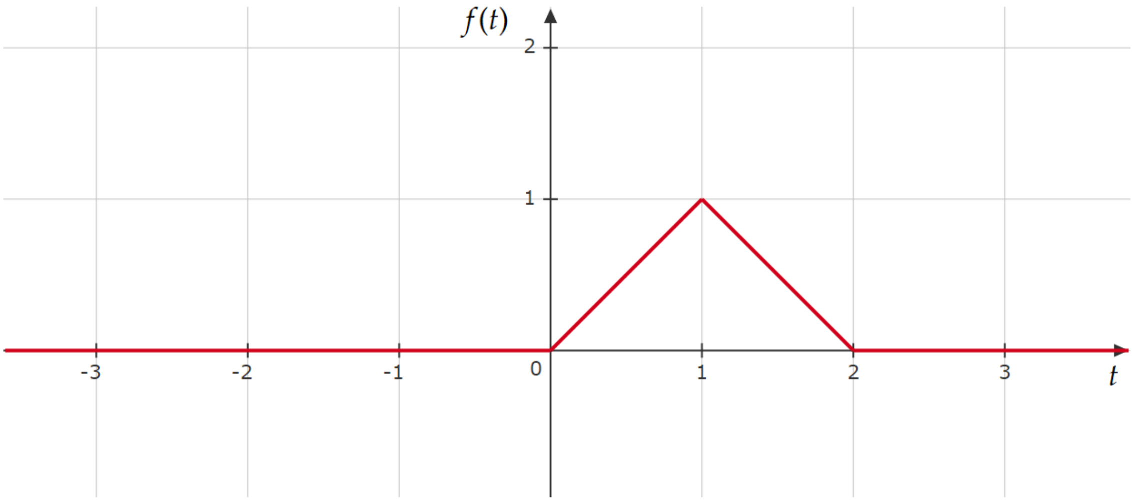
f) la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{t} & 1 \leq t \leq 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

g) la función dada por



h) la función dada por



5.2 Propiedades de la transformada de Laplace

En la sección 5.1 vimos que la transformada de Laplace es lineal, propiedad (5.3), en esta sección describiremos otras propiedades importantes de la transformada de Laplace:

Propiedad de cambio de escala, está dada por:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{5.9}$$

Propiedad de traslación en la frecuencia, está dada por:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \tag{5.10}$$

Propiedad de traslación en el tiempo, esta propiedad permitirá encontrar la transformada de Laplace de funciones discontinuas. Su transformada viene dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathrm{H}(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{5.11}$$

Transformada de derivadas, la transformada de Laplace nos permite trabajar con derivadas de forma algebraica. A continuación, la deducción para la transformada de la primera derivada.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t \\ &= e^{-st} f(t)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned} \tag{5.12}$$

La deducción para la segunda derivada es equivalente.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\mathrm{d}t \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned} \tag{5.13}$$

En general se tendrá.

$$\mathcal{L}\left\{f^{(\mathrm{n})}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{5.14}$$

Transformada de integrales, Al igual que con las derivadas, la transformada de Laplace nos permite trabajar con las integrales de manera algebraica

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{5.15}$$

La integral puede encontrarse desplazada un valor a, luego

$$\mathcal{L}\left\{\int_{\mathrm{a}}^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} - \int_0^{\mathrm{a}} f(u)du \tag{5.16}$$

Multiplicación por potencias de t, está dada por:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s) \tag{5.17}$$

División por t, está dada por:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du \tag{5.18}$$

Ejercicios resueltos

Halle las transformadas de Laplace indicadas usando las propiedades (5.2) (5.18)

- **a)** $\mathcal{L}\{e^{-5t} t \operatorname{sen}^2 2t\}$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^2 2t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t\right\} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+16}$$

$$\mathcal{L}\{t\operatorname{sen}^2 2t\} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+16}\right] = \frac{1}{2s^2} + \frac{16-s^2}{2(s^2+16)^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{-5t} t \operatorname{sen}^2 2t\} = \frac{1}{2(s-5)^2} + \frac{16-(s-5)^2}{2((s-5)^2+16)^2}}$$

- **b)** $\mathcal{L}\left\{\frac{e^t(\cos t - 1)}{t}\right\}$

$$\mathcal{L}\{e^t(\cos t - 1)\} = \mathcal{L}\{e^t \cos t\} - \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{s-1}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^t(\cos t - 1)}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{u-1}{(u-1)^2+1} - \frac{1}{u-1}\right) du$$
$$= \frac{1}{2}\ln[(u-1)^2+1] - \ln(u-1)\Big|_s^\infty$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^t(\cos t - 1)}{t}\right\} = \sqrt{(s-1)^2+1}s - 1$$

- **c)** $\mathcal{L}\{\int_0^t x^2 \operatorname{sen} 5x\, dx\}$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 5t\} = \frac{5}{s^2+25}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 \operatorname{sen} 5t\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{5}{s^2+25}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{-10s}{(s^2+25)^2}\right) = \frac{10(3s^2-25)}{(s^2+25)^3}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t x^2 \operatorname{sen} 5x\, dx\right\} = \frac{10(3s^2-25)}{s(s^2+25)^3}}$$

- **d)** $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{x^2\cos x + e^{-x}\operatorname{sen} x}{x}dx\right\}$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{x^2\cos x + e^{-x}\operatorname{sen} x}{x}dx\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t x\cos x\,dx + \int_0^t \frac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{x}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{tcost\} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t}\operatorname{sen} t}{t}\right\}$$

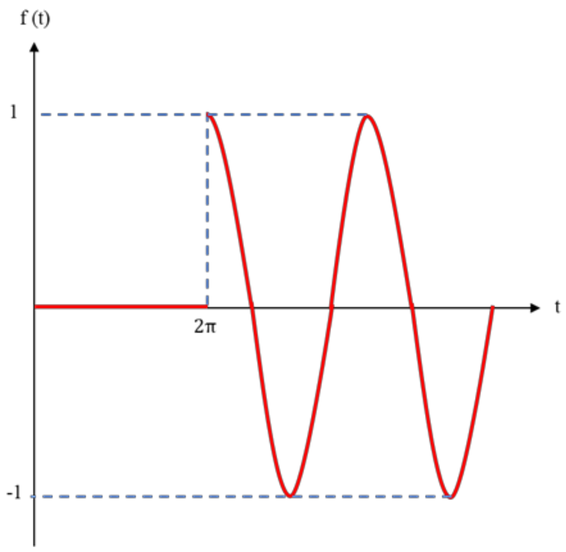
$$= \frac{1}{s}\left[-\frac{d}{dt}\mathcal{L}\{\cos t\}\right] + \frac{1}{s}\left[\int_s^\infty \mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{sen} t\}du\right]$$

$$= \frac{1}{s}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right] + \frac{1}{s}\left[\int_s^\infty \frac{du}{(u+1)^2+1}\right]$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{x^2\cos x + e^{-x}\operatorname{sen} x}{x}dx\right\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{s^2-1}{(s^2+1)} + \frac{1}{s}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s+1)\right)}$$

- **e)** Encontrar la transformada de Laplace de la siguiente función por partes:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2\pi \\ \cos(t-2\pi)\,, & t > 2\backslash pi \end{cases}$$



La función $f(t)$ la podemos expresar a través de la función escalón unitario como

$$f(t) = \cos(t-2\pi)\,H(t-2\pi)$$

Luego

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\cos(t-2\pi)\,H(t-2\pi)\}$$

$$= e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\cos(t)\}$$

$$\boxed{F(s) = e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}}$$

Halle las transformadas de inversa indicada

- **f)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+4}\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} = 4e^{2t} - 3\cos 4t + \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2t}$$

- **f)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\}$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \frac{1}{2}e^{t}\operatorname{sen} 2t}$$

- **g)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\}$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s/3}\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\} = \begin{cases}\operatorname{sen}(t-\pi/3) & t > \pi/3\\ 0 & t < \pi/3\end{cases}}$$

- **h)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\}$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\} = \frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2} = \frac{1}{2}\cos 2t$$

- **i)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t$ y $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = -\frac{2s}{(s^2+1)^2}$ tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = -\frac{1}{2}(-t\operatorname{sen} t) = \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t}$$

- **j)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\right\}$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\} = 1-e^{-t}$ tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}}$$

- **k)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$ tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\,du$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{4}(1-\cos 2t)}$$

Halle la transformada inversa de las funciones dadas aplicando descomposición de fracciones o el método de fracciones parciales según el caso.

- **l)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-9}\right\}$

La transformada inversa se puede descomponer como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-9}\right\} = \cosh 3t + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{s^2-3^2}\right)\right\}$$

$$= \cosh 3t + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-3^2}\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-9}\right\} = \cosh 3t + \frac{1}{3}\operatorname{senh} 3x}$$

- **m)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2)^2+9}\right\}$

La transformada inversa se puede descomponer como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2)^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)+2}{(s^2-2)^2+9}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s^2-2)^2+9}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2-2)^2+9}\right\}$$

$$= e^{2t}\cos 3t + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2-2)^2+3^2}\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2)^2+9}\right\} = e^{2t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{2t}\operatorname{sen} 3t}$$

- **n)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2-s-2}\right\}$

Descomponemos el argumento de la transformada inversa usando el método de fracciones parciales

$$\frac{s+3}{s^2-s-2} = \frac{s+3}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$$= \frac{A(s+1)+B(s-2)}{(s-2)(s+1)} = \frac{(A+B)s+(A-2B)}{(s-2)(s+1)}$$

De donde, tenemos que

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-2B=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{3} \\ B=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2-s-2}\right\} = \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2-s-2}\right\} = \frac{5}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}$$

- **o)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$

Descomponemos el argumento de la transformada inversa usando el método de fracciones parciales y resolvemos

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}\right\} \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = 2e^t - 2\cos t + \operatorname{sen} t}$$

Ejercicios propuestos

A) Hallar las transformadas de Laplace indicada

a) $\mathcal{L}\{(t+2)^2e^t\}$

b) $\mathcal{L}\{e^{2t}(3\operatorname{sen}4t - 4\cos 4t)\}$

c) $\mathcal{L}\{e^{-t}(3\operatorname{senh}2t - 5\cosh 2t)\}$

d) $\mathcal{L}\{(1+te^{-t})^3\}$

e) $\mathcal{L}\{f(t)\}$ si

$$f(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & t > 1 \\ 0, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

f) Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s^2-s+1}{(2s+1)^2(s-1)}$, hallar $\mathcal{L}\{f(2t)\}$

g) Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-1/s}}{s}$ hallar $\mathcal{L}\{e^{-t}f(3t)\}$

h) Dada $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1 \\ t, & t > 1 \end{cases}$, (i) Hallar $\mathcal{L}\{f(t)\}$. (ii) Hallar $\mathcal{L}\{f'(t)\}$

i) Demostrar que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right\} = \frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

j) Demostrar que

$$\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} \frac{e^{-t}\operatorname{sen} u}{u}dudt = \frac{\pi}{4}$$

k) Hallar $\mathcal{L}\{t(3\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t)\}$

l) Demostrar que

$$\mathcal{L}\{t^2 \operatorname{sen} t\} = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

m) Hallar $\mathcal{L}\{t^3 \cos t\}$

n) Demostrar que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$$

o) Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}dt$$

B) Hallar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+4}{s^3}-\frac{2s-18}{s^2+9}+\frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}$

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{4\pi s/5}}{s^2+25}\right\}$

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$

g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$

h) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ (sugerencia busque una $f(t)$ tal que $\frac{d}{dt}f(t)=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$)

i) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$

j) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$

k) Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$

5.3 Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

la transformada de Laplace permite resolver problemas de valor inicial lineales donde la ecuación diferencial que tenga coeficientes constantes, esto es, la ecuación diferencial sea como en (4.1)

$$\begin{gathered} a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=g(t) \\ y(0)=y_0, y'(0)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_{n-1} \end{gathered} \tag{5.19}$$

Donde los términos $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ y $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$son constantes, $g(t)$ es una función que depende únicamente de la variable independiente t.

Gracias a la propiedad (5.3) de linealidad, la transformada de la ecuación (5.19) queda de la forma:

$$a_n\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1}\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_1\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_0\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\} \qquad (5.20)$$

Aplicando (5.14) a (5.20) nos queda

$$\begin{aligned} &a_n[s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{n-1}(0)\,] \\ &\qquad + a_{n-1}\left[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)\right] + \cdots \qquad (5.21) \\ &\qquad + a_oY(s) = G(s) \end{aligned}$$

Donde $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

Resolviendo la ecuación transformada (5.21) para el símbolo $Y(s)$, primero obtendremos $P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$ y después despejamos

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)} \qquad (5.22)$$

Donde $P(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$, $Q(s)$ es un polinomio de grado menor o igual que $n-1$ y consiste de varios productos de los coeficientes $a_i, i = 1, \dots, n$ y las condiciones dadas $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.

El procedimiento en general consiste en escribir (5.22) con el menor denominador común y luego descomponer en dos más fracciones parciales. Luego, la solución $y(t)$ del problema de valor inicial (5.19) es $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, donde la transformada inversa se halla término a término. Podemos resumir el método en el siguiente diagrama

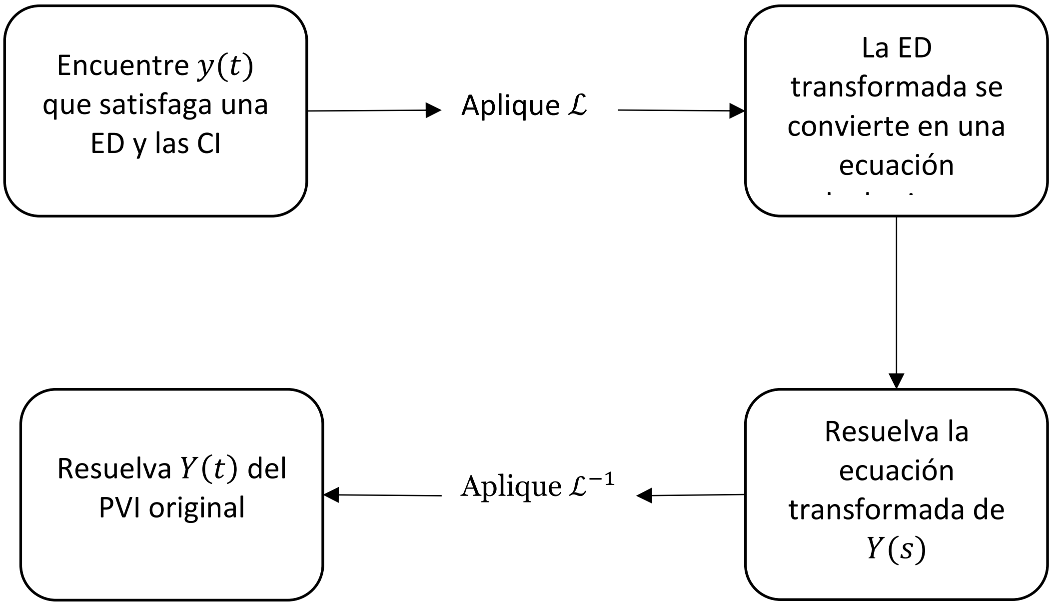


Figura 5.6 Método de Laplace de resolución de ecuaciones diferenciales

Ejercicios resueltos

Determine la transformada de Laplace de las ecuaciones diferenciales y despeje $Y(s)$ en cada caso

- **a)** $y'' - 2y' + 3y = 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'' - 2y' + 3y\} &= \mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} \\ &= [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 2[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) \\ &= (s^2 - 2s + 3)Y(s) - y'(0) - (s-2)y(0) = 0\end{aligned}$$

Despejando $Y(s)$, obtenemos

$$\boxed{Y(s) = \frac{y'(0) + (s-2)y(0)}{s^2 - 2s + 3}}$$

- **b)** $y' = te^{3t} + 2$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y' - te^{3t} - 2\} &= \mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{te^{3t}\} - 2\mathcal{L}\{1\} \\ &= [sY(s) - y(0)] - \frac{1}{(s-3)^2} - \frac{2}{s} = 0\end{aligned}$$

Despejando $Y(s)$, obtenemos

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s(s-3)^2} + \frac{2}{s^2} + \frac{y(0)}{s}}$$

En ambas soluciones $y(0)$ y $y'(0)$ representan las condiciones iniciales especificadas

- **c)** Usando el método de las fracciones parciales determine la transformada inversa de $Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+1)}$

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t}$$

- **d)** Resolver $y' - 5y = 0; y(0) = 2$

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial tenemos

$$\mathcal{L}\{y'\} - 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\} \Rightarrow [sY(s) - 2] - 5Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s-5}$$

Luego, tomando la transformada inversa de $Y(s)$ obtenemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = 2e^{5t}}$$

- **e)** Resolver $y' + y = \operatorname{sen} t\,; y(0) = 1$

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial tenemos

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} \Rightarrow [sY(s) - 1] + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow (s+1)Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + 1$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{1}{s+1}$$

Luego, tomando la transformada inversa de $Y(s)$ obtenemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right) + e^{-t}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t}$$

- **f)** Resolver $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}; y(0) = -3, y'(0) = 5$

Tenemos que

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{4e^{2t}\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$[s^2Y(s) + 3s - 5] - 3[sY(s) + 3] + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)} + \frac{3s-14}{s^2-3s+2} = \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}$$
$$= -\frac{7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

Así

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = -7e^{t} + 4e^{2t} + 4te^{2t}}$$

- **g)** Resolver $y'' - 3y' + 4y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 5$

Tenemos que

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 3[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) = 0$$

$$[s^2Y(s) - s - 5] - 3[sY(s) - 1] + 4Y(s) = 0$$

$$(s^2 - 3s + 4)Y(s) - s - 2 = 0$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2 - 3s + 4} = \frac{s+2}{\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{s - \frac{3}{2}}{\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \sqrt{7}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

Así

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - \frac{3}{2}}{\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \sqrt{7}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = e^{\frac{3t}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \sqrt{7}e^{\frac{3t}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}t}$$

- **h)** Resolver $y'' + 2y' + y = \delta(t - \pi); y(0) = 1, y'(0) = 0$

Tenemos que

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t - \pi)\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] + Y(s) = e^{-\pi s}$$

$$[s^2Y(s) - s] + 2[sY(s) - 1] + Y(s) = e^{-\pi s}$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - s - 2 = e^{-\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s} + s + 2}{s^2 + 2s + 1} = \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

Así

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = H(t-\pi)\left(e^{-(t-\pi)}(t-\pi)\right) + e^{-t} + te^{-t}}$$

- **i) Resolución de un sistema masa resorte**

Al suspender una masa cuyo peso es $29{,}4\ N$ de cierto resorte, este se alarga $0{,}6125\ m$ desde su longitud natural. A partir del reposo, en el momento $t = 0$, la masa se pone en movimiento aplicándole una fuerza externa $F(t) = \cos 4t$, pero en el instante $t = 4\pi$ esa fuerza cesa súbitamente, permitiendo que la masa continúe su movimiento. Si se desprecia la fricción, determinar la función de posición resultante para la masa.

La posición $y(t)$ de la masa en el tiempo t se rige por la ecuación diferencial

$$My'' + cy' + ky = F(t),$$

donde M es la masa del objeto, c es la constante de fricción, k es la constante de fuerza del resorte y $F(t)$ es la fuerza externa aplicada.

En este caso, el peso de la masa es $W = 29{,}4N$, entonces la masa es $M = \frac{29{,}4}{9{,}8} = 3\ \text{kg}$.

La elongación del resorte es $\Delta\ell = 0{,}6125$, por lo que su constante es $k = \frac{29{,}4}{0{,}6125} = 48\ \text{N/m}$; además, no hay fricción, por ello $c = 0$. Así, la ecuación diferencial que rige el movimiento de la masa es

$$3y'' + 48y = f(t)$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos 4t & \text{si } \ 0 \le t < 4\pi \\ 0 & \text{si } \ 4\pi \le t \end{cases}$$

La ecuación se puede escribir como $y'' + 16y = \frac{1}{3}f(t)$. Luego, si se aplica $\mathcal{L}$ y las propiedades correspondientes, se obtiene:

$$s^2\mathcal{L}[y] + 16\mathcal{L}[y] = \frac{1}{3}\mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{1}{3(s^2+16)}\mathcal{L}[f(t)] \quad (*)$$

Ahora, se calcula $\mathcal{L}[f(t)]$

$$f(t) = \cos\ 4t[H(t) - H(t-4\pi)] = (\cos\ 4t)H(t) - (\cos\ 4t)H(t-4\pi).$$

Pero si $t \geq 0$, entonces $H(t) = 1$ y, por otra parte, $\cos\ 4t = \cos\ 4(t-4\pi)$ (en virtud de la periodicidad del coseno). Por esto, se puede escribir

$$f(t) = \cos\ 4t - (\cos\ 4(t-4\pi))H(t-4\pi).$$

Entonces, de acuerdo con el segundo teorema de traslación,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[\cos\ 4t] - \mathcal{L}[(\cos\ 4(t-4\pi))H(t-4\pi)] \\
&= \frac{s}{s^2+16} - e^{-4\pi s}\frac{s}{s^2+16}.
\end{aligned}$$

Ahora, si se sustituye en (*):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{3(s^2+16)}\left(\frac{s}{s^2+16} - e^{-4\pi s}\frac{s}{s^2+16}\right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{s}{(s^2+16)^2} - \frac{1}{3}\cdot e^{-4\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2} \\
\Rightarrow\ y &= \frac{1}{3}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+16)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-4\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2}\right]\right)
\end{aligned}$$

Recuerde que $\mathcal{L}[\text{sen}\ 4t] = \frac{4}{s^2+16}$, luego,

$$\mathcal{L}[t\text{sen}\ 4t] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{4}{s^2+16}\right) = \frac{8s}{(s^2+16)^2}.$$

De aquí se deduce que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+16)^2}\right] = \frac{1}{8}t\text{sen}\ 4t,$$

y, de acuerdo con el segundo teorema de traslación,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-4\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2}\right] = \frac{1}{8}(t-4\pi)\text{sen}\ 4(t-4\pi)H(t-4\pi).$$

En conclusión, si se sustituye en (14):

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}t\text{sen}\ 4t - \frac{1}{8}(t-4\pi)\text{sen}\ 4(t-4\pi)H(t-4\pi)\right] \\
&= \frac{1}{24}[t\text{sen}\ 4t - (t-4\pi)(\text{sen}\ 4t)H(t-4\pi)] \\
&= \frac{1}{24}[t - (t-4\pi)H(t-4\pi)]\text{sen}\ 4t.
\end{aligned}$$

Esta función se puede escribir como

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}t\text{sen}\ 4t & \text{si}\ \ 0 \leq t < 4\pi \\ \frac{1}{6}\pi\text{sen}\ 4t & \text{si}\ \ 4\pi \leq t \end{cases}$$

La gráfica de y se proporciona en la figura 5.7.

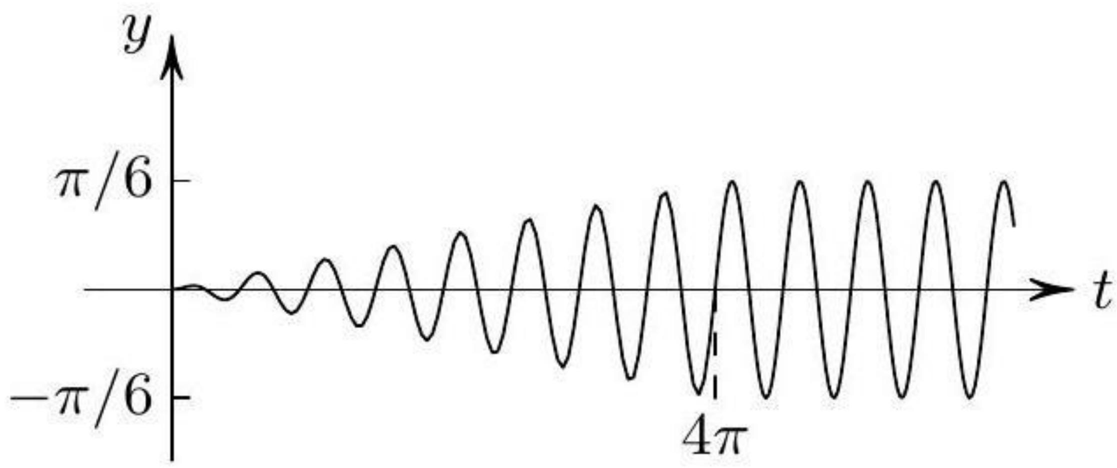


Figura 5.7 Gráfica de la función$y(t)$

Ejercicios propuestos

A) Resolver el problema de valores iniciales indicados

a) $y' - 2y = e^{5t},\ \ y(0) = 3$

b) $y'' - y = 1,\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$

c) $y'' - y' - 2y = 4t^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4$

d) $y'' + y = e^{-2t}\operatorname{sen} t\,,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

e) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10\cos t\,,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 3$ si

f) $y'' + 4y' + 8y = \operatorname{sen} t\,,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

g) $y''' - 8y = f(t),\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 4 \\ 2, & t \ge 4 \end{cases}$

h) $y'' - 4y' + 4y = f(t),\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1$, donde $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 3 \\ t+2, & t \ge 3 \end{cases}$

5.4 Aplicaciones de la transformada de Laplace a circuitos eléctricos

- **a) Resolución de un circuito en serie RLC con voltaje constante**

Consideremos el circuito RLC de la Figura 5.. Antes de cerrar el circuito en el tiempo $t = 0$, la carga del capacitor y la corriente en el circuito son cero. Sabiendo que las condiciones iniciales del circuito son $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$ y $i = 0$, y además que $R = 20\Omega, L = 1\text{H}, C = 0.005\text{F}, e(t) = V_{in} = 150V$ se quiere hallar la carga $q(t)$ del capacitor y la corriente resultante $i(t)$

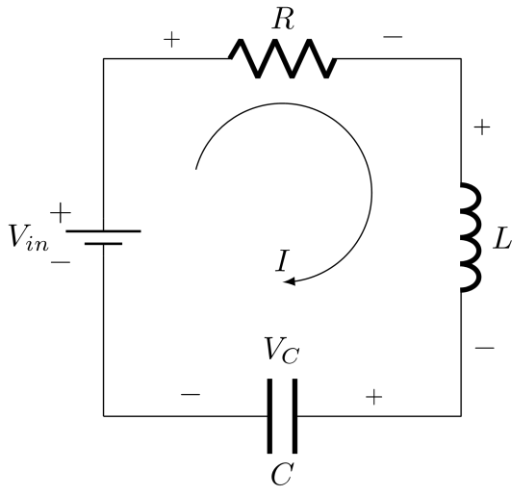


Figura 5.8 Circuito RLC en serie con voltaje directo

Usando la segunda ley de Kirchhoff se tiene

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = e(t)$$

Usando el hecho que $i = \frac{dq}{dt}$ se tiene

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

Sustituyendo los valores dado para L, R, C y $e(t)$ se tiene

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 200q = 150$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior se tiene

$$\mathcal{L}\{\ddot{q}\} + 20\mathcal{L}\{\dot{q}\} + \mathcal{L}\{q\} = \mathcal{L}\{150\}$$

$$[s^2Q(s) - sq(0) - \dot{q}(0)] + 20[sQ(s) - q(0)] + 200Q(s) = \frac{150}{s}$$

$$(s^2 + 20s + 200)Q(s) = \frac{150}{s}$$

$$Q(s) = \frac{150}{s(s^2 + 20s + 200)} = \frac{3}{4}\frac{1}{s} - \frac{3}{4}\frac{s + 20}{(s^2 + 20s + 200)}$$

$$Q(s) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{(s + 10) + 10}{(s + 10)^2 + 10^2}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{s} - \left[\frac{s + 10}{s^2 + 10^2}\right]_{s \to s+10}\right)$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso de la propiedad de traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \left[\frac{s + 10}{s^2 + 10^2}\right]_{s \to s+10}\right\}$$

$$\boxed{q(t) = \frac{3}{4}(1 - e^{-10t}\cos 10t - 10e^{-10t}\operatorname{sen} 10t)}$$

Derivando la ecuación anterior nos queda

$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{3}{4}(110e^{-10t}\operatorname{sen} 10t - 90e^{-10t}\cos 10t)}$$

- **b) Resolución de un circuito en serie RLC con voltaje alterno**

Consideremos el circuito RLC de la Figura 5. . Antes de cerrar el circuito en el tiempo $t = 0$, la carga del capacitor y la corriente en el circuito son cero. Sabiendo que las condiciones iniciales del circuito son $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$ y $i = 0$, y además que $R = 16\Omega, L = 2\text{H}, C = 0.02\text{F}, e(t) = 100\operatorname{sen}(3t)\,V$ se quiere hallar la carga $q(t)$ del capacitor y la corriente resultante $i(t)$

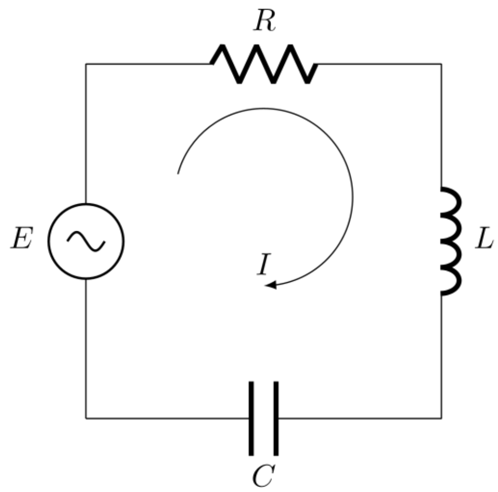


Figura 5.9 Circuito RLC en serie con voltaje alterno

Usando la segunda ley de Kirchhoff se tiene

$$2\frac{d^2q}{dt^2}+16\frac{dq}{dt}+50q=100\,\mathrm{sen}(3t)$$
$$\frac{d^2q}{dt^2}+8\frac{dq}{dt}+25q=50\,\mathrm{sen}(3t)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior se tiene

$$\mathcal{L}\{\ddot{q}\}+8\mathcal{L}\{\dot{q}\}+25\mathcal{L}\{q\}=\mathcal{L}\{50\,\mathrm{sen}(3t)\}$$

$$[s^2Q(s)-sq(0)-\dot{q}(0)]+8[sQ(s)-q(0)]+25Q(s)=\frac{150}{s^2+9}$$

$$(s^2+8s+25)Q(s)=\frac{150}{s^2+9}$$

$$Q(s)=\frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$
$$Q(s)=\frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9}-\frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9}+\frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9}+\frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9}$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso de la propiedad de traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9}-\frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9}+\frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9}+\frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9}\right\}$$

$$\boxed{q(t)=\frac{25}{52}(2\,\mathrm{sen}(3t)-3\cos(3t))+\frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos(3t)+2\,\mathrm{sen}(3t))}$$

Derivando la ecuación anterior nos queda

$$\boxed{i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{75}{52}(2\cos(3t)+3\,\mathrm{sen}(3t))-\frac{25}{52}e^{-4t}(17\,\mathrm{sen}(3t)+6\cos(3t))}$$

- **c) Resolución de un circuito en serie RLC con voltaje pulso triangular**

Consideremos el circuito RLC de la Figura 5.. Antes de cerrar el circuito en el tiempo $t=0$, la carga del capacitor y la corriente en el circuito son cero. Sabiendo que la condición inicial del circuito es $i(0)=0$, y además que $R=2\Omega, L=0.1\mathrm{H}, C=0.1\mathrm{F}, e(t)=120t-120tH(t-1)V$ se quiere la corriente resultante $i(t)$

Usando la segunda ley de Kirchhoff se tiene

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = e(t)$$

$$0.1\frac{di}{dt} + 2i + 10\int_0^t i(\tau)d\tau = 120t - 120tH(t-1)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior se tiene y usando que $\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = I(s)/s$ donde $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$

$$0.1\mathcal{L}\left\{\frac{di}{dt}\right\} + 2\mathcal{L}\{i\} + 10\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{120t - 120tH(t-1)\}$$

$$0.1[sI(s) - i(0)] + 2I(s) + 10\frac{I(s)}{s} = 120\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right)$$

$$\left(s + 20 + \frac{100}{s}\right)I(s) = 1200\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right)$$

$$Q(s) = \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$

$$Q(s) = \frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9}$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso de la propiedad de traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9}\right\}$$

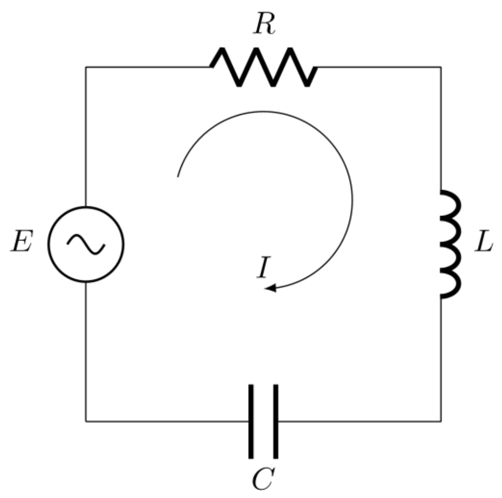
$$\boxed{q(t) = \frac{25}{52}(2\,\mathrm{sen}(3t) - 3\cos(3t)) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos(3t) + 2\,\mathrm{sen}(3t))}$$

Derivando la ecuación anterior nos queda

$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{75}{52}(2\cos(3t) + 3\,\mathrm{sen}(3t)) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17\,\mathrm{sen}(3t) + 6\cos(3t))}$$

Ejercicios propuestos

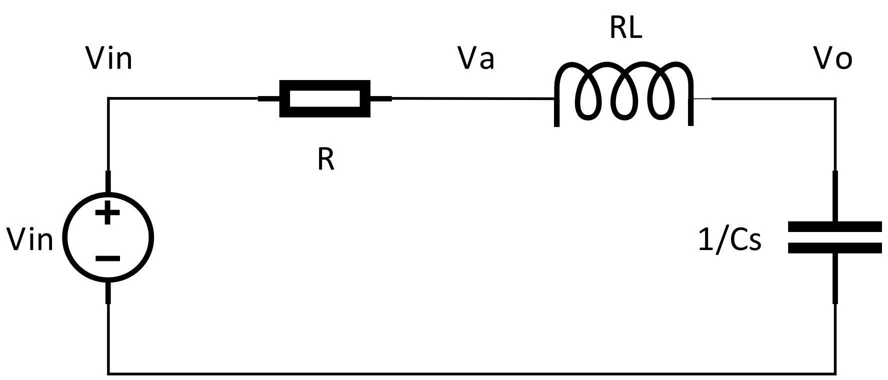
A) En los siguientes problemas considere el circuito RLC dado por la figura indicada



a) Determinar hallar la carga $q(t)$ del capacitor y la corriente resultante $i(t)$ del circuito RLC indicado, si $R = 2\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 0{,}5\ F$, y la f.e.m aplicada es de $50\ V$. Suponga que, en el instante en el cual se cierra el circuito ($t = 0$), no hay corriente fluyendo por la red.

b) Determinar hallar la carga $q(t)$ del capacitor y la corriente resultante $i(t)$ del circuito RLC indicado, si $R = 16\,\Omega$, $L = 2\,H$, $C = 0{,}02\,F$, y la f.e.m aplicada es $E(t) = 100\,\text{sen}\,t\ \ V$. Suponga que, en el instante en el cual se cierra el circuito ($t = 0$), no hay corriente fluyendo por la red.

B) Hallar el voltaje V_0 en el siguiente circuito.



6 BIBLIOGRAFRÍA

Acero, I. (2007). Ecuaciones diferenciales teoría y problemas. España: Tebar.

Álvarez, M. (2010). Curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. España: Unizar.

Espinoza, B., y Elizarraraz D. (2004). Ecuaciones diferenciales: técnicas de solución y aplicaciones. Reynosa, México: Azcapotzalco.

García, O. (2020). Ecuaciones diferenciales. Colombia: Universidad EAFIT.

Kurmyshev, E. (2003). Fundamentos de métodos matemáticos para Física e Ingeniería. México: Limusa.

López, J. (2007). Métodos Analíticos para ecuaciones diferenciales ordinarias. México: Papime.

Kiseliov, I. y Krasnov, L. (1973). Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Madrid, España: Mir Rubiños.

Nagle, K., y Saff, B. (1999) Fundamentos de ecuaciones diferenciales, Monterrey, México: Addison.

Nagle, K. y Snider, D. (2000). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Monterrey, México: Pearson Educación.

Quintana, P. (2008). Métodos de solución de ecuaciones diferenciales y aplicaciones. México: Reverte.

Snider, D. (2005). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. México: Pearson.

Spiegel, M. (2012). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Monterrey, México: PrenticeHall.

Vásquez, R. (2005). Tópicos de ecuaciones diferenciales epítome para un curso básico. Colombia: Sello editorial.

Villalobos, E. (2008). Métodos de solución de ecuaciones diferenciales y aplicaciones. España: Reverte S.A.

Zamudio, J. (2007). Métodos analíticos para ecuaciones diferenciales ordinarias. México:UNAM

Las ecuaciones diferenciales son el lenguaje en la que se expresan las leyes de la naturaleza; pueden describir cómo cambian las poblaciones, cómo se transfiere el calor, cómo vibran los resortes, cómo se desintegra el material radiactivo y mucho más. Son una forma muy natural de describir muchos fenómenos en el universo. Comprender las propiedades de las soluciones de ecuaciones diferenciales es fundamental para gran parte de las ciencias y la ingeniería contemporáneas.

Andrés Fernando Morocho, Ingeniero Electrónico en Control y Redes Industriales, Magister en Sistemas de Control y Automatización Industrial, Magister en Matemática mención Modelación y Docencia, docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).

Cristian Luis Inca Balseca, Ingeniero Automotriz, Magister en Métodos y simulación numérica en Ingeniería, docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).

Joseph David Guerra Chávez, Ingeniero Eléctrico, Máster en Energías Renovables y Sostenibilidad Energética por la Universidad de Barcelona (en trámite de registro), Ingeniero Eléctrico en el área de Distribución y Alumbrado Público de la Empresa Eléctrica Riobamba S.A. e Investigador independiente en área energética.

Evelyn Geovanna Inca Balseca, Estudiante de Licenciatura en Pedagogía de las Matemáticas y la Física por la Universidad Nacional de Chimborazo.

ISBN: 978-9942-33-620-0

9 789942 336200

compAs

Grupo de capacitación e investigación pedagógica

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com