Álgebra Superior

Freddy Enrique Chávez Vásquez
Andrés Fernando Morocho Caiza
Cristian Luís Inca Balseca

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Álgebra Superior

Freddy Enrique Chávez Vásquez
Andrés Fernando Morocho Caiza
Cristian Luís Inca Balseca

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica del mismo.

© Publicaciones Editorial Grupo Compás
Guayaquil - Ecuador
compasacademico@icloud.com
https://repositorio.grupocompas.com

compás
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

Chávez, F., Morocho, A., Inca, C. (2022) Álgebra Superior. Editorial Grupo Compás

© Freddy Enrique Chávez Vásquez
Andrés Fernando Morocho Caiza
Cristian Luís Inca Balseca

ISBN: 978-9942-33-640-8

INDICE

INTRODUCCIÓN

El álgebra es la rama de las matemáticas que ayuda en la representación de problemas o situaciones en forma de expresiones matemáticas. Involucra variables como x, y, z y operaciones matemáticas como suma, resta, multiplicación y división para formar una expresión matemática significativa.

Todas las ramas de las matemáticas, como la trigonometría, el cálculo, la geometría analítica, implican el uso del álgebra. Un ejemplo de una simple expresión en álgebra es la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ que tiene como una de sus soluciones el famoso número áureo $\phi = 1{,}61538$ ....

El álgebra trata con símbolos y estos símbolos se relacionan entre sí con la ayuda de operadores. No es solo un concepto matemático, sino una habilidad que todos usamos en nuestra vida diaria sin siquiera darnos cuenta. Entender el álgebra como un concepto es más importante que resolver ecuaciones y encontrar la respuesta correcta, ya que es útil en todos los demás temas de matemáticas que vas a aprender en la vida universitaria o que ya has aprendido en el pasado.

Este libro es una introducción a los temas básicos de álgebra, como números, polinomios y funciones. No solo presenta los temas, sino que cuentan con ejercicios con diferentes niveles de dificultad para que el estudiante refuerce y madure los conceptos desarrollados.

1. LEYES DE COMPOSICIÓN

Los números reales ($\mathbb{R}$) abarca a los conjuntos de los números naturales ($\mathbb{N}$), los enteros ($\mathbb{Z}$), los racionales ($\mathbb{Q}$) y los irracionales ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Estos conjuntos, con las operaciones de suma y producto definidos en los mismos, son ejemplos de estructuras algebraicas.

1.1. Ley de composición interna

Sea X un conjunto cualquiera no vacío y "$*$" una operación. Una ley de composición interna u ***operación binaria*** de composición interna en X es una regla "$*$", que asigna a cada pareja ordenada de elementos de X un (único) elemento del mismo conjunto, así:

$$*: \mathrm{X} \times \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X} \quad \Longrightarrow \quad \forall(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{X}, \exists \mathrm{c} \in \mathrm{X}: \mathrm{c} = \mathrm{a} * \mathrm{b}$$

Si a la pareja (a, b) se le asigna el elemento c mediante $*$, esto es, si: $*: (a, b) \rightarrow c$. Se lee "a compuesto b, mediante $*$ es c". A partir de la suma habitual sería:

$$+: (3,5) \rightarrow 8 \qquad 3 + 5 = 8$$

A continuación, se presentan dos ejemplos con la ley de composición interna:

a. Sea $\mathrm{X} = \{0,1,2,3\}$ y "$*$" la operación definida en X, mediante la siguiente regla de asignación.

$(0,0) \rightarrow 0$	$(1,0) \rightarrow 1$	$(2,0) \rightarrow 2$	$(3,0) \rightarrow 3$
$(0,1) \rightarrow 1$	$(1,1) \rightarrow 2$	$(2,1) \rightarrow 3$	$(3,1) \rightarrow 2$
$(0,2) \rightarrow 2$	$(1,2) \rightarrow 3$	$(2,2) \rightarrow 0$	$(3,2) \rightarrow 1$
$(0,3) \rightarrow 3$	$(1,3) \rightarrow 0$	$(2,3) \rightarrow 1$	$(3,3) \rightarrow 0$

Utilizando una tabla de doble entrada, se tiene:

*	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Como cada resultado mediante la operación "$*$" forman parte del conjunto X, entonces "$*$" si es una ley de composición interna para el conjunto X.

b. Sea $\mathrm{X} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$y "$\oplus$" la operación definida en X mediante la siguiente regla de asignación:

$(\mathrm{a}, \mathrm{a}) \rightarrow \mathrm{a}$	$(\mathrm{b}, \mathrm{a}) \rightarrow \mathrm{d}$	$(\mathrm{c}, \mathrm{a}) \rightarrow \mathrm{b}$	$(\mathrm{d}, \mathrm{a}) \rightarrow \mathrm{d}$
$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \rightarrow \mathrm{b}$	$(\mathrm{b}, \mathrm{b}) \rightarrow \mathrm{c}$	$(\mathrm{c}, \mathrm{b}) \rightarrow \mathrm{a}$	$(\mathrm{d}, \mathrm{b}) \rightarrow \mathrm{a}$
$(\mathrm{a}, \mathrm{c}) \rightarrow \mathrm{a}$	$(\mathrm{b}, \mathrm{c}) \rightarrow \mathrm{a}$	$(\mathrm{c}, \mathrm{c}) \rightarrow \mathrm{c}$	$(\mathrm{d}, \mathrm{c}) \rightarrow \mathrm{a}$
$(\mathrm{a}, \mathrm{d}) \rightarrow \mathrm{c}$	$(\mathrm{b}, \mathrm{d}) \rightarrow \mathrm{b}$	$(\mathrm{c}, \mathrm{d}) \rightarrow \mathrm{d}$	$(\mathrm{d}, \mathrm{d}) \rightarrow \mathrm{d}$

Mediante una tabla de doble entrada, se obtiene:

⊕	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	a	c
b	d	c	a	b
c	b	a	c	b
d	d	a	a	d

De la tabla 1.2, se puede deducir que "⊕" es una ley de composición interna para el conjunto X. De igual manera, si el conjunto X estuviera formado por el conjunto de los números naturales, tanto la suma como la multiplicación habitual son leyes de composición interna bajo estas operaciones. Es decir que:

$$\forall(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \exists\, z \in \mathbb{N}: z = x + y$$

$$\forall(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \exists\, z \in \mathbb{N}: z = x\,.\,y$$

Por otro lado, la resta y la división de números naturales no siempre dan otro número natural. Por lo que, no son leyes de composición interna para el conjunto de los números naturales.

Definición. Una ley de composición interna, notada por $*$, es la que hace corresponder a determinadas parejas (x, y) del conjunto $X \times X$, un único elemento de X.

Nota. Algunos libros representan a la ley de composición interna así:$*, \oplus, T, \cdot, +,$ ê, $\ldots\ldots$,etc.

1.1.1. Propiedades de la ley de composición interna

Sea X un conjunto no vacío y considerando que " $*$ " es una regla de composición interna para X, entonces se cumple:

i. Conmutatividad

$$\forall(x, y) \in (X \times X), \qquad x * y = y * x$$

ii. Asociatividad

$$\forall(x, y, z) \in (X \times X \times X), \qquad (x * y) * z = x * (y * z)$$

iii. Elemento Neutro

$$\forall x \in X, \exists\, e \in X: \quad x * e = e * x = x$$

iv. Simétrico de un elemento

$$\exists\, x' \in X, \forall x \in X: \quad x * x' = x' * x = e$$

Se conoce que el elemento neutro de una ley de composición interna es único e incluso es demostrable y algunos autores lo establecen como un teorema.

Demostración. Consideremos que e y e’ son elementos neutros para la operación $*$ en X, entonces:

$$\forall x \in X,\ x * e = e * x = x \quad \wedge \quad \forall x \in X,\ x * e' = e' * x = x \quad (1)$$

Siendo ambos resultados iguales podemos escribir que si $\forall x \in X$ se cumple lo anterior, en particular deberá también cumplirse para $e' \in X$ es decir:

$$e' * e = e * e' = e' \qquad (2)$$

lo mismo que para $e \in X$

$$e * e' = e' * e = e \qquad (3)$$

de (2) y (3) se deduce que: $e' = e$

Por otro lado, es conocido también que el elemento simétrico de un número es único para dicho número. De igual manera, es demostrable y otros autores lo consideran un teorema.

Demostración. Consideremos que x’ y x’’ son simétricos de **x**, entonces se tiene que:

$$x * x' = x' * x = e \ \text{ y que } x * x'' = x'' * x = e.$$

Sabemos que:

$$x' = x' * e = x' * (x * x'')$$

como la operación " $*$ " es asociativa, se tiene que:

$$x' = x' * e = (x' * x) * x''$$

$$x' = x' * e = e * x''$$

$$x' = x' * e = x''$$

Por lo tanto, el simétrico de un elemento ***x***, si existe y es **único.**

En ocasiones es necesario combinar elementos de un conjunto x con elementos de otro conjunto A, externo a x, para producir elementos de x. Lo que se conoce como ley de composición externa.

1.2. Ley de composición externa

Sean X, A dos conjuntos no vacíos y sea “$\oplus$” una operación. Una ley de composición externa es una regla que asigna a cada pareja de elementos, el primero de A y el segundo de X, un (único) tercer elemento de X, así:

$$\oplus: X \times A \to X \quad \Rightarrow \quad \forall\ (a, u) \in X \times A, \exists z \in X: z = a \oplus u$$

A continuación, se presenta dos ejemplos:

a. Sea $A = \mathbb{N}$, $X = \{1,3,5,7,\cdots\}$, donde la regla de asignación es la multiplicación habitual "$*$". Entonces, no se cumple la regla de composición externa bajo la operación dada. Esto se debe a que no se cumple con $*: X \times A \to X \implies 2 * 1 = 2 \notin X$

b. Sea $A = \mathbb{N}$, $X = \{5,10,15,20,\cdots\}$, donde la regla de asignación es la multiplicación habitual "$*$". Entonces, para este caso si se cumple la regla de composición externa bajo la operación dada. Esto se debe porque el número 5 del conjunto X al multiplicar por todos los elementos del conjunto A van a generar a los elementos del conjunto X.

1.2.1. Propiedades de la ley de composición externa

i. Conmutatividad: Sean X, A dos conjuntos no vacíos con operación "$\oplus$" para ambos conjuntos. Entonces, se cumple:

$$\oplus: X \times A \to X \quad \Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in (X \times A), \exists z \in X: \; z = x \oplus y$$

$$\oplus: A \times X \to X \quad \Longrightarrow \quad \forall (y,x) \in (A \times X), \exists z \in X: \; z = y \oplus x$$

$$\therefore X \times A \to X = A \times X \to X \quad \Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in (X \times A), \exists z \in X: \; z = x \oplus y = y \oplus x$$

ii. Distributividad: Sea X un conjunto no vacío con una ley de composición interna "$\oplus$" y sea un segundo conjunto A no vacío, que junto con X tiene una ley de composición externa "$\circledast$". Llegando a formarse la estructura algebraica $(X, A, \oplus, \circledast)$, la ley de composición externa es distributiva sobre la interna si cumple que:

$$\forall (a,b) \in (X \times X), \forall c \in A: c \circledast (a \oplus b) = (c \circledast a) \oplus (c \circledast b) \quad \text{por la derecha}$$

$$\forall (a,b) \in (X \times X), \forall c \in A: (a \oplus b) \circledast c = (a \circledast c) \oplus (b \circledast c) \quad \text{por la izquierda}$$

1.3. Estructuras algebraicas fundamentales

Un conjunto no vacío definido con una ley de composición da lugar a una estructura algebraica. Las que se van a considerar en este libro son: grupo (formado por un conjunto no vacío y una ley de composición interna), anillo y cuerpo (formados por un conjunto no vacío y dos leyes de composición interna).

1.3.1. Grupo

Es todo conjunto no vacío **G**, dotado de una ley de composición interna $*$, que satisface las siguientes propiedades:

i. Propiedad Clausurativa

$\forall\, x,y,z \in \mathbf{G} \qquad x * y \in \mathbf{G}$

ii. Asociativa

$\forall x,y,z \in \mathbf{G}$: $(x * y) * z = x * (y * z)$

iii. Admite un elemento neutro

$\exists\, e \in \mathbf{G}, \forall x \in \mathbf{G}: \quad x * e = e * x = x$

iv. Admite la existencia del inverso

$\forall x \in \mathbf{G}, \exists\, y \in \mathbf{G}$: $x * y = y * x = e$

Ejemplo: Los números $\mathbb{Z}$ con respecto a la suma forman un grupo.

Nota:

a. Si cumple con las dos primeras propiedades el conjunto se llama *semigrupo*

b. La Propiedad Conmutativa es: $(\forall x, y \in G): x * y = y * x$

c. Si este conjunto G además de las propiedades anteriores cumple con la propiedad conmutativa, se dice que $(G, *)$ es un *grupo Conmutativo o Abeliano*.

1.3.2. Anillo

Es todo conjunto no vacío **A**, dotado de dos leyes de composición interna " $*$ " y " $\cdot$ ". Donde $(\mathbf{A},*)$ es un grupo conmutativo, y $(\mathbf{A},\cdot)$ es un semigrupo y además cumple con la propiedad distributiva.

Nota: Si el conjunto A con la segunda ley de composición interna " $\cdot$ ", admite un elemento neutro y cumple con propiedad conmutativa, entonces, se dice que es un anillo conmutativo con elemento neutro.

Ejemplo: Los números $\mathbb{Z}$ con respecto a la suma y multiplicación son un anillo.

1.3.3. Cuerpo

Es todo tipo de conjunto **K**, provistos de dos operaciones internas ($*$ y $\cdot$) donde $(\mathbf{K},*)$ es un **Grupo Abeliano** y $(K,\cdot)$ es **Grupo Abeliano**, y cumple con la propiedad distributiva.

Ejemplo: Los números $\mathbb{R}$ con respecto a la suma y multiplicación es un cuerpo porque cumple con todas las propiedades.

Ejercicios propuestos:

i. **Que propiedades cumplen:**

a)

⊕	∇	O	©
∇	∇	O	©
O	O	©	∇
©	©	∇	O

b)

⊗	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	3	4	2
3	1	4	2	3
4	1	2	3	4

ii. **Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con las operaciones especificadas en las tablas que estructura representan:**

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	1
3	3	4	5	1	2
4	4	5	2	2	3
5	5	1	1	3	4

.	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	3	4	5	1
3	1	4	5	1	2
4	1	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5

2. NÚMEROS REALES

Los números reales tienen su historia, fueron el resultado de las necesidades de nuestros antepasados, hoy en día se los conoce subdivididos en conjuntos, que son:

Los Naturales: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\dots\dots\}$ $\qquad\qquad \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\dots\}$

Los números pares (NP) son aquellos que tienen entre sus factores al dos y se los puede expresar como $p = 2m$, donde $m \in \mathbb{N}^*$

$$NP = \{2,4,6,8,\dots\dots\}$$

Los números impares (NI) son aquellos que no tienen como factor el dos y se los puede expresar de la forma: $q = 2m + 1$ donde $m \in \mathbb{N}^*$

$$NI = \{1,3,5,7,9,\dots\dots\dots\}$$

Los números compuestos (NC) son aquellos que se pueden descomponer en más de dos factores.

$$NC = \{4,6,8,10,12,\dots\dots\}$$

Los números primos (N Pr) son aquellos que tienen como factores al uno y a sí mismo.

$$N\,Pr = \{1,2,3,5,7,11,\dots\dots\}$$

Los Enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\dots\}$

Los Racionales: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}\ /\ a,b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0;$ a y b primos entre sí $\}$

Los números irracionales $\mathbb{Q}$', son todos los números que no se los puede expresar como fracción, por ejemplo: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \dots\dots$

Los números reales se lo notará por $\mathbb{R}$ o R, contiene a todos los números anteriores, los mismos que pueden ser representados en la recta numérica.

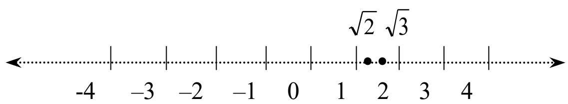


Figura 2.1: Representación sobre la recta numérica de dos números.

En este conjunto la operación de suma y de multiplicación cumplen con la propiedad clausurativa y conmutativa, por lo que estudiaremos los axiomas de igualdad y de cuerpo.

i. Axiomas de igualdad

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a = a$ (axioma reflexivo)
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ sí $a = b$ entonces: $b = a$ (axioma simétrico)
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ sí $a = b$ y $b = c$, entonces: $a = c$ (axioma transitivo)

ii. Axiomas de cuerpo

Los números reales cumplen con las siguientes propiedades para la suma:

1. Clausurativa $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ $(a+b) \in \mathbb{R}$
2. Asociativo $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ $a+(b+c)=(a+b)+c$
3. Conmutativo $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ $a+b=b+a$
4. Neutro Aditivo $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R},$ $a+0=a$
5. Opuesto Aditivo $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R},$ $b+a=a+b=0$

Los números reales cumplen con las siguientes propiedades para la multiplicación:

6. Clausurativa $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a.b \in \mathbb{R}$
7. Asociativo $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $a.(b.c)=(a.b).c$
8. Conmutativo $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a.b=b.a$
9. Neutro Multiplicativo $\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall 1 \in \mathbb{R},$ $a\,.\,1=a$
10. Inverso Multiplicativo $\forall a \in \mathbb{R}^*\ \exists\, b \in \mathbb{R},$ $a.b=1;$ $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$
11. Distributivo $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ $a.(b+c)=a.b+a.c$

De estas propiedades se derivan los siguientes teoremas:

Teorema 1.

i) *El elemento* "0" *es único.*

ii) *El elemento* "1" *es único.*

Demostración:

i) Vamos a suponer que no es único, que existen dos neutros 0 y 0' y se verifica que:

1) $\forall a \in \mathbb{R}$ $a+0=0+a=a$

2) $\forall a \in \mathbb{R}$ $a+0'=0'+a=a$

Como $0' \in \mathbb{R}$, también debería de cumplir en 1), es decir

$$0'+0=0+0'=0' \qquad (1)$$

Como $0 \in \mathbb{R}$ también se verifica en 2).

$$0+0'=0'+0=0 \qquad (2)$$

Como (1) y (2) son iguales obtenemos que $0'=0$ lo que significa que el neutro es único.

ii) Se demuestra de manera similar.

Teorema 2.

i) *El elemento Opuesto Aditivo de cada número real es único.*

ii) *El inverso multiplicativo de cada número real es único.*

Demostración:

i) Supongamos que existen dos opuestos b' y b'' para cada número a y verificamos que sean iguales. Es decir que ellos cumplen con las siguientes condiciones:

1) $a + b' = b' + a = 0$

2) $a + b'' = b'' + a = 0$

Además, $b' = b' + 0 = b' + (a + b'') = (b' + a) + b'' = 0 + b'' = b''$.

Por lo tanto $b' = b''$, consecuentemente el opuesto aditivo es *único*.

ii) Supongamos que existen dos inversos multiplicativos $b'\ y\ b''$, estos deberán de verificar las siguientes condiciones:

1) $a\,.\,b' = b'.\,a = 1$

2) $a\,.\,b'' = b''.\,a = 1$

Por otra parte:

$$b' = b'.\,1 = b'\,(a.\,b'') = (b'.\,a).\,b'' = 1.\,b'' = b''$$

Es decir que $b' = b''$, consecuentemente el inverso multiplicativo es *único*

Teorema 3.

Ley cancelativa para la suma y multiplicación.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad a + b = a + c \implies b = c$

Demostración:

i) $\forall \mathrm{a} \in \mathbb{R}\ \exists -\mathrm{a} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{a} + (-\,\mathrm{a}) = 0$ por lo tanto:

$$\mathrm{a + b = a + c}$$
$$\mathrm{a + b + (-a) = a + c + (-a)}$$
$$\mathrm{[a + (-a)] + b = [a + (-a)] + c}$$
$$\mathrm{0 + b = 0 + c}$$
$$\mathrm{b = c}$$ **l.q.q.d.**

ii) **P.D.:** $\forall\ \mathrm{a, b, c} \in \mathbb{R},\ \mathrm{a} \neq 0\colon\ \mathrm{a.\,b = a.\,c} \ \Rightarrow\ \mathrm{b = c}$

Como $\mathrm{a} \neq 0, \exists\ \mathrm{a}^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{a.\,a^{-1}} = 1$.

Por lo que:

$$\mathrm{a.\,b} = \mathrm{a.\,c}$$
$$(\mathrm{a}^{-1})\,(\mathrm{a.\,b}) = \mathrm{a}^{-1}(\mathrm{a.\,c})$$
$$(\mathrm{a}^{-1}.\,\mathrm{a}).\,\mathrm{b} = (\mathrm{a}^{-1}.\,\mathrm{a}).\,\mathrm{c}$$
$$1.\,\mathrm{b} = 1.\,\mathrm{c}$$
$$\mathrm{b} = \mathrm{c}$$ **l.q.q.d.**

Teorema 4.

$$\forall a \in \mathbb{R}: a.0 = 0$$

Demostración:

$$0 = 0 + 0$$

$$\mathrm{a}.0 = \mathrm{a}(0+0) = \mathrm{a}.0 + \mathrm{a}.0$$

Como $\quad \mathrm{a}.0 = \mathrm{a}.0 + 0 \quad$ se sigue que

$$\mathrm{a}.0 + 0 = \mathrm{a}.0 + \mathrm{a}.0$$

$$0 = \mathrm{a}.0 \qquad \textbf{l.q.q.d.}$$

Teorema 5.

$$\forall \mathrm{a} \in \mathbb{R}: \quad -(-\mathrm{a}) = \mathrm{a}$$

Demostración:

Puesto que $-\mathrm{a}$ es el opuesto de a entonces: $\mathrm{a} + (-\mathrm{a}) = 0$, de aquí se deduce que el opuesto aditivo de $-\mathrm{a}$ es $-(-\mathrm{a})$ por lo que:

$$-\mathrm{a} + [-(-\mathrm{a})] = 0$$

$$\mathrm{a} + (-\mathrm{a}) + [-(-\mathrm{a})] = \mathrm{a} + 0$$

$$0 + [-(-\mathrm{a})] = \mathrm{a}$$

$$-(-\mathrm{a}) = \mathrm{a} \qquad \textbf{l.q.q.d.}$$

Teorema 6.

$$\forall \mathrm{a} \in \mathbb{R}: \quad (-1)\,\mathrm{a} = -\mathrm{a}$$

Demostración:

Aquí es necesario probar que $(-1).a$ es el inverso de a

$$(-1).\mathrm{a} + \mathrm{a} = (-1).\mathrm{a} + 1.\mathrm{a}$$

$$= (-1+1).\mathrm{a}$$

$$= 0.\mathrm{a}$$

$$(-1).\mathrm{a} + \mathrm{a} = 0$$

Esto significa que $(-1).\mathrm{a}$ es el opuesto de a. es decir que:

$$(-1).\mathrm{a} = -\mathrm{a} \qquad \textbf{l.q.q.d.}$$

Teorema 7.

$$\forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}: (-\mathrm{a}).\mathrm{b} = -(\mathrm{a}.\mathrm{b})$$

Demostración:

Aquí es necesario probar que $(-\mathrm{a}).\mathrm{b}$ es el opuesto de $\mathrm{a}.\mathrm{b}$, por lo tanto basta probar que:

$$\mathrm{a}.\mathrm{b} + (-\mathrm{a}).\mathrm{b} = 0$$

en efecto $\quad \mathrm{a}.\mathrm{b} + (-\mathrm{a}).\mathrm{b} = [\mathrm{a} + (-\mathrm{a})]\mathrm{b} = 0.\mathrm{b} = 0$

Esto significa que $(-a).b = -(a.b)$ **l.q.q.d.**

Teorema 8.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \qquad (-a).(-b) = a.b$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(-a)(-b) &= -[a.(-b)] \\
&= -[-(a.b)] \\
&= a.b \qquad \textbf{l.q.q.d.}
\end{aligned}
$$

Teorema 9.

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ sí } a \neq 0: (a-1)-1 = a$$

Demostración:

Como $a \neq 0$, el inverso multiplicativo de a es a^{-1}, y el inverso multiplicativo de a^{-1} es $(a^{-1})^{-1}$ por lo tanto:

$$a.a^{-1} = 1 \ \text{ y } \ a^{-1}.(a^{-1})^{-1} = 1$$

Igualando las dos últimas ecuaciones tenemos que:

$$a.a^{-1} = a^{-1}.(a^{-1})^{-1}$$

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

Teorema 10.

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ sí } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0: (a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$$

Demostración:

Es necesario probar que $a^{-1}.b^{-1}$ es el inverso multiplicativo de $a.b$ es decir:

$$(a.b).(a^{-1}.b^{-1}) = 1$$

$$
\begin{aligned}
(a.b).(a^{-1}.b^{-1}) &= (a.b).(b^{-1}.a^{-1}) \\
&= a.(b.b^{-1}).a^{-1} \\
&= a.1.a^{-1} \\
&= a.a^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto: $\qquad (a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$

Teorema 11.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \ a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$$

Demostración:

i) Vamos a probar que uno de los números a o b es distinto de cero, entonces el otro necesariamente será igual a cero.

Supongamos que $a \neq 0$.

Entonces $\quad a.a^{-1} = 1$

Por hipótesis: $\quad a.b = 0$

$$a^{-1}(a.b) = a^{-1}.0$$

$$(a^{-1}.a).b = 0$$

$$1.b = 0 \qquad \Longrightarrow b = 0 \qquad \textbf{l.q.q.d.}$$

ii) La demostración se reduce a que todo número multiplicado por cero es cero.

$\forall a \in \mathbb{R},\ a.0 = 0$, ya está demostrado

De i) y ii) queda demostrado el teorema

Teorema 12.

$$\forall a,b \in \mathbb{R}^*: \quad a \neq b \ \Longrightarrow \frac{1}{a} \neq \frac{1}{b}$$

Demostración:

Supongamos que $\quad \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} \rightarrow a^{-1} = b^{-1}$

$$a^{-1}.(a.b) = b^{-1}.(a.b)$$

$$(a^{-1}.a).b = a.(b^{-1}.b)$$

$$1.b = a.1$$

$$b = a \ \text{ ya que } \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

Si negamos la igualdad obtenemos: $\dfrac{1}{a} \neq \dfrac{1}{b}$

Teorema 13.

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \ b \neq 0 \ \text{ y } \ d \neq 0: \ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Demostración:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1}$$

$$= (ab^{-1} + cd^{-1}).1$$

$$= (ab^{-1} + cd^{-1})(bd)(bd)^{-1}$$

$$= (ad+bc)(bd)^{-1}$$

$$= \frac{ad+bc}{bd} \qquad \textbf{l.q.q.d.}$$

Teorema 14.

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}, a(b-c) = ab-ac$$

Demostración:

$$a(b-c) = a[b+(-c)]$$

$$= ab + a(-c)$$

$$= \mathrm{ab} + [(-\mathrm{ac})]$$
$$= \mathrm{ab} - \mathrm{ac} \quad \text{l.q.q.d.}$$

Teorema 15.

i) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \ b \neq 0\ \ y\ \ d \neq 0{:}\ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}{:}\ a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$

iii) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \ b \neq 0\ \ y\ \ d \neq 0{:}\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

iv) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \ b \neq 0,\ \ d \neq 0\ \ y\ \ c \neq 0 :\ \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

v) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}{:}\ a + b + c = 0 \ \longrightarrow\ a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$

La demostración se deja para el lector.

2.1. Revisión de operaciones con números reales

En la presente sección, se hará una breve revisión de las operaciones aritméticas con los números enteros y racionales.

2.1.1. Revisión de operaciones con números enteros

Es importante recordar que la multiplicación de dos números con signos diferentes nos da como resultado un número negativo. En cambio, la multiplicación de dos números con signos iguales nos otro número positivo.

Por otro lado, si a un número negativo le elevamos a una potencia par nos da un número positivo y si la potencia es negativa impar nos da un número negativo, además tiene las siguientes propiedades las potencias:

1. $a^1 = a$	2. $a^m a^n = a^{m+n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	4. $a^n b^n = (ab)^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, si $b \neq 0$	6. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, si $n > m$
7. $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$	8. $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$

Ejercicios resueltos:

1. $[-4(-4) - 15]^3 + \sqrt{(-507):(-5+2)} + \sqrt[3]{625:(7-2)} - (-2+3-5)^2 + \sqrt[4]{(135x3):(-3+8)} =$

$= (16-15)^3 + \sqrt{(-507):(-3)} + \sqrt[3]{625:5} - (-4)^2 + \sqrt[4]{405:5} = (1)^3 + \sqrt{169} + \sqrt[3]{125} - 16 + \sqrt[4]{81} = 1 + 13 + 5 - 16 + 3 = 6$

2. $\left(\sqrt[12]{-3+\sqrt{121}}\right)^4-\left(-1-\sqrt[3]{-27}\right)^2+\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}=$

$$=\left(\sqrt[12]{-3+11}\right)^4-[-1-(-3)]^2+\sqrt{\sqrt{16}}=\left(\sqrt[12]{8}\right)^4-(-1+3)^2+\sqrt{4}$$

$$=\sqrt[3]{8}-(2)^2+2=2-4+2=0$$

2.1.2. Revisión de operaciones con números racionales

Estos números los vamos a encontrar como fracción y en forma decimal

Ejercicios resueltos:

1. $$\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{8}}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-\frac{\frac{5}{3}-2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{25}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1-4}{4}}{\frac{1}{8}}-(-2)-\frac{\frac{5-6}{3}}{\frac{1}{9}}-\frac{\frac{6-4-1}{8}}{-\frac{1}{10}}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}}+2-\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}-\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{1}{10}}=-6+2+3+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$$

2. $$\frac{\frac{1-\frac{3}{6}}{\frac{5}{\frac{3}{8}-\frac{3}{4}}}}{\frac{\frac{1}{3}+2}{2}}\text{x}\frac{\sqrt{\frac{7}{8}:\left(\frac{1}{14}\right)^{-1}}}{\frac{27}{16}(4)\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{\frac{1-\frac{5}{2}}{\frac{3-6}{8}}}{\frac{\frac{1+6}{3}}{2}}\text{x}\frac{\sqrt{\frac{7}{8}:14}}{\frac{9}{2}}=\frac{\frac{\frac{2-5}{2}}{-\frac{3}{8}}}{\frac{\frac{7}{3}}{2}}\text{x}\frac{\sqrt{\frac{7}{8}\left(\frac{1}{14}\right)}}{\frac{9}{2}}=\frac{\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{8}}}{\frac{7}{6}}\text{x}\frac{\sqrt{\frac{7}{8}\left(\frac{1}{14}\right)}}{\frac{9}{2}}=\frac{4}{\frac{7}{6}}\text{x}\frac{\sqrt{\frac{1}{16}}}{\frac{9}{2}}$$

$$=\frac{24}{7}\text{x}\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{2}}=\frac{24}{7}\text{x}\frac{1}{18}=\frac{4}{21}$$

3. $$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}{\sqrt{144}(2)^{-2}}\text{ x }\frac{5}{3}\div\left(\frac{\left(\frac{2}{3}-1\right)^{-2}:\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}\right)^{-1}}}{\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}}{(10)^{-1}\sqrt{625}}\div\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{2-\frac{13}{9}}\right)^{-1}-\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{49}\right)^{-1}}-\frac{\frac{2}{3}+3}{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{16+9}{16}}}{12\left(\frac{1}{2}\right)^{2}} \text{ x } \frac{5}{3} \div \left(\frac{\left(\frac{2-3}{3}\right)^{-2} : 5}{\left(\frac{4-1}{4}\right)^{2}}\right)^{-1}}}{\frac{\frac{4-5}{20}}{\frac{1}{10}(25)} \div \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{\frac{18-13}{9}}\right)^{-1} - \frac{\frac{3-2}{4}}{\sqrt{49} - \frac{\frac{2+9}{3}}{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{25}{16}}}{12\left(\frac{1}{4}\right)} \text{ x } \frac{5}{3} \div \left[\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^{-2} \div 5}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}\right]^{-1}}}{\frac{-\frac{1}{20}}{\frac{5}{2}} \div \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{\frac{5}{9}}\right)^{-1} - \frac{\frac{1}{4}}{7 - \frac{\frac{11}{3}}{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{3} x \frac{5}{3}} \div \left(\frac{(-3)^{2} \div 5}{\frac{9}{16}}\right)^{-1}}{-\frac{1}{50} x(100) + \left(\frac{9}{5}\right)^{-1} - \frac{\frac{1}{4}}{7 - \frac{22}{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{5}{12} \text{ x } \frac{5}{3}} \div \left(\frac{9 \div 5}{\frac{9}{16}}\right)^{-1}}{-2 + \frac{5}{9} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{21-22}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{25}{36}} \div \left(\frac{16}{5}\right)^{-1}}{\frac{-18+5}{9} - \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{5}{6} \div \left(\frac{5}{16}\right)}{\frac{-13}{9} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{6}\left(\frac{16}{5}\right)}{\frac{-52+27}{36}}$$

$$= \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{25}{36}} = -\frac{96}{25}$$

Si los números racionales se presentan en **forma decimal** estos pueden ser **finitos** o **infinitos periódicos.**

Para transformar números **decimales finitos** a una fracción seguimos el siguiente procedimiento:

Sea el número decimal: $\mathrm{a} = 34{,}536$, para transformarlo le multiplicamos por 10^{n}, donde n es el número de cifras decimales, en este caso tres, así:

$$\mathrm{a}(10^{\mathrm{n}}) = 34{,}536(10^{\mathrm{n}}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a}\,(10^{3}) = 34{,}536(10^{3}) \Rightarrow \text{ despejamos a}$$

$$\mathrm{a} = \frac{34536}{1000} \quad \Rightarrow \quad \text{Le simplificamos: } \mathrm{a} = \frac{4317}{125}$$

Si el número decimal es **infinito periódico**, hay que determinar cuál es la parte periódica, por ejemplo:

$b = 23{,}46378463\ldots\ldots.$, aquí notamos que el dos no se repite, pero el tres si y a continuación está el cuatro, pero este no se repite por lo que le descartamos al tres, analizamos al cuatro y vemos que se repite, a continuación, va el seis y también se repite así como los demás números hasta nuevamente encontrarnos con el cuatro, por lo que la cifra periódica comienza en cuatro y termina en ocho; quedando así:

$\mathrm{b} = 23,\overline{46378}$, esta es la notación de un número decimal periódico.

Para transformarlo a fracción este decimal le multiplicamos por un 10^n donde "*n*" es el de número de cifras periódicas, en nuestro caso cinco a continuación le restamos la cantidad inicial para eliminar la parte periódica y despejamos "*b*", le simplificamos y este es el resultado.

Ejercicios resueltos:

$10^{\mathrm{n}}\ \mathrm{b} = 23,\overline{46378}\ (10^2) \Rightarrow \quad 10^5\ \mathrm{b} = 23,\overline{46378}\ (10^5)$

$$10^5\mathrm{b} = 2346378,\overline{46378}$$

$$-\ \mathrm{b} = 23{,}\overline{46378}$$

$$99.999\mathrm{b} = 2346355{,}00000$$

Despejando: $\mathrm{b} = \dfrac{2346355}{99.999}$

Si en la **cifra periódica está una o más números antes o después de la coma**, es necesario llevarle a la forma anterior, por ejemplo:

1. $\mathrm{c} = 532{,}147295729\ldots\ldots$

Le identificamos la cantidad periódica, $c = 532{,}14\overline{7295}$. Vemos que la **cifra periódica estos dos decimales después de la coma**, por lo que le multiplicamos por cien para recorrer la coma dos espacios, así:

$$100c = 53214,\overline{7295}.$$

A este número le aplicamos el proceso anterior.

$100c10^n = 53214,\overline{7295}10^n$ En nuestro caso tenemos cuatro cifras periódicas

$$100c(10^4) = 53214,\overline{7295}(10^4) \qquad \Rightarrow \qquad 10^6c = 532147295,\overline{7295}$$

Le restamos la cantidad anterior: $\quad 10^6c = 532147295,\overline{7295}$

$$-10^2c = \qquad 53214,\overline{7295}$$

$$999.900c = 532094081{,}0000$$

Despejamos C: $c = \dfrac{532094081}{999.900}$

2. d = 267,34673……..

Le identificamos la cantidad periódica, $d = 2\overline{67,34}$. Vemos que la **cifra periódica se encuentra dos enteros antes de la coma**, por lo que le dividimos para cien para recorrerle la coma a la derecha, así:

$$10^{-2}\mathrm{d} = 2\overline{67,34}(10^{-2}) \implies 10^{-2}\mathrm{d} = 2,\overline{6734}$$

Continuamos con el proceso normal: $10^{-2}\mathrm{d}(10^{4}) = 2,\overline{6734}(10^{4})$

$$100\mathrm{d} = 26734,\overline{6734}$$

$$-10^{-2}\mathrm{d} = 2,\overline{6734}$$

$$\frac{9.999}{100}\mathrm{d} = 26732,0000$$

Despejamos d: $\mathrm{d} = \dfrac{2673200}{9.999}$

3. Calcular la siguiente expresión

a) $$\frac{-0,3(1,05)^2\sqrt[3]{-0,027}(0,8)^2}{(1,2)^2 3(-0,05)} = \frac{-3\text{x}10^{-1}(105\text{x}10^{-2})^2\sqrt{-27(10)^{-3}}(8\text{x}10^{-1})^2}{(12\text{x}10^{-1})^2\ 3\text{x}\ (-5\text{x}10^{-2})}$$

$$= \frac{-3\text{x}10^{-1}(11025)10^{-4}\text{x}(-3)\text{x}10^{-1}\text{x}64\text{x}10^{-2}}{144\text{x}10^{-2}\text{x}3\text{x}(-5)10^{-2}} = \frac{-3\text{x}11025\text{x}(-3)\text{x}64\text{x}10^{-8}}{144\text{x}3\text{x}(-5)10^{-4}} = -2940\text{x}10^{-4}$$

b) $$\frac{\dfrac{(2,999\ldots..)^{-1}}{0,00333\ldots.}\text{x}\dfrac{0,02:(-0,3)}{\sqrt{1-\frac{8}{9}}}}{\dfrac{(0,333\ldots.-2)^2}{-\frac{4}{3}\sqrt{0,25}}} = \frac{\dfrac{(2,\overline{9})^{-1}}{0,00\overline{3}}\text{x}\dfrac{2\text{x}10^{-2}:(-3)\text{x}10^{-1}}{\sqrt{\frac{9-8}{9}}}}{\dfrac{(0,\overline{3}-2)^2}{-\frac{4}{3}(0,5)}} = \frac{\dfrac{3^{-1}}{\frac{1}{300}}\text{x}\dfrac{-\frac{2}{3}\text{x}10^{-1}}{\sqrt{\frac{1}{9}}}}{\dfrac{(\frac{1}{3}-2)^2}{-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$= \frac{\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{300}}\text{x}\dfrac{-\frac{2}{3}\text{x}10^{-1}}{\frac{1}{3}}}{\dfrac{(\frac{1-6}{3})^2}{-\frac{2}{3}}} = \frac{100(-2)10^{-1}}{\left(-\frac{5}{3}\right)^2\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{(-2)10}{\frac{25}{9}\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{-2\text{x}10}{-\frac{25}{6}} = \frac{24}{5}$$

Ejercicios propuestos:

1. $3\text{a} - 2\{3\text{b} - 3[4\text{a} - 5\text{b} + 4(-2\text{a} + 3\text{b}) - 4\text{b} + 2\text{a}] - 5\text{b}\}$

2. $5\text{x} - 4\{3\text{x} - 2(3\text{x} + \text{y} - 5\text{x}) + 3[-3\text{x} + 3\text{y} - 4(\text{y} - 4\text{x})]\} - 12\text{x}$

3. $7 - 2(5-7)^3 - (-1)^3 + 3\sqrt{(7-3)^2\sqrt{5^2-3^2}(2^3-6)^2} + (-2)^3 - 15 \div (4-7)$

4. $\sqrt[3]{-108} \div \sqrt[3]{-4} + \sqrt[5]{729} \div \sqrt[5]{-3} - \sqrt{-3}\sqrt{-12} + [(-5)(-1)]^2 - [(-1)(-7)^3(-9)^0$

$$- \sqrt[3]{(-1)(-6+4)^3}]$$

5. $(-48:12)^2 - [(-22):(-11)]^2 - [(-2)^2]^3 + (-3^0)^{10} - [2(-5)]^2$

6. $[(-2+1-3+5)^2]^3 + \sqrt[5]{4^2(-2)^5}\sqrt{(-27)(-3)(-2+5)}$

$$-\left[\sqrt[3]{(28 \div 4)(-7+4+1)}\right]^6 + \left[\sqrt{(-49)(-2)(-1+3)}\right]^2$$

7. $(\frac{5}{2})^{-1}(-\frac{4}{5})^{-2} + 1^{-1} \div (-\frac{1}{6})^{-1} - \sqrt{(1-\frac{3}{4}) \div \frac{25}{16} + (-2)^{-3} + (-1)^{-2} \div \frac{2}{3}}$

$$-\left(\frac{1}{4} \div \frac{3}{8}\right)^{-1}$$

8. $$\frac{\dfrac{(-4)\sqrt[5]{\frac{1}{8} \div (-4)}}{(-16)(-\frac{3}{4})} + \dfrac{(1+\frac{1}{3})^2}{\frac{2}{3} - \frac{5}{6} \times \frac{3}{2}}}{\dfrac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + 2 \div \frac{5}{4} - \frac{1}{5}}{(-1+\frac{3}{5})^2}}$$

9. $$\frac{-0{,}8(-1{,}2) + 0{,}3 - 3(-7{,}08)}{\left(\dfrac{-0{,}75 - 0{,}5 + 0{,}625}{5(-0{,}5) - 3{,}75}\right)^{-2} \dfrac{(1+0{,}5)^2}{\sqrt{0{,}01}}}$$

10. $\frac{4}{27}(-0{,}8)\frac{15}{2} - 1 \div \sqrt{2{,}4 \times \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \div 0{,}01 - \frac{1{,}999\ldots\ldots}{0{,}8} + \frac{5}{9}}$

11. $$\frac{2{,}153846153\ldots\ldots - \left(2{,}\overline{714285}\right)^2}{(3{,}285714285\ldots\ldots)^2 - 2{,}153846153\ldots\ldots}$$

12. $-0{,}\overline{285714} + (0{,}4666\ldots - 0{,}666\ldots)(-1{,}\overline{428571})$

2.2. Operaciones con polinomios

Término. - puede ser un número o una letra, o varios números y letras combinadas entre sí con las operaciones de multiplicación y división. Ejemplo:

La expresión: $4a + 2cx - \frac{3bx^2}{2}$, contiene tres términos; el primero es $4a$, el segundo es $2cx$ y el tercero es $-\frac{3bx^2}{2}$

Expresión Algebraica. - es un grupo de números y letras combinadas entre sí mediante una o más operaciones fundamentales. Ejemplo: $3ab^2x^2$, $2x - 3x^2$, $3x^2 - 2x - 5$, Donde el primero es monomio el segundo es un binomio y el tercero es un trinomio. Cuando hay más de tres términos se le llama polinomio.

Definición de Polinomio en una indeterminada

A la expresión de la forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

Se le llama polinomio en la indeterminada x con coeficientes en *K*, donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n \in K$, son constantes y se llaman coeficientes; mientras que los exponentes de la indeterminada "*x*" son números enteros y determinan el grado del polinomio.

El conjunto de todos los polinomios de cualquier grado en la indeterminada x a coeficientes en *K* se denota $K(x)$, donde el conjunto K puede ser los enteros, los racionales, los reales, los complejos.

Términos semejantes. - dos o más términos son semejantes si la potencia de la indeterminada es la misma y sólo difieren en sus coeficientes.

2.2.1. Suma y resta de polinomios

Definición. Sean los polinomios $P^n(x)$ y $Q^m(x)$ de grado n y m respectivamente, con n ≥ m:

$P^n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

$Q^m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$

La suma y resta se define así:

$P^n(x) \pm Q^m(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots + (a_n \pm b_n)x^n$, para n = m

Ordenamos los polinomios de grado mayor a menor y luego sumamos o restamos términos semejantes.

Ejercicios resueltos:

1. Sumar: $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3$, $5 - 3\sqrt{2}x + 4\sqrt{3}x^2$ y $\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}x^2 - 10$

$$\begin{array}{r} \sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3 \\ 4\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{2}x + 5 \\ -2\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 10 \\ \hline 3\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{2}x - 2 \end{array}$$

2. De: $13a^4 - 15a^3 + 7a^2 + 9a - 18$ restar $7a^4 - 23a^3 + 19a - 16$

$$= 13a^4 - 15a^3 + 7a^2 + 9a - 18 - (7a^4 - 23a^3 + 19a - 16)$$
$$= 13a^4 - 15a^3 + 7a^2 + 9a - 18 - 7a^4 + 23a^3 - 19a + 16$$
$$= (13a^4 - 7a^4) + (-15a^3 + 23a^3) + 7a^2 + (9a - 19a) + (-18 + 16)$$
$$= 6a^4 + 8a^3 + 7a^2 - 2$$

2.2.2. Multiplicación de polinomios

Se define así:

$$P^n(x)Q^m(x) = (a_a b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + a_n b_n x^n$$

Para multiplicar polinomios primero se realiza la ley de los signos, luego se multiplican los coeficientes y finalmente se multiplican las variables aplicando las leyes de la potenciación, donde bases iguales se suman los exponentes.

Ejemplo: Multiplicar: $3x^4 - 4x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - 2y^4$, por $-2x^2 + 3xy - 5y^2$

Para multiplicar polinomios es necesario ordenarlos según su grado, en este caso si lo están por lo que procedemos a multiplicarlos, así:

$$\begin{array}{l}
3x^4 - 4x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - 2y^4 \\
-2x^2 + 3xy - 5y^2 \\
\hline
-6x^6 + 8x^5y + 8x^4y^2 - 10x^3y^3 + 4x^2y^4 \\
\qquad 9x^5y - 12x^4y^2 - 12x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 \\
\qquad\qquad - 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 20x^2y^4 - 25xy^5 + 10y^6 \\
\hline
-6x^6 + 17x^5y - 19x^4y^2 - 2x^3y^3 + 39x^2y^4 - 31xy^5 + 10y^6
\end{array}$$

2.2.3. División de polinomios

Para realizar una división entre polinomios, se necesita que:

$$\forall P^N(x)\,, D^M(x) \in K(x) \text{ y } D^m(x) \neq 0 \;\; \exists Q^r(x), R^s(x) \in K(x) \;/\; P^m(x) = D^n(x)Q^r(x) + R^s(x)$$

Donde $s < r$ y $n = m + r$.

Primeramente, ordenamos de grado mayor a menor y procedemos a dividir como en una división de números, con la única salvedad que para encontrar el cociente dividimos el término de mayor grado del dividendo para el de mayor grado del divisor, lo simplificamos y ese será nuestro primer término del cociente y de la misma manera encontramos los demás términos.

Ejemplo: Dividir los siguientes polinomios:

1. $3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ para $2x^2 + 6x - 2$

$$\begin{array}{r|l}
3X^3 - 2X^2 + 5X - 3 & 2x^2 + 6x - 2 \\
\cline{2-2}
-3X^3 - 9X^2 + 3X & \frac{3}{2}x - \frac{11}{2} \\
\cline{1-1}
- 11X^2 + 8X \;\; - 3 & \\
11x^2 + 33x - 11 & \\
\cline{1-1}
41x - 14 &
\end{array}$$

Donde el cociente es: $\frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$ y el residuo es: $41x - 14$

2. $10z^5x - 21z^4x^2 - 56zx^5 - 3z^2x^4 - 10z^3x^3$ para $5z^2x - 3zx^2 + 8x^3$

$$\begin{array}{l|l}
10z^5x - 21z^4x^2 - 10z^3x^3 - 3z^2x^4 - 56zx^5 & 5z^2x - 3zx^2 + 8x^3 \\ \cline{2-2}
-10z^5x + 6z^4x^2 - 16z^3x^3 & 2z^3 - 3z^2x - 7zx^2 \\ \cline{1-1}
\quad - 15z^4x^2 - 26z^3x^3 - 3z^2x^4 & \\
\quad 15z^4x^2 - 9z^3x^3 + 24z^2x^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad - 35z^3x^3 + 21z^2x^4 - 56zx^5 & \\
\qquad 35z^3x^3 - 21z^2x^4 + 56zx^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad // \quad // \quad // &
\end{array}$$

Ejercicios propuestos:

i. Reduzca los siguientes polinomios

a) $13a^2b - 12ab^2 + 5ab^2 + 8a^2b + 3ab^2 - 14a^2b$

b) $\frac{2}{3}xy - \frac{5}{6}xy + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}xy + 12x^2y^2$

c) $4x^ny^m + 12x^ny^m - 15x^2y^m - 13x^ny^m + 6x^2y^m$

d) $xy^2z - 5x^2yz + 6xyz^2 + 12x^2yz - 13xyz - 11xy^2z - 2xyz^2 + 4xyz$

e) $8x^{-2}y - 4xy^{-1} + 3x^{-2}y + 5x^{-1}y^{-2} + 5xy^{-1} - 13x^{-1}y^{-2} - 5x^{-2}y$

f) $\frac{3}{4}x^2y - \frac{3}{2}xy + \frac{4}{5}xy^2 + \frac{5}{2}xy - \frac{5}{2}x^2y - \frac{3}{4}xy^2 - \frac{2}{3}xy$

ii. Sumar los siguientes polinomios

a) $7a^2 - 2ax + 3x^2, \quad 3a^2 + 4ax - 2x^2, \quad -5a^2 + 3ax + 4x^2$

b) $13x^2 + 3x + 13 + 2x^{-1} + 5x^{-2}, \quad -5x^2 + 4x - 2 - 13x^{-1} + 2x^{-2}$

c) $-5x^{n+2} + 3x^{n+1} + 12x^n - 6x^{n-1}, \quad 2x^{n+2} - 7x^{n+1} - 14x^n + 3x^{n-1}$

d) $8a^5b^2 - 14a^4b^4 + 16a^2b^3; -16a^5b^2 + 17a^4b^4 - 14a^2b^3 - 2a^3b^3;$
$5a^5b^2 - 6a^4b^4 - 3a^2b^3 + 7a^3b^3$

e) $\frac{3}{2}a^3 - \frac{5}{4}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 - \frac{3}{2}b^3; -\frac{3}{4}a^3 + \frac{1}{2}a^2b - \frac{3}{2}ab^2 + \frac{1}{4}b^3, \frac{3}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2b + \frac{3}{2}ab^2 + \frac{3}{4}b^3$

iii. Restar los siguientes polinomios

a) $-3x^5 + 12x^4y - 5x^3y^2 + 8x^2y^3 - 8xy^4 + 5y^5$ de $-2x^5 + 2x^3y^2 - 12xy^4 - y^5$

b) $-4x^4 + 2y^4 - 12x^3y + 13xy^3$ de $x^3y - xy^3 + 4y^4 - 5x^4$

c) $5x^5 - 6x^4y + 2x^3z - 7x^2y^2z^2 + 9xy^3z - 8yz^2$ de $2x^4y - 15x^2y^2z^2 - 2x^5 + 12xy^3z - 3yz^2$

d) $4x^{n-2} - 4x^n + 3x^{n-1} - 35x^{n-3} - 6x^{n-4}$ de $3x^{n-1} - 6x^n - 7x^{n-2} + 10x^{n-3} - 15x^{n-4}$

e) $14 - 3y^4x + 7y^3x^2 - 13y^2x^3 - 5yx^4$ de $6x^4y - 4x^2y^3 + 2x^3y^2 + 6xy^4 - 10$

iv. Efectuar las operaciones indicadas

a) $(u^2 + 2uv + 6v^2) - 2(v^2 + 3uv - 2uw + w^2) + 4(w^2 - 3uw + u^2)$

b) $(3a^2 - 14ax + 3x^2) - 2(a^2 - 2ax + x^2) - 3(a^2 + a^2 - 5x^2)$

c) $13xy^2 - 4(3x^2y - x^3) + 2[y^3 + 4(3x^2y - 3xy^2 + y^3) - x^3]$

d) $(1 - 3x + 4x^2)(2 - 5x^3 + 9x^2 - 6x)$

e) $(x^{3n} - 3x^{2n} + x^n - 11)(-2x^n + 3)$

f) $(x^4 + 3y^4 - 2x^2y^2)(x^2 + 6y^2)$

g) $(14x^4 - 7x^3 + 16x^2 + 32x + 5) \div (2x^2 - 3x + 5)$

h) $(6x^5 - 7x^4y + 17x^3y^2 - 13x^2y^3 + 11xy^4 - 6y^5) \div (2x^2 - xy + 3y^2)$

i) $x^4 - 12x + 11x^2 - 8x^3 + 16 \ \div 3 - 3x + x^2$

j) $y^4 - 4y^2 + 2y^3 - 16 + 2y \div y^2 + 3y + 3$

k) $20a^{4n+6} - 18a^{4n+5} + 23a^{4n+4} - 4a^{4n+3} + 4a^{4n+2} + 3a^{4n+1} \div 4a^{n+2} - 2a^{n+1} + 3a^n$

2.2.4. Descomposición factorial

Definición. - Un polinomio $P^n(x) \in K(x)$, se dice reducible en K si existen al menos dos polinomios $C^m(x), D^r(x)$ con coeficientes en K tal que $P^n(x) = C^m(x)Q^r(x)$, donde $n = m + r$; caso contrario se dice irreducible en K. Ejemplo:

$$x^2 + 3x + 4 = 0 \text{ es irreducible en R; pero es reducible en C}$$

$$x^2 + 3x + 4 = \left(x + \frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right)$$

Descomponer en factores o factorar un polinomio significa expresar el polinomio en factores irreducibles. Al realizar la suma o multiplicación de las expresiones nos conducen a reglas conocidas como productos notables, que permiten la descomposición en factores de diversas expresiones algebraicas. Los más importantes son:

1. $a(b + c) = ab + ac$
2. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
3. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \mp 3a^2b + 3ab^2 \mp b^3$
5. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
6. $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

Si n es impar; pero si es par y es múltiplo de 3, 5, 7, etc. puede ser transformado a un caso de una potencia impar

7. $a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

   $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Si n es par tiene dos soluciones. Pero si es impar sólo tiene una:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

8. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

9. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

10. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

11. $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

12. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$; $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Identidades de Legendre.

Ejercicios resueltos:

1. $3ax + 5a + 12x^2 + 20x$

$$(3ax + 5a) + (12x^2 + 20x) = a(3x+5) + 4x(3x+5) = (3x+5)(a+4x)$$

2. $3bx - 3by + 2cy - 2cx$

$$(3bx - 3by) + (2cy - 2cx) = 3b(x-y) + 2c(y-x) = 3b(x-y) - 2c(x-y) =$$
$$(x-y)(3b-2c)$$

3. $-12xy^3 + 60x^2y^2 - 75x^3y$

$$-3xy(4y^2 - 20yx + 25x^2) = -3xy(2y-5x)^2$$

4. $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 6xy$

$$3[(x^2 + 2xy + y^2) - z^2] = 3[(x+y)^2 - z^2] = 3(x+y+z)(x+y-z)$$

5. $81 - 16x^4$

$$(9)^2 - (4x^2)^2 = (9+4x^2)(9-4x^2) = (9+4x^2)(3-2x)(3+2x)$$

6. $x^{12} - 27y^6$

$$(x^4)^3 - (3y^2)^3 = (x^4 - 3y^2)(x^8 + 3x^4y^2 + 9y^4)$$

7. $4y^3x^4 - y^6 - 4x^8 + 9z^6 + 6a^4z^3 + a^8$

$$(a^8 + 6a^4z^3 + 9z^6) - (y^6 - 4y^3x^4 + 4x^8) = (a^4 + 3z^3)^2 - (y^3 - 2x^4)^2 =$$
$$(a^4 + 3z^3 + y^3 - 2x^4)(a^4 + 3z^3 - y^3 + 2x^4)$$

8. $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$

$$(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 9x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - (3xy)^2 =$$
$$(x^2 + y^2 + 3xy)(x^2 + y^2 - 3xy)$$

9. $x^4 - 17x^2y^2 + 16y^4$

$$(x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4) - 9x^2y^2 = (x^2 - 4y^2)^2 - (3xy)^2$$
$$= (x^2 - 4y^2 + 3xy)(x^2 - 4y^2 - 3xy)$$

10. $x^4 - 23x^2z - 108z^2$

$$(x^2 - 27z)(x^2 + 4z)$$

11. $4z^2 + 23z - 35y^2$ Aplicamos el método de las aspas:

$$\begin{array}{cc} 1 & 7 \\ 4 & -5 \end{array}$$

$$(z + 7y)(4z - 5y)$$

12. $x^{12}y^6 + z^{18}$

$$(x^4y^2)^3 + (z^6)^3 = (x^4y^2 + z^6)(x^8y^4 - x^4y^2z^6 + z^{12})$$

Ejercicios propuestos:

a) $m^3 + 4m^2 - 12m - 48$

b) $x^3y + 2x^2y^2 - 3xy^3$

c) $9a^5b - 42a^3b^3 + 49ab^5$

d) $8x^4 + 6x^2 - 2$

e) $ax^4 + ax^2y + axy^2 - 4ax^2 - 4axy - 4a$

f) $4x^2 - 5xy - 21y^2$

g) $a^3x^2 - 3a^3x + 7a^3 + x^2 - 3x + 7$

h) $x^4 - 12x^2 - 64$

i) $9a^2 - m^2 - 9n^2 - 6mn + 6ab + b^2$

j) $27a - 125a^4$

k) $x^4 + 8x^2b^2 - 9b^4$

l) $81a^6 - 4b^4c^8$

m) $8x^2 + 2xy - 10y^2 + 23yz - 12z^2$

n) $ax^3 + 10ax^2 + 25ax$

o) $64a - 125a^4$

p) $49x^2 - 7x - 30$

q) $15x^4 - 17x^2 + 4$

r) $16 - 9x^2 + 30xy - 25y^2$

s) $y^3 + 729x^6$

t) $4 - 8ab^3 - 21b^6$

u) $a^6 + 64x^6$

v) $x^6 - 125$

2.2.5. Regla de Ruffini

Esta regla no es otra cosa que la división de polinomio de cualquier grado para un binomio de primer grado, utilizando solamente sus coeficientes.

Dado un polinomio cualquiera con coeficientes enteros $mx^4 + nx^2 + px + q$, es divisible para un binomio de primer grado $x + a$, si a es un factor de q o de $\frac{q}{m}$ y su residuo es cero. Para conocer si el polinomio es o no divisible para un binomio, ensayamos sucesivamente la división hasta que el residuo nos dé cero.

Ejemplos: Dado los siguientes polinomios encontrar sus factores.

1. $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 8x + 12$

Descomponemos al doce en sus factores tanto positivos como negativos: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 12$. Se realiza luego una división de coeficientes, así:

1	-2	-6	5	8	12	2
	2	0	-12	-14	-12	
1	0	-6	-7	-6	//	-2
	-2	4	4	6		
1	-2	-2	-3	//		3
	3	3	3			
1	1	1	//			

Los factores del polinomio son:
$(x-2)(x+2)(x-3)(x^2+x+1)$

Podemos notar que para encontrar cada divisor es como si al binomio le hubiéramos igualado a cero y despejado el valor de x

2. $6x^4 + 41x^3 + 31x^2 - 129x - 45$

Descomponemos $\frac{45}{6}$ en sus factores, la fracción no se debe de simplificar: $\pm 1;\ \pm 3;\ \pm 5;\ \pm 15;\ \pm 45;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{6};\ \pm\frac{5}{2};\ \pm\frac{5}{3};\ \pm\frac{15}{2};\ \pm\frac{45}{2}$, procedemos a la división.

6	41	31	-129	-45	-5
	-30	-55	120	45	
6	11	-24	-9	//	-3
	-18	21	9		
6	-7	-3	//		$-\frac{1}{3}$
	-2	3			
6	-9	//			

Los factores quedan así: $(x+5)(x+3)(x+\frac{1}{3})(6x-9) = (x+5)(x+3)(3x+1)(2x-3)$

Ejercicios propuestos.

Factorar los siguientes problemas:

a) $6x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 4x + 4$

b) $18x^4 + 9x^3 + 13x^2 - 5x - 3$

c) $6x^3 + x^2 - 19x + 6$

d) $6x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 1$

2.2.6. Teorema del residuo

Al dividir un polinomio por un binomio $x + a$ obtenemos un residuo, que resulta ser el mismo valor, que si determináramos $P(-a)$. Ejemplo.

Dado el polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$, hallar el residuo al dividirlo para $x - 3$

Calculamos para $x = 3$, $P(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 + 4(3) - 3 = 54 - 27 + 12 - 3 = 36$

Si realizamos la división vamos a encontrar que tiene un residuo igual a 36. Si el residuo es cero pasa a ser un factor del polinomio.

2.2.7. Máximo común divisor

El **Máximo Común Divisor** de varias expresiones algebraicas es la expresión mayor que divide exactamente a cada una de ellas.

Ejercicios resueltos:

Determinar el Máximo Común Divisor.

1. 30; 18; 24

Calculamos los divisores comunes:

30	**18**	**24**	2
15	9	12	3
5	3	4	

El MCD: 6

2. $4a(x+y)^3; 20a^3(x+y)^5$

Descomponemos cada monomio en sus factores y tomamos los factores que se repiten con la menor potencia:

$$4a(x+y)^3 = 2^2a(x+y)^3$$

$$20a^3(x+y)^5 = 2^25a^3(x+y)^5$$

MCD = $2^2a(x+y)^3 = 4a(x+y)^3$

3. $2x^2-11x+15$; $6x^2-13x-5$ y $2x^3-5x^2+2x-5$

Le descomponemos cada polinomio en sus factores:

$$2x^2-11x+15 = (x-3)(2x-5)$$

1 -3

2 -5

$$6x^2-13x-5 = \frac{(6x-15)(6x+2)}{6} = (2x-5)(3x+1)$$

2 -5

3 1

$$2x^3-5x^2+2x-5 = (2x^3-5x^2)+(2x-5) = x^2(2x-5)+(2x-5)$$

$$= (2x-5)(x^2+1)$$

Siendo el MCD $= (2x-5)$

4. $x^4 + 6ax^3 + 5a^2x^2 + 4a^3x - a^4;\ 2x^3 + 11ax^2 + 3a^2x - a^3$

En este caso se utiliza el método de divisiones sucesivas:

$$\begin{array}{r|l|l}
x^4 + 6ax^3 + 5a^2x^2 + 4a^3x - a^4 & 2x^3 + 11ax^2 + 3a^2x - a^3 & x^2 + 5ax - a^2 \\ \cline{2-3}
-x^4 - \frac{1}{2}ax^3 - \frac{3}{2}a^2x^2 + \frac{1}{2}a^3x & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}a & 2x + a \\ \cline{1-1}
\frac{1}{2}ax^3 + \frac{7}{2}a^2x^2 + \frac{9}{2}a^3x - a^4 & -2x^3 - 10ax^2 + 2a^2x & \\ \cline{2-2}
-\frac{1}{2}ax^3 - \frac{11}{4}a^2x^2 - \frac{3}{4}a^3x + \frac{1}{4}a^4 & ax^2 + 5a^2x - a^3 & \\ \cline{1-1}
\frac{3}{4}a^2x^2 + \frac{15}{4}a^3x - \frac{3}{4}a^4 & -ax^2 - 5a^2x + a^3 & \\ \cline{2-2}
\frac{3}{4}a^2(x^2 + 5ax - a^2) & //\quad //\quad // &
\end{array}$$

El $\text{MCD} = x^2 + 5ax - a^2$

5. $x^3 + 4x^2 - 3x - 18$ y $x^3 - x^2 - 8x + 12$

Utilizando el método de suma y resta: $(x^3 + 4x^2 - 3x - 18)$- $(x^3 - x^2 - 8x + 12)$= $5x^2 + 5x - 30 = 5(x^2 + 5x - 6)$

El MCD $= x^2 + 5x - 6$

2.2.8. Mínimo común múltiplo

El Mínimo Común Múltiplo de varias expresiones algebraicas es otra expresión que es la más pequeña que contiene como factores a cada una de las analizados.

Ejercicios resueltos:

1. $30;\ 18;\ 24$

2	24	18	30
2	12	9	15
2	6	9	15
2	3	9	15
3	1	3	5
5	1	1	5
	1	1	1

El MCM $= 2^2 3^3 5 = 540$

2. $x^2 - 5ax + 6a^2;\ x^2 - 7ax + 12a^2;\ x^2 - 6ax + 8a^2$

Factoramos cada polinomio:

$$x^2 - 5ax + 6a^2 = (x - 3a)(x - 2a)$$

$$x^2 - 7ax + 12a^2 = (x - 4a)(x - 3a)$$

$$x^2 - 6ax + 8a^2 = (x - 4a)(x - 2a)$$

El $MCM = (x-3a)(x-2a)(x-4a)$

3. $x^2+x-2; x^4+4x^3-8x^2-24x ; x^4-x^3+8x-8$

Factoramos cada polinomio:

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

$$x^4+4x^3-8x^2-24x=x(x^3+4x^2-8x-24)=x(x+2)(x^2+2x-12)$$

$$x^4-x^3+8x-8=x^3(x-1)+8(x-1)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)$$

El $MCM = x(x+2)(x-1)(x^2+2x-12)(x^2-2x+4)$

Ejercicios Propuestos: Calcular el MCD y MCM

a) $4x^4-2x^3-x-1; 6x^4+7x^2+2; 2x^4-x^2-1$

b) $2x^4+2x^3+3x^2+x+1; -2x^5+x^4-x^3+4x^2+x+3; -8x^5+4x^4+2x^3+13x^2+x+3$

c) $-3x^5+2x^4+3x-2;\ x^5+x^3+x^2+1;\ x^5+x^3-x^2-1;\ 2-x-x^2-x^3-3x^4$

2.2.9. Operaciones con fracciones

Simplificación de fracciones

Una fracción esta simplificada cuando el numerador y denominador son primos entre sí. Para reducir una fracción a su más simple expresión, le factoramos ambas partes y le procedemos a simplificar.

Ejercicios resueltos:

1. $\frac{3x^4+2x^2-8}{x^4-4}$

Le factoramos y procedemos a simplificarla: $\frac{3x^4+2x^2-8}{x^4-4}=\frac{(3x^2-4)\cancel{(x^2+2)}}{\cancel{(x^2+2)}(x^2-2)}=\frac{3x^2-4}{x^2-2}$

2. $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4-x^3-x^2+2x-1}$

Le factoramos:

$$\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4-x^3-x^2+2x-1}=\frac{(x^4-x^3)-(x-1)}{(x^4-x^3)-(x^2-x)+(x-1)}=\frac{x^3(x-1)-(x-1)}{x^3(x-1)-x(x-1)+(x-1)}=$$

$$\frac{\cancel{(x-1)}(x^3-1)}{\cancel{(x-1)}(x^3-x+1)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^3-x+1)}$$

Suma y resta de fracciones

La suma y resta de fracciones algebraicas se las realiza igual que en aritmética, en caso de que tengan diferentes denominadores se procede a factorarlos o descomponerlos y se saca un mínimo común denominador.

Ejercicios resueltos:

1. $\frac{3x-2}{4}-\frac{5x-2}{6}-\frac{x+3}{2}+\frac{4x+5}{3}$

El común denominador es 12

$$\frac{3x-2}{4}-\frac{5x-2}{6}-\frac{x+3}{2}+\frac{4x+5}{3}=\frac{3(3x-2)-2(5x-2)-6(x+3)+4(4x+5)}{12}$$

$$=\frac{9x-6-10x+4-6x-18+16x+20}{12}=\frac{9x}{12}=\frac{3x}{4}$$

2. $\frac{2x-3}{x^2-x-6}-\frac{3x+2}{9-x^2}+\frac{3-5x}{x^2+5x+6}$

Factoramos los denominadores y definimos el común denominador

$$\frac{2x-3}{x^2-x-6}-\frac{3x+2}{9-x^2}+\frac{3-5x}{x^2+5x+6}=\frac{2x-3}{(x+2)(x-3)}-\frac{3x+2}{(3-x)(3+x)}+\frac{3-5x}{(x+3)(x+2)}$$

$$=\frac{(2x-3)(x+3)+(3x+2)(x+2)+(3-5x)(x-3)}{(x+2)(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{2x^2+3x-9+3x^2+8x+4+18x-9-5x^2}{(x+2)(x-3)(x+3)}=\frac{29x-14}{(x+2)(x-3)(x+3)}$$

3. $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+14}+\frac{3}{x+10}-\frac{3}{x+6}$

En este caso tenemos cuatro denominadores distintos, entonces procedemos a trabajar de dos en dos.

$$\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+14}\right)+\left(\frac{3}{x+10}-\frac{3}{x+6}\right)=\frac{x+14-x-2}{(x+2)(x+14)}+3\,\frac{x+6-x-10}{(x+10)(x+6)}$$

$$=\frac{12}{(x+2)(x+14)}+\frac{-12}{(x+10)(x+6)}=12\,\frac{(x+10)(x+6)-(x+2)(x+14)}{(x+2)(x+14)(x+10)(x+6)}$$

$$=12\,\frac{x^2+16x+60-x^2-16x-28}{(x+2)(x+14)(x+10)(x+6)}=\frac{384}{(x+2)(x+14)(x+10)(x+6)}$$

4. $\frac{x^2-y}{(x-y)(x-1)}-\frac{xy+1}{(x-1)(y+1)}+\frac{x+y^2}{(y-x)(y+1)}$

Para sacar el común denominador le cambiamos de signo al binomio de la tercera fracción $y-x$, este signo afecta a la fracción

$$\frac{(x^2-y)(y+1)-(xy+1)(x-y)-(x+y^2)(x-1)}{(x-y)(x-1)(y+1)}$$

$$=\frac{x^2y+x^2-y^2-y-x^2y+xy^2-x+y-x^2+x-xy^2+y^2}{(x-y)(x-1)(y+1)}=0$$

Multiplicación y división de fracciones

Para multiplicar fracciones, primero factoramos cada fracción y luego vemos que podemos simplificar.

Ejercicios resueltos: Reducir a su mínima expresión las siguientes multiplicaciones.

1. $\frac{4x^3-4}{x^2-3x+2}\cdot\frac{x^4-1}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{2x^3+2x^2+2x+2}$

Le factoramos cada término:

$$\frac{4\cancel{(x-1)}\cancel{(x^2+x+1)}}{(x-2)\cancel{(x-1)}}\cdot\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+x+1}}\cdot\frac{1}{2\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2+1)}}=\frac{2(x-1)}{x-2}$$

2. $\frac{a^3b^2+3a^3}{b^2+b}\cdot\frac{b^4+2b^2-3}{b^4-6b^2-27}\div\frac{a^2b^4+4a^2b^2+3a^2}{b^4-8b^2-9}$

Primeramente, le factoramos y luego la división le transformamos a multiplicación invirtiendo la fracción.

$$\frac{a^3(b^2+3)}{b(b+1)}\cdot\frac{(b^2+3)(b^2-1)}{(b^2-9)(b^2+3)}\div\frac{a^2(b^2+3)(b^2+1)}{(b^2-9)(b^2+1)}=$$

$$\frac{\cancel{a^3}\cancel{(b^2+3)}}{b\cancel{(b+1)}}\cdot\frac{\cancel{(b^2+3)}(b-1)\cancel{(b+1)}}{\cancel{(b^2-9)}\cancel{(b^2+3)}}\cdot\frac{\cancel{(b^2-9)}\cancel{(b^2+1)}}{\cancel{a^2}\cancel{(b^2+3)}\cancel{(b^2+1)}}=\frac{a(b-1)}{b}$$

3. $\frac{x^2-2x-10}{x+3-\frac{x+1}{x-\frac{x+4}{x-2}}}$

Esta fracción la desarrollamos de abajo hacia arriba:

$$\frac{x^2-2x-10}{x+3-\frac{x+1}{\frac{x(x-2)-(x+4)}{x-2}}}=\frac{x^2-2x-10}{x+3-\frac{x+1}{\frac{x^2-2x-x-4}{x-2}}}=\frac{x^2-2x-10}{x+3-\frac{x+1}{\frac{x^2-3x-4}{x-2}}}$$

$$=\frac{x^2-2x-10}{x+3-\frac{(x+1)(x-2)}{(x-4)(x+1)}}=\frac{x^2-2x-10}{\frac{(x+3)(x-4)-(x-2)}{x-4}}=\frac{x^2-2x-10}{\frac{x^2-x-12-x+2}{x-4}}$$

$$=\frac{(x^2-2x-10)(x-4)}{(x^2-2x-10)}=x-4$$

Ejercicios propuestos: Realizar las siguientes operaciones con fracciones.

a) $\frac{3x}{(x-3)(x+2)}-\frac{2x+3}{9-x^2}-\frac{x+1}{x^2+5x+6}$

b) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}+\dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)}$

c) $\dfrac{yz(x+3)}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{xz(y+3)}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{xy(z+3)}{(z-x)(z-y)}$

d) $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-6}{8x^3+1}\cdot\dfrac{3+8x-3x^2}{2x^3+3x^2+4x+6}\cdot\dfrac{4x^2+8x+3}{3x-2x^2-9}$

e) $\dfrac{x^4-1}{6x^2-x-1}\cdot\dfrac{6x^3+2x^2+9x+3}{3x^2+x-2}\cdot\dfrac{6x^2-7x+2}{9x-2x^2+9}$

f) $\dfrac{4-x^2+2xy-y^2}{x^2-x-56}\div\dfrac{y^2-xy+3y-x+2}{xy-x-8y+8}\div\dfrac{2y^2-y-1}{2y^2+3y+1}$

2.2.10. Fracciones parciales

Una fracción $\frac{P^m(x)}{Q^n(x)}$ la podemos encontrar en tres formas:

i. Si $m > n$

ii. Si $m = n$

iii. Si $m < n$

Para poder transformarle una fracción a fracciones parciales, debe cumplir la tercera condición y su denominador tener factores de primer grado, segundo grado, etc. Si tenemos fracciones que cumplen las dos primeras condiciones les dividimos y le transformamos en un entero y una fracción y de esta manera obtenemos que cumplan la tercera condición.

El número de fracciones que se obtienen al transformar una fracción a fracciones parciales depende del número de factores irreducibles en Q que tenga el denominador. Siempre la nueva fracción tendrá el numerador por lo menos un grado menos que el denominador.

Ejercicios resueltos:

1. $\frac{-2x^2+6x+5}{(x-2)(2x-1)(3-x)}$

Como hay tres factores en el denominador, tendremos tres fracciones parciales:

$$\frac{-2x^2+6x+5}{(x-2)(2x-1)(3-x)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{3-x}$$

$$=\frac{A(2x-1)(3-x)+B(x-2)(3-x)+C(x-2)(2x-1)}{(x-2)(2x-1)(3-x)}$$

Vemos que la primera y última fracción sus denominadores son iguales, entonces para que las fracciones sean iguales deben de ser iguales sus numeradores. Notamos que tenemos tres incógnitas, estas pueden ser resueltas de dos métodos:

Primer Método. Coeficientes indeterminados

Igualamos numeradores

$$-2x^2 + 6x + 5 = A(2x-1)(3-x) + B(x-2)(3-x) + C(x-2)(2x-1)$$
$$= A(6x - 2x^2 - 3 + x) + B(3x - x^2 - 6 + 2x) + C(2x^2 - x - 4x + 2) =$$
$$= A(-2x^2 + 7x - 3) + B(-x^2 + 5x - 6) + C(2x^2 - 5x + 2)$$

Igualamos coeficientes:

x^2: $\quad -2 = -2A - B + 2C$

x: $\quad 6 = 7A + 5B - 5C$

x^0: $\quad 5 = -3A - 6B + 2C$

$$5\begin{cases} -2 = -2A - B + 2C \\ 6 = 7A + 5B - 5C \end{cases} \qquad \begin{cases} -10 = -10A - 5B + 10C \\ 6 = 7A + 5B - 5C \end{cases}$$
$$-4 = -3A + 5C$$

$$-6\begin{cases} -2 = -2A - B + 2C \\ 5 = -3A - 6B + 2C \end{cases} \qquad \begin{cases} 12 = 12A + 6B - 12C \\ 5 = -3A - 6B + 2C \end{cases}$$
$$17 = 9A - 10C$$

$$3\begin{cases} -4 = -3A + 5C \\ 17 = 9A - 10C \end{cases} \qquad \begin{cases} -12 = -9A + 15C \\ 17 = 9A - 10C \end{cases}$$
$$5 = 5C$$

$$A = 3$$
$$B = -2$$
$$C = 1$$

Segundo Método. Igualamos cada denominador a cero y reemplazamos en la igualdad de los denominadores, así:

$-2x^2 + 6x + 5 = A(2x-1)(3-x) + B(x-2)(3-x) + C(x-2)(2x-1)$

$x - 2 = 0 \qquad x = 2 \qquad -2(2)^2 + 6(2) + 5 = A(2(2)-1)(3-2)$

$\qquad -8 + 12 + 5 = A(3) \qquad A = 3$

$2x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1}{2} \qquad -2(\frac{1}{2})^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) + 5 = B\left(\frac{1}{2} - 2\right)\left(3 - \frac{1}{2}\right)$

$\qquad -\frac{1}{2} + 3 + 5 = B\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) \qquad B = -2$

$3 - x = 0 \qquad x = 3 \qquad -2(3)^2 + 6(3) + 5 = C(3-2)(2(3)-1)$

$\qquad -18 + 18 + 5 = C(5) \qquad C = 1$

Las fracciones parciales quedan así:

$$\frac{-2x^2 + 6x + 5}{(x-2)(2x-1)(3-x)} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{3-x}$$

2. $\frac{x^3 - 9x^2 - 10x - 18}{(x+2)(x-1)(x^2+3)}$

Procedemos a plantear el problema:

$$\frac{x^3 - 9x^2 - 10x - 18}{(x+2)(x-1)(x^2+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3}$$

$$=\frac{A(x-1)(x^2+3)+B(x+2)(x^2+3)+(Cx+D)(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x^2+3)}=$$

$$=\frac{A(x^3-x^2+3x-3)+B(x^3+2x^2+3x+6)+Cx^3+Cx^2+Dx^2-2Cx+Dx-2D}{(x+2)(x-1)(x^2+3)}$$

Igualamos coeficientes:

x^3: $\quad 1 = A + B + C$

x^2: $\quad -9 = -A + 2B + C + D$

x: $\quad -10 = 3A + 3B - 2C + D$

x^0: $\quad -18 = -3A + 6B - 2D$

Vamos a combinar los dos métodos, igualamos los denominadores de primer grado a cero:

$x^3 - 9x^2 - 10x - 18 = A(x-1)(x^2+3) + B(x+2)(x^2+3) + C(x+2)(x-1)$

$x = -2 \qquad (-2)^3 - 9(-2)^2 - 10(-2) - 18 = A((-2)-1)((-2)^2+3)$

$\qquad -8 - 36 + 20 - 18 = A(-21) \qquad A = 2$

$x = 1 \qquad 1^3 - 9(1)^2 - 10(1) - 18 = B(1+2)(1^2+3)$

$\qquad 1 - 9 - 10 - 18 = B(12) \qquad B = -3$

Reemplazando estos dos resultados en el sistema de ecuaciones obtenemos:

$1 = 2 - 3 + C \qquad C = 2$

$-9 = -2 - 6 + 2 + D \qquad D = -3$

Las fracciones parciales quedarán así:

$$\frac{x^3-9x^2-10x-18}{(x+2)(x-1)(x^2+3)}=\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-1}+\frac{2x-3}{x^2+3}$$

3. $\dfrac{3x^3-6x^2-37x+36}{(x-3)^2(x+1)^2}$

En este caso tenemos cuatro factores de primer grado, por lo que tendremos cuatro fracciones, cuyos numeradores serán de grado cero:

$$\frac{3x^3-6x^2-37x+36}{(x-3)^2(x+1)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}=$$

$$\frac{A(x-3)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-3)^2+D(x-3)^2}{(x-3)^2(x+1)^2}=$$

$$=\frac{A(x^3-x^2-5x-3)+B(x^2+2x+1)+C(x^3-5x^2+3x+9)+D(x^2-6x+9)}{(x-3)^2(x+1)^2}$$

Igualamos coeficientes:

x^3: $\quad 3 = A + C$

x^2: $\quad -6 = -A + B - 5C + D$

$x: \quad -37 = -5A + 2B + 3C - 6D$

$x^0: \quad 36 = -3A + B + 9C + 9D$

Igualamos los dos binomios de primer grado a cero:

$x - 3 = 0 \qquad x = 3 \qquad 3(3)^3 - 6(3)^2 - 37(3) + 36 = B(3+1)^2$

$$81 - 54 - 111 + 36 = B(16)$$

$$B = -3$$

$x + 1 = 0 \qquad x = -1 \qquad 3(-1)^3 - 6(-1)^2 - 37(-1) + 36 = D(-1-3)^2$

$$-3 - 6 + 37 + 36 = D(16)$$

$$D = 4$$

Con estos dos resultados lo reemplazamos en el sistema y encontramos las otras dos incógnitas:

$-6 = -A + B - 5C + D \qquad -6 = -A - 3 - 5C + 4 \qquad -7 = -A - 5C$

$$\begin{cases} 3 = A + C \\ -7 = -A - 5C \end{cases}$$

$\overline{-4 = -4C} \qquad C = 1$

$-37 = -5A + 2B + 3C - 6D \qquad -37 = -5A - 6 + 3 - 24 \qquad A = 2$

Las fracciones parciales quedan de la siguiente manera:

$$\frac{3x^3 - 6x^2 - 37x + 36}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{2}{x-3} - \frac{3}{(x-3)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$$

4. $\frac{3x^2-5x+4}{(x-2)^3}$

En este caso que tenemos un solo denominador es preferible realizar la transformación con un cambio de variable, así:

$z = x - 2 \qquad x = z + 2$ Este valor de x lo reemplazamos en la fracción

$$\frac{3x^2 - 5x + 4}{(x-2)^3} = \frac{3(z+2)^2 - 5(z+2) + 4}{z^3} = \frac{3z^2 + 12z + 12 - 5z - 10 + 4}{z^3}$$

$$= \frac{3}{z} + \frac{7}{z^2} + \frac{6}{z^3}$$

Reemplazando el valor de z tenemos: $\frac{3x^2-5x+4}{(x-2)^3} = \frac{3}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2} + \frac{6}{(x-2)^3}$

Ejercicios propuestos: Transformar a fracciones parciales los siguientes ejercicios.

a) $\frac{11x^2 - 17x + 26}{(x-2)(2x-1)(x+4)}$ b) $\frac{11x^3 - 21x^2 + 2}{(x-3)(3x+2)(x^2+1)}$

c) $\dfrac{2x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 16x - 50}{(x^2 - 3x + 5)(x^2 - 5)}$ d) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - x + 2}{(3x - 4)^4}$

e) $\dfrac{3x^4 - 9x^3 - 25x^2 - x + 20}{x^3 - 3x^2 - 10x}$ f) $\dfrac{1}{x^6 + 1}$

g) $\dfrac{9x^4 + 9x^3 - 3x^2 + 28x - 21}{(x - 1)^2(x + 3)(2x^2 + 3)}$ h) $\dfrac{1}{x^4 + 1}$

i) $\dfrac{6x^4 - 48x^3 + 108x^2 - 45x - 45}{(x^2 - 7x + 9)(2x^3 - 9x^2 + 3x + 18)}$ j) $\dfrac{3x^3 - 3x^2 + 3x - 8}{(x^2 + 2)(x^2 + x + 2)}$

2.2. Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones

Una ecuación es una igualdad que contiene una o varias letras, bajo las cuales están los números desconocidos. Estas letras son de dos tipos las llamadas incógnitas que usualmente se la designa por $x, y, z, \ldots$ y los coeficientes que acompañan a las incógnitas que se las designan por las letras $a, b, c, d, \ldots$

La solución de la ecuación no es otra cosa que encontrar el valor de la incógnita que hace que la ecuación sea verdadera, también se conoce como raíces de la ecuación. Existen distintos criterios para realizar la clasificación de una ecuación. Estos son:

2.3.1. Según el número de sus soluciones

Una ecuación puede ser:

- Compatible. Cuando tiene solución, y puede tener soluciones finitas (compatible determinada) o soluciones infinitas (compatible indeterminada).
- Incompatible, cuando no tiene solución.

Ejemplo:

1. $3x^2 - 4x - 20 = 0$ Tiene dos soluciones.
2. $\frac{3}{x-4} = 1 + \frac{7-x}{x-4}$ Tiene infinitas soluciones, excepto $x = 4$
3. $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2}{x+4}$. No tiene solución

2.3.2. Según la naturaleza de sus miembros

Depende de la forma de la ecuación:

- Ecuación numérica, es aquella en que solo aparece una letra, la incógnita.
- Ecuación literal, es aquella en que aparece la incógnita y otras letras más. Ejemplo

$$\frac{x - a}{x + a} + \frac{x + a}{x - a} = 2$$

- Ecuación polinomial, es aquella donde los miembros que la componen son funciones polinomiales.

Ejemplo: $(2x-3)(x+4)(x+3)=(2x+1)(x+2)(x-4)$

- Ecuación fraccionaria, es aquella cuyos miembros son funciones racionales.

$$\frac{3-x}{x+1}-\frac{2}{x+2}=\frac{2}{x+1}$$

- Ecuación irracional, es aquella en que por lo menos uno de sus miembros es una función irracional.

2.3.3. Ecuaciones de primer grado

Otra clasificación es según al grado de sus miembros, el grado del polinomio será la potencia mayor que tenga la variable. De ahí, se tiene las ecuaciones de primer grado o también llamadas lineales, son aquellas que tienen la forma $P(x)=ax+b=0;\ a\neq 0$. Resolver esta ecuación gráficamente no es otra cosa que encontrar el punto de corte con el eje "x".

Ejercicios resueltos:

1. $3-5x=9-11x$

$$-5x+11x=9-3 \qquad \Rightarrow \qquad 6x=6 \qquad \Rightarrow \qquad x=1$$

2. $\frac{x-3}{4}-\frac{2x+1}{6}-\frac{2-3x}{15}=0$

$$\frac{15(x-3)-10(2x+1)-4(2-3x)}{60}=0$$

$$15x-45-20x-10-8+12x=0$$

$$15x-20x+12x=45+10+8$$

$$7x=63 \qquad \Rightarrow \qquad x=9$$

3. $\frac{x-2}{2x+4}-\frac{3x^2+1}{6x^2-24}=\frac{x-1}{2-x}$

Factoramos los denominadores y encontramos el MCM, el cual le multiplicamos por cada término de la fracción y eliminamos los denominadores, así:

$$\frac{x-2}{2(x+2)}-\frac{3x^2+1}{6(x-2)(x+2)}=\frac{x-1}{-(x-2)} \qquad MCM=6(x+2)(x-2)$$

$$3(x-2)(x-2)-(3x^2+1)=-6(x-1)(x+2)$$

$$3x^2-12x+12-3x^2-1=-6x^2-6x+12$$

$$6x^2-6x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+24}}{12}=\frac{6\pm\sqrt{60}}{12}=\frac{3\pm\sqrt{15}}{6}$$

4. $\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-4}{x-5}=\frac{x-6}{x-7}-\frac{x-7}{x-8}$

Desarrollamos la parte izquierda y la parte derecha y luego cruzamos los denominadores:

$$\frac{(x-3)(x-5)-(x-4)(x-4)}{(x-4)(x-5)}=\frac{(x-6)(x-8)-(x-7)(x-7)}{(x-7)(x-8)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2-8x+15-x^2+8x-16}{(x-4)(x-5)}=\frac{x^2-14x+48-x^2+14x-49}{(x-7)(x-8)}$$

$$\frac{-1}{(x-4)(x-5)}=\frac{-1}{(x-7)(x-8)}$$

$$(x-7)(x-8)=(x-4)(x-5)$$

$$x^2-15x+56=x^2-9x+20$$

$$-6x=-36$$

$$x=6$$

5. $\frac{ax-b}{ax+b}+\frac{3a}{b-ax}=\frac{a^2x^2+b^2}{a^2x^2-b^2}$

Factoramos y encontramos el MCM:

$$\frac{ax-b}{ax+b}+\frac{3a}{-(ax-b)}=\frac{a^2x^2+b^2}{(ax+b)(ax-b)} \qquad \text{MCM}=(ax+b)(ax-b)$$

$$(ax-b)(ax-b)-3a(ax+b)=a^2x^2+b^2$$

$$a^2x^2-2abx+b^2-3a^2x-3ab=a^2x^2+b^2$$

$$(-2ab-3a^2)x=3ab$$

$$x=\frac{3b}{-2b-3a}$$

6. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{3x}=1$

Le cambiamos la segunda raíz al otro lado del igual par poder eliminar las x y le elevamos al cuadrado ambas partes:

$$\left(\sqrt{3x+7}\right)^2=\left(1+\sqrt{3x}\right)^2$$

$$3x+7=1+2\sqrt{3x}+3x$$

$$6=2\sqrt{3x} \quad \Rightarrow \quad 3^2=(\sqrt{3x})^2 \quad \Rightarrow \quad 9=3x \quad \Rightarrow \quad x=3$$

7. $\sqrt{x+6}=\sqrt{4x+10}-\sqrt{x}$

$$\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{4x+10}\right)^2$$

$$x+6+2\sqrt{x+6}\sqrt{x}+x=4x+10$$

$$2\sqrt{x+6}\sqrt{x}=2x+4$$

$$\left(\sqrt{x+6}\sqrt{x}\right)^2 = (x+2)^2$$

$$x^2 + 6x = x^2 + 4x + 4 \qquad x = 2$$

Ejercicios propuestos: Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $2^{2x}10^{x+2} - 6\,2^{3x}5^{x+1} = 4480000$

b) $2 - 3x - 5 = 5 - 8x + x$

d) $4(x-1) - 5(3-x) = 14x - 2(5x-3)$

c) $3^{2x+1} - 15 = 12(3^x - 2)$

e) $2^{6x+2} - 65\,2^{3x-2} + 1 = 0$

f) $6\sqrt{\frac{x}{3}} - 6\sqrt{\frac{3}{x}} = 5$

g) $6 + (3x-4) = 2x - \{3 + [4x - (3-x)] - x\}$

h) $3^{2x+3} - 40 = 7(3^{x+1} - 6)$

i) $(z+1)(z+4) + 3(z-2)(z-1) = 4z(z-6)$

j) $\dfrac{x}{x+3} = \dfrac{x+2}{2x+5}$

2.3.4. Sistemas de ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones con dos o más incógnitas se llaman de primer grado si tienen la siguiente forma:

$$ax + by = c \qquad ax + by + cz = d$$

Donde a, b, c y d son las constantes con la condición de que los coeficientes de las variables sean diferentes de cero. La primera ecuación representa una línea recta, mientras que la segunda representa un plano. Un sistema lineal está formado por dos o más ecuaciones de primer grado, están igualadas siempre a una constante sin variable llamado término independiente y pueden ser homogéneas o no homogéneas.

Las homogéneas son aquellas en la que en cada ecuación el término independiente es igual a cero. Hay sistemas que tienen muchas soluciones, hay otros que tienen una solución y hay algunos que no tienen solución. La solución de un sistema no es otra cosa que lo común que hay entre los gráficos de las ecuaciones del sistema, si un sistema no tiene solución significa que entre sus gráficos no hay nada en común. Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas vamos a utilizar el método de eliminación.

Ejercicios resueltos:

1. $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

$$_{-2}\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 6y = -8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$
$$\overline{\phantom{-2x+{}} 7y = -7}$$

$$y = -1$$
$$2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1$$

2. $\begin{cases} x - 3y + z = -6 \\ x - y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$

Para resolver este sistema lo vamos a hacer en forma matricial utilizando el método de Gauss, realizando transformaciones elementales, entre filas. El método consiste en transformar los términos que se encuentran debajo de la diagonal principal en ceros, que es la idea del método de eliminación, para esto tratamos de obtener el mismo coeficiente con signos contrarios, de tal forma que al sumarlo se reduzca a cero, así:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 8 & 1 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & -13 \end{bmatrix}$$

$-F_1 + F_2 = F'_2 \qquad -4F_2 + F_3 = F'_3$

$-2F_1 + F_3 = F'_3$

$$\begin{cases} x - 3y + z = -6 \\ 2y - 3z = 7 \\ z = -1 \end{cases}$$

$2y - 3(-1) = 7 \qquad x - 3(2) + (-1) = -6$

$y = 2 \qquad x = 1 \qquad$ La solución es: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

3. Encontrar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 5 \\ 4x - y - 5z - 6t = -7 \\ x - 3y - 9z - 7t = -5 \\ 2x + y - z + 3t = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & -5 & -6 & -7 \\ 1 & -3 & -9 & -7 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -9 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & -5 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$-4F_1 + F_2 = F'_2 \qquad - F_2 + F_3 = F'_3$

$-F_1 + F_3 = F'_3 \qquad - F_2 + F_4 = F'_4$

$-2F_1 + F_4 = F'_4$

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 5 \\ y + z + 2t = 3 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

$y + (-1) + 2(1) = 3$

$y = 2$

$x + 2(2) + (-1) + 3(1) = 5$

$$x = -1$$

La solución es: $(-1; 2; -1; 1)$

Hay sistemas que tienen: a) menor número de ecuaciones que de incógnitas, b) mayor número de ecuaciones que de incógnitas, c) igual número de ecuaciones que de incógnitas.

4. $\begin{cases} x - 3y + 2z + t = -10 \\ 2x + y + z - t = 0 \\ x - y - 2z - t = 4 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -3 & -3 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & -29 \end{bmatrix} =$$

$$-2F_1 + F_2 = F'_2 \qquad -7F_2 + F_3 = F'_3 \qquad 11F_1 + 4F_3 = F'_1$$

$$-F_1 + F_3 = F'_3 \qquad F_1 + 3F_2 = F'_1 \qquad 11F_2 + 2F_3 = F'_2$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & -6 & 93 \\ 0 & 11 & 0 & -3 & 19 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & -29 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 11x - 6t = 93 \\ 11y - 3t = 19 \\ 11z + 4t = -29 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{93+6t}{11} \\ y = \frac{19+3t}{11} \\ z = \frac{-29-4t}{11} \end{cases}$$

La solución es: $\left(\frac{93+6t}{11}; \frac{19+3t}{11}; \frac{-29-4t}{11}; t\right) = \frac{1}{11}[(93,19,-29,0) + (6,3,-4,1)t]$

El sistema tiene infinitas soluciones, ya que $t \in R$

5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 - 3x_6 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 - 2x_6 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 6x_5 - x_6 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 2x_6 = 0 \end{cases}$

Para resolver tomamos los coeficientes y le ordenamos por filas:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -6 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -6 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 0 & 13 & 3 & -9 \\ 0 & -5 & -3 & -7 & -10 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 14 & 9 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= F'_2 \\ F_1 + F_3 &= F'_3 \\ 3F_1 + F_4 &= F'_4 \\ -2F_1 + F_5 &= F'_5 \\ 3F_1 + F_6 &= F'_6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -2F_2 + F_3 &= F'_3 \\ -7F_2 + 2F_4 &= F_4 \\ 5F_2 + 2F_5 &= F'_5 \\ -7F_2 + F_6 &= F'_6 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & -21 & 19 & -15 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & -19 & 21 & -3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & -21 & 19 & -15 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & -19 & 21 & -3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 12 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & -63 & -116 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 147 & 150 & -164 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3F_3 + F_4 &= F'_4 \\ 9F_3 + 7F_5 &= F'_5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 63F_4 + 19F_5 &= F'_5 \\ -147F_4 + 19F_6 &= F'_6 \end{aligned}$$

$-19F_3 + 7F_6 = F_6'$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 12 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1448 & -1448 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1086 & 1086 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 12 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 12 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-F_5 + F_6 = F_6'$

de donde obtenemos que: $t_5 = -t_6$ $\qquad -7t_3 = -21t_6$

$19t_4 = 38t_6$ $\qquad t_3 = 3t_6$

$t_4 = 2t_6$

$2t_2 + 9t_6 + 2t_6 - 3t_6 - 4t_6 = 0$ $\qquad -t_1 - 6t_6 + 3t_6 + 8t_6 - 2t_6 - 2t_6 = 0$

$2t_2 = -4t_6$ $\qquad -t_1 = -t_6$

$t_2 = -2t_6$ $\qquad t_1 = t_6$

La solución es: $(t_6, -2t_6, 3t_6, 2t_6, -t_6, t_6) = (1, -2, 3, 2, -1, 1)t_6$

Ejercicios propuestos:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 - 5x_2 = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ -2x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -6 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 - 3x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - 2x_6 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 6x_5 - x_6 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 2x_6 = 0 \end{cases}$

2.3.5. Ecuaciones de segundo grado

Se llaman ecuaciones de segundo grado, aquellas que tienen la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

o aquellas que pueden reducirse por transformaciones algebraicas a esta forma. Donde x es la incógnita y a, b, c son constantes, con la condición de que $a \neq 0$. Si b o c son ceros la ecuación de segundo grado es incompleta, por lo que tenemos los siguientes tipos:

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2-3x+4=0 \\ 3-2x-x^2=0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones completas}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x^2 - 3x = 0 \\ x^2 + 5 = 0 \\ 2x^2 = 0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones incompletas}$$

Hay ecuaciones de segundo grado que son factorables y se resuelven por los métodos de factorización vistos anteriormente. Por otro lado, hay otras que no son factorables y para poderlas resolver se realiza la completación de cuadrados o con la fórmula general de segundo grado. Las soluciones serán reales y complejas.

Ejercicios resueltos:

1. $x^2 + x + 12 = 9x + 60$

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$(x - 12)(x + 4) = 0$$

$$x - 12 = 0 \qquad x + 4 = 0 \qquad x = 12 \qquad x = -4$$

2. $5x^2 - 3x = 0$

$$x(5x - 3) = 0$$

$$x = 0 \qquad 5x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{5}$$

3. $x^2 + 5 = 0$

$x^2 = -5 \qquad x = \pm\sqrt{-5}$ Estas soluciones son imaginarias

4. $x^2 - 4x - 3 = 0$

Esta ecuación no es factorable, por lo que lo vamos a resolver por completación de cuadrados. Esto es, dejar los términos con la variable del lado izquierdo y completamos un trinomio cuadrado perfecto, para luego despejar x; en la ecuación si el coeficiente de x es par le descomponemos en dos factores el dos que necesitamos para el doble producto y el otro factor será la segunda raíz que elevado al cuadrado nos dará el tercer término; si el coeficiente de x no es par le multiplicamos por dos y al coeficiente le dividimos para dos, siendo esta fracción la segunda raíz, a la cual le elevamos al cuadrado y obtenemos el tercer término.

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 2(2)x + 2^2 = 3 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 7$$

$$x_{1,2} - 2 = \pm\sqrt{7} \qquad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

5. $x^2 - 3x + 5 = 0$

$$x^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -5 + \frac{9}{4} \qquad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{11}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{11}{4}} \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

6. $3x^2 - 5x + 6 = 0$

En este caso le dividimos para tres y procedemos de las formas anteriores:

$$x^2 - \tfrac{5}{3}x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2\left(\tfrac{5}{6}\right)x + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 = -2 + \tfrac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{47}{36} \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{-\frac{47}{36}} = \frac{5 \pm i\sqrt{47}}{6}$$

7. $ax^2 + bx + c = 0;\; a, b, c \in Q$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ esta ecuación representa la fórmula general de segundo grado

Los resultados del discriminante son tres:

i. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, hay dos raíces reales, si el trinomio es factorable las raíces son racionales y si no son irracionales y se las obtiene con la formula general.

ii. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, hay una raíz y el trinomio es factorable.

iii. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, hay dos raíces complejas y se las obtiene con la formula general.

8. $\dfrac{x-1}{x^2+x+1} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3x^2-x+1}{x^3-1}$

Para resolver esta ecuación, factoramos los denominadores y encontramos el MCM

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3x^2-x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$(x-1)^2 - 2(x^2 + x + 1) = 3x^2 - x - 2$$
$$x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 2x - 2 = 3x^2 - x - 2$$
$$4x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad (4x-1)(x+1) = 0$$

$$x = \tfrac{1}{4} \qquad x = -1$$

9. $3^{2x+2} - 73 = 82(3^x - 1)$

$$9(3^{2x}) - 82(3^x) + 9 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -9 \\ 9 & & -1 \end{array} \qquad (3^x - 9)[9(3^x) - 1] = 0$$

$$3^x - 9 = 0 \qquad\qquad 9(3^x) - 1 = 0$$

$$3^x = 3^2 \quad \Rightarrow x = 2 \qquad\qquad 3^x = 3^{-2} \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

2.3.6. Ecuaciones bicuadrática

La ecuación de cuarto grado que tiene sólo potencias pares en su incógnita se llama bicuadrática. Este tipo de ecuaciones se reducen a ecuaciones de segundo grado. Es decir:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0$$

La solución de esta ecuación está basada en la de segundo grado, donde x^2 es la nueva variable.

Ejercicios resueltos:

1. $2x^4 - 17x^2 + 21 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & -3 \\ 1 & & -7 \end{array} \qquad (2x^2 - 3)(x^2 - 7) = 0$$

$$2x^2 - 3 = 0 \qquad\qquad x^2 - 7 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad\qquad x = \pm\sqrt{7}$$

2. $13x^{-2} = x^{-4} + 36$

$$x^{-4} - 13x^{-2} + 36 = 0$$

$$(x^{-2} - 9)(x^{-2} - 4) = 0$$

$$x^{-2} - 9 = 0 \qquad x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{3} \qquad\qquad x = \pm\frac{1}{2}$$

3. $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ 1 & & 9 \end{array} \qquad\qquad (2x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad\qquad x = \pm 3$$

2.3.7. Ecuaciones que se reducen a cuadráticas

Hay varios tipos de ecuaciones, por ejemplo:

1. $(x - 2)(x - 3)(3x + 4)(3x + 7) = 140$

$$[(x - 2)(3x + 4)][(x - 3)(3x + 7)] = 140$$

$$(3x^2 - 2x - 8)(3x^2 - 2x - 21) = 140 \qquad\qquad z = 3x^2 - 2x$$

$$(z - 8)(z - 21) = 140 \quad \rightarrow \quad z^2 - 29z + 168 = 140 \quad \rightarrow \quad z^2 - 29z + 28 = 0$$

$$(z - 28)(z - 1) = 0$$

$$3x^2 - 2x - 28 = 0 \qquad\qquad 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-28)}}{6} \qquad\qquad \begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$(x-1)(3x+1) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{440}}{6} \qquad x = 1 \qquad x = -\frac{1}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 20{,}97}{6} \qquad x_1 = 3{,}83 \qquad x_2 = -3{,}16$$

2. $2\sqrt[3]{x^4} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} - 20 = 0$

$$2\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{x^2}\right) - 20 = 0$$

$$\begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{matrix}$$

$$\left(2\sqrt[3]{x^2} + 5\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - 4\right) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{125}{8}} \qquad x = \pm 8$$

3. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2} \qquad x \neq -1, \quad x \neq 0$

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 1 = 0$$

$$2\left(\frac{x+1}{x}\right)^4 - 3\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 2 = 0$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$$\left(2\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + 1\right)\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 2\right) = 0$$

$$\left(2\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + 1\right) = 0 \qquad\qquad \left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 2\right) = 0$$

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = 2$$

no tiene solución $\qquad \frac{x+1}{x} = \pm\sqrt{2}$

$$x + 1 = \sqrt{2}x \qquad\qquad x + 1 = -\sqrt{2}x$$

$$\sqrt{2}x - x = 1 \qquad\qquad \sqrt{2}x + x = -1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \qquad\qquad x = -\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

4. $x-\sqrt{x^2-4}=\dfrac{2x-\sqrt{x^2-4}}{x+\sqrt{x^2-4}}$

$$x^2-x^2+4=2x-\sqrt{x^2-4}$$

$$\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2=(2x-4)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2-4=4x^2-16x+16$$

$$3x^2-16x+20=0$$

$$\begin{array}{ll} 3 & -10 \\ 1 & -2 \end{array} \qquad (3x-10)(x-2)=0$$

$$x=\tfrac{10}{3} \qquad x=2$$

5. $\sqrt{3x^2-10x-8}-\sqrt{2x^2-5x-12}-\sqrt{5x^2-19x-4}=0$

$$\begin{array}{ll} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & -4 \\ 5 & 1 \end{array}$$

$$\sqrt{(x-4)(3x+2)}-\sqrt{(x-4)(2x+3)}-\sqrt{(x-4)(5x+1)}=0$$

$$\sqrt{x-4}\left(\sqrt{(3x+2)}-\sqrt{(2x+3)}-\sqrt{(5x+1)}\right)=0$$

$$x=4 \qquad \sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+3}-\sqrt{5x+1}=0$$

$$\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+3}\right)^2=\left(\sqrt{5x+1}\right)^2$$

$$3x+2-2\sqrt{3x+2}\sqrt{2x+3}+2x+3=5x+1$$

$$4=2\sqrt{(3x+2)(2x+3)} \qquad \rightarrow \qquad (2)^2=\left(\sqrt{(3x+2)(2x+3)}\right)^2$$

$$4=6x^2+13x+6$$

$$6x^2+13x+2=0$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{array} \qquad (x+2)(6x+1)=0 \qquad \rightarrow \qquad x=-2 \qquad x=-\frac{1}{6}$$

2.3.8. Ecuaciones recíprocas

Tiene la forma:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+a_1x+a_0=0$$

Donde los coeficientes se relacionan así:

$$a_n=a_0,\quad a_{n-1}=a_1,\quad a_{n-2}=a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ejercicios resueltos:

1. $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$

Dividimos los dos miembros para x^2 para reagrupando los extremos obtener un trinomio, así:

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})+3(x+\frac{1}{x})-16=0$$

Hacemos el cambio de variable: $x+\frac{1}{x}=z$, elevamos al cuadrado ambas partes

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=z^2$ y obtenemos $x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$, de donde obtenemos $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$

remplazamos en el trinomio:

$$2(z^2-2)+3z-16=0$$

$$2z^2+3z-20=0$$

$$\begin{matrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{matrix} \qquad (2z-5)(z+4)=0,$$

igualando cada factor a cero y regresando a la variable original, obtenemos:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0 \qquad \left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

$$2x^2-5x+2=0 \qquad x^2+4x+1=0$$

$$(2x-1)(x-2)=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad x=2 \qquad x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$$

2. $ax^4+bx^3+4x^2+bx+a=0$ Si $b=3a$ y una de sus raíces es i. Calcular las demás raíces

En primer lugar, evaluamos la raíz para i, este problema se transforma en una ecuación recíproca, agrupamos los extremos y dividimos para la variable del último término:

$$ax^4+3ax^3+4x^2+3ax+a=0$$

$$P(i)=a(i)^4+3a(i)^3+4(i)^2+3a(i)+a=a-3ai-4+3ai+a=0$$

$=2a - 4 =0 \quad \Longrightarrow \quad a=2$ Por lo que $b=6$

Reemplazando en la ecuación inicial:

$$2x^4+6x^3+4x^2+6x+2=0$$

$$x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0$$

Este tipo de ecuaciones se las conoce como recíprocas

$$(x^4+1)+3(x^3+x)+2x^2=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

$$z=x+\frac{1}{x} \qquad z^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

$z^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$. Reemplazando

$$z^2-2+3z+2=0$$

$$z^2+3z=0$$

$$z(z+3)=0$$

$$z=0 \qquad z+3=0$$

$x+\frac{1}{x}=0$ No tiene solución $\quad x+\frac{1}{x}+3=0 \qquad x^2+3x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

3. $4x^4+12x^3+x^2-6x+1=0$

$$\left(4x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(2x-\frac{1}{x}\right)+1=0$$

Hacemos el cambio de variable: $2x-\dfrac{1}{x}=z$, elevamos al cuadrado:

$2x-\frac{1}{x}=z$ y obtenemos: $4x^2-4+\frac{1}{x^2}=z^2 \quad 4x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+4$

Reemplazando nos da: $z^2+4+6z+1=0 \;\; z^2+6z+5=0$

Igualando a cero cada factor y regresando a la variable original:

$$2x+\frac{1}{x}+5=0 \qquad\qquad 2x+\frac{1}{x}+1=0$$

$$2x^2+5x+1=0 \qquad\qquad 2x^2+x+1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-8}}{4} \qquad\qquad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{4}$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4} \qquad\qquad x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{4}$$

Ejercicios propuestos:

a) $(x+3)(x-3)(2x+3)(2x-9)=-65$

b) $3x+a-\sqrt{x^2-4}=0$

c) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}$

d) $\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}+2=0$

e) $\sqrt{3x^2+4x+10}+\sqrt{3x^2-4x+10}=4x$

f) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}+\sqrt{x-3}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

g) $\sqrt{2x+\sqrt{2x}}-\sqrt{2x-\sqrt{2x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2x}{2x+\sqrt{2x}}}$

h) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

i) $\frac{5x-2}{6x^2-7x-3}-\frac{3x-2}{21x^2-2x-3}=\frac{x+3}{14x^2-27x+9}$

j) $\dfrac{\sqrt{8-x}}{3}=\dfrac{5-\sqrt{3-x}}{\sqrt{8-x}}$

k) $\sqrt{x^2-3b^4}+\sqrt{x^2-4a^4}=2a^2+b^2$

l) $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-22}=2$

m) $\dfrac{\left(b+\frac{c}{a}\right)x}{b-\frac{c}{a}}-\dfrac{b-\frac{c}{a}}{b+\frac{c}{a}}=\dfrac{\left(b-\frac{c}{a}\right)x}{b+\frac{c}{a}}-\dfrac{b+\frac{c}{a}}{b-\frac{c}{a}}$

n) $(3x+4)(x-4)(3x+7)(x-3)=260$

o) $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$

p) $\dfrac{x+5+\sqrt{x}\sqrt{10+x}}{x+5-\sqrt{x}\sqrt{10+x}}=\dfrac{27\left(\sqrt{10+x}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{10+x}+\sqrt{x}}$

q) $12x^6+8x^5-90x^4+8x^3+90x^2+8x-12=0$

r) $\dfrac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(x+2)(x+4)(x+5)}=\dfrac{x^2-11x+38}{x^2+11x+38}$

s) $4(x^6+1)-24(x^5+x)+57(x^4+x^2)-73x^3=0$

t) $3x^{\frac{3}{16}}=10x^{\frac{1}{16}}-3x^{-\frac{1}{16}}$

u) $4x^2+2\sqrt{4x^2-15x+12}=15x+12$

v) $\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{x-\sqrt{x^2+2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2+2}}{x+\sqrt{x^2+2}}+10=0$

w) $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$

x) $\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$

y) $4x^6-16x^5+21x^4-23x^3+21x^2-16x+4=0$

z) $(x-11)(x-9)(x-7)(x-3)=(x-4)(x-6)(x-8)(x-12)$

2.3.9. Ecuaciones cúbicas

La ecuación tiene la forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \;\; ; a, b, c, d \in C \qquad (1)$$

Para resolver hacemos un cambio de variable, poniendo $x = y + \alpha$, la idea es eliminar el término que tiene segundo grado, con lo que obtenemos que: $\alpha = -\frac{b}{3a}$.

Llegando a tener una ecuación de la forma: $y^3 + py + q = 0$ (2)

Esta ecuación le resolvemos poniendo, $y = u + v$ (3)

Determinamos u y v de tal forma que satisfaga la ecuación (2):

Calculamos y^3:

$$y^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = (u^3 + v^3) + 3uv(u+v)$$

pasamos todo a la izquierda:

$y^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$

$y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0$. Comparamos esta ecuación con la (2) y:

$p = -3uv$ y $q = -(u^3 + v^3)$ o

$uv = -\frac{p}{3}$ y $u^3 + v^3 = -q$

Elevamos al cubo el primer resultado: $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$, notamos que tienen relación con la suma y multiplicación de las raíces de la ecuación de segundo grado. Si recordamos que la ecuación de segundo grado tiene la forma:

$$x^2 - (p+s)x + ps = 0$$

En nuestro caso quedaría así:

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

Donde $x_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$ en nuestro caso las raíces son: u^3 y v^3, reemplazando:

$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ y $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \; v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

Estos resultados los reemplazamos en (3) y hemos resuelto la ecuación.

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (4)$$

Ejercicios resueltos:

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

Definimos $\alpha = -\frac{b}{3a} = \frac{2}{3}$, hacemos el cambio de variable $x = y + \frac{2}{3}$

$$\left(y + \frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y + \frac{2}{3}\right) + 1 = 0$$

$$y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} - 2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} + 3y + 2 + 1 = 0$$

$y^3 + \frac{5}{3}y + \frac{65}{27} = 0$, en donde $p = \frac{5}{3}$ y $q = \frac{65}{27}$, aplicamos la formula (4)

$$y = \sqrt[3]{-\frac{\frac{65}{27}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{65}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\frac{65}{27}}{2} - \sqrt{\frac{\left(\frac{65}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^3}{27}}} = -0.94234887$$

Ejercicios propuestos:

a) $x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0$

c) $2x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

d) $x^3 + 2x^2 + 3x - 3 = 0$

2.3.10. Sistemas de ecuaciones cuadráticas

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se llama de segundo grado si por lo menos una de las ecuaciones es de grado dos y la otra no más de segundo. Ejemplo:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0 \\ x - 3 + 4y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + xy - 5 = 0 \\ \quad x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$

Resolver un sistema de ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas significa encontrar todas las parejas de valores x y y que satisfacen el sistema. Ejemplo:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

De la segunda ecuación despejamos x y reemplazamos en la primera:

$x = 2 + y \qquad (2 + y)^2 + y^2 = 4 \qquad 4 + 4y + y^2 + y^2 = 4 \qquad 2y^2 + 4y = 0$

$2y(y + 2) = 0 \qquad y = 0 \qquad y = -2$

$x = 2 \qquad x = 0$

Entonces las parejas $(2,0)$ y $(0,-2)$ son las soluciones del sistema.

2. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy = 24 \\ 3y^2 + 2xy = 6 \end{cases}$

En la parte izquierda del sistema le sacamos factor común y dividimos las dos ecuaciones:

$\begin{cases} x(2x+3y)=24 \\ y(3y+2x)=6 \end{cases}$ $\quad \frac{x}{y}=4 \quad x=4y$ este resultado le reemplazamos en la primera ecuación del sistema:

$$2(4y)^2+3(4y)y=24$$

$$32y^2+12y^2=24 \qquad 44y^2=24 \qquad y=\pm\sqrt{\frac{6}{11}}$$

$$x=4\sqrt{\frac{6}{11}} \qquad x=-4\sqrt{\frac{6}{11}}$$

La solución es la pareja $\left(4\sqrt{\frac{6}{11}},\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$ y $\left(-4\sqrt{\frac{6}{11}},-\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{cases}$

A la segunda ecuación le multiplicamos por 2 y le sumamos a la primera ecuación

$$x^2+2xy+y^2=4 \qquad (x+y)^2=4 \qquad x+y=\pm 2$$

Con lo que obtenemos dos sistemas: $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases}$

Despejamos x de la primera y reemplazamos en la segunda:

$x=2-y \qquad (2-y)y=1 \qquad\qquad x=-2-y \qquad (-2-y)y=1$

$y^2-2y+1=0 \qquad\qquad y^2+2y+1=0$

$(y-1)^2=0 \qquad\qquad (y+1)^2=0$

$y=1$ y $x=1 \qquad\qquad y=-1$ y $x=-1$

Las soluciones del sistema son: $(1,1)$ y $(-1,-1)$

4. $\begin{cases} x^2+4xy-12y^2=0 \\ \quad xy+y^2=12 \end{cases}$

Dividimos la primera ecuación para y^2 y formamos dos sistemas con la segunda ecuación:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\frac{x}{y}-12=0 \qquad \left(\frac{x}{y}+6\right)\left(\frac{x}{y}-2\right)=0$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=-6 \\ xy+y^2=12 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \frac{x}{y}=2 \\ xy+y^2=12 \end{cases}$$

El primer sistema no tiene solución $\qquad x=2y \qquad 2(y)y+y^2=12 \;\rightarrow\; y=\pm 2$

Las soluciones son: (4,2) y (-4,-2)

5. $\begin{cases} 3x^2-4xy+2y^2=4 \\ 2x^2-xy-3y^2=2 \end{cases}$

Hacemos un cambio de variable $y=tx$ y le dividimos las dos ecuaciones

$$3x^2 - 5tx^2 - 2t^2x^2 = 4 \qquad 2x^2 - tx^2 - 3t^2x^2 = 2$$

$$x^2(3 - 5t - 2t^2) = 4 \qquad x^2(2 - t - 3t^2) = 2$$

Dividimos la primera para la segunda: $\dfrac{3 - 5t - 2t^2}{2 - t - 3t^2} = 2 \quad 3 - 5t - 2t^2 = 4 - 2t - 6t^2$

$4t^2 - 3t - 1 = 0 \qquad (4t + 1)(t - 1) = 0 \qquad t = -\frac{1}{4} \qquad t = 1$

Formamos dos sistemas más simples:

$$\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 2y^2 = 4 \\ y = -\frac{x}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 5xy - 2y^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$$

$$3x^2 - 5x\left(-\frac{x}{4}\right) - 2\left(-\frac{x}{4}\right)^2 = 4 \qquad 3x^2 - 5x(x) - 2x^2 = 4$$

$$3x^2 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{x^2}{8} = 4 \qquad 3x^2 - 5x^2 - 2x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{32}{33} \qquad x^2 = -1$$

$$x = \pm 4\sqrt{\frac{2}{33}} \qquad x = \pm i$$

Las soluciones reales son: $\left(4\sqrt{\frac{2}{33}}, -\sqrt{\frac{2}{33}}\right)$ y $\left(-4\sqrt{\frac{2}{33}}, \sqrt{\frac{2}{33}}\right)$

Ejercicios propuestos:

a) $\begin{cases} x = 4y + 6 \\ x^2 - xy + 3y^2 + y - x - 6 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x = 3 \\ xy = 30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ xy = 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 25 \\ x^4 - 374y^2 = 220 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^3 - y^3 = 28 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x^4 + x^3y + xy^3 + y^4 = 325 \end{cases}$

2.4. Axiomas de orden

Los números reales están ordenados de menor, a mayor, lo que nos permite saber cuándo un número es más grande o pequeño que otro. Si tomamos tan solo los positivos vamos a definir los conceptos de **mayor qué** y **menor que**. El subconjunto $\mathbb{R}^+$ se denomina conjunto de los números reales positivos y satisface los siguientes axiomas.

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \; x + y \in \mathbb{R}^+ \;$ y $\; x.y \in \mathbb{R}^+$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, \; a \neq 0 \rightarrow a \in \mathbb{R}^+ \; \underline{\vee} \; (-a) \in \mathbb{R}^+$

iii. $0 \notin \mathbb{R}^+$

Estos axiomas nos permitirán desarrollar las propiedades relativas al orden en los números reales.

Teorema 1.

$$x \in \mathbb{R}^+ \to (-x) \notin \mathbb{R}^+$$

Demostración:

Asumimos que $(-x) \in \mathbb{R}^+$ entonces:

$x \in \mathbb{R}^+ \wedge -x \in \mathbb{R}^+ \to [x + (-x)] \in \mathbb{R}^+$.

$\to 0 \in \mathbb{R}^+$. Lo cual es un absurdo.

Definición:

Un número real x se dice negativo si $(-x)$ es positivo.

$$\mathbb{R}^- = \{ x \in \mathbb{R} / (-x) \in \mathbb{R}^+ \} = \{(-x) \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}^+\}$$

Nota: El cero no es positivo ni negativo.

2.4.1. Notaciones

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ y $a \leq b$, diremos que a es menor que b y a es menor o igual que b. Siendo $a < b$, por lo que $b - a > 0$ por lo tanto $b - a \in \mathbb{R}^+$.
2. Si $a, b \in \mathbb{R}$ $a > b$ y $a \geq b$, diremos que a es mayor que b y a es mayor o igual que b. Siendo $a > b$, por lo que $a - b > 0$ por lo tanto $a - b \in \mathbb{R}^+$

De lo anterior podemos obtener las siguientes equivalencias:

i) $x \in \mathbb{R}^+ \leftrightarrow x > 0$.

ii) $-x \in \mathbb{R}^+ \leftrightarrow x < 0$.

iii) $x > y \leftrightarrow x - y > 0$.

iv) $x \geq y \leftrightarrow x - y \geq 0$.

v) $x > y \leftrightarrow y < x$.

vi) $x \geq y \leftrightarrow y \leq x$.

2.4.2. Propiedades

Teorema 2. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces, se cumple una de las siguientes relaciones:

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces:
Se cumple una de las siguientes relaciones:

a) $a < b$; $a = b$ y $a > b$. (Ley de tricotomía).

b) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (Ley Transitiva)

c) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

d) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

e) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a\,c > b\,c$

f) $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a.b > 0$

g) $a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a.b < 0$

h) $\forall\, a \in \mathbb{R}: a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

i) $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

j) $a < b \Rightarrow (-a) > (-b)$

k) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

l) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$

m) $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow 0 < a\,c < b\,d$

n) $a < b < 0$ y $c < d < 0 \Rightarrow a\,c > b\,d > 0$

Demostración:

a) **P.D. :** $a < b\,;\ a = b\,;\ a > b$

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a = b \veebar a \neq b.$

i) Si $a = b \Rightarrow a - b = 0 \wedge b - a = 0.$

$\Rightarrow a - b \notin \mathbb{R}^+ \wedge b - a \notin \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow a < b \wedge b < a$

Lo que significa que: $a = b$.

ii) Si $a \neq b \Rightarrow a - b \neq 0.$

$\Rightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+ \veebar -(a - b) \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+ \veebar (b - a) \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow a > b \veebar a < b$

b) **P.D. :** $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Si : $a < b \wedge b < c \Rightarrow b - a > 0 \wedge c - b > 0.$

$\Rightarrow (b - a) + (c - b) > 0.$

$\Rightarrow c - a > 0.$

$\Rightarrow a < c$ **l.q.q.d**

c) Se deja como ejercicio.

d) **P.D.:** $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < b\,c$

Si: $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow b - a > 0 \wedge c > 0.$

$\Rightarrow (b - a)\,c > 0.$

$\Rightarrow b\,c - a\,c > 0$

$\Rightarrow b\,c > a\,c$ o $a\,c < b\,c$ **l.q.q.d.**

e) **P.D.:** $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > b\,c$

Si: $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow (b - a) > 0 \wedge -c > 0.$

$\Rightarrow (b - a)(-c) > 0.$

$\Rightarrow -b\,c + a\,c > 0$

$\Rightarrow a\,c > bc$ **l.q.q.d.**

f) **P.D.** : $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow ab > 0$

Si: $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow -a > 0 \wedge -b > 0$

$\Rightarrow (-a)\ (-b) > 0 \quad \Rightarrow ab > 0$ **l.q.q.d.**

g) Queda como ejercicio.

h) **P.D.:** $\forall a \in \mathbb{R} : a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Si: $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \Rightarrow a > 0$ ó $a < 0$

i) Si $a > 0 \Rightarrow a.a > 0$

$\Rightarrow a^2 > 0$

ii) Si $a < 0 \Rightarrow (-a) > 0$

$\Rightarrow (-a)(-a) > 0$

$\Rightarrow a^2 > 0$

Queda como ejercicio la demostración del resto de propiedades.

2.5. Axioma de completez

Todo conjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{R}$ y acotado superiormente posee extremo superior, esto es, existe un número real b tal que $b = Sup\, S$.

Cabe recalcar que el extremo superior de S no pertenece necesariamente a S. En realidad $SupS$ pertenece a S sí y solo sí posee un máximo, en cuyo caso

$$\text{máx}\, S = \text{Sup}\, S.$$

Teorema. Todo conjunto no vacío S de números acotado inferiormente tiene extremo inferior; esto es, existe un número real a tal que $a = \inf S$.

Demostración. Sea $-S$ un conjunto de los números opuestos de los de S. Entonces $-S$ es no vacío y acotado superiormente, el axioma anterior nos dice que existe un número b que es extremo superior de $-S$. Es fácil ver que $-b = Inf\ S$.

2.5.1. Conjuntos acotados

Sea S un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y supongamos que existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in S$, $x \leq \beta$. Entonces se dice que S está acotado superiormente por β y se llama *cota superior*. Pueden existir otros valores de $\mathbb{R}$ mayores que β, que sean cota superior. Pero β será el elemento máximo de S.

$$\beta = \text{máx}\, S.$$

Un conjunto sin cota superior, se dice que no es acotado superiormente.

Ejemplos:

1. Sea S el conjunto de todos los números Naturales. Este no es acotado superiormente, por lo tanto, no tiene cota superior ni elemento máximo.

2. Sea $S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 10\}$ Este conjunto esta acotado superiormente por el número 10 y su elemento máximo es 10.

3. Sea $S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 10\}$

Este conjunto tiene por cota superior al 10 pero no tiene elemento máximo.

Observaciones:

1. En forma semejante se definen los conjuntos acotados inferiormente. Sea S un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$; S es acotado inferiormente sí $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in S\ x \geq \alpha$.
2. Un conjunto S que es acotado superior e inferiormente se dice CONJUNTO ACOTADO. Los ejemplos 2 y 3 son conjuntos acotados.
3. Sea $S = \{y \in \mathbb{R} / -3 \leq y \leq 4\}$ .Es un conjunto acotado superior e inferiormente y cualquier valor $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \geq 4$ es una cota superior de S y todo valor $y \leq -3$ es una cota inferior de S.

2.5.2. Extremo superior e inferior

Definición. Sea S un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$, un número $\beta \in \mathbb{R}$ se llama extremo superior si cumple:

i. β es cota superior de S.

ii. Si C es cota superior de S entonces: $C \geq \beta$.

Vamos a representar al extremo superior de un conjunto S como Sup S. Podemos notar que si $\beta = \text{máx } S$, $\boldsymbol{\beta}$ es él extremo superior de **S**, pero él reciproco, en general no es cierto.

Observación. De manera similar se define el extremo inferior de S, esto es $\boldsymbol{\beta \in R}$ se llama extremo inferior de S sí:

i. $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{S},\ \beta \leq \mathbf{x}$.

ii. Si C es cota inferior de S, $\boldsymbol{C \leq b}$.

Al extremo inferior de S, lo notaremos como Inf S.

Ejercicios resueltos:

1. Sea $S = \{x \in \mathbb{R} / \ 0 \leq x \leq 6\}$

$$\text{Sup}S = 6 = \text{máx } S.$$

$$\text{Inf } S = 0 = \min S.$$

2. $A = \{x \in \mathbb{R} / \ x > 0\}$

$\text{Inf } A = 0$ no tiene mínimo y tampoco extremo inferior.

Teorema 1. Sea S un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$, dos números distintos no pueden ser extremos superiores.

Demostración:

Sean b y a dos extremos superiores para un conjunto S y $a \neq b$.

Como $a \neq b$ se presentan dos posibilidades $a < b$ ó $a > b$.

$i)$ $a < b$, es una condición ya que: $\beta =$ SupS y a no puede ser cota superior de S.

$ii)$ $a > b$, también obtenemos una contradicción $a = SupS$ y b no puede ser cota superior de S.

Consecuentemente no es posible que $a \neq b$, por lo tanto $a = b$, lo que significa que el $SupS$ es único.

2.5.3. Intervalos

Los intervalos van a estar relacionados con la recta numérica, es decir son $a\ y\ b \in \mathbb{R}$. Vamos a analizar dos tipos de relación: $<$ ó $\leq$ serán los números comprendidos entre a y $b \in \mathbb{R}$, $>$ ó $\geq$, es un conjunto de los números menores e iguales a $a \in \mathbb{R}$ y mayores e iguales a y $b \in \mathbb{R}$.

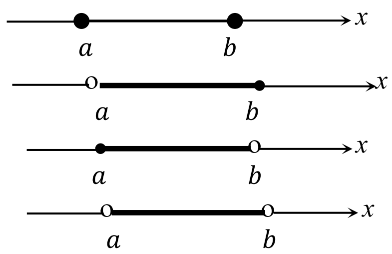
Los primeros serán los **<u>Intervalos Finitos</u>**:

Intervalo Cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Intervalo Semiabierto: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

Intervalo Abierto: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$



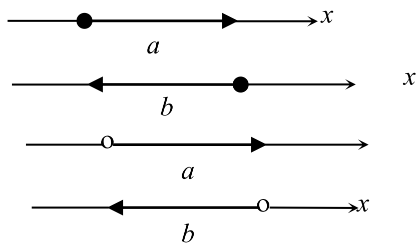
<u>Intervalos Infinitos:</u> (no acotados)

Intervalo Semiabierto: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$

Intervalo Abierto: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$



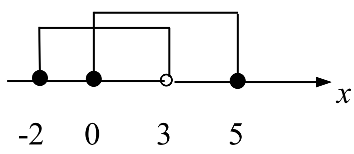
Ejercicios resueltos:

Sea $A = [-2, 3[$ y $B = [0, 5]$. Calcular: i) $A \cup B$, ii) $A \cap B$, iii) $(A - B)'$

i) $A \cup B = [-2, 5]$

ii) $A \cap B = [0, 3[$

iii) $(A - B)' = [-2, 0[' =]0, 5]$



Ejercicios propuestos: Dado $A = [-3,2], B = [-3,5], C = [-2,4[$, calcular:

a) $A \cup B$ b) $B - A$ c) $B - C$ d) $(B \cap C) - A$ e) $(A \cup C) \cap B$

2.6. Inecuaciones

Al analizar el resultado de una inecuación, lo podemos relacionar con el grafico de una función $y = f(x)$ si esta es $f(x) > 0$ *o* $f(x) < 0$.

2.6.1. Inecuaciones de primer grado

La variable dependiente como la independiente son de grado uno o de exponente uno y que siempre su solución lleva a realizar la gráfica de una recta y pintar una de las regiones. Por ejemplo, si tenemos la función $y = x + 3$, luego que le graficamos, podemos notar que de $]-\infty, -3]$ la función es negativa y de $[-3, +\infty[$ es positiva, esto nos lleva a pensar que todo binomio de primer grado tiene dos signos, un positivo y un negativo.

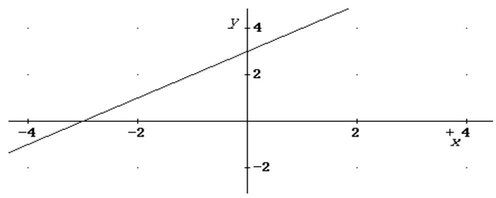


Figura 2.2: Representación gráfica función y = x + 3.

Ejemplos:

1. 4

x - 4	-	+

2. 3

3 - x	+	-

Resolver una inecuación significa encontrar su *conjunto solución,* por ejemplo: Resolver la inecuación $ax + b \geq 0$.

$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow (ax + b) - b \geq -b$$

$$ax + (b - b) \geq -b$$

$$ax \geq -b$$

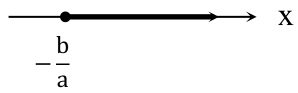
Si $a \neq 0$, entonces $a < 0$ o $a > 0$.

i) Si $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

$ax \geq -b \Rightarrow a^{-1}(ax) \geq a^{-1}(-b)$

$$x \geq -ba^{-1} \rightarrow x \geq -\frac{b}{a}$$

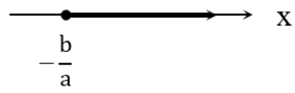
La solución sería: $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -\frac{b}{a}\}$

Gráficamente: 

ii) Si $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

$$ax \geq -b \Longrightarrow a^{-1}\,(ax) \leq a^{-1}(-b)$$

$$x \leq -b\,a^{-1} \quad \rightarrow \quad x \leq -\frac{b}{a}$$

El conjunto solución es: $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -\frac{b}{a}\}$ 

Ejercicios resueltos:

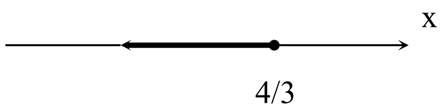
1. Resolver: $3x - 4 < 0$

$$(3x - 4) + 4 < 0 + 4$$

$$3x < 4$$

$$3^{-1}\,(3x) \leq 3^{-1}4$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

Sol. $= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < \frac{4}{3}\}$ 

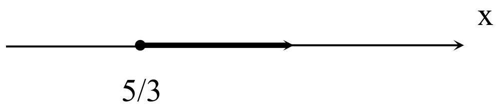
2. Resolver: $5 - 3x \leq 0$

$$-5 + (5 - 3x) \leq 0 - 5$$

$$-3x \leq -5$$

$$(-3)^{-1}\,(-3x) \geq (-3)^{-1}\,(-5)$$

$$x \geq \frac{5}{3}$$

Sol. $= \{x \in \mathbf{R} \,/\, x \geq \frac{5}{3}\}$ 

Observaciones:

i. Podemos cambiar un término al otro lado de la inecuación y este cambia de signo.

ii. Si multiplicamos o dividimos la inecuación por un número negativo, la desigualdad cambia de orden.

iii. Se pueden resolver los ejercicios anteriores con el análisis del binomio.

3. Resolver: $3x - 4 \leq 0$

$$3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

	4/3	
$3x - 4$	-	+

Sol. $= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq \frac{4}{3}\}$

Para resolver la inecuación primeramente igualamos a cero al binomio, tomamos un valor antes y después de este resultado y calculamos el signo del binomio.

4. Resolver:

$$\frac{4x+3}{5}-\frac{5x+4}{3}\geq\frac{3x-2}{15}+\frac{5-6x}{5}$$

$$\frac{12x-9-25x-20}{15}\geq\frac{3x-2+15-18x}{15}$$

$$-13x-29\ \geq\ 13-15x$$

$$-13x\ +15x-13-29\ \geq\ 0$$

$$2x-42\ \geq\ 0$$

$$x-21\ \geq\ 0$$

$$x-21\ =\ 0$$

$$x\ =\ 21$$

	21	
$x-21$	-	+

Sol.: $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \geq 21\}$

5. Resolver: $\frac{1}{3-x} > 0$

$$3-x\ =\ 0$$

$$x = 3$$

Sol: $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x\ <\ 3\}$

	3	
$3-x$	+	-

6. Resolver: $\dfrac{(3-2x)(4+x)}{5-x} \geq 0$

Igualamos cada binomio a cero y realizamos la tabla, considerando los valores de menor a mayor, tanto en la recta numérica, como para los binomios.

$3-2x=0\ \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ $\qquad 4+x=0\ \Rightarrow x=-4$ $\qquad 5-x=0 \Rightarrow x=5$

	-4	3/2	5	
$4+x$	-	+	+	+
$3-2x$	+	+	+	-
$5-x$	+	+		-
$\dfrac{(3-2x)(4+x)}{5-x}$	-	+	-	+

En la última fila de la tabla, calculamos el resultado haciendo una multiplicación de signos e incluimos los valores que hacen cero el numerador.

Sol: $\{x\ \in \mathbb{R}\ /\ -4\ \leq\ x\ \leq 3/2\ \vee\ x\ >\ 5\}$

7. Resolver: $\frac{3x-1}{2-x} - \frac{3-4x}{x+2} \leq 1$

Para resolver este tipo de inecuaciones pasamos todos los términos a la izquierda y procedemos algebraicamente a transformar la parte izquierda de tal manera que nos queden binomios de primer grado:

$$\frac{3x-1}{2-x} - \frac{3-4x}{x+2} - 1 \leq 0 \;\rightarrow\; \frac{(3x-1)(x+2)-(3-4x)(2-x)-(2-x)(x+2)}{(2-x)(x+2)} \leq 0$$

$$\frac{3x^2+6x-x-2-(6-3x-8x+4x^2)-4+x^2}{(2-x)(x+2)} \leq 0 \;\rightarrow\; \frac{16x-12}{(2-x)(x+2)} \leq 0$$

Igualamos a cero cada factor:

$16x-12=0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ $\qquad 2-x=0 \Rightarrow x=2$ $\qquad x+2=0 \Rightarrow x=-2$

Y procedemos a realizar la tabla:

	-2	3/4	2	
$x+2$	-	+	+	+
$16x-12$	-	-	+	+
$16x-12$	+	+	+	-
$\frac{16x-12}{(2-x)(x+2)}$	+	-	+	-

Sol: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x \leq 3/4 \;\vee\; x \geq 2\}$

8. Resolver: $\frac{(4-3x)^3(2+x)^4}{(2-x)(3+x)^5} \geq 0$

Cuando un elemento está elevado a una potencia par, siempre será positivo, por lo que no es considerado en la tabla.

$4-3x=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$ $\qquad 2-x=0 \Rightarrow x=2$ $\qquad 3+x=0 \Rightarrow x=-3$

	-3	4/3	2	
$3+x$	-	+	+	+
$4-3x$	+	+	-	-
$5-x$	+	+	+	-
$\frac{(4-3x)^3(2+x)^4}{(2-x)(3+x)^5}$	-	+	-	+

9. Resolver el siguiente sistema $\begin{cases} 4 \geq \dfrac{x+3}{2-x} \\ \dfrac{3x-4}{x-3} + 1 \leq \dfrac{4x+3}{2+x} \\ x^2 - 2x - 15 > 0 \end{cases}$

Procedemos a resolver cada inecuación y la solución del sistema es la intersección de las soluciones parciales.

a) $\frac{x+3}{2-x} \leq 4$

$$\frac{x+3}{2-x} - 4 \leq 0$$

$$\frac{x+3-8+4x}{2-x} \leq 0$$

$$\frac{5x-5}{2-x} \leq 0$$

	1	2	
$5x-5$	-	+	+
$2-x$	+	+	-
$\frac{5x-5}{2-x}$	-	+	-

Sa: $\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 1 \lor x > 2\}$

b) $\dfrac{3x+4}{x-3} + 1 \leq \dfrac{4x+3}{2+x}$

$$\frac{3x+4}{x-3} + 1 - \frac{4x+3}{2+x} \leq 0 \rightarrow \frac{(3x+4)(2+x)+(x-3)(2+x)-(4x+3)(x-3)}{(x-3)(2+x)} \leq 0$$

$$\frac{3x^2+10x+8+x^2-x-6-(4x^2-9x-9)}{(x-3)(2+x)} \leq 0$$

$$\frac{4x^2+9x+2-4x^2+9x+9}{(x-3)(2+x)} \leq 0 \rightarrow \frac{18x+11}{(x-3)(2+x)} \leq 0$$

Igualamos a cero cada binomio:

Sb $= \{x \in \mathbb{R}/x < -2 \lor \leq x < 3\}$

$x = -11/18 \quad x = 3 \quad x = -2$ y realizamos la tabla

	-2	$-11/18$	3	
$2+x$	-	+	+	+
$18x+11$	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$\frac{18x+11}{(x-3)(2+x)}$	-	+	-	+

c) $x^2 - 2x - 15 < 0$

$(x - 5)(x + 3) < 0$

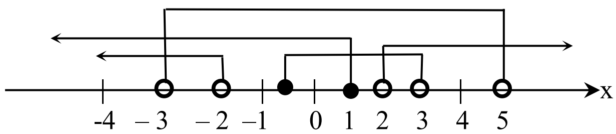
$x - 5 = 0 \quad x + 3 = 0$

$x = 5 \quad x = -3$

	-3		5
$x + 3$	-	+	+
$x - 5$	+	-	+
$(x - 5)(x + 3)$	+	-	+

Sc: $\{ x \in \mathbb{R} / -3 < x < 5\}$

Solución General: Sa $\cap$ Sb $\cap$ Sc.



Sol: $\{x \in \mathbb{R} / -3 < x < -2 \vee -\frac{11}{18} \leq x < 1 \vee 2 < x < 3\}$

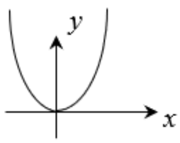
2.6.2. Inecuaciones cuadráticas

Para tratar estas inecuaciones vamos a recordar como sé grafica una ecuación cuadrática.

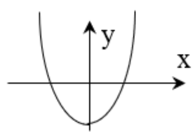
Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, $y = ax^2 + bx + c$

i) Si $a > 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$

No tiene raíces reales su gráfico es:

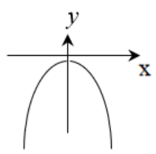


Si tiene raíces reales:

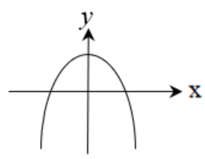


ii) Si $a < 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$

No tiene raíces reales su gráfico es:



Si tiene raíces reales:



Cuando trabajamos con inecuaciones lo que necesitamos saber es, el signo del gráfico, si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales es positivo o es negativo dependiendo del signo de a.

Si tiene raíces reales y $a > 0$ siempre el resultado de la inecuación es $+, -, +$; pero si $a < 0$ el resultado es $-, +, -$

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

1. $3x^2 + 5x + 2 \geq 0$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}$$

	-1	-2/3	
$3x^2 + 5x + 2$	+	-	+

$(x + 1)(3x + 2) = 0$

Las raíces son: $x = -1$; $x = -\frac{2}{3}$

Sol:$\{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \vee x \geq -\frac{2}{3}\}$

2. $5 - 4x - x^2 > 0.$

$5 - 4x - x^2 = 0$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x + 5)(x - 1)\ 0$

$x = -5 \quad x = 1$

Sol : $\{ x \in \mathbb{R} / -5 < x < 1\}$

	-5	1	
$5 - 4x - x^2$	-	+	-

3. $\dfrac{5x^2 - 4x - 1}{4x^2 + 12x - 7} < 0$

$5x^2 - 4x - 1 = 0$

$$\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{array}$$

$(x - 1)(5x + 1) = 0$

$4x^2 + 12x - 7 = 0$

$$\begin{array}{cc} 2 & 7 \\ 2 & -1 \end{array}$$

$(2x + 7)(2x - 1) = 0$

	-7/2	-1/5	½	1	
$5x^2 - 4x - 1$	+	+	-	-	+
$4x^2 + 12x - 7$	+	-	-	+	+
$\dfrac{5x^2 - 4x - 1}{4x^2 + 12x - 7}$	+	-	+	-	+

Sol $= \{ x \in \mathbb{R} / -\frac{7}{2} < x < -\frac{1}{5} \vee \frac{1}{2} < x < 1 \}$

Ejercicios propuestos:

a) $3 + \dfrac{1}{x} < 4 + x$

b) $x^4 - 9x^2 - 16x + 4x^3 + 20 > 0$

c) $\dfrac{3}{2x - 4} \geq \dfrac{5}{3 - 4x}$

d) $\dfrac{2x + 5}{x^2 - 4x + 3} - \dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} < \dfrac{x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

e) $\dfrac{3}{x - 4} \leq 1$

f) $\dfrac{(2x - 1)^3}{4} - \dfrac{x(2x + 1)^2}{2} + \dfrac{(x + 3)^2 + 1}{4} < 0$

g) $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 3x} \leq 0$

h) $\dfrac{(3x + 2)(2 - 5x)(3 + x)}{(2 - 3x)(1 + 2x)} \geq 0$

i) $\dfrac{x^3+4x^2-11x-30}{x^3-4x^2-11x+30} \geq 0$

j) $\dfrac{3-x^2}{x^2-4} + \dfrac{5+x}{x-2} \leq \dfrac{3-2x}{x+2}$

k) $\dfrac{2-4x}{x+3} \leq \dfrac{3-4x}{x-5}$

l) $\dfrac{5-2x}{x^2-9} \leq \dfrac{4-x}{x^2+x-6} \leq \dfrac{x+2}{2x^2+3x-9}$

m) $\dfrac{8}{x^2+6} + \dfrac{12-x^2}{x^2-6} < 1$

n) $\dfrac{5-2x}{2x-3} - \dfrac{3-4x}{2x+3} \leq \dfrac{3x^2-5x-14}{9-4x^2}$

o) $\dfrac{3x^2+1}{x^2-2} - \dfrac{x^2+2}{x^2-1} > \dfrac{3}{2}$

p) $\dfrac{4x-3}{x^2+x-6} \leq \dfrac{3-x}{2x^2+3x-9} \leq \dfrac{x+3}{2x^2+x-6}$

q) $\dfrac{3x^2+18}{4-9x^2} + \dfrac{5x-2}{3x-2} \leq \dfrac{5x+1}{3x+2}$

r) $\dfrac{2x+1}{4-9x^2} \geq \dfrac{3-2x}{3x^2+7x-6} \geq \dfrac{2x+3}{9-x^2}$

s) $\dfrac{3x+1}{x-2} - \dfrac{x+2}{x-1} \leq \dfrac{3}{2}$

2.7. Valor Absoluto

Definición. Sea $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto se denota por $|x|$ y esta definido así:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{Si } \ x \geq 0 \\ -x, & \text{Si } \ x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$|5| = 5$$

$$|-5| = -(-5) = 5$$

$$|-11{,}1| = -(-11{,}1) = 11{,}1$$

Observación. El valor absoluto siempre nos da un valor no negativo.

2.7.1. Propiedades del valor absoluto

Sea $x, y \in \mathbb{R}$

i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $|x| = |-x|$

iii) $|x\ y| = |x|\,|y|$

iv) Si $y \neq 0 \Longrightarrow \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

v) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular).

Demostración:

i) $\Longrightarrow$ Supongamos que: $x \neq 0$.

Entonces $|x| > 0$ lo cual contradice la hipótesis de que $x = 0$ consecuentemente si

$|x| = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longleftarrow$ Si $x = 0$ es inmediato que $|x| = 0$.

$\Longleftarrow$ Sí $x = 0$ es inmediato que $|x| = 0$.

Con lo que queda demostrado

ii) Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$, pero $-x \leq 0$ se sigue que:

$$|-x| = -(-x) = x, \text{ entonces } |x| = |-x|$$

Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ y como $-x > 0$ se tiene que:

$|-x| = -x$, es decir que: $|x| = |-x|$

Esto significa, que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$

iii) Para demostrar que: $|x\,y| = |x|\,|y|$ vamos a considerar:

a) Si $x > 0$ y $y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Por lo tanto: $|x\,y| = x\,y = |x|\,|y|$

b) Si $x \geq 0$ y $y \leq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

Luego: $|x\,y| = -x\,y = x\,(-y) = |x|\,|y|$

c) Si $x \leq 0$ y $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

Luego: $|x\,y| = -x\,y = (-x)\,(y) = |x|\,|y|$

d) Si $x \leq 0$ y $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Luego: $|x\,y| = x\,y = x\,y = |x|\,|y|$

De los resultados de a, b, c y d se concluye que $|x\,y| = |x|\,|y|$

iv) Queda como ejercicio.

v) Lo demostraremos más adelante.

Observación:

i) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \; -|\mathbf{x}| \leq \mathbf{x} \leq |\mathbf{x}|$

ii) **Si $|\mathbf{x}| = \mathbf{x}$, tenemos que: $-\mathbf{x} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}$**

iii) **Y si $|\mathbf{x}| = -\mathbf{x}$, resulta que: $-(-\mathbf{x}) \leq \mathbf{x} \leq -\mathbf{x}$.**

Teorema 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

Demostraciones:

1. $\Rightarrow$ Por probar que: $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

i) Si $x \geq 0$ entonces: $|x| = x \leq a$, por lo que $-a < 0$, se sigue que:

$$-a \leq x \leq a.$$

ii) Si $x < 0$ entonces: $|x| = -x \leq a$, de donde: $x \geq -a$, y como $a > 0$ se sigue que:

$$-a \leq x \leq a.$$

De i, ii) concluimos que $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$.

2. $\Leftarrow$Por demostrar que: $-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a$.

i) Si $-a \leq x \leq 0$ entonces $|x| = -x \leq a$, es decir que: $|x| \leq a$.

ii) Si $0 \leq x \leq a$ entonces $|x| = x \leq a$, es decir que: $|x| \leq a$.

De 1 y 2 se concluye que $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$.

Vamos a demostrar v) la desigualdad Triangular. De la observación última tenemos que:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

Sumando miembro a miembro:

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$
$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Teorema 2.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$:
i) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq a$ ó $x \geq a$.
ii) $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ó $x = -a$.
iii) $\sqrt{x^2} = |x|$
iv) $|x|^2 = x^2$
v) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

i) **P.D.:** $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ó $x \geq a$.

1. $\Rightarrow$ **P.D.:** $|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ ó $x \geq a$. 2. $\Leftarrow$**P.D.:** $x \leq -a$ ó $x \geq a \Rightarrow |x| \geq a$.

Si $x > 0 \Rightarrow |x| = x \geq a$. Si $x \leq -a$ se tiene que $x \leq -a < 0$ entonces $a > 0$.

Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \geq a$. Por lo tanto: $|x| = -x \geq a$.

$\Rightarrow x \leq -a$.

Entonces: $|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ ó $x \geq a$.

De 1 y 2 hemos probado que: $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ó $x \geq a$.

ii) Se deja como ejercicio.

iii) **P.D.** : $\sqrt{x^2} = |x|$

Si $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x = |x|$

Si $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ y $x^2 = (-x)^2$

Luego $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|$

Esto significa que: $\sqrt{x^2} = |x|$

iv) Se deja como ejercicio.

v) **P.D.**: $||x| - |y|| \leq |x - y|$

1) $|x| = |x - y + y| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$

De aquí que $|x| - |y| \leq |x - y|$

2) $|y| = |y - x + x| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|$

Se sigue que: $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$

Cambiando de signo: $|x| - |y| \geq -|x - y|$

De 1 y 2) se sigue que: $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$

Aplicando el teorema anterior $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Ejercicios resueltos:

1. $|x - 4| \leq 5$

$$-5 \leq x - 4 \leq 5$$
$$-5 + 4 \leq x - 4 + 4 \leq 5 + 4$$
$$-5 \leq x \leq 9$$

2. $|3 - 3x| = 4$

$$3 - 3x = 4 \quad \text{o} \quad 3 - 3x = -4$$
$$-3x = 1 \quad \text{o} \quad -3x = -7$$
$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{7}{3}$$

3. $|5 - 2x| \geq 2$

$$5 - 2x \geq 2 \quad \text{o} \quad 5 - 2x \leq -2$$
$$-2x \geq 2 - 5 \quad \text{o} \quad -2x < -2 - 5$$
$$x \leq \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{7}{2}$$

4. $\sqrt{(3x - 5)^2} \leq 5$

$$|3x - 5| \leq 5$$
$$-5 \leq 3x - 5 \leq 5$$
$$-5 + 5 \leq 3x - 4 + 4 \leq 5 + 5$$
$$0 \leq 3x \leq 10$$
$$0 \leq x \leq \frac{10}{3}$$

5. $\left|\frac{3 - x}{5 + x}\right| < 3$

$$-3 < \frac{3 - x}{5 + x} < 3$$

Este ejercicio se descompone en dos partes así:

1) $-3 < \frac{3 - x}{5 + x}$ 2) $\frac{3 - x}{5 + x} < 3$

$$\frac{3-x}{5+x}+3>0 \qquad\qquad \frac{3-x}{5+x}-3<0$$

$$\frac{3-x+3(5+x)}{5+x}>0 \qquad\qquad \frac{3-x-3(5+x)}{5+x}<0$$

$$\frac{3-x+15+3x}{5+x}>0 \qquad\qquad \frac{3-x-15-3x}{5+x}<0$$

$$\frac{18+2x}{5+x}>0 \qquad\qquad \frac{-12-4x}{5+x}<0$$

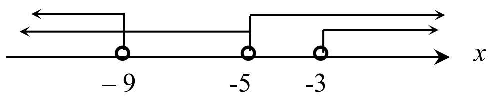
$$18+2x=0 \quad 5+x=0 \qquad\qquad -12-4x=0 \quad 5+x=0$$

$$x=-9 \quad x=-5 \qquad\qquad x=-3 \quad x=-5$$

	-9	-5	
$18+2x$	-	+	+
$5+x$	-	-	+
$\frac{18+2x}{5+x}$	+	-	+

	-5	-3	
$5+x$	-	+	+
$-12-4x$	+	+	-
$\frac{-12-4x}{5+x}$	-	+	-

$S1 = \{x \in \mathbb{R}/x<-9 \ \vee \ x>-5\}$ $\quad$ $S2 = \{x \in \mathbb{R}/\ x<-5 \ \vee \ x>-3\}$



Sol = $S1 \cap S2$

Sol: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -9 \ \vee \ x > -3\}$

6. $|3-x| - 4|2+x| \leq 3$

Para resolver este problema se necesita hacer un análisis de los signos de los binomios que tienen valor absoluto, ya que por definición el valor absoluto tiene dos signos; por lo tanto, hacemos una tabla para identificar los signos de estos binomios.

	-2	3	
$2+x$	-	+	+
$3-x$	+	+	-
	R_1	R_2	R_3

Nos queda por resolver tres regiones, y en vez del valor absoluto, colocamos los signos de cada región, así:

R₁: $]-\infty, -2[$

$+(3-x) - 4[-(2+x)] \leq 3$

$3 - x + 8 + 4x \leq 3$

$11 + 3x \leq 3$

$3x \leq -8 \Rightarrow x \leq \frac{8}{3}$

R₂: $[-2, 3]$

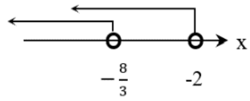
$+(3 - x) - 4[+(2+x)] \leq 3$

$3 - x - 8 - 4x \leq 3$

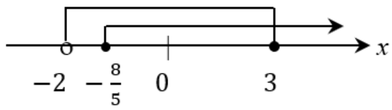
$-5 - 5x \leq 3$

$-5x \leq 8 \Rightarrow x \geq -\frac{8}{5}$

SR₁: $\left]-\infty, -\frac{8}{3}\right]$



SR₂: $\{x \in \mathbf{R} / -\frac{8}{5} \leq x \leq 3\}$



R₃:] 3, +∞ [

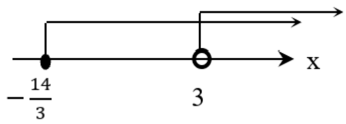
$-(3-x) - 4[+(2+x)] \leq 3$

$-3 + x - 8 - 4x \leq 3$

$-11 - 3x \leq 3$

$-3x \leq 3 + 11$

$-3x \leq 14 \Rightarrow x \geq -\frac{14}{3}$



SR₃: $\{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

Sol: $SR1 \cup SR2 \cup SR3 = \{x \in \mathbb{R} / x < -\frac{8}{3} \vee x > -\frac{8}{5}\}$

7. $|\, 3|x-4| - 2|2+x| - 4 \,| < 5$

Para resolver este problema es necesario conocer los signos de los binomios internos que tiene valor absoluto. Conocido esto se aplicará el teorema del valor absoluto.

	-2	4	
$2+x$	-	+	+
$x-4$	-	-	+

Para mayor rapidez podemos escribir la tabla de la siguiente forma:

-2	4	
$-2+x$	$2+x$	$2+x$
$-x+4$	$-x+4$	$x-4$
R_1	R_2	R_3

R₁: $]-\infty, -2[$

$|3(-x+4)-2(-2-x)-4| < 5$

$-5 < -3x + 12 + 4 + 2x - 4 < 5$

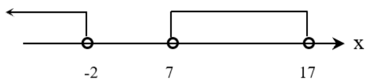
$-5 < -x + 12 < 5$

$-5 - 12 < -x + 12 - 12 < 5 - 12$

$-17 < -x < -7$

$17 > x > 7$

$7 < x < 17$



SR₁: $\varnothing$

R₂: $[-2, 4[$

$|3(-x+4)-2(2+x)-4| < 5$

$-5 < -3x + 12 - 4 - 2x - 4 < 5$

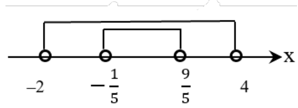
$-5 < -5x + 4 < 3$

$-5 - 4 < -5x + 4 - 4 < 5 - 4$

$-9 < -5x < 1$

$\frac{-9}{-5} > \frac{-5x}{-5} > \frac{1}{-5}$

$-\frac{1}{5} < x < \frac{9}{5}$



SR₂: $\left]-\frac{1}{5}, \frac{9}{5}\right[$

R₃: $[4, +\infty[$

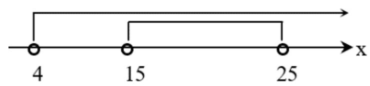
$|3(x-4) - 2(2+x) - 4| < 5$

$-5 < 3x - 12 - 4 - 2x - 4 < 5$

$-5 < x - 20 < 5$

$-5 + 20 < x + 20 - 20 < 5 + 20$

$15 < x < 25$



SR₃: $]15,25[$

$$\textbf{Sol}: SR_1 \cup SR_2 \cup SR_3 = \{x \in \mathbb{R} / -\tfrac{1}{5} < x < \tfrac{9}{5} \ \vee\ 15 < x < 25\}$$

8. $\sqrt{x^2 + 4x + 3} \geq 3 - x$

Para resolver este problema debemos considerar cuando la parte derecha es negativa y cuando es no negativa:

i) Si $3 - x < 0$, como la raíz es positiva la desigualdad siempre se cumple.

ii) Si $3 - x \geq 0$, entonces $x \leq 3$

Elevamos al cuadrado ambas partes del problema inicial:

$$\left(\sqrt{x^2 + 4x + 3}\right)^2 \geq (3 - x)^2$$

$$x^2 + 4x + 3 \geq 9 - 6x + x^2$$

$$10x \geq 6 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{3}{5}$$

Lo común entre la condición y este resultado nos da el resultado: $\frac{3}{5} \leq x \leq 3$

La solución final es la intersección entre i) y ii) y nos da: $\frac{3}{5} \leq x \leq 3$

9. $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 6} \leq 3$

Como la raíz no admite valores negativos, entonces restringimos el resultado:

$$2x + 3 \geq 0 \ \text{ y } \ x + 6 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad x \geq -6. \text{ Lo común entre los dos es: } x \geq -\frac{3}{2}$$

Pasamos la segunda raíz a la parte derecha y elevamos al cuadrado:

$$(\sqrt{2x+3})^2 \leq (3-\sqrt{x+6})^2$$

$$2x+3 \leq 9-6\sqrt{x+6}+x+6$$

$$6\sqrt{x+6} \leq 12-x$$

Analizamos dos casos, si la parte derecha es negativa o no negativa

i) $12 - x < 0$, en este caso como la raíz es positiva se cumple para todas las x

ii) $12 - x \geq 0$, entonces $x \leq 12$, elevamos al cuadrado nuestro problema:

$$\left(6\sqrt{x+6}\right)^2 \leq (12-x)^2$$

$$36(x+6) \leq 144-24x+x^2$$

$$x^2-60x-72 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{60 \pm \sqrt{3600+288}}{2} = \frac{60 \pm \sqrt{3888}}{2} = 30 \pm \sqrt{972}$$

$$x_1 = 61{,}2 \qquad x_2 = -1{,}2$$

	$-1{,}2$		$61{,}2$
$x^2-60x-72$	+	-	+

Sol:$\{ x \in \mathbb{R} \,/\,]-\infty; -1{,}2] \cup [61{,}2; +\infty[\,\}$considerando la restricción, la solución es: $[-1{,}5; -1{,}2]$

Ejercicios propuestos:

a) $(3-x)(x+1)(4-x)(5+x) \leq 0$

b) $|3-x|+|x-5| = 4$

c) $|2-3x|-2|3+x|+3|3x-8| = 4$

d) $\dfrac{2}{|2-3x|} = \dfrac{3}{|x+4|}$

e) $|(x+3)^2-(x-2)^2| < 2(3-2x)-3(3x+2)$

f) $\left|\dfrac{3-2x+2|3-4x|}{2-5x}\right| \leq 4$

g) $\big|3-|x+3|+2|2-5x|\big| \leq 5$

h) $\dfrac{|2+x|}{|3-x|} \leq 3$

i) $\big|3-2|x-2|+3|2x-3|\big| = 4$

j) $\left|\dfrac{3-x}{3+2x}\right| > 2$

k) $|x^2-1| \geq |2x^2+x-1|$

l) $\dfrac{4}{|1-x|} < \dfrac{3}{|3x+2|}$

m) $|3x^2-5x+2| \leq 3x-1$

n) $\dfrac{(3+x)(5+x)}{(x-2)(x-4)} \geq 0$

o) $|x^2-6x+8| \leq 4-x$

p) $\dfrac{4}{|2x-5|} \leq 3$

q) $|2x-3| \geq 2|2-5x|$

r) $|5-x| \leq 3$

s) $\big||x-3|-2\big| \leq 7$

t) $|x-3| < 2|4-3x|$

u) $\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{5} < \dfrac{2x-1}{5}-\dfrac{3\sqrt{2}}{10} \\ \dfrac{(x-\sqrt{2})^2}{4}+\dfrac{3}{8} < \dfrac{(2x-\sqrt{2})(2x+\sqrt{2})}{16}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ (x+2+\sqrt{3})^2-28 < (x-2-\sqrt{3})^2+16\sqrt{3} \end{cases}$

v) $\dfrac{3}{|x-3|} \geq \dfrac{4}{|3-4x|}$

w) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{3x+1}{4} < \dfrac{1-3x}{2} \\ \dfrac{x(3-x)^2}{2}-\dfrac{1}{2}x^3 < \dfrac{x(1-9x)}{3} \\ \dfrac{2x+1}{5}-x < 3+\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$

x) $\dfrac{3-x+|1-x|}{2+3x-|x+2|} \leq 2$

y) $\begin{cases} 2(x+1)-3 < (x-1)+2 \\ 5(1-2x)+7 < 4(2-x)+1 \\ 4(3-2x) > x-3 \end{cases}$

z) $\begin{cases} |x-3|+2y=5 \\ x+|2y-1|=5 \end{cases}$

aa) $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=2 \\ |x-3|+|y-4|=6 \end{cases}$

bb) $\begin{cases} |x-1|+2y=7 \\ |x-2|+|y|=5 \end{cases}$

cc) $\begin{cases} |x-3|+y=3 \\ |x-3|-2y=0 \end{cases}$

dd) $\begin{cases} |x-2|+y=2 \\ |3x-1|-2y=1 \end{cases}$

ee) $\begin{cases} |x+1|-|y+1|=3 \\ |x-1|-|y-1|=1 \end{cases}$

ff) $\sqrt{x^2-4} < 3x-2$

gg) $\dfrac{3x+5+|3-2x|}{|2-3x|-2x+1-|2x-3|} \leq 12$

hh) $\sqrt{x^2+4} < x-2$

ii) $\dfrac{16}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}} < \sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}$

jj) $\sqrt{3x^2-3} < 5-x$

kk) $\dfrac{3x-|2-5x|-5}{3x-2|3+2x|+4} \geq 3x-4$

ll) $\sqrt{4-9x^2} > x+2$

2.8. Números complejos

Los Números Complejos se originan como una necesidad de resolver una ecuación de la forma $x^2+1=0$, ya que en los Reales no tiene solución. Así se introdujo el número i, llamado imaginario, que posee la propiedad de que su cuadrado es igual -1; es decir, $i^2 = -1$. De esta forma se logro resolver la ecuación antes planteada.

Si $i^2 = -1$, entonces $i = \sqrt{-1}$, esto nos permite calcular i a cualquier potencia.

Ejemplo:

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} =- 1$

$i^3 = i^2 i = -i$

$i^4 = i^2 i^2 = 1$

$i^5 = i^4 i = i$

Podemos observar que nuevamente se repite el inicio, por lo que podemos concluir que cada 4 periodos se repiten los resultados.

Ejemplo: Calcular los siguiente ejercicios.

1. $2i^{123} - 5i^{212} + 3i^{566}$

$2(i^4)^{30}i^3 - 5(i^4)^{53} + 3(i^4)^{141}i^2 = -3i - 5 - 3 = -8 - 3i$

2. $i^{3^2} - 4i^{2^{3^2}} + 12i^{3^{4^2}}$

$i^9 - 4i^{2^9} + 12i^{3^{16}}$

$= i^9 - 4i^{512} + 12i^{43046721}$

$= \quad (i^4)^2 i - 4(i^4)^{128} + 12(i^4)^{1076168}$

$= i - 4 + 12 = 8 + i$

Este conjunto de números en el que están incluidos los reales se lo representa con la letra **C** y es el resultado de sumar un número real x y un número imaginario iy, su notación es:

$$z = x + yi$$

Donde x y y son dos números reales y i la unidad imaginaria. Esta forma se la conoce como forma rectangular. Si el número tiene la forma $\bar{z} = x - yi$, se le llama número complejo conjugado.

Ejemplos:

1. $z = 4 + 3i$

2. $z = \frac{1-\sqrt{2}}{3} - \sqrt{5}i$

3. $\bar{z} = -3 + 2i$ **.** el número complejo es: $z = -3 - 2i$

A los números complejos también se los expresa como un par ordenado; es decir, esto permite considerarlo como un punto y sujeto a la representación en un plano cartesiano, así

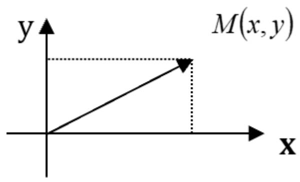


Figura2.3: Representación geométrica de número complejo.

Ejemplos:

$z_1 = 2 + 5i \qquad z_2 = -2 + 3i \qquad z_3 = -3i \qquad z_4 = 2 - 4i$

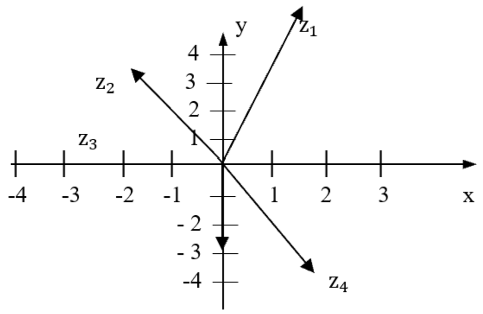


Figura 2.4: Geométrica de varios números complejos.

2.8.1. Operaciones con los números complejos

Los números complejos conservan las mismas leyes de los números reales, es decir:

- Para sumar o restar dos números complejos sumamos o restamos los términos semejantes:

  Sean $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$, entonces $z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm (y_1 + y_2)i$

- Para multiplicar dos números complejos lo realizamos igual que en álgebra:

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1x_2 + x_1y_2 i + x_2y_1 i + y_1y_2 i^2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

- Para dividir dos números complejos multiplicamos a cada término de la fracción por la conjugada del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)}\frac{(x_2 - y_2 i)}{(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + (-x_1y_2 + x_2y_1)i}{x^2 + y^2}$$

- Dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, y $z_2 = x_2 + iy_2$ son iguales si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$

Ejemplos:

1. $(-3 - 2i) - 2(2 - 5i) + 3(-3 + 2i)$

$$-3 - 2i - 4 + 10i - 9 + 6i = -16 + 14i$$

2. $(2 - 3i)(3 + 2i) - 3(4 + i)(3i)$

$$6 + 4i - 9i - 6i^2 - 36i - 9i^2 = 6 - 5i + 6 - 36i + 9 = 21 - 41i$$

3. $\dfrac{4 - 3i}{3 - i} + 2\dfrac{1 - 3i}{1 + i}$

$$\frac{(4 - 3i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} + 2\frac{(1 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{12 + 4i - 9i - 3i^2}{9 - i^2} + 2\frac{1 - i - 3i + 3i^2}{1 - i^2}$$
$$= \frac{15 - 5i}{10} + 2\frac{-2 - 4i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2}i$$

Es evidente que las operaciones de suma y multiplicación poseen las siguientes propiedades:

1. **Conmutativa:** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ $\qquad z_1 z_2 = z_2 z_1$
2. **Asociativa:** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ $\qquad (z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$
3. **Distributiva:** $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Ejercicios propuestos.

Realizar las operaciones y su resultado representarlo en la forma trigonométrica**:**

a) $3(3-2i) - 2(-2+4i) + 3(-4i)$

b) $\dfrac{3-3i}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{5-3i}{4-3i} - \dfrac{-5+3i}{2-6i}$

c) $(1+2i)(2-i) + (1-2i)(2+i)$

d) $\dfrac{(1-2i)(4+3i)}{1-2i} + \dfrac{(1-i)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\sqrt{3}+i}$

e) $\dfrac{(1+i)(4+i)}{4-i} - \dfrac{(1-i)(4-i)}{4+i}$

2.8.2. Forma trigonométrica o polar

La representación de un número complejo en el plano tiene también la forma de un vector lo que nos permite definir el módulo de este vector y su ángulo.

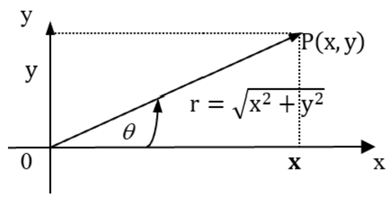


Figura 2.5: Forma polar de un número complejo.

Por el teorema de Pitágoras él módulo de un número complejo es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y su ángulo se define como $\text{tag}\theta = \frac{y}{x}$; a este ángulo se lo conoce también como argumento del número complejo, el cual representa un conjunto infinito de valores; estos valores se diferencian entre sí en un número entero de vueltas; es decir, en la magnitud $2\pi k$, donde $k \in \mathbb{Z}$. A partir de la Figura 3.3 se puede definir las coordenadas polares del punto P, que son

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\text{sen}\theta$$

Por lo que la forma trigonométrica se define así:

$$z = x + yi = r\cos\theta + ir\text{sen}\theta = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$$

Ejemplos: Transformar a la forma trigonométrica:

1. $z = -1 - i$

Determinemos el argumento

$\text{tag}\theta = \frac{-1}{-1} = 1$, como el número complejo esta en el tercer cuadrante el argumento es 225^0

El módulo es:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Por lo que el resultado es: $-1 - i = \sqrt{2}(\cos 2\,25 + i\text{sen}225)$

2. $z = -\sqrt{3} + i$

Determinemos el módulo:

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$$

El argumento es:

$$\theta = \text{actg}\frac{1}{-\sqrt{3}} = 150$$

Por lo que la solución es: $-\sqrt{3} + i = 2(\cos 1\,50 + i\text{sen}150)$

2.8.3. Potenciación en números complejos

Si multiplicamos dos números complejos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$, obtenemos la siguiente fórmula.

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2) + i(\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2\cos\theta_1)] =$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Si multiplicamos un número complejo por sí mismo nos da:

$$z \cdot z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta) \cdot r(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = r^2(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^2 = r^2(\cos 2\,\theta + i\text{sen}2\theta)$$

Si calculamos $z^3 = r^3(\cos 3\,\theta + i\text{sen}3\theta)$

Por lo que podemos deducir para una potencia n:

$$z^n = r^n(\cos n\,\theta + i\text{senn}\theta)$$ Conocida como la fórmula de Moivre

La fórmula de Moivre también se aplica a potencias negativas:

$$z^{-n} = r^{-n}[\cos(-n)\,\theta + i\text{sen}(-n)\theta]$$

Si dividimos los dos números complejos vamos a obtener una resta de ángulos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Ejemplo. Encontrar el número complejo de:

$$\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^{12}(-1-i)^9}{\left(\sqrt{3}-1\right)^7}=\frac{4^{12}(\cos(12)300+isen(12)300)\cdot 2^9(\cos(9)225+isen(9)225)}{4^7(\cos(7)330+isen(7)330)}$$

$$=2^{19}\frac{(\cos 3\,600+isen3600)(\cos 2\,025+isen2025)}{\cos 2\,310+isen2310}=2^{19}\frac{\cos 5\,625+isen5625}{\cos 2\,310+isen2310}$$

$$=2^{19}(\cos 3\,315+isen3315)=2^{19}(\cos 2\,85+isen285)$$

En caso de que la potencia sea una raíz, entonces al número z se le llama raíz de orden n del número complejo z′ si $z^n = z'$

Donde: $z = r(\cos\theta + isen\theta)$ y $z' = r'(\cos\phi + isen\phi)$

La ecuación $z^n = z'$ toma la forma:

$$r^n(\cos n\,\theta + isenn\theta) = r'(\cos\phi + isen\phi)$$

Por la igualdad de números complejos tenemos:

$$r^n = r' \qquad n\theta = \phi + 2\pi k,\quad k = 0,1,2,3,\ldots.$$

$$r = \sqrt[n]{r'} \qquad \theta = \frac{\phi+2\pi k}{n}$$

Por lo que para obtener una raíz de un número complejo tenemos la siguiente forma:

$$z = \sqrt[n]{r'}[\cos\frac{\phi+2\pi k}{n} + isen\frac{\phi+2\pi k}{n}]$$

Ejemplo. Hallar todos los valores de:

$$z = \sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$$

Transformamos a la forma trigonométrica:

$$1-\sqrt{3}i = 2(\cos 3\,00 + isen300)$$

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{2(\cos 3\,00 + isen300)} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{300+2\pi k}{3} + isen\frac{300+2\pi k}{3}\right)$$

Si $k = 0 \quad z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 1\,00 + isen100)$

Si $k = 1 \quad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{300+2\pi}{3} + isen\frac{300+2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}(\cos 2\,20 + isen220)$

Si $k = 2 \quad z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{300+4\pi}{3} + isen\frac{300+4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}(\cos 3\,40 + isen340)$

Ejercicios propuestos:

1. Calcular los siguientes ejercicios:

a) $4(\cos 1\,7^0 + isen17^0)8(\cos 1\,9^0 + isen19^0)5(\cos 3\,9^0 + isen39^0)$	
b) $2(\cos 1\,3^0 + isen13^0)3(\cos 2\,7^0 + isen27^0)$	c) $\frac{(-3+i^{-677})^{13}}{(-4-5i^{123})^9}$

d) $5\left(\cos\frac{3}{7}\pi + \mathrm{isen}\frac{3}{7}\pi\right)6\left(\cos\frac{4}{7}\pi + \mathrm{isen}\frac{4}{7}\pi\right)$	e) $\dfrac{2-3i}{4+3i} - \dfrac{(1-i)^6}{2-3i}$
f) $3(-4+3i)^3 - 2(-5+3i)^3$	g) $\dfrac{(1-i)^{12}\left(-\sqrt{3}-i\right)^{16}}{(-2+2i)^{21}}$
h) $\sqrt[4]{-3+3i}$	i) $\sqrt[5]{3-2i}$
j) $\sqrt[3]{-8}$	k) $\sqrt[6]{3i-1}$

2. Represente en forma algebraica:

a) $e^{-30^0 i}$ b) $e^{225^0 i+1}$ c) $e^{3-225^0 i}$

d) $e^{\frac{2}{3}\pi\, i}$ e) $e^{2-\frac{\pi}{3}i}$ f) $e^{210^0 i-1}$

3. Encontrar todas las raíces de:

a) $(3-i)x^2 + (2-i)x - (5-3i) = 0$ b) $x^6 + 1 = 0$

c) $x^2 - (3+2i)x + (4-3i) = 0$ d) $x^4 + 3i - 5 = 0$

e) $x^4 + 5x^2 + 7 = 0$ f) $x^6 + 3x^3 + 3 = 0$

g) $x^{10} - 4x^5 + 3 = 0$ h) $x^5 + x^4 - x - 1 = 0$

i) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ j) $x^8 - 4x^4 + 5 = 0$

k) $3x^{12} - 6x^6 - 20 = 0$

4. hallar a, b si se conoce:

a) $a + ib = \sqrt{2}\|1-i\| + \dfrac{(1-i)(1+i)}{2} + \dfrac{1-i}{1-(1-i)}$

b) $a + ib = \dfrac{(1+i)(2-3i)}{(-1+i)(2-i)}$ c) $(a+ib)(-4+7i) = -16+3i$

d) $-4 + i + \dfrac{3-2i}{a+ib} = -2i$

2.8.4. Representación exponencial de un número complejo

Esta representación está basada en la fórmula de Euler, que relaciona las funciones trigonométricas de argumento real con la función exponencial de argumento imaginario. Se representa así:

$$e^{\theta i} = \cos\theta + \mathrm{isen}\theta$$

Si en la forma trigonométrica $z = r(\cos\theta + \mathrm{isen}\theta)$ reemplazamos este valor nos da:

$$z = re^{\theta i}$$

que representa la forma exponencial de un número complejo. Realizando ciertas operaciones algebraicas se obtiene:

$$\operatorname{senh}\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i} \qquad \cosh\theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}$$

$$\operatorname{tagh}\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{i(e^{\theta i} + e^{-\theta i})} = -i\frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{e^{\theta i} + e^{-\theta i}} \qquad \operatorname{ctgh}\theta = i\frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}$$

Que representan las funciones hiperbólicas.

Preguntas de refuerzo

1. **¿**Qué es una operación interna**?**
2. ¿Qué es una operación externa?
3. ¿Qué estructuras algebraicas conoce? De un ejemplo
4. ¿Cómo se clasifican los números reales?
5. ¿Qué tipo de decimales conoce?
6. ¿Cómo se transforma un decimal a fracción?
7. ¿Explique cómo identificar un número Irracional?
8. ¿Diga que es un polinomio?
9. ¿Cuáles son los axiomas de orden?
10. ¿Diga que representa transformar una fracción a fracciones parciales?
11. ¿Qué es el MCD Y MCM?
12. ¿Qué es un extremo superior?
13. ¿Cuál es la idea de una ecuación?
14. ¿Qué tipos de ecuaciones conoce?
15. ¿Cómo se clasifican las ecuaciones?
16. ¿Qué significa resolver un sistema de ecuaciones?
17. ¿Qué representa el método de Gauss?
18. ¿Qué es un intervalo?
19. ¿Qué representa una inecuación?
20. ¿Qué es un valor absoluto?
21. ¿Enuncie los teoremas del valor absoluto?
22. **¿**Qué es un número complejo**?**
23. **¿**Cómo se define un número complejo**?**
24. ¿De cuantas formas se expresa un número complejo?
25. ¿Qué es el conjugado de un número complejo?
26. ¿Cuáles son las operaciones de los números complejos?

27. ¿Cuál es la fórmula de Moivre?
28. ¿Qué significa la división de un número complejo?
29. ¿Que representa sacar una raíz a un número complejo?
30. ¿Qué aplicaciones conoce de los números complejos?

3. RELACIÓN

Es un conjunto de pares ordenados (x, y), tales que x, e y estén vinculados por un expresión o fórmula matemática. Es un subconjunto de $A \times B$ y lo representamos como **R**$: A \times B$, donde A es el conjunto de salida y B el conjunto de llegada. A la correspondencia que se da entre A y B, es lo que llamamos relación. Toda relación tiene un dominio ($\mathrm{Dom_R}$), que son los valores del conjunto de salida x que están relacionados con el conjunto de llegada y, a los que llamaremos Imágenes ($\mathrm{Im_R}$).

Ejemplos:

1. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $B = \{-1,0,1,4,5,8,9,12,16,20\}$ dos conjuntos. Encontrar la relación de:

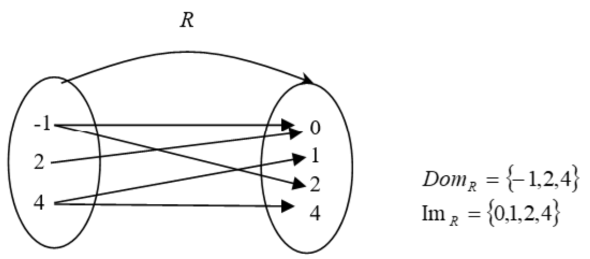
$$R: A \to B = \{(x, y)/y = x^2\}$$

La relación queda así: $R = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$

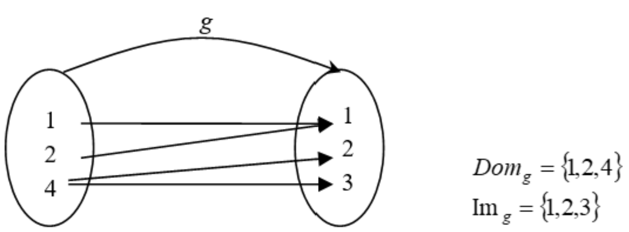
Donde el $\mathrm{Dom_R} = \{1,2,3,4\}$ y la $\mathrm{Im_R} = \{1,4,9,16\}$

2. Sean $A = \{-1,2,4\}$ y $B = \{0,1,2,4\}$. Y la relación viene expresada así:

$\mathbf{R} = \{(-1,0), (-1,2), (2,1), (4,1), (4,4)\}$. Esta relación puede verse en el siguiente diagrama de Venn:



3. Una relación $g: A \times B$, esta dada por $g = \{(1,1)(2,1), (4,2), (4,3)\}$. Ilustramos esta relación en el siguiente diagrama:



4. Sea $R = \{(x, y)/2x^2 + 3y^2 = 6\}$

Esta es la ecuación de una elipse con centro en el origen.

4. FUNCIÓN

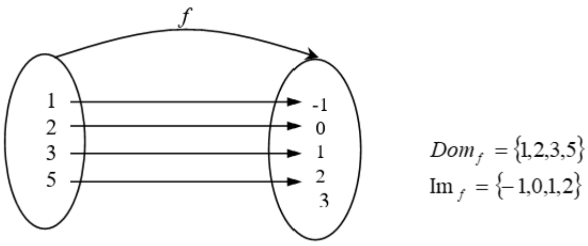
Sean $A, B \subset \mathbf{R}$ no vacíos. Se llama función f a una relación de A en B y se denota $f: A \to B$, cuando:

$$\forall x \in A, \exists!\, y \in B \text{ tal que } y = f(x)$$

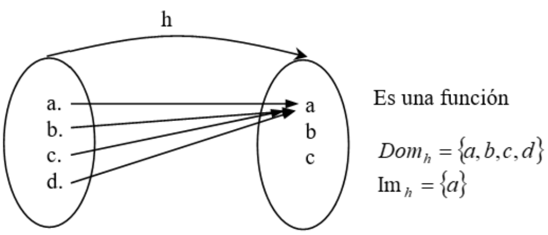
A es el dominio de la función y le representamos así: $\mathbf{Domf} = \mathbf{A}$. A los elementos de **B** que tiene correspondencia con los elementos de **A**, se les llama conjunto recorrido o Imagen de la función y se lo denota: $\mathbf{Imf} \subset \mathbf{B}$.

Ejemplos:

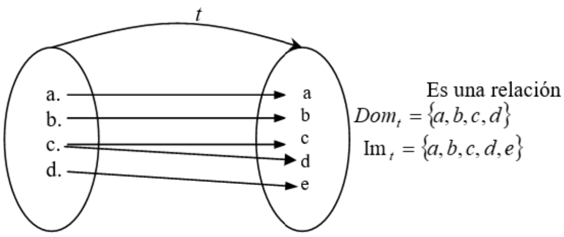
1. Sean $A = \{1, 2, 3, 5\}$ y $B = \{-1,0,1,2,3\}$. Donde la función f está definida por la siguiente correspondencia $f = \{(1,-1), (2,0), (3,1), (5,2)\}$, podemos notar que cada elemento del dominio esta relacionado con uno del conjunto de llegada.



2. Dado los conjuntos: $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ y su relación: $R: A \to B = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1), (x_4, y_2), (x_5, y_3)\}$.
   Si cumple con la definición de función.
3. Dado el siguiente diagrama defina si es función o relación:



4. Defina si es función o relación



En el gráfico anterior, se puede observar que el elemento "c" del conjunto de salida le corresponde dos elementos del conjunto de llegada (c, c) y (c,d). Por esta razón es una relación.

5. Sea f: **R** $\rightarrow$ **R**.

$x \rightarrow y = 3x^2 - x - 2.$ Esta función es una parábola

6. Sea f: $\mathbf{R} - \{2\} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \rightarrow y = \frac{3 + x}{2 - x}$$

Es una función y tiene la forma de una hipérbola equilátera

Nota. Para definir el dominio de la función es necesario despejar "y" y analizar las restricciones que tiene la función con respecto a los elementos de "x"

Ejemplos. Calcular el dominio de:

1. $f(x) = \dfrac{3x - 2}{2x^2 - x - 1}$

La restricción es que el denominador no puede ser cero:

$$2x^2 - x - 1 \neq 0$$

Por lo tanto 1 -1 $\Rightarrow (x - 1)(2x + 1) \neq 0$

2 1

$$x \neq 1 \qquad x \neq -\tfrac{1}{2}$$

Entonces el dominio es: $\text{Dom}_f = R - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

2. $g(x) = \dfrac{3 - 2x}{x^2 - 3} - \dfrac{x^2 - 2}{4 - x - 3x^2}$

Los denominadores no pueden ser cero: $x^2 - 3 \neq 0$ y $4 - x - 3x^2 \neq 0$

$$x^2 \neq 3 \qquad (4 + 3x)(1 - x) \neq 0$$

$$x \neq \pm\sqrt{3} \qquad x \neq -\frac{4}{3} \;\; y \;\; x \neq 1$$

Por lo tanto el $\text{Dom}_g = R - \left\{\pm\sqrt{3}, -\frac{4}{3}, 1\right\}$

3. $h(x) = \sqrt{1 - x - 2x^2}$

La raíz sólo admite valores positivos:

$1 - x - 2x^2 \geq 0 \rightarrow 2x^2 + x - 1 \leq 0$

1 1

2 -1

	-1	$1/2$	
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$	$+$
$(x + 1)(2x - 1)$	$+$	$-$	$+$

$(x + 1)(2x - 1) \leq 0$

$\text{Dom}_h = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$

4. $t(x) = \ln \dfrac{3x - 4}{2x + 3}$

El número del logaritmo siempre es positivo por lo tanto: $\dfrac{(3x - 4)}{(2x + 3)} > 0$

	$-3/2$	$4/3$	
$2x+3$	$-$	$+$	$+$
$3x-4$	$-$	$-$	$+$
$(2x+3)(3x-4)$	$+$	$-$	$+$

$\text{Dom}_t =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]\frac{4}{3}, +\infty[= [-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}]'$

5. $k(x) = \sqrt{2x^2 - 7x + 5} - \ln\frac{7-2x}{2+3x}$

El dominio será lo común entre las dos partes La raíz no admite valores negativos por lo que:

$$2x^2 - 7x + 5 \geq 0$$

$$(2x-5)(x-1) \geq 0$$

	1	$5/2$	
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$2x-5$	$-$	$-$	$+$
$(2x-5)(x-1)$	$+$	$-$	$+$

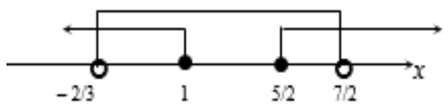
Solución: $]-\infty, 1] \cup [\frac{5}{2}, +\infty[$

El número del logaritmo solo admite valores positivos, por lo que:

$$\frac{7-2x}{2+3x} > 0$$

	$-2/3$	$7/2$	
$7-2x$	$+$	$+$	$-$
$2+3x$	$-$	$+$	$+$
$\frac{7-2x}{2+3x}$	$-$	$+$	$-$

Solución: $]-\frac{2}{3}, \frac{7}{2}[$



Solución final: $\text{Dom}_k =]-\frac{2}{3}, 1] \cup [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}[$

6. $f(x) = \sqrt{\frac{|x-1| - 2x + 3}{x^2 - x - 6}}$

Para calcular el dominio primero hacemos la tabla para el valor absoluto:

	1	
$x-1$	$-$	$+$
	R_1	R_2

$R_1:]-\infty, 1[$

$$\frac{-x+1-2x+3}{x^2-x-6} \geq 0$$

$$\frac{(4-3x)}{(x-3)(x+2)} \geq 0$$

	-2	$4/3$	3	
$4-3x$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-x-6	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{4-3x}{x^2-x-6}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Solución R_1: $]-\infty, -2[$

$R_2: [1, +\infty[$

$$\frac{x - 1 - 2x + 3}{x^2 - x - 6} \geq 0$$

$$\frac{2 - x}{(x-3)(x+2)} \geq 0$$

	-2 $\quad 2$ $\quad 3$			
$2 - x$	+	+ ●	−	−
$x^2 - x - 6$	+ ○	−	− ○	+
$\frac{2-x}{x^2-x-6}$	+	−	+	−

Solución R_2: $[2,3[$

El Dominio de la función es la unión de los dos resultados: $Dom_l =]-\infty, -2[\cup [2,3[$

Nota. Para definir la imagen de una función es necesario despejar la variable "x" y considerar las restricciones de "y".

Ejercicios resueltos:

1. Calcular: Im_f, sí $f(x) = \frac{3x-4}{5+x}$

Despejamos "x" de $y = \frac{3x-4}{5+x}$

$5y + xy = 3x - 4 \quad \rightarrow \quad xy - 3x = -4 - 5y \quad \rightarrow \quad x(y-3) = -4 - 5y$

$$x = \frac{-4-5y}{y-3} \quad \text{restricción } y \neq 3$$

$Im_f = R - \{3\}$

2. Calcular: Im_g sí $g(x) = 3x^2 - 2x - 2$

Despejamos "x" $y = 3x^2 - 2x - 2$

$3x^2 - 2x - 2 - y = 0$ Aplicamos la fórmula general

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-2-y)}}{2(3)}$$

La raíz no admite valores negativos:

$$4 - 12(-2 - y) \geq 0$$

$$4 + 24 + 12y \geq 0 \quad \rightarrow \quad y \geq -\frac{28}{12} = -\frac{7}{3}$$

$Im_g = \{y \in R / y \geq -\frac{7}{3}\}$

3. Calcular la Imagen de: $h(x) = \frac{3x-2}{3x^2-1}$

Despejamos "x": $3yx^2 - y = 3x - 2$

$3yx^2 - 3x + 2 - y = 0$ aplicamos la fórmula general

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(3y)(2-y)}}{6y} = \frac{3 \pm \sqrt{12y^2 - 24y + 9}}{6y}$$

Como la raíz admite solo valores no negativos entonces:

$$12y^2 - 24y + 9 \geq 0$$
$$4y^2 - 8y + 3 \geq 0$$
$$(2y - 3)(2y - 1) \geq 0$$

		1/2		3/2	
$4y^2 - 8y + 3$	+	•	−	•	+

$$Im_h = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

El valor de $y = 0$ hace cero al denominador por lo que representa una asintota horizontal

4. Calcular la imagen de: $y = \sqrt{5 - 4x}$

Como la raíz siempre nos da valores positivos, entonces la imagen es todos los reales positivos incluido el cero

Ejercicios propuestos:

1. Indique cuales de las siguientes relaciones son funciones:

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to y = 2x - 4$

b) $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $x \to y = 2x^2 - x - 3$

c) $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \to y^2 = x - 1$

d) $f: [1,5] \to \mathbf{R}$, $x \to y = \sqrt{25 - x^2}$

e) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to y = \dfrac{9}{1 - 2x}$

f) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to y = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1}$

g) $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \to y = \sqrt{3x - 1}$

2. Defina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |3 - 2x| - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{3 - x}}$ c) $f(x) = 5 - 2x - x^2$

d) $f(x) = |3 - 2x| - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ e) $f(x) = \sqrt{3 - x - \dfrac{2 - x}{|2x - 3|}}$ f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 - x}}{\sqrt{x^2 - 9}}$

g) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{3 - |2 - x| + 3|4 + x|}$ h) $f(x) = \dfrac{3 - x}{x^2 - 4}$

3. Calcular la imagen de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{|3 - x|}{x^2 - 9}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{3 - x}{x + 2}}$ c) $y = \dfrac{3 - 4x^2}{5 + x^2}$ *d)* $y = \begin{cases} 3 - x^2, |x| \leq 2 \\ \dfrac{3 - x}{4x + 11}. |x| > 2 \end{cases}$

4. Indique el Dominio e Imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 3}$ b) $f(x) = \dfrac{3 - x}{4 + x}$ c) $f(x) = \dfrac{3 - x}{4 + x}$

d) $f(x) = 3 - 2x^2 - x$ e) $f(x) = x^2 - 5x - 6$ f) $f(x) = |3 - 4x|$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4 - x^2}$ h) $f(x) = 3 + |5 + x| - 2|2 - 3x|$

4.1. Igualdad de Funciones

Sean $A, B, C, D \subset \mathbf{R}$ no vacíos $f: A \to B$ y $g: C \to D$ dos funciones, estas son iguales si y solo si cumplen que:

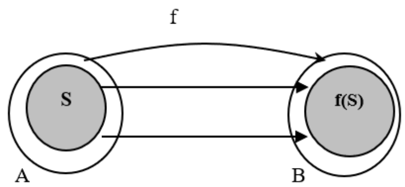
a) Tienen el mismo Dominio ($A \subset C$).

b) $\forall x \in A$: $f(x) = g(x)$.

4.2. Imagen Directa

Sea $A, B \subset \mathbf{R}$ conjuntos no vacíos, $f: A \to B$ una función y $S \subset A$. Al subconjunto $f(S)$ se le conoce como **Imagen Directa** de S por f.

Lo denotaremos en un diagrama de Venn, así:



Cada elemento de la imagen $f(S)$ tendrá un valor $x \in S$ tal que $y = f(x)$.

Ejercicios resueltos:

1. Sea la función $f: \mathbf{R} - \{2\} \to \mathbf{R}$ Calcular: a) $f([-2,1])$, b) $f([3,5])$

$$x \to y = \frac{3x-1}{2-x}$$

Dividimos la fracción:

$$\begin{array}{r|l} 3x-1 & -x+2 \\ \hline -3x+6 & -3 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Entonces: $\frac{3x-1}{2-x} = -3 + \frac{5}{2-x}$

a) Como: $x \in [-2,1] \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 2 \geq -x \geq -1$

$\Rightarrow 4 \geq 2 - x \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{5}{4} \leq \frac{5}{2-x} \leq 5$

$\Rightarrow \frac{5}{4} - 3 \leq -3 + \frac{5}{2-x} \leq 5 - 3$

$\Rightarrow -\frac{7}{4} \leq -3 + \frac{5}{2-x} \leq 2$

$\Rightarrow -\frac{7}{4} \leq \frac{3x-1}{2-x} \leq 2$

$\Rightarrow -\frac{7}{4} \leq f(x) \leq 2$

$\Rightarrow f([-2,1]) = \left[-\frac{7}{4}, 2\right]$

b) Como: $x \in [3,5] \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$

$\Rightarrow -3 \geq -x \geq -5$

$\Rightarrow -1 \geq 2 - x \geq -3$

$\Rightarrow 1 \leq -(2 - x) \leq 3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{-(2-x)} \leq 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \geq \frac{1}{2-x} \geq -1$

$\Rightarrow -1 \leq \frac{1}{2-x} \leq -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow -5 \leq \frac{5}{2-x} \leq -\frac{5}{3}$

$\Rightarrow -8 \leq -3 + \frac{5}{2-x} \leq -\frac{14}{3}$

$\Rightarrow f([-2,1]) = \left[-8, -\frac{14}{3}\right]$

2. Sea la función $g(x) = 3x^2 - 2x - 5$. Calcular a) $g([1,4])$ b) $g([-3,0])$

Primeramente, completamos cuadrados:

$$y = 3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) - 5 - \frac{1}{3} = 3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{16}{3}$$

Como: $x \in [1,4] \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3} \leq x - \frac{1}{3} \leq \frac{11}{3}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{4}{9} \leq \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{121}{9}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3} \leq 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{121}{3}$$
$$\Rightarrow \quad -4 \leq 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} \leq 35$$
$$\Rightarrow \quad g([1,4]) = [-4,35]$$

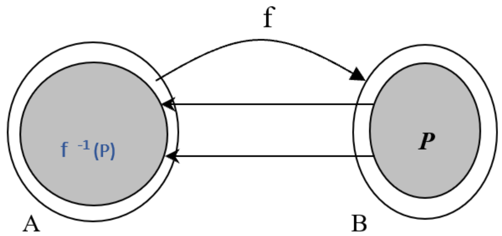
b) Como: $x \in [-3,0] \Rightarrow -3 \leq x \leq 0$

$$\Rightarrow \quad -\frac{10}{3} \leq x - \frac{1}{3} \leq -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{10}{3} \geq -\left(x - \frac{1}{3}\right) \geq \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq -\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq \frac{10}{3}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{9} \leq \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{100}{9}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{100}{3}$$
$$\Rightarrow \quad -5 \leq 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} \leq 28$$
$$\Rightarrow \quad g([-3,0]) = [-5,28]$$

4.3. Imagen Reciproca.

Sean $A, B \subset \mathbf{R}$ no vacíos y f una función de A en B, además $P \subset B$. La imagen reciproca de P por f es el subconjunto de A y se lo denota como $f^{-1}(P)$.

Se lo representa en un diagrama de Venn, así:



Aquí el conjunto P son las imágenes de $x \in A$ y la imagen recíproca son los valores de $x \in A$ (preimágenes). Al hablar de imagen directa e imagen reciproca estamos considerando solo cierta parte de las imágenes y del dominio de la función respectivamente.

Ejercicios resueltos:

1. Calcular $f^{-1}([3,5])$ sí $f(x) = 3x - 4$.

$$[3,5] \in f(x) \rightarrow 3 \leq 3x - 4 \leq 5 \rightarrow 7 \leq 3x \leq 9 \rightarrow \frac{7}{3} \leq x \leq 3$$

$$f^{-1}([3,5]) = \{x \in \mathbf{R} / \frac{7}{3} \leq x \leq 3\}$$

2. Sea $g(x) = 2x^2 - x - 6$. Calcular $g^{-1}([-3,4])$

Primer Método:

Completamos cuadrados:

$$G(x) = 2x^2 - x - 6 = 2(x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16}) - 6 - \tfrac{1}{8} = 2(x - \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{49}{8}$$

Como $y \in [-3,4] \Rightarrow -3 \leq y \leq 4$

$$\Rightarrow -3 \leq 2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{49}{8} \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{25}{8} \leq 2(x - \frac{1}{4})^2 \leq \frac{81}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{16} \leq (x - \frac{1}{4})^2 \leq \frac{81}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} \leq \left|x - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{9}{4}$$

a) $\left|x - \frac{1}{4}\right| \geq \frac{5}{4}$

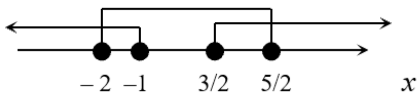
$-\frac{5}{4} \geq x - \frac{1}{4} \geq \frac{5}{4}$

$-1 \geq x \geq \frac{3}{2}$

b) $\left|x - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{9}{4}$

$-\frac{9}{4} \leq x - \frac{1}{4} \leq \frac{9}{4}$

$-2 \leq x \leq \frac{5}{2}$



Sol $=$ $\text{Sa} \cup \text{Sb}$: $[-2,-1] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$

Segundo Método:

Como $y \in [-3,4] \Rightarrow -3 \leq y \leq 4 \Rightarrow -3 \leq 2x^2 - x - 3 \leq 4$

Dividimos en dos partes, parte izquierda y parte derecha; la solución es lo común:

a) $-3 \geq 2x^2 - x - 6$ $\quad\wedge$

$2x^2 - x - 3 \geq 0$

2 -3
1 1

$(2x - 3)(2x + 2) \geq 0$

$x = \frac{3}{2} \quad x = -1$

	-1	$3/2$	
$2x^2 - x - 3$	$+$	$-$	$+$

Sol a = $]-\infty, -1] \cup [3/2, +\infty[$

b) $2x^2 - x - 6 \geq 4$

$2x^2 - x - 10 \geq 0$

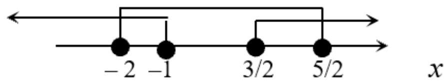
2 -5
1 2

$(2x - 5)(2x + 4) \geq 0$

$x = \frac{5}{2} \quad x = -2$

	-2	$5/2$	
$2x^2 - x - 10$	$+$	$-$	$+$

Sol b = $[-2, 5/2]$



$$\textbf{Sol} = Sa \cap Sb: \ [-2,-1] \cup \left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$$

3. Dada $h(x) = \dfrac{4-x}{3+x}$, Calcular $h^{-1}([-1,4])$

Primer Método:

Dividimos la fracción:

$$\begin{array}{r|l} -x+4 & x+3 \\ \cline{2-2} x+3 & -1 \\ \hline //\ 7 & \end{array}$$

es decir: $\frac{4-x}{3+x} = -1 + \frac{7}{x+3}$

Como [-1,4] ∈ h(x) ⇒ $-1 \leq \frac{4-x}{3+x} \leq 4$

$$-1 \leq -1 + \frac{7}{x+3} \leq 4$$

$$0 \leq \frac{7}{x+3} \leq 5$$

$$0 \leq \frac{1}{x+3} \leq \frac{5}{7}$$

$$\frac{7}{5} \leq x+3 < +\infty$$

$$-\frac{8}{5} \leq x < +\infty$$

$$h^{-1} = ([-1,4]) = [-\tfrac{8}{5}, +\infty[$$

Segundo Método:

Como [-1,4] ∈ h(x) ⇒ $-1 \leq \frac{4-x}{3+x} \leq 4$ Le dividimos en parte izquierda y parte derecha; la solución es lo común:

Donde: a) $-1 \leq \frac{4-x}{3+x}$ ∧ b) $\frac{4-x}{3+x} \leq 4$

$\frac{4-x}{3+x} + 1 \geq 0$ $\frac{4-x}{3+x} - 4 \leq 0$

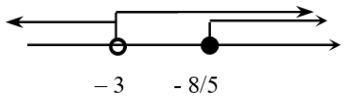
$\frac{4-x+3+x}{3+x} \geq 0$ $\frac{4-x-12-4x}{3+x} \leq 0$

$\frac{7}{3+x} \geq 0$ $\frac{-8-5x}{3+x} \leq 0$

	-3	
$3+x$	$-$	$+$

	-3	$-8/5$	
$3+x$	$-$	$+$	$+$
$-8-5x$	$+$	$+$	$-$
$\frac{-8-5x}{3+x}$	$-$	$+$	$-$

Sol a = $]-3, +\infty[$ **Sol b** = $]-\infty, -3[\cup [-8/5, +\infty[$



La solución final es: **Sol** = $S_a \cap S_b$ **Sol**: $\{x \in \mathbf{R}/x \geq -8/5\}$

Ejercicios propuestos:

Sea la función:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Determinar:
$x \to y = \frac{1}{x^2+1}$ i) $f([2,4])$ ii) $f^{-1}([0,\frac{1}{2}])$ iii) $f([-3,-1])$

b) $f : \mathbf{R}\text{-}\{\mathbf{1}\} \to \mathbf{R}$ Determinar:
$x \to y = \frac{3-x}{x-1}$
i) $f([2,4])$ ii) $f([-2,0])$ iii) $f^{-1}([-5,-2])$ iv) $f(f^{-1}([2,5]))$

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Determinar:
$x \to y = x^2 - 4x - 5$
i) $f([3,6])$ ii) $f([-2,0])$ iii) $f^{-1}([-8,-5])$ iv) $f(f^{-1}([3,7]))$

4.4. Graficación de funciones

Para graficar una función vamos a seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el **Dom_f** , la **Im_f.** y las asíntotas
2. Puntos de corte con los ejes y Puntos críticos.
3. Signos de la función.
4. Gráfico.

Ejemplos. Graficar:

1. $f(x) = 3x^2 + x - 4$

I. a) El dominio de la función es: $Dom_f = R$. ya que no hay ninguna restricción.

b) Para calcular la imagen es necesario despejar la variable "x".

$$3x^2 + x - 4 - y = 0 \;\to\; x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(3)(-4-y)}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49 + 12y}}{6}$$

La raíz no admite valores negativos, por lo tanto:

$49 + 12\,y \geq 0 \;\Rightarrow\; y \geq -\frac{49}{12}$ De este manera: $Im_f = \{ y \in R \,/\, y \geq -\frac{49}{12} \}$

II. a) Puntos de corte con los ejes.

Para $x = 0 \;\; y = -4$

$y = 0 \qquad 3x^2 + x - 4 = 0$

$$\frac{(3x+4)(3x-3)}{3} = 0 \quad \to \quad x = -\frac{4}{3} \qquad x = 1$$

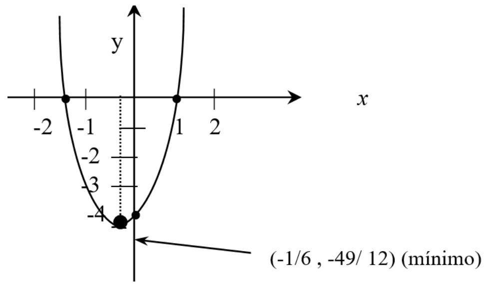
b) Punto crítico, este punto se genera del valor incluido de la imagen en este caso: $y = -\frac{49}{12}$, reemplazamos en el despeje de x y obtenemos: $x = -\frac{1}{6}$.

III. Signos de la Función. $f(x) = 3x^2 + x - 4.$

$$3x^2 + x - 4 = 0 \qquad (3x+4)(x-1) = 0 \qquad x = -\frac{4}{3} \qquad x = 1$$

	$-4/3$		1	
$y = 3x^2 + x - 4$	+	○ −	○	+

IV. Gráfico.



2. $I(x) = \dfrac{3+x}{4-x}$

I. a) El dominio de la función es: $Dom_I = R - \{4\}$. $x = 4$ Asíntota Vertical.

b) Despejamos "x"

$$4y - xy = 3 + x$$

$$x + xy = 4y - 3$$

$$x = \frac{4y-3}{1+y}$$

Entonces: $Im_I = R - \{-1\}$. $y = -1$ Asíntota horizontal.

II. a) Puntos de corte con los ejes.

Para : $x = 0$ $y = \frac{3}{4}$ Para: $y = 0$ $x = -3$

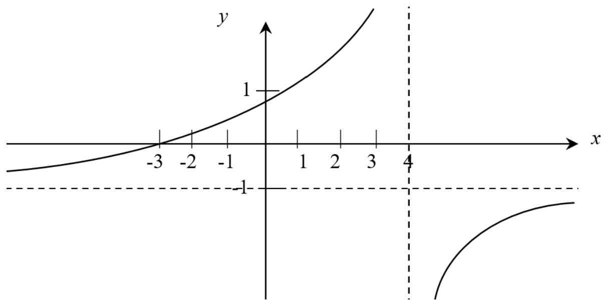
III. Signos de la función. $I(x) = \frac{3+x}{4-x}$.

$$3 + x = 0 \qquad x = -3$$

$$4 - x = 0 \qquad x = 4$$

		-3	4
$3 + x$	− ○	+	+
$4 - x$	+	+ ○	−
$I(x) = \dfrac{3+x}{4-x}$	−	+	−

IV. Gráfico.



3. $k(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x - 2}$

I. a) El dominio de la función es: $Dom_k = R - \{2\}$. $x = 2$ asíntota vertical.

b) Despejamos "x"

$$yx - 2y = 3x2 + 1 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - yx + 1 + 2y = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(3)(1 + 2y)}}{2(3)} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 24y - 12}}{6}$$

$$y^2 - 24y - 12 \,^3\, 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 24y - 12 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 + 48}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{624}}{2}$$

$$y1 = \frac{24 + 24{,}9}{2} = 24{,}45 \qquad y2 = \frac{24 - 24{,}9}{2} = -0{,}45$$

	$-0{,}45$		$24{,}45$
$y^2 - 24y - 12$	+	−	+

Entonces: $Im_k = \{y \in R \,/\, y \leq -0{,}45 \cup y \geq 24{,}45\}$

II. a) Puntos de corte con los ejes. Para $x = 0$ $y = -\frac{1}{2}$

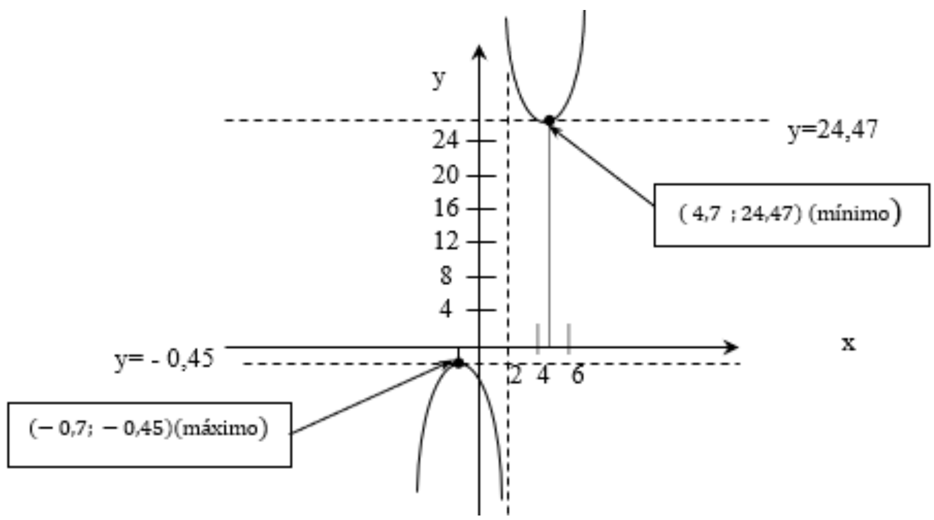
b) Puntos críticos $\begin{cases} x = 4{,}7 & y = 24{,}47 \text{ (mínimo)} \\ x = -0{,}7 & y = -0.45 \text{ (máximo)} \end{cases}$

III. Signos de la función $k(x) = \frac{3x^2+1}{x-2}$.

$x - 2 = 0 \qquad x = 2$

	2	
$x - 2$	−	+

IV. Gráfico.



4. $h(x) = \dfrac{3x-2}{x^2-4}$

I. a) El dominio de la función es: $Dom_h = R - \{\pm 2\}$. $x = \pm 2$ Asíntota Vertical

b) Para calcular la Imagen despejamos "x"

$$y = \frac{3x-2}{x^2-4} \rightarrow yx^2 - 4y = 3x - 2 \rightarrow yx^2 - 3x - 4y + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(y)(-4y+2)}}{2y} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16y^2 - 8y}}{2y},$$

$$y = 0, \quad \text{Asíntota Horizontal}$$

$$16y^2 - 8y + 9 \geq 0 \quad \rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(16)9}}{(16)2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 576}}{32}$$

No tiene raíces por lo tanto la parábola siempre es positiva y no hay ninguna restricción.

Entonces: $Im_h = R$

II. a) Puntos de corte con los ejes:

$$Para \quad x = 0, \quad y = \frac{1}{2} \quad ; \quad Para \quad y = 0, \quad x = \frac{2}{3}$$

b) No hay puntos críticos

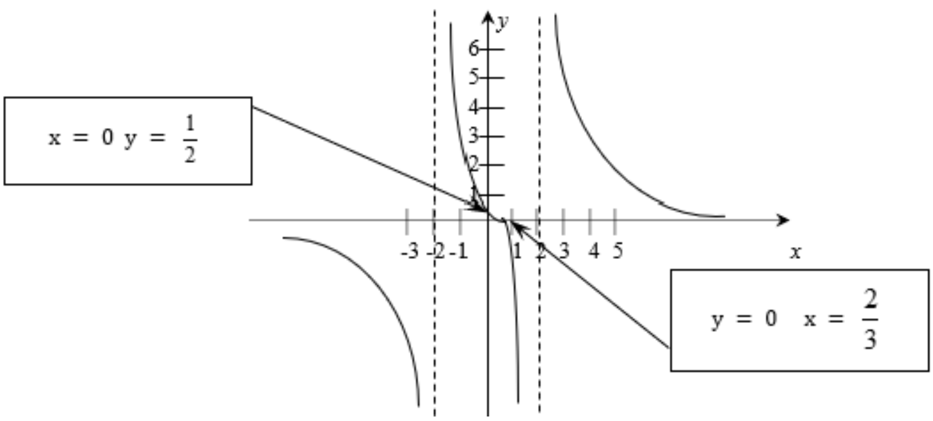
III. Signos de la función $h(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$.

$3x - 2 = 0 \quad x = 2/3$

$x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 2$

	-2		$2/3$	2
$3x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{3x-2}{x^2-4}$	$-$	$+$	$-$	$+$

IV. Gráfico.



5. $t(x) = \dfrac{3}{x^2 + 3}$

I. a) El dominio de la función es: $Dom_t = R$. Ya que ningún valor de x hace cero al denominador

b) Para calcular la Imagen despejamos “x”

$$y = \frac{3}{x^2 + 3} \quad \rightarrow \quad yx^2 + 3y = 3$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3 - 3y}{y}}, y = 0 \;\; Asíntota\ Horizontal \quad \rightarrow \quad \frac{3 - 3y}{y} \geq 0$$

		0		1	
y	−	○	+		+
$3 - 3y$	+		+	●	−
$\frac{3 - 3y}{y}$	−		+		−

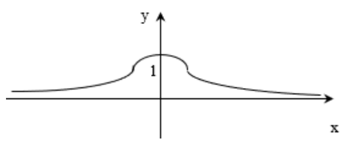
Entonces: $Im_t =]0,1]$

II. a) Puntos de corte con los ejes Para x = 0 y =1

III. Signos de la función $t(x) = \frac{3}{x^2+3}$.

Siempre es Positiva

IV. Gráfico.



6. $g(x) = \dfrac{2x + 3}{3 - 2x^2}$

I. a) El $Dom_g = R - \left\{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$ $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}22$ Asíntotas Verticales

b) Para encontrar la imagen despejamos x, de $g(x) = y = \frac{2x+3}{3-2x^2}$

$$3y - 2yx^2 = 2x + 3 \quad \rightarrow \quad 2yx^2 + 2x + 3 - 3y = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2y)(3 - 3y)}}{4y} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 - 2y(3 - 3y)}}{4y}$$

$y = 0$ Asíntota Horizontal

Como la raíz no admite valores negativos, tenemos: $6y^2 - 6y + 1 \geq 0$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(6)1}}{2(6)} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{12} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{12}$$

$$y_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = 0{,}79 \quad y_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 0{,}21$$

	0 , 21		0,79
$6y^2 - 6y - 1$	−	+	+

Entonces: Im $_g$ = {y ∈R / y ≤ 0,21 ∨ y ≥ 0,79}

II. a) Puntos de corte con los ejes:

$$x = 0 \quad y = 1 \qquad\qquad y = 0 \quad x = -\frac{3}{2}$$

b) Puntos críticos

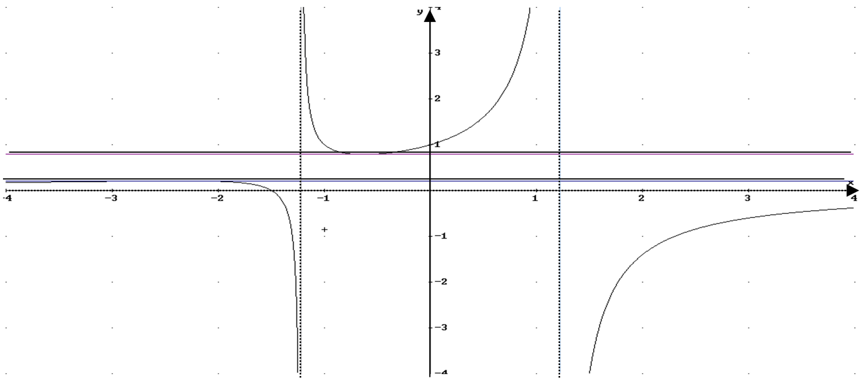
$$y = 0{,}79\ x = \frac{-1}{2(\frac{3+\sqrt{3}}{6})} = -0{,}63 \qquad y = 0{,}21 \quad x = \frac{-1}{2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)} = -2{,}37$$

III. Signos de $g(x) = \frac{2x+3}{3-2x^2}$

$2x + 3 = 0 \qquad x = -3/2$

$3 - 2x^2 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{3/2}$

IV. Gráfico.



7. $r(x) = \dfrac{3+7x}{3x^2+1}$

I. a) No hay ninguna restricción por lo que el $\text{Dom}_r = R$

b) Despejamos x

$$3yx^2 + y = 3 + 7x \qquad \Rightarrow \qquad 3yx^2 - 7x + y - 3 = 0$$

$$X_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(3y)(y-3)}}{6y} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 36y - 12y^2}}{6y}, \qquad y = 0 \text{ Asíntota Vertical}$$

$$49 + 36y - 12y^2 \geq 0 \quad \to \quad y_{1,2} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4(-12)49}}{-24} = \frac{-36 \pm \sqrt{3648}}{-24}$$

$$y_1 = \frac{-36 + \sqrt{3648}}{-24} = -1{,}02 \qquad y_2 = \frac{-36 - \sqrt{3648}}{-24} = 4{,}02$$

		$-1{,}02 \qquad 4{,}02$	
$-12y^2+36y+49$	$-$	$+$	$-$

La imagen es: $\mathrm{Im}_r = [-1{,}02; 4{,}02]$

II. a) Puntos de corte con los ejes

$$x = 0 \qquad y = 3 \qquad y = 0 \qquad x = -\tfrac{3}{7} \approx -0{,}43$$

b) Puntos críticos:

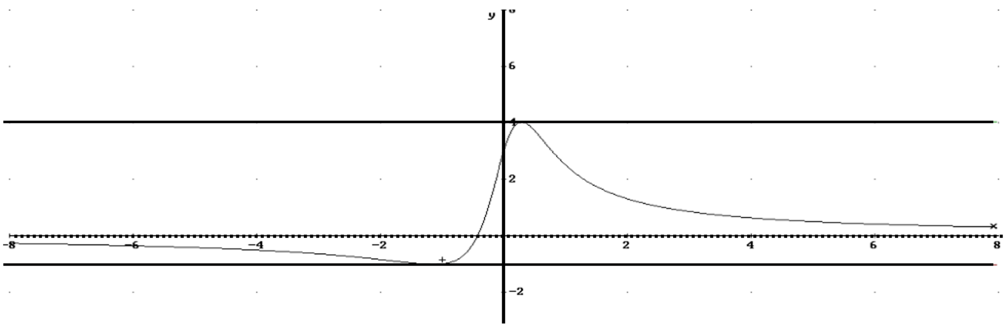
$$y = 4{,}02 \quad x = \frac{7}{6\left(\frac{36+\sqrt{3648}}{24}\right)} = 0{,}29 \quad y = -1{,}02 \quad x = \frac{7}{6\left(\frac{36-\sqrt{3648}}{24}\right)} = -1{,}1$$

III. Signos de $r(x) = \frac{3+7x}{3x^2+1}$

$$3 + 7x = 0 \qquad x = -3/7$$

	$-3/7$	
$3+7x$	$-$	$+$

IV. Gráfico.



Ejercicios propuestos. Graficar las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{2-3x}{2x-5}$ b) $y = \dfrac{2x-2}{5x^2-2}$ c) $y = \mathrm{sng}(4-3x-2x^2)$

d) $y = \dfrac{x-3}{2-3x^2}$ e) $y = \dfrac{3x+4}{3x^2+10}$ f) $y = \mathrm{sng}(3x-4)$

g) $y = \dfrac{2-3x}{x^2+4}$ h) $y = \dfrac{3x-2}{3x^2-1}$ i) $y = \mathrm{sng}(5-2x)$

j) $y = \dfrac{[3-2x]}{x+1}$ k) $y = \dfrac{x+1}{[3-2x]}$ l) $y = \mathrm{sng}(x^2-3x-2)$

m) $y = \dfrac{3x-6}{4x^2-3}$ n) $y = x + [x]$ o) $y = 3x^2-4x+7$

p) $y = \dfrac{5x-3}{2x^2+3}$ q) $y = 3x-2-x^2$ r) $y = 2-3x-2x^2$

s) $y = \dfrac{3x+5}{2x^2-5}$ t) $y = [3-2x]$

4.5. Características del comportamiento de las funciones

Las funciones de acuerdo con sus características se clasifican en:

4.5.1. Funciones Inyectivas

Sean $A, B \subseteq \mathbf{R}$ y f una función de A en B, se dice que f es **inyectiva** sí:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{ Si } x_1 \neq x_2 \text{ entonces: } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Esto significa que f es inyectiva cuando para valores diferentes de A, le corresponden diferentes imágenes. Por la implicación contrapuesta la definición quedaría:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplos.

1. Verifique sí $f: R \rightarrow R$, es inyectiva.

$$x \rightarrow f(x) = 3 - 2x$$

Sean $x_1, x_1 \in R$ entonces: $\quad f(x_1) = f(x_2)$

$$3 - 2x_1 = 3 - 2x_2$$
$$-2x_1 = -2x_2$$
$$x_1 = x_2 \quad \text{L.q.q.d}$$

2. Pruebe sí $g(x): R \rightarrow R$. Es inyectiva.

$$x \rightarrow g(x) = x^2 - 3x + 2$$

Sean $x_1, x_2 \in R \rightarrow g(x_1) = g(x_2)$

$$x_1^2 - 3x_1 + 2 = x_2^2 - 3x_2 + 2 \quad \text{Pasamos todo a la izquierda}$$
$$x_1^2 - x_2^2 + 3x_2 - 3x_1 = 0 \quad \text{Agrupamos y factoramos}$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 3(x_1 - x_2) = 0 \quad \text{Sacando factor común}$$
$$(x_1 - x_2)(x_2 + x_1 - 3) = 0 \rightarrow x_1 = x_2 \qquad x_1 = 3 - x_2.$$

Como hay más de una solución la función g(x) no es inyectiva.

Si una función no es inyectiva la podemos transformar a inyectiva, en este caso la condición es que si $x_1 = x_2$, entonces esto lo generalizamos al otro factor, reemplazando en esta ecuación y nos da que $x_1 = 3/2$ lo que significa que antes y después de este valor la función será inyectiva, este punto representa el mínimo de la función, lo que podemos comprobar graficándola:

$\mathbf{y = x^2 - 3x + 2}$

I. a) $Dom_g = R$.
   b) Im_g : $\qquad x^2 - 3x + 2 - y = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2-y)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2} \rightarrow 1 + 4y \geq 0$$

$y \geq -\frac{1}{4}$ Img : $\{ y \in R / y \geq -\frac{1}{4} \}$

II. Puntos de corte de los Ejes.

Para : $x = 0 \quad y = 2$; $y = 0 \quad x^2 - 3x + 2 = 0$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x = 2, \quad x = 1$$

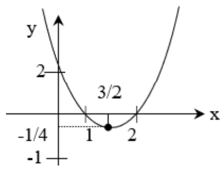
Puntos críticos: Sí $y = -\frac{1}{4}, x = \frac{3}{2}$ que es el valor mínimo de la función

III. Signos de $y = x^2 - 3x + 2$.

$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0 \rightarrow x = 2 \quad x = 1$

	1	2
$x^2 - 3x + 2$	+ o −	o +

IV. Gráfico.



Observaciones:

- Podemos notar que cualquier paralela al eje X que este dentro de la imagen corta al gráfico en dos puntos. Para que sea inyectiva esta paralela debe de cortar a la gráfica en tan solo un punto.
- Para transformar esta función en inyectiva es necesario limitar al dominio considerando en la parábola el punto mínimo (o máximo).

Del gráfico anterior podemos obtener dos funciones inyectivas que son:

$$g_1 :]-\infty, 3/2] \rightarrow R \qquad y \qquad g_2 : [3/2, +\infty[\rightarrow R$$

$$x \rightarrow g(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad x \rightarrow g(x) = x^2 - 3x + 2.$$

4.5.2. Funciones Sobreyectivas

Sean $A, B \subseteq R$ conjuntos no vacíos y f una función de A en B, esta es sobreyectiva sí:

$$\forall y \in B, \ \exists x \in A \quad \text{tal que} \quad y = f(x)$$

En otras palabras, f es sobreyectiva si el conjunto recorrido es igual al conjunto de llegada es decir que:

$$f(A) = B.$$

Ejercicios resueltos:

1. Sea la función $f: R \rightarrow \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$. Compruebe si es sobreyectiva.

$$x \rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Del gráfico anterior podemos notar que la imagen de la función es igual al conjunto de llegada, por lo tanto, si es sobreyectiva.

2. Sea $g(x): R - \{-2\} \rightarrow R$ una función, comprobar si es sobreyectiva.

$$x \rightarrow g(x) = \frac{3 - x}{2 + x}$$

Procedemos a calcular la Im_g:

$$y = \frac{3 - x}{2 + x} \quad \rightarrow \quad 2y + yx = 3 - x, \text{ Se agrupa las "x" a la izquierda}$$

$$yx + x = 3 - 2y \quad \rightarrow \quad x = \frac{3 - 2y}{y + 1}, \; y^1 - 1.$$

Por lo que la $Im_g = R - \{-1\}$. Siendo la imagen diferente que el conjunto de llegada, la función g(x) no es sobreyectiva.

Nota. Para transformar a sobreyectiva basta reducir el conjunto de llegada e igualarlo a la imagen de la función.

La función anterior puede ser sobreyectiva y se vería así:

$$g(x): R - \{-2\} \rightarrow R - \{-1\}$$

$$x \rightarrow g(x) = \frac{3 - x}{2 + x}$$

4.5.3. Funciones Biyectivas

Sean $A, B \subseteq R$ conjuntos no vacíos y f una función de A en B, se dice que f es biyectiva, si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejercicios resueltos:

1. Sea $f: R - \{-2\} \rightarrow R - \{1\}$. Compruebe si es biyectiva.

$$x \rightarrow y = \frac{x + 3}{x - 2}.$$

Veamos si es inyectiva: $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{x_1 + 3}{x_1 - 2} = \frac{x_2 + 3}{x_2 - 2}$$

$$(x_1 + 3)(x_2 - 2) = (x_2 + 3)(x_1 - 2)$$

$$x_1 x_2 + 3x_2 - 2x_1 - 6 = x_1 x_2 + 2x_2 + 3x_1 - 6$$

$$3x_2 + 2x_2 = 3x_1 + 2x_1$$

$$5x_2 = 5x_1$$

$$x_2 = x_1$$ si es inyectiva.

Comprobemos si es sobreyectiva:

Verifiquemos si cada elemento de "y" tiene un "x". Podemos descomponer la fracción en:

$$\frac{x + 3}{x - 2} = 1 + \frac{5}{x - 2}.$$

Entonces:

$$-\infty < \frac{x+3}{x-2} < 1 \quad \vee \quad 1 < \frac{x+3}{x-2} < +\infty$$

$$-\infty < 1 + \frac{5}{x-2} < 1 \quad \vee \quad 1 < 1 + \frac{5}{x-2} < +\infty$$

$$-\infty < \frac{5}{x-2} < 0 \qquad \vee \qquad 0 < \frac{5}{x-2} < +\infty$$

$$-\infty < \frac{1}{x-2} < 0 \qquad \vee \qquad 0 < \frac{1}{x-2} < +\infty$$

$$-\infty < x-2 < 0 \qquad \vee \qquad 0 < x-2 < +\infty$$

$$-\infty < x < 2 \qquad \vee \qquad 2 < x < +\infty$$

Lo que significa que si es sobreyectiva. Por lo tanto, la función f es biyectiva.

2. Transforme a biyectiva: $y = \frac{3x-2}{3x^2-1}$

$f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{3x_1-2}{3{x_1}^2-1} = \frac{3x_2-2}{3{x_2}^2-1} \quad \rightarrow \quad (3x_1-2)(3{x_2}^2-1) = (3x_2-2)(3{x_1}^2-1)$$

$$9x_1{x_2}^2 - 3x_1 - 6{x_2}^2 + 2 = 9{x_1}^2x_2 - 3x_2 - 6{x_1}^2 + 2$$

$$(9x_1{x_2}^2 - 9{x_1}^2x_2) + (3x_2 - 3x_1) - (6{x_2}^2 - 6{x_1}^2) = 0$$

$$9x_1x_2(x_2-x_1) + 3(x_2-x_1) - 6(x_2-x_1)(x_2+x_1) = 0$$

Sacando factor común: $(x_2-x_1)[9x_1x_2 + 3 - 6(x_2+x_1)] = 0$

Reemplazamos $x_1 = x_2$ en el segundo factor: $9{x_1}^2 - 12x_1 + 3 = 0$

Simplificamos y factoramos: $3{x_1}^2 - 4x_1 + 1 = 0 \rightarrow (3x_1-1)(x-1) = 0$

Obtenemos dos resultados que dividen al dominio en tres partes: $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_1 = 1$, con lo que obtenemos tres funciones inyectivas:

$$f_1:]-\infty, \frac{1}{3}] - \{-\frac{1}{\sqrt{3}}\} \rightarrow R \qquad f_2: [\frac{1}{3}, 1] - \{\frac{1}{\sqrt{3}}\} \rightarrow R \qquad f_3: [1, +\infty] \rightarrow R$$

$$x \rightarrow y = \frac{3x-2}{3x^2-1} \qquad x \rightarrow y = \frac{3x-2}{3x^2-1} \qquad x \rightarrow y = \frac{3x-2}{3x^2-1}$$

Para transformarla a sobreyectiva nos ayudamos con el gráfico:

I. a) $Dom_f = R - \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ $\qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ Asíntotas verticales

b) Despejamos "x"

$$3yx^2 - y = 3x - 2$$

$$3yx^2 - 3x + 2 - y = 0$$

Con la formula general $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4(3y)(2-y)}}{6y} = \frac{3\pm\sqrt{12y^2-24y+9}}{6y}$ $\qquad y = 0$ A. H.

La raíz no admite valores negativos por lo que: $4y^2 - 8y + 3 \geq 0 \quad (2y-3)(2y-1) \geq 0$

	1/2	3/2	
$4y^2 - 8x + 3$	+	−	+

La imagen es: $Im_f =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$

II. a) Puntos de corte con los ejes:

$$x = 0 \quad y = 2 \qquad\qquad\qquad\qquad y = 0 \quad x = \tfrac{2}{3}$$

b) Puntos críticos:

$$y = \tfrac{1}{2} \qquad x = 1 \qquad\qquad y = \tfrac{3}{2} \qquad\qquad x = \tfrac{1}{3}$$

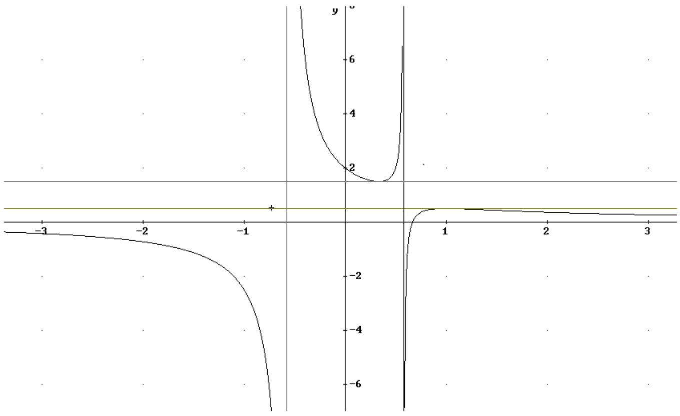
III. Signos de $y = \frac{3x-2}{3x^2-1}$

$$3x - 2 = 0 \quad x = 2/3$$

$$3x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1/\sqrt{3}$$

		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}$
$3x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$3x^2-1$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\frac{3x-2}{3x^2-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

IV. Gráfico



La sobreyectiva queda así:

$f_1:]-\infty, \frac{1}{3}] - \{-\frac{1}{\sqrt{3}}\} \to]-\infty, 0[\cup [\frac{3}{2}, +\infty[$ $\qquad$ $f_2: [\frac{1}{3}, 1] - \{\frac{1}{\sqrt{3}}\} \to]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$

$f_3: [1, +\infty] \to]0, \frac{1}{2}]$

Como ya eran inyectivas, obtenemos los tres opciones de biyectivas.

Ejercicios propuestos. Defina si las siguientes funciones son biyectivas, si no lo son transformar a biyectiva y calcule su inversa.

a) $f: R \to R$
$x \to y = 3x^2 - 5x + 8$

b) $f: R - \{4\} \to R$
$x \to y = \dfrac{3x-1}{4-x}$

c) $f: R \to R$
$x \to y = 3x^2 - 2x - 1$

d) $f: R \to R$
$x \to y = 3x - 2$

e) $f: R \to R$
$x \to y = 5 - 3x - 3x^2$

f) $f: R \to R$
$x \to y = \dfrac{2x-2}{5x^2+1}$

g) $f: R \to R$

h) $f: [2, +\infty[\to R$

$$x \to y = \frac{4-3x}{x^2+5} \qquad\qquad x \to y = \sqrt{4x-8}$$

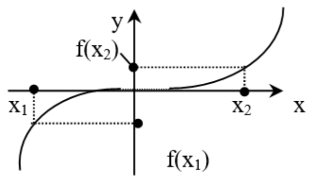
i) $f:]-1,2[\to R$

$$x \to f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

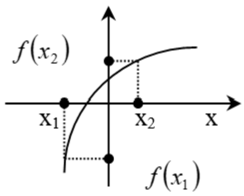
4.5.4. Funciones Monótonas

Sea $A, B \subseteq$ **R** no vacíos, y f una función real de A en B, se dice que:

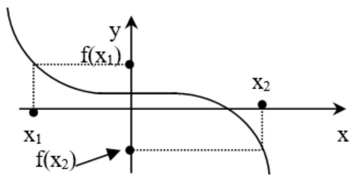
a) f es **Creciente** si $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \ \to\ f(x_1) \leq f(x_2)$.



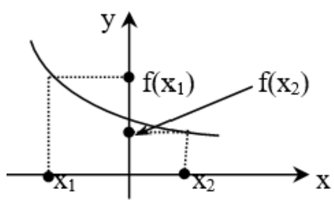
y f es **Estrictamente Creciente** si $x_1 < x_2 \ \to\ f(x_1) < f(x_2)$.



b) f es **Decreciente** si $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \ \to\ f(x_1) \geq f(x_2)$.



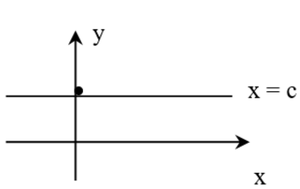
y f es **Estrictamente Decreciente** si: $x_1 < x_2 \ \to\ f(x_1) > f(x_2)$.



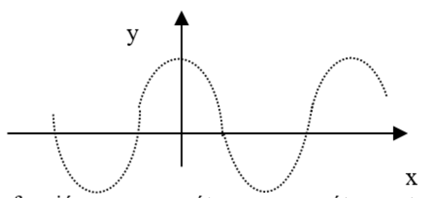
Una función es monótona si cumple cualquiera de los casos anteriores.

Ejercicios resueltos:

1. Verifique la monotonía de las siguientes gráficas:



Esta función es **Creciente y Decreciente**



Esta función no es monótona, es monótona a trazos.

2. Sea f: **R** – {2} → **R**. Pruebe que la función es monótona a trazos.

$$x \;\rightarrow\; f(x) = \frac{3 - x}{x + 2}.$$

i) Si $x_1 < x_2 < -2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

ii) Si $-2 < x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Nota. La monotonía se la puede calcular con el coeficiente de monotonía:

$$\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

f es creciente si $x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$.

$x_2 - x_1 > 0 \;\rightarrow\; f(x_2) - f\,(x_2) > 0$. Siendo α positivo

f es decreciente si $x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$.

$x_2 - x_1 > 0 \;\rightarrow\; f(x_2) - f(x_2) < 0$. Siendo α negativo

f es constante si $x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) = f(x_2)$. Siendo $\alpha = 0$

4.5.5. Funciones Periódicas

Sea A, B ⊆ **R** no vacíos, y *f* una función real de A en B, esta es periódica con periodo α ∈ **R**, α ≠ 0, si para todo *x* del dominio, ∀n∈**Z**, tenemos que x+nα también pertenece al dominio y se cumple que:

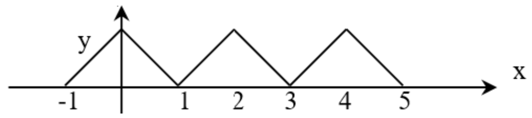
$$f(x + n\alpha) = f(x).$$

Se llama periodo principal al menor de los periodos positivos; el resto son múltiplos del periodo principal.

Ejemplos:

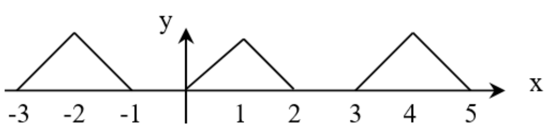
1. Determine el periodo de cada función:

a)



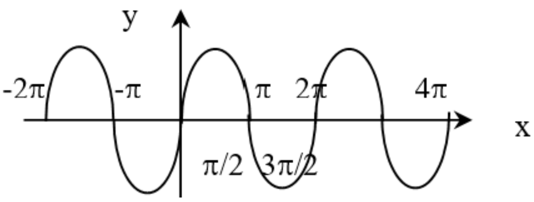
El periodo es 2 unidades.

b)



El periodo es cada 3 unidades.

c)



El periodo es cada 2π

Nota: podemos decir que las funciones son invariables por traslación.

4.5.6. Función Par e Impar

Sea A, B $\subseteq$ **R** no vacíos y f una función de A en B, se dice que:

a) f es una función par, si y solo si $\forall x \in A \wedge \forall(-x) \in A$, se cumple que

$$f(x) = f(-x)$$

b) f es una función impar, si y solo si $\forall x \in A \wedge \forall(-x) \in A$, se cumple que

$$f(x) = -f(-x).$$

Cada una de estas funciones tiene su interpretación gráfica. En el caso de la función par, los puntos (x, y) y $(-x, y)$ son simétricos al eje Y, por lo tanto, la gráfica de una función par es simétrica al eje "Y", esto lo podemos notar calculando el punto medio.

Sean los puntos: $P_1[x, f(x)]$ y $P_2[-x, f(-x)]$.

El punto medio sería: $x = \dfrac{x + (-x)}{2} = 0 \qquad y = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = f(x)$

Con este resultado se nota que el punto medio esta sobre el eje "y".

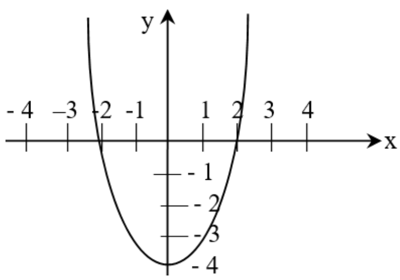
Ejemplos:

1. Sea la función f: **R** $\rightarrow$ **R**. Demostrar que es una función par.
   $x \rightarrow f(x) = x^2 - 4.$

Debemos comprobar que $f(-x) = f(x)$.

Entonces $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$.

Gráficamente:



Para la función impar los puntos (x, y) y (- x, y) son simétricos respecto al eje de coordenadas, lo que verificamos calculando el punto medio.

Sean los puntos: $P_1[x, f(x)]$ y $P_2[-x, f(-x)] = [x, -f(x)]$.

El punto medio sería: $x = \dfrac{x + (-x)}{2} = 0 \qquad y = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = \dfrac{f(x) - f(x)}{2} = 0$

Con lo que demostramos que la curva será simétrica al centro de coordenadas.

2. Sea la función $\begin{aligned} f\colon \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\rightarrow f(x) = x^3 - 2x. \end{aligned}$ Verifique si es una función impar.

Debemos comprobar que $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x).$

Por lo tanto, f(x) es una función impar.

Ejercicios propuestos:

1. Identifique la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3 - 2x - 5x^2$ b) $t(x) = 3 - 2x$ c) $j(x) = 8 + x^3$

d) $g(x) = \dfrac{3 - 2x}{2x + 3}$ e) $i(x) = |3 - 4x|$ f) $h(x) = \dfrac{3 + x}{3 - x^2}$

2. Cuáles de las siguientes funciones es periódica, par o impar:

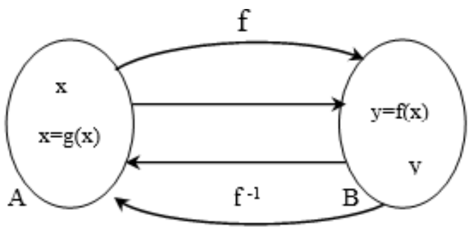
a) $f(x) = \dfrac{3 + x^4}{x - x^3}$ b) $g(x) = \dfrac{2 + x^2}{3 - x^2 - 3x^4}$ c) $h(x) = \operatorname{sen}(30 - 2x)$

d) $i(x) = 2\cos(\pi - 3x)$ e) $j(x) = e^{x^2}$ f) $k(x) = tg2x$

4.6. Función Inversa

Sean A, B $\subseteq$ R conjunto no vacíos y f una función **biyectiva**. Al conjunto $g = \{(y, x)/x = g(y), x \in A\}$ se le denomina función inversa de B en A y lo notaremos como $\mathbf{f^{-1}}$ (función inversa de f).

Lo representaremos en el diagrama de Venn:



Aquí la función f es: $\begin{aligned} f\colon A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$. En cambio, la función f^{-1}es: $\begin{aligned} f^{-1}\colon B &\rightarrow A \\ y &\rightarrow x = f^{-1}(y) \end{aligned}$

Podemos deducir, que el grafo de estas funciones es simétrico respecto a la recta y = x, lo que nos permite resolver el problema gráficamente.

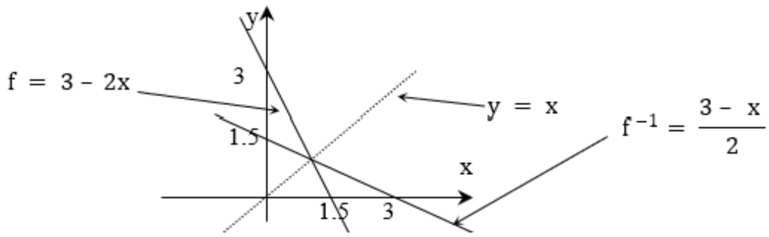
Ejercicios resueltos:

1. Sea $\begin{aligned} f\colon \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\rightarrow y = 3 - 2x. \end{aligned}$ Calcular la inversa.

Despejamos “x”.

$x = \frac{3-y}{2}$ le cambiamos el conjunto de salida y el recorrido y obtenemos la inversa

$y = \frac{3-x}{2} = f^{-1}$



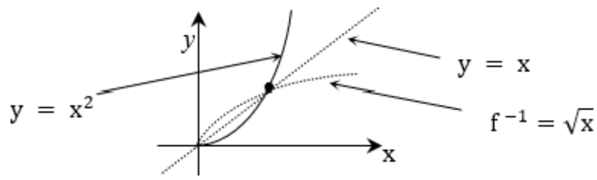
2. Sea $f: \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$. Calcular la inversa de:

$$x \rightarrow y = x^2$$

Sí $y = x^2$. Despejamos "x". $x = +\sqrt{y}$ e invertimos las variables:

$$y = \sqrt{x} = f^{-1}$$

Gráficamente:



3. Sea la función $f: [1/2, +\infty[\rightarrow [-25/4, +\infty[$. Calcular f^{-1}

$$x \rightarrow y = x^2 - x - 6$$

Debemos de comprobar si es Biyectiva. Definiremos primeramente si es Inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1{}^2 - x_1 - 6 = x_2{}^2 - x^2 - 6$$

$$x_1{}^2 - x_1 = x_2{}^2 - x_2 \rightarrow (x_1{}^2 - x_2{}^2) - (x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) = 0 \rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

$$x_1 = x_2 \quad y \quad x_1 + x_2 - 1 = 0$$

Para que sea inyectiva la segunda solución debe cumplir con que $x_1 = x_2$. Por lo tanto:

$$x_1 + x_1 - 1 = 0$$

$$2x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

Esto significa que antes o después de $\frac{1}{2}$ la función es Inyectiva. Ahora verificaremos si es sobreyectiva la función:

$$\text{Sea } y \in \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right[\rightarrow -\frac{25}{4} \leq y < +\infty$$

$$-\frac{25}{4} \leq x^2 - x - 6 < +\infty$$

$$-\frac{25}{4} \leq x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 6 < +\infty$$

$$-\frac{25}{4} \leq (x - ½)^2 - \frac{25}{4} < +\infty$$

$$0 \leq (x - ½)^2 < +\infty$$

$$0 \leq (x - ½)^2 < +\infty$$

$$½ \leq x < +\infty$$

Lo que significa que cada y tiene un x, por lo tanto, si es Sobreyectiva. Siendo Inyectiva y sobreyectiva la función es Biyectiva y podemos calcular su inversa.

$$y = x^2 - x - 6$$

Despejamos "x"

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-6 - y)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25 + 4y}}{2}$$

Como tenemos la parte derecha de la función entonces:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25 + 4y}}{2}$$

Cambiando las variables obtenemos la inversa, así:

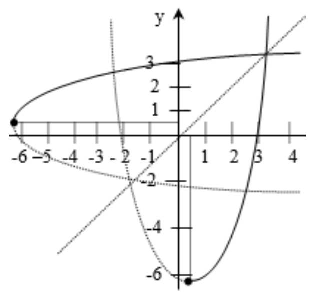
$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{25 + 4x}}{2} = f_1^{-1}$$

Entonces la inversa se representará así:

$$f_1^{-1}: [-25/4, +\infty[\rightarrow [1/2, +\infty[.$$

$$x \rightarrow f^{-1} = \frac{1 + \sqrt{25 + 4x}}{2}$$

Su gráfico es:



4. Sea f: $\mathbf{R} - \{3\} \rightarrow \mathbf{R} - \{-2\}$. Calcular la inversa f^{-1} de:

$$x \rightarrow y = \frac{3 + 2x}{3 - x}.$$

Es necesario saber si la función es Biyectiva, por lo que primeramente comprobamos si la función es Inyectiva.

$$\text{Sea } f(x_1) = f(x_2) \quad \rightarrow \quad \frac{3+2x_1}{3-x_1} = \frac{3+2x_2}{3-x_2}$$

$$(3 + 2x_1)(3 - x_2) = (3 + 2x_2)(3 - x_1)$$

$$9 - 3x_2 + 6x_1 + 2x_1 x_2 = 9 - 3x_1 + 6x_2 - 2 x_1 x_2$$

$$6x_1 + 3x_1 = 6x_2 + 3x_2$$

$$9x_1 = 9x_2 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Lo que significa que la función si es Inyectiva. Comprobamos ahora si la función es Sobreyectiva.

Como $y \in \mathbf{R} - \{-2\}$. Calculamos la imagen reciproca:

$$-\infty < \frac{3+2x}{3-x} < -2 \quad \text{o} \quad -2 < \frac{3+2x}{3-x} < +\infty$$

$$-\infty < -2 + \frac{9}{3-x} < -2 \quad \text{o} \quad -2 < -2 + \frac{9}{3-x} < +\infty$$

$$-\infty < \frac{9}{3-x} < 0 \quad \text{o} \quad 0 < \frac{9}{3-x} < +\infty$$

$$-\infty < \frac{1}{3-x} < 0 \quad \text{o} \quad 0 < \frac{1}{3-x} < +\infty$$

$$-\infty < 3 - x < 0 \quad \text{o} \quad 0 < 3 - x < +\infty$$

$$-\infty < -x < -3 \quad \text{o} \quad -3 < -x < +\infty$$

$$\infty > x > 3 \quad \text{o} \quad 3 > x > -\infty$$

$$3 < x < \infty \quad \text{o} \quad -\infty < x < 3$$

Cumpliéndose, que cada elemento del conjunto de llegada tiene un valor de "x", esto significa que si es Sobreyectiva por lo que la función si es Biyectiva.

Por lo tanto, podemos calcular su función inversa y esta es:

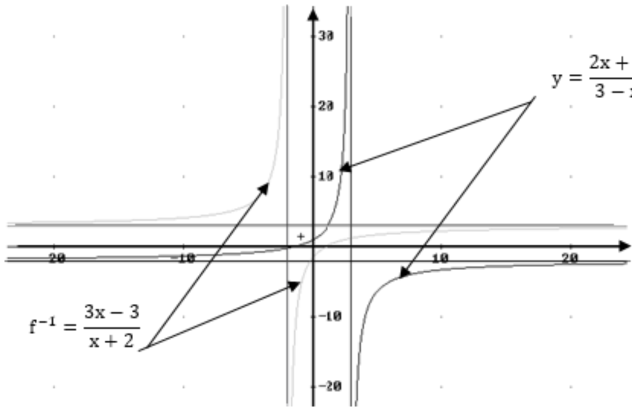
$$y = \frac{3+2x}{3-x}$$

$$3y - xy = 3 + 2x \quad \rightarrow \quad 2x + xy = 3y - 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3y-3}{2+y}$$

Le cambiamos las variables:

$$y = \frac{3x-3}{2+x} = f^{-1}, \quad f^{-1} : R - \{3\} \rightarrow R - \{-2\}$$

Su grafico queda así:



Ejercicios propuestos

Calcular la inversa de:

a) $y = 2x^2 - 3x - 5$ b) $y = 3 - 5x$ c) $y = \dfrac{2+x}{3+x^2}$

d) $y = 4 - 3x - x^2$ e) $f = \dfrac{3-4x}{5-4x^2}$ f) $y = \dfrac{3+4x}{2-3x}$

4.7. Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones con sus dominios definidos Dom_f y Dom_g, respectivamente, podemos calcular la suma, la resta, la multiplicación y división de estas funciones, obteniendo una nueva función donde el dominio será la intersección de los dominios anteriores, así:

Sean $f: A \to B$ y $g: A \to C$

i) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

ii) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

iii) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x) \neq 0$

Ejercicios resueltos:

1. Dado $f(x) = \begin{cases} x+2; & x < -2 \\ 3-2x; & x \geq -2 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x; & x < 4 \\ 2; & x \geq 4 \end{cases}$. Hallar:

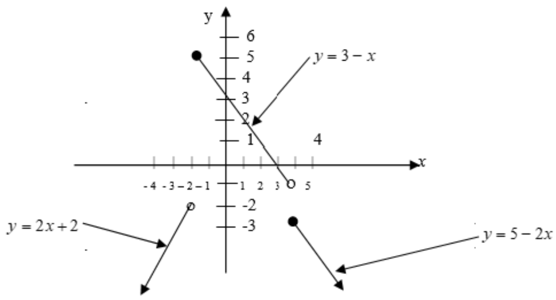
a) $f(x) + g(x)$, b) $f(x) - g(x)$, c) $f(x).g(x)$, d) $f(x)/g(x)$

Lo hacemos con representaciones en la recta numérica

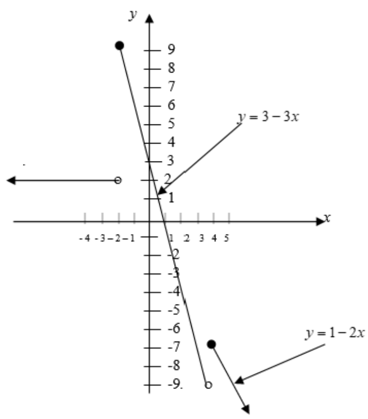
	$x < -2$	$-2 \le x < 4$	$x \ge 4$	
f	x+2	3-2x		
g		x	2	
f+g	$y = (x+2) + x$	$y = (3-2x) + x$	$y = (3-2x) + 2$	$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+2; & x < -2 \\ 3-x; & -2 \le x < 4 \\ 5-2x; & x \ge 4 \end{cases}$
f-g	$y = (x+2) - x$	$y = (3-2x) - x$	$y = (3-2x) - 2$	$(f-g)(x) = \begin{cases} 2; & x < -2 \\ 3-3x; & -2 \le x < 4 \\ 1-2x; & x \ge 4 \end{cases}$
f.g	$y = (x+2).x$	$y = (3-2x).x$	$y = (3-2x).2$	$(f.g)(x) = \begin{cases} (x+2)x; & x < -2 \\ (3-2x)x: & -2 \le x < 4 \\ (3-2x)2; & x \ge 4 \end{cases}$
$\frac{f}{g}$	$y = \frac{x+2}{x}$	$y = \frac{3-2x}{x}$	$y = \frac{3-2x}{2}$	$(f/g)(x) = \begin{cases} (x+2)/x; & x < -2 \\ (3-2x)/x: & -2 \le x < 4 \\ (3-2x)/2; & x \ge 4 \end{cases}$

Grafiquemos

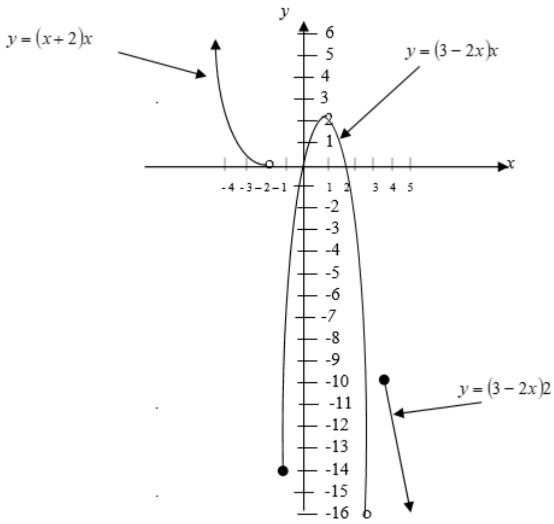
a) $(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+2; & x < -2 \\ 3-x; & -2 \le x < 4 \\ 5-2x; & x \ge 4 \end{cases}$



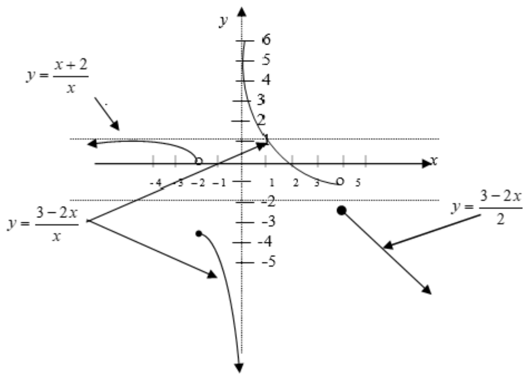
b) $(f-g)(x) = \begin{cases} 2; & x < -2 \\ 3-3x; & -2 \le x < 4 \\ 1-2x; & x \ge 4 \end{cases}$



c) $(f.g)(x) = \begin{cases} (x+2)x; & x < -2 \\ (3-2x)x: & -2 \le x < 4 \\ (3-2x)2; & x \ge 4 \end{cases}$



d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{x}; & x<-2\\ \frac{3-2x}{x}: & -2\le x<4\\ \frac{3-2x}{2}; & x\ge 4\end{cases}$



Ejercicios propuestos:

Dado: $f(x)=\begin{cases}-3, & x<-2\\ 2x-2, & |x|\le 2\\ 2x^2-3, & x>2\end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases}-3x+4, & x<-4\\ 2, & |x|\le 4\\ x^2-3x, & x>4\end{cases}$

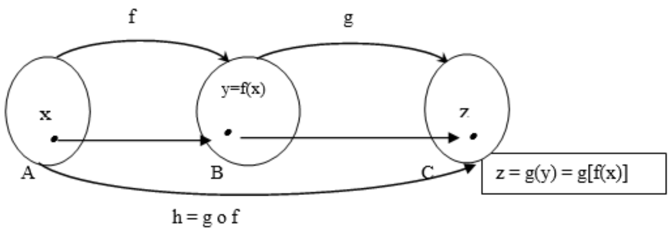
Realice las siguientes operaciones:

a) $(f\pm g)(x)$ b) $(f.g)(x)$ c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

4.8. Composición de Funciones

A partir de ciertas funciones podemos construir otras nuevas funciones, este nuevo procedimiento será el que vamos a analizar. Sean $A, B, C \subset \mathbf{R}$, f una función de A en B y g una función de B en C. A la función h de A en C definida por h(x) = g[f(x)]se denomina función compuesta. Hay varias formas de notar a la función compuesta: $h(x) = g[f(x)] = g \circ f = g f$. Se lee "g de f " o g compuesto de f.

La representación en un diagrama de Venn es:



Para poder hacer esta operación es necesario que el conjunto de llegada de *f* sea igual al conjunto de salida de g $\left(Im_f \subseteq Dom_g\right)$.

La nueva función se la representa así:

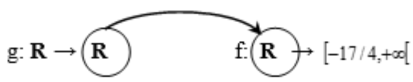
$$\begin{aligned} h : A &\rightarrow C \\ x &\rightarrow z = g[f(x)] \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos:

1. $g(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y $f(x): \mathbf{R} \rightarrow [-17/4, +\infty[$

$x \rightarrow g(x) = 3 - 4x.$ $x \rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 2.$ Calcular la composición f o g.

Para calcular f o g disponemos las funciones de la siguiente forma:



Vemos que la dimensión de la imagen **g** es igual al dominio de **f**, por lo tanto es posible realizar la composición. En otras palabras, la función **f** admite a la imagen **g**.

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= f(3 - 4x) = (3 - 4x)^2 - 5(3 - 4x) + 2 \\ &= 9 - 24x + 16x^2 - 15 + 20x + 2 \\ &= 16x^2 - 4x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ g: \mathbf{R} &\rightarrow [-17/4, +\infty[\\ x &\rightarrow y = 16x^2 - 4x - 4 \end{aligned}$$

2. Se $h: R \rightarrow [\frac{3}{4}, +\infty[$ $\wedge$ $t: R \rightarrow [-\frac{16}{3}, +\infty[$. Calcular $(t \circ h)(x)$

$x \rightarrow y = x^2 - 3x + 3$ $x \rightarrow y = 3x^2 - 2x - 5$

Como la condición no coincide, le cambiamos al conjunto de salida de $t(x)$ y verificamos el cambio que sufre el conjunto de llegada. Para esto primero completamos cuadrados:

$$y = 3x^2 - 2x - 5 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 5 - \frac{1}{3} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}$$

$x \in [\frac{3}{4}, +\infty[\quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} \leq x < +\infty$

$\frac{3}{4}-\frac{1}{3} \leq x-\frac{1}{3} < +\infty \qquad \rightarrow \qquad \frac{5}{12} \leq x-\frac{1}{3} < +\infty$

$\frac{25}{144} \leq \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 < +\infty \qquad \rightarrow \qquad \frac{25}{48} \leq 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 < +\infty$

$\frac{25}{48}-\frac{16}{3} \leq 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{3} < +\infty \qquad \rightarrow \qquad -\frac{77}{16} \leq 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{3} < +\infty$

Quedando por lo tanto así: h: $R \rightarrow [\frac{3}{4}, +\infty[$ $\qquad$ t: $[\frac{3}{4}, +\infty[\rightarrow [-\frac{77}{16}, +\infty[$

$x \rightarrow y = x^2 - 3x + 3 \qquad x \rightarrow y = 3x^2 - 2x - 5$

Una vez cumplida la condición podemos encontrar la composición:

$$(t \circ h)(x) = t[h(x)] = t(x^2 - 3x + 3) = 3(x^2 - 3x + 3)^2 - 2(x^2 - 3x + 3) - 5$$

$$(t \circ h)(x) = 3x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x - 2$$

3. Sea $f(x)=\begin{cases} 3x^2 - x, & x \leq 1 \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} x + 1, & x < -1 \\ x^3, & |x| \leq 1 \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$

Calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

a) Para calcular f o g , vamos a considerar que $g(x) = y$ por lo que f o g $= f[g(x)] = f(y)$, es decir:

$$f(y)=\begin{cases} 3y^2 - y, & y \leq 1 \\ 3 - y, & y > 1 \end{cases}$$

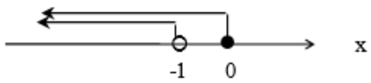
Tenemos que analizar dos casos de f para g(x):

Caso I $\qquad f(y) = 3y^2 - y, \quad y \leq 1$

i) $g(x) = x + 1$, para $x < -1$.

Como $g(x) \leq 1$ entonces: $\quad x + 1 \leq 1$

como $x < -1$ tenemos que: Siendo $\quad x \leq 0$



En donde lo común es: $-\infty < x < -1$ para lo cual

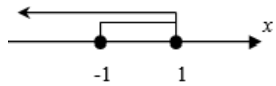
$$f \circ g = 3(x+1)^2 - (x+1) = 3x^2 + 6x + 3 - x - 1 = 3x^2 + 5x + 2$$

La composición es: f o g $= 3x^2 + 5x + 2$, para $x < -1$

ii) $g(x) = x^3$, para $|x| \leq 1$.

Como $g(x) \leq 1$, tenemos entonces: $x^3 \leq 1$

Siendo $|x| \leq 1$, tenemos: $x \leq 1$



Obtenemos que : $-1 \leq x \leq 1$ con lo cual

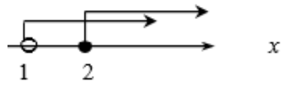
f o g $= 3(x^3)^2 - (x^3) = 3x^6 - x^3$

Es decir f o g $= 3x^6 - x^3$, para $|x| \leq 1$.

iii) $g(x) = 3 - x,\ x > 1.$

Como $g(x) \leq 1$ entonces: $3 - x \leq 1 \ \rightarrow\ x \geq 2$

Como x >1, tenemos que:



Siendo $x \geq 2$

La composición sería:

$$f \circ g = 3(3 - x)^2 - (3 - x) = 27 - 18x + 3x^2 - 3 + x$$

$$= 3x^2 - 17x + 24$$

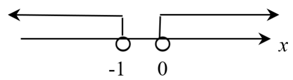
Luego $f \circ g = 3x^2 - 17x + 24$, para $x \geq 2$.

Caso II $f(y) = 3 - y$, $y > 1$ es decir $g(x) > 1$.

i) $g(x) = x + 1,\ x < -1.$

Como $g(x) > 1$, entonces: $x + 1 > 1 \ \rightarrow\ x > 0$

como $x < -1$ resulta que:

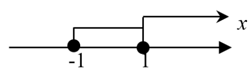


No hay nada en común, por lo tanto, para este literal no existe la composición.

ii) $g(x) = x^3,\ |x| \leq 1.$

Como g(x) > 1, entonces:$x^3 > 1 \ \rightarrow\ x > 1$

como $|x| \leq 1$ tenemos:

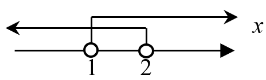


Al no existir nada en común $f \circ g = \emptyset$

iii) $g(x) = 3 - x,\ x > 1.$

Siendo $g(x) > 1$, entonces: $3 - x > 1;\ x < 2$

como x >1, tenemos que:



Habiendo una intersección de: $1 < x < 2$

Por lo tanto $f \circ g = 3 - (3 - x) = 3 - 3 + x = x$

Luego $f \circ g = x$ para $1 < x < 2$.

De los resultados anteriores f o g queda definida así:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5x + 2, & \text{Si } x < 1 \\ 3x^6 - x^3, & \text{Si } |x| \leq 1 \\ x, & \text{Si } 1 < x < 2 \\ 3x^2 - 17x + 24, & \text{Si } x \geq 2 \end{cases}$$

b) Para calcular g o f, consideramos que: y = f(x).

Entonces: $$g(y) = \begin{cases} y+1, & y<-1 \\ y^3, & |y| \le 1 \\ 3-y, & y>1 \end{cases}$$

Por lo que tenemos ahora que analizar tres casos de g para f(x).

Caso I $\quad g(y) = y + 1, \qquad y < -1.$

i) $f(x) = 3x^2 - x, \ \ x \le 1.$

Como $y < -1$, entonces: $3x^2 - x < -1$

$$3x^2 - x + 1 < 0$$

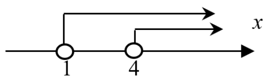
$$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{6}$$

Al existir raíces imaginarias la inecuación no tiene solución, por lo tanto, no hay solución para el caso i)

ii) $f(x) = 3 - x \quad , \ x > 1.$

Como $y < -1$, entonces : $3 - x < -1 \quad \rightarrow \quad x > 4$

Por condición $x > 1$, entonces:



Siendo $x > 4$

Por lo que $g \circ f = (3 - x) + 1 = 4 - x$, para $x > 4$.

Caso II $\quad g(y) = y^2, \ \ |y| \le 1.$

i) $f(x) = 3x^2 - x, \ \ x \le 1.$

Como $|y| \le 1$ entonces: $\quad |3x^2 - x| \le 1$

$$-1 \le 3x^2 - x \le 1$$

$$-\frac{1}{3} \le x^2 - \frac{1}{3}x \le \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{36} \le x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{36}$$

$$-\frac{11}{36} \le \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \le \frac{13}{36}$$

La parte izquierda es siempre verdadera, es decir la solución es los **R**, por lo que resolvemos la parte derecha:

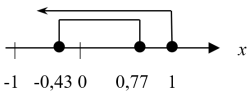
$$\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \le \frac{13}{36} \quad \rightarrow \quad |x - 1/6| \le \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$-\frac{\sqrt{13}}{6} \le x - \frac{1}{6} \le \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{13}}{6} + \frac{1}{6} \le x \le \frac{\sqrt{13}}{6} + \frac{1}{6}$$

Por lo tanto, la solución final es:

$$\frac{1-\sqrt{13}}{6} \le x \le \frac{1+\sqrt{13}}{6} \quad \rightarrow \quad -0{,}43 \le x \le 0{,}77$$

Como la limitación es $x \le 1$, entonces



Por lo tanto para $\frac{1-\sqrt{13}}{6} \le x \le \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ $\quad g \circ f = (3x^2 - x)^3$

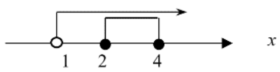
ii) $\quad f(x) = 3 - x, \quad x > 1.$

Como $|y| \le 1$ entonces: $|3 - x| \le 1$

$$-1 \le 3 - x \le 1 \quad \rightarrow \quad -4 \le -x \le -2$$

$$4 \ge x \ge 2 \quad \rightarrow \quad 2 \le x \le 4$$

Como la limitación es $x > 1$ tenemos:



Siendo $2 \le x \le 4$

Entonces para $2 \le x \le 4$, $g \circ f = (3 - x)^3$

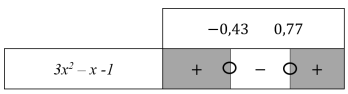
Caso III $\quad g(y) = 3 - y, \quad y > 1.$

i) $\quad f(x) = 3x^2 - x, \quad x \le 1.$

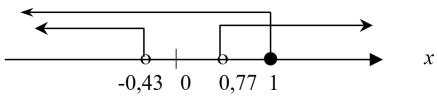
Como $y > 1$, entonces: $\quad 3x^2 - x > 1$

$$3x^2 - x - 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$



Como la limitación es $x \le 1$, hacemos la intersección con el resultado

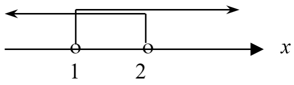


Entonces para $]-\infty; -0{,}43[\, \cup \,]\, 0{,}77; 1\,]$, $g \circ f = 3 - (3x^2 - x) = 3 + x - 3x^2$

ii) $\quad f(x) = 3 - x, \; x > 1.$

Siendo $y > 1$ entonces: $\quad 3 - x > 1 \quad \rightarrow \quad x < 2$

Como está limitado para $x > 1$, entonces:



Por lo que para $1 < x < 2$, $g \circ f = 3 - (3 - x) = x$

Finalmente, la composición g o f quedaría así:

$$g \circ f = \begin{cases} -3x^2 + x + 3, & \text{Si }]-\infty; 0{,}43[\cup]0{,}77; 1] \\ (3x^2 - x)^3, & \text{Si } \frac{1-\sqrt{13}}{6} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{6} \\ x, & \text{Si } 1 < x < 2 \\ (3-x)^3, & \text{Si } 2 \leq x \leq 4 \\ 4 - x, & \text{Si } x > 4 \end{cases}$$

Ejercicios propuestos:

1. Dado: $f(x) = x^2 - 5x + 1 \ \forall x \in \mathbf{R}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{si } |x-1| < 6 \\ 3 - x, & \text{si } |x-1| \geq 6 \end{cases}$

   Calcule: a) f o g b) g o f

2. Sí: $f: \mathbf{R} \to [1, +\infty[$ $\quad g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\quad h:]-\infty, -\frac{3}{4}] \to [-\frac{25}{4}, +\infty[$

   $x \to y = x^2 + 1$ $\quad x \to y = 2 - 3x$ $\quad x \to y = 2x^2 - 3x - 2$

   Calcule: a) f o h b) f o g c) g o f d) g o h e) h o f f) h o g

3. Si $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < -2 \\ 3x^2 - 1, & |x| \leq 2 \\ x^2 - 3x - 2, & x > 2 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 3x - 4, & x \leq 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$

   $h(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < 3 \\ x^2 + x - 2, & x \geq 3 \end{cases}$

   Calcule: a) f o h b) f o g c) g o f d) g o h e) h o f f) h o g

4.9. Funciones Reales

Se llama a f una función real sí A, B $\subseteq$ **R** no vacíos y f una aplicación de A en B. Vamos a analizar algunas funciones reales importantes.

4.9.1. Función Polinomial

Se llama función en una variable:

$$P: \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$
$$x \to P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Donde: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbf{R}$ son los coeficientes de la función.

Si $a_n \neq 0$, n si es entero positivo será el grado del polinomio.

Ejemplos:

1. $P(x) = 3x^2 + 4x - 2$. Este polinomio tiene grado 2.

2. $P(x) = 3x + 1$. Tiene 1er grado.
3. $P(x) = k$. Tiene grado "0".
4. $P(x) = 0$. No tiene grado y se llama polinomio nulo.

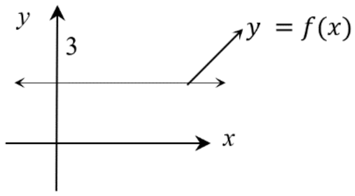
4.9.2. Función Constante

Sea $A, B \subseteq \mathbf{R}$ y f una función de A en B. Definida por $f(x) = \mathbf{K}$ la cual se llama función constante. Donde $\mathbf{K} \in \mathbf{R}$

Ejemplos:

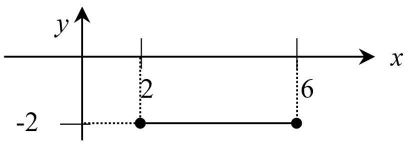
1. Sea la función f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ **.** Representar gráficamente.

$$x \rightarrow f(x) = 3.$$



Esta función no es inyectiva ni Sobreyectiva, es par, es creciente y decreciente.

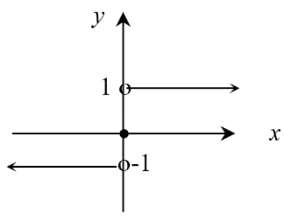
2. A = [2, 6] y f(x) = -2. Notamos que para cualquier valor de "x" f(x) siempre tendrá el mismo valor, por lo que es una función constante. Su gráfica será:



4.9.3. Función Signo de x (Sgn x)

La función signo viene definida así:

$$\mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



Podemos notar lo siguiente:

1) $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$: $x_1 < x_2 \rightarrow \mathrm{Sgn}\, x_1 \leq \mathrm{Sgn}\, x_2$, por lo tanto f no es decreciente.
2) Es una función impar.
3) No es periódica.

4.9.4. Función de Dirichlet

Está definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \in \mathbf{R} - A \end{cases}$$

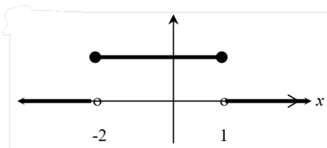
Esta función se llama función característica de A, se le denota así: $\coprod$ A.

Esta función no es monótona, no es par ni impar, no es periódica.

Ejemplo:

Sea A = [-2, 1] represente la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R - A \end{cases}$$



4.9.5. Función Parte Entera

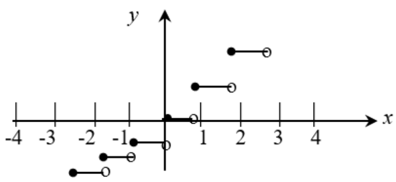
Se llama **parte entera** de x ∈ **R**, al mayor entero de "x" no superior a x, se lo denota así: [x] y se lo representa así:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$$

$$x \rightarrow f(x) = [x] = \begin{cases} x, & x \in Z \\ x', & x' < x < x' + 1, x' \in Z \end{cases}$$

x	-2	-1,9	-1,5	-1,1	-1	-0,9	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	0,9	1	1,1	1,5	1,9	2
[x]	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1	1	1	2

Su gráfica es:



Esta función es creciente, no es par ni impar, no es periódica

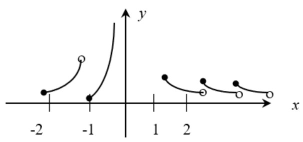
Ejercicios resueltos:

Graficar la función f: $[-2, 2] \rightarrow$ **R**.

$$x \rightarrow f(x) = [x]/x$$

Realizamos una tabla:

x	-2	-1,9	-1,5	-1,1	-1	-0,9	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	0,9	1	1,1	1,5	1,9	2
[x]/x	1	1,05	1,3	1,8	1	1,1	2	10	∞	0	0	0	1	0,9	0,66	0,5	1



Graficar la función f: $[-2, 2] \rightarrow$ **R.**

$$x \rightarrow f(x) = [x^2 - x + 1].$$

La imagen de esta función es $y \geq \frac{3}{4}$ por lo tanto el menor entero de la función es cero, por lo que:

Sí $[\mathbf{x^2 - x + 1}] = \mathbf{0}$: $\quad 0 \leq x^2 - x + 1 < 1 \rightarrow -1 \leq x^2 - x < 0$

$$-1 + \frac{1}{4} \leq x^2 - x + \frac{1}{4} < \frac{1}{4}$$

$$-\frac{3}{4} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq -\frac{3}{4} \quad \text{Siempre es verdadero} \qquad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \quad \to \quad \left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \quad \to \quad \text{Sol.: } 0 < x < 1$$

$$\textbf{Sí } [\mathbf{x^2 - x + 1}] = \mathbf{1} \qquad 1 \leq x^2 - x + 1 < 2 \;\to\; 0 \leq x^2 - x < 1$$

$$\frac{1}{4} \leq x^2 - x + \frac{1}{4} < \frac{5}{4} \quad \to \quad \frac{1}{4} \leq \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4}$$

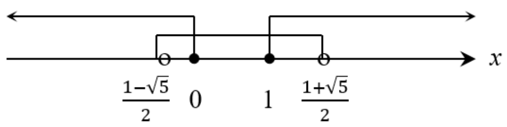
$$\frac{1}{2} \leq \left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\left|x-\frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2} \qquad \wedge \qquad \left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \geq x - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \qquad \wedge \qquad -\frac{\sqrt{5}}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$0 \geq x \geq 1 \qquad \wedge \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Relacionando los dos resultados:



$$\text{Sol.: } x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$$

$$\textbf{Sí } [\mathbf{x^2 - x + 1}] = \mathbf{2} \qquad 2 \le x^2 - x + 1 < 3$$

$$1 \le x^2 - x < 2 \rightarrow \frac{5}{4} \le x^2 - x + \frac{1}{4} < \frac{9}{4} \rightarrow \frac{5}{4} \le \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$$

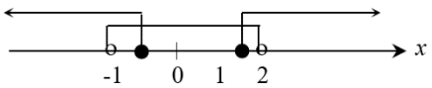
$$\frac{\sqrt{5}}{2} \le \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$$

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| \ge \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \wedge \quad \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$$

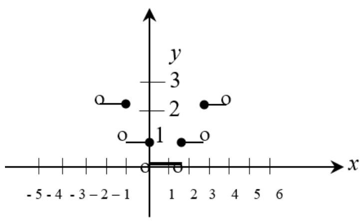
$$-\frac{\sqrt{5}}{2} \ge x - \frac{1}{2} \ge \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \wedge \quad -\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \ge x \ge \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \wedge \quad -1 < x < 2$$

$$-0{,}62 \ge x \ge 1{,}62$$



$$\text{Sol.: } x \in \left]-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 2\right[$$



Ejercicios propuestos.

Represente:

a) $y = \operatorname{sgn}(x^2 + 3x - 4)$

b) $y = \operatorname{sgn}(3x - 4)$

c) $y = \operatorname{sgn}\left(\frac{x-4}{2+3x}\right)$

d) $y = \operatorname{sgn}\left(\frac{x-4}{2+3x^2}\right)$

e) Si $A = [3,4]$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R - A \end{cases}$

f) $y = [x^2 - 4]$

g) Si $A = [-3,3]$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R - A \end{cases}$

h) $y = [3x - 4]$

4.9.6. Función Afín y Lineal

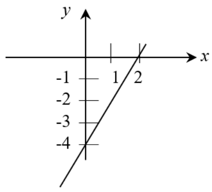
Se llama función afín a la siguiente función polinomial de primer grado:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = ax + b.$$

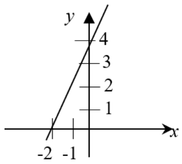
Donde: $a, b \in \mathbf{R}$ y $a \neq 0$.

Analicemos esta función de acuerdo con sus coeficientes. Si $a > 0$ la función es estrictamente creciente, es biyectiva, el coeficiente a es la pendiente de la recta y "b" es el valor que corta al eje "y".

Ejemplos: 1) $y = 2x - 4$.

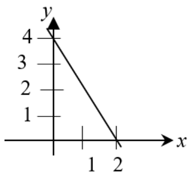


2) $y = 2x + 4$.



Sí $a < 0$ la función es estrictamente decreciente, y biyectiva.

3) $y = -2x + 4$.



Si $b = 0$, entonces la función $f(x) = ax$ y se llama lineal, porque cumple la siguiente propiedad:

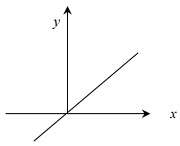
$$\forall a, b \in \mathbf{R}, \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \text{ se tiene que:}$$

$$f(a\,x_1 + bx_2) = af(x_1) + b\,f(x_2)$$

Esto es fácil notar si partimos de que: $f(x_1) = ax_1$ y $f(x_2) = ax_2$

$$f(a\,x_1 + bx_2) = a(a\,x_1 + bx_2) = a\,(ax_1) + b\,(ax_2) = a\,f(x_1) + b\,f(x_2)$$

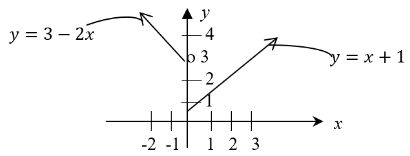
Si $b = 0$ y $a = 1$, entonces $f(x) = x$, esta función se llama función identidad, y se representa así:



Es una función creciente, biyectiva, impar, notamos que $\text{Dom } f = \text{Rec } f = \text{Im } f = \mathbf{R}$.

4. $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \to y = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{Si } x < 0 \\ x + 1, & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$ Graficamos cada función:



El $\mathrm{Dom_t} = \mathbf{R}$, y la imagen le calculamos así:

Para $y = 3 - 2x$ $\quad x < 0$ $\quad$ y $\quad$ Para $y = x + 1$ $\quad x \geq 0$

$-2x > 0$ $\qquad\qquad x + 1 \geq 1$

$3 - 2x > 3$ $\qquad$ Siendo la imagen $\mathrm{Im_d} = [1, +\infty[$

Siendo la imagen $\quad \mathrm{Im_i} =]3, +\infty[$.

La imagen de la función es la unión de las dos: $\quad \mathrm{Im_h} = [1, +\infty[$

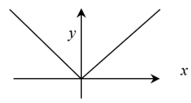
4.9.7. Función Valor Absoluto

Sea f una función de **R** en **R** definida por $f(x) = |x|$, su representación es:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$$

$$x \rightarrow f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Su gráfica es:

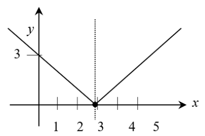


Esta función es monótona a trazos, es par.

Ejercicios resueltos:

1. Grafique: $f(x) = |x - 3|$.

$$\text{Por definición: } |x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3), & x - 3 < 0 \end{cases}$$



2. Grafique : $y = 3|2 - x| - 3x + 2|2x + 3| - 4$

Los valores absolutos los representamos en una tabla y graficamos por regiones:

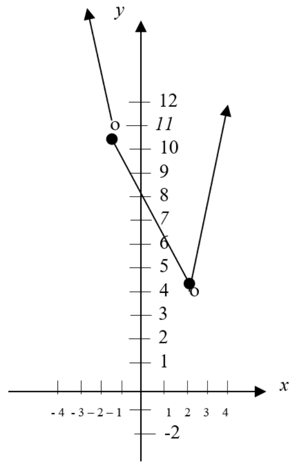
	$-\frac{3}{2}$		2
$2x + 3$	$-$	$+$	$+$
$2 - x$	$+$	$+$	$-$
	R_1	R_2	R_3

$$R_1:]-\infty, -\frac{3}{2}[$$

$$y = 3(2 - x) - 3x + 2(-2x - 3) - 4 = 6 - 3x - 3x - 4x - 6 - 4 = -10x - 4$$

$$R_2: [\frac{3}{2}, 2]$$
$$y = 3(2 - x) - 3x + 2(2x + 3) - 4 = 6 - 3x - 3x + 4x + 6 - 4 = -2x + 8$$
$$R_3:]2, +\infty]$$
$$y = 3(-2 + x) - 3x + 2(2x + 3) - 4 = -6 + 3x - 3x + 4x + 6 - 4 = 4x - 4$$

Representamos cada región en el plano



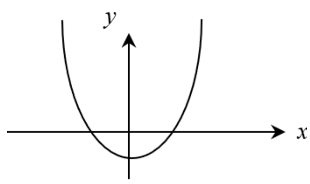
4.9.8. Función Cuadrática

Sea $a, b, c \subseteq \mathbf{R}$ y f una función de **R** en **R** definida así:

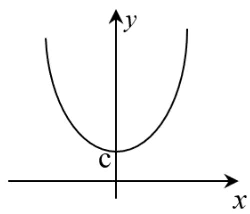
$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Donde $a \neq 0$, analizamos el comportamiento de esta función:

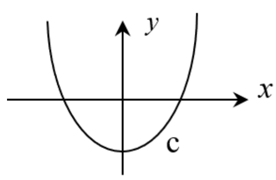
i) Sí $a > 0$ y $b = c = 0$, la función $f(x) = ax^2$es monótona a trazos, es estrictamente decreciente de $]-\infty, o]$ y es estrictamente creciente de$[0, \infty[$. El único cero de f es el cero, es una función par. Su gráfico es:



ii) Sea $b = 0$, si $a > 0$ y $c > 0$ la gráfica de la función no corta al eje de la "x", luego f no tiene ceros reales; y el recorrido de f es $[c, +\infty[$, siendo $f(x) = ax^2 + c$, la función es monótona a trazos y su gráfico es:



Si le combinamos el valor de c por $c < 0$, la gráfica si corta al eje "x", teniendo dos ceros reales.



iii) Sea $c = 0$, si $a > 0$ y $b \neq 0$, la función $f(x) = ax^2 + bx$ tiene dos ceros reales y es monótona a trazos, para definir la monotonía hacemos lo siguiente:

$$f(x) = ax^2 + bx$$

Transformamos la parte derecha en una expresión positiva es decir:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) + \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

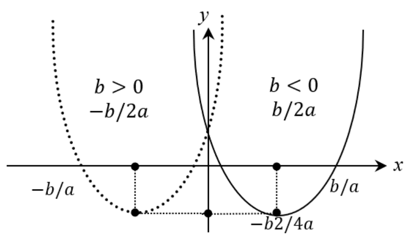
Por lo tanto, $f(x) + \frac{b^2}{4a} \geq 0$ y $f(x) \geq -\frac{b^2}{4a}$

Este será el recorrido de la función: **Rec f** $= \left[-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{4a}}, +\infty\right[$.

Podemos notar que si $f(x) = -\frac{b^2}{4a}$ y $b > 0$, entonces $x = -\frac{b}{2a}$, este punto será el mínimo de la función.

Y podemos dividir el dominio en dos partes:

De: $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, la función es decreciente y de $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$, la función es creciente. Para $b < 0$ cambia el valor de x, siendo $x = \frac{b}{2a}$.



iv) Sea $b \neq 0$, si $a \neq 0$ y $a > 0$, entonces $f(x) = ax^2 + bx + c$, definamos, su recorrido.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) + \frac{b^2}{4a} - c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

La parte derecha es positiva, por lo tanto:

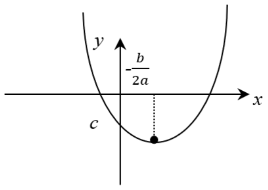
$$f(x) + \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0 \quad \text{y} \quad f(x) \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Entonces el recorrido de la función es Rec f $= \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right[$.

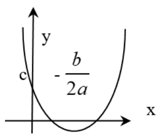
Si $f(x) = \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right[$, entonces $x = -\frac{b}{2a}$. Este punto será el mínimo de la función dividiendo el dominio en dos partes.

La función es decreciente para $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ y es creciente para $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.

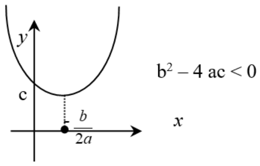
Si $b^2 - 4ac > 0$ la función **f** tiene dos ceros reales



Si $b^2 - 4ac = 0$ la función f tiene un cero real.



Si $b^2 - 4ac < 0$ la función **f** no tiene ceros reales.



Como ejercicio se queda el análisis cuando $a < 0$.

Ejercicios resueltos:

1. Analice la función: $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

   I. Calculamos el recorrido y el punto mínimo.

Sea $f(x) = x^2 - 5x + 4 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

$$f(x) + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$

$$f(x) + \frac{9}{4} \geq 0 \qquad\qquad f(x) \geq -\frac{9}{4}$$

Entonces el recorrido de la función es: **Rec f** $= \left[-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}, +\infty\right[$. El punto mínimo es: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

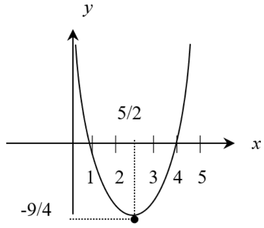
   II. Puntos de corte con los ejes.

$x = 0 \quad f(x) = 4 \qquad f(x) = 0 \qquad\qquad x^2 - 5x + 4 = 0$

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

$$x = 4 \qquad\qquad x = 1$$

III. Gráfico.



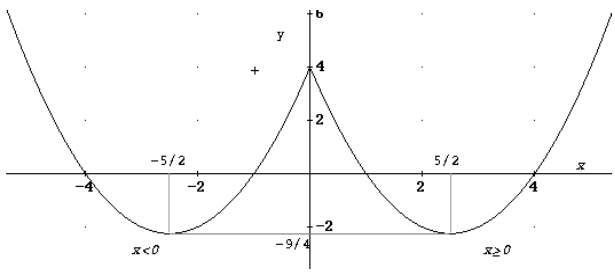
Esta función es estrictamente decreciente de: $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right]$. Y es estrictamente creciente de: $\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$.

2. Analice y grafique la función $f(x) = x^2 - 5|x|+4$.

$$f(x) = x^2 - 5|x| + 4 = \begin{cases} x^2 - 5x + 4, & x \geq 0 \\ x^2 + 5x + 4, & x < 0 \end{cases}$$

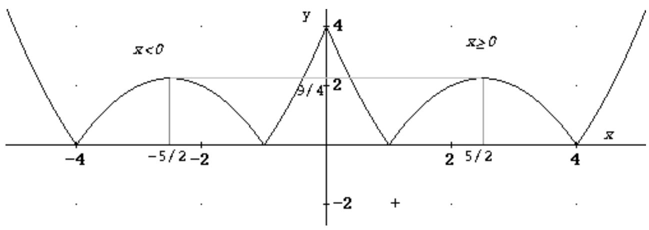
Tenemos que graficar las dos condiciones:

i) $f(x) = x^2 - 5x + 4$, sí $x\ ^3\ 0$. ii) $f(x) = x^2 - 5x + 4$, sí $x < 0$.



Esta función es estrictamente decreciente en los intervalos de $\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right]$ y $\left[0,\frac{5}{2}\right]$, es estrictamente creciente de $\left[-\frac{5}{2},0\right]$ y $\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$. Esta función es par.

3. Si en el ejemplo anterior nos piden que representemos: $f(x) = |x^2 - 5|x| + 4|$, la parte negativa del gráfico se transforma en positiva, así:



4. Grafique: $h(x) = |2x^2 - 3x - 5|$

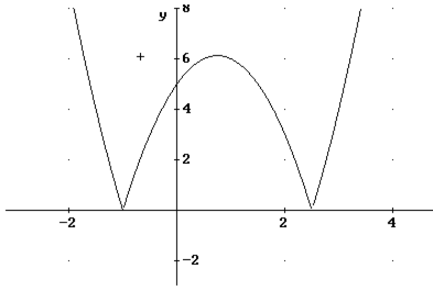
Primeramente, graficamos sin valor absoluto y luego la imagen negativa la hacemos positiva.

$h(x) = 2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - 5 - \frac{9}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$. El vértice es: $\left(\frac{3}{4},\frac{49}{8}\right)$

Encontramos los puntos de corte: $x = 0 \qquad y = -5$

$$y = 0 \qquad 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$(2x-5)(x+1)=0 \qquad x=\frac{5}{2} \qquad x=-1$$



5. Grafique la siguiente función: $g(x)=x^2-4|x-2|+3$

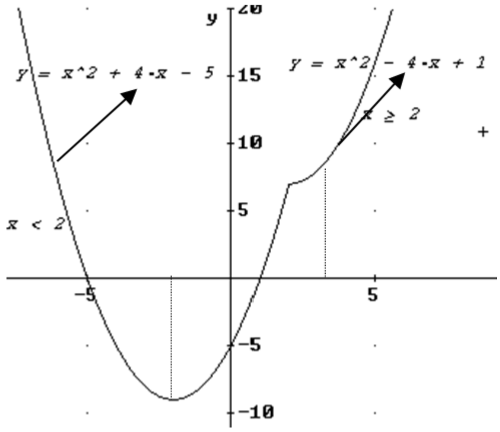
Por definición de valor absoluto:

$$g(x)=\begin{cases} x^2-4(x-2)+3=x^2-4x+11; & x-2\geq 0 \\ x^2-4(-x+2)+3=x^2+4x-5; & x-2<0 \end{cases}$$

Para $x-2<0 \rightarrow\ x<2$, la función es $g(x)=x^2+4x-5=x^2+4x+4-5-4=(x+2)^2-9$

Para $x-2\geq 0 \rightarrow\ x\geq 2$, la función es: $g(x)=x^2-4x+11=x^2-4x+4+11-4=(x-2)^2+7$

Su representación gráfica es:



Ejercicios propuestos:

Grafique:

a) $y = |x+1|$

b) $y = |x^2-3|x|-10|$

c) $y=3-|2x+3|$

d) $y=|2-3x|-2|3x-4|-2-3x$

e) $y=\dfrac{|1-2x|}{x+3}$

f) $y=5-2|3-2x|$

g) $y=\log|x+1|$

h) $y=|2x^2-3x|-5x-2$

i) $y=\left|3-2x^2-3|x|\right|$

j) $y=2x^2-3|2-3x|$

k) $y=\dfrac{3-4|2x-3|+4x}{3-2x^2}$

l) $y=3-2|x^2-2x|$

m) $y=\dfrac{3-4x}{5-3|x-2x^2|}$

n) $y=|\log|3-x||$

4.9.9. Funciones Potenciales

Estas funciones tienen la forma $f(x) = x^n$ donde n puede ser un entero positivo o negativo.

- **Para la potencia positiva:**

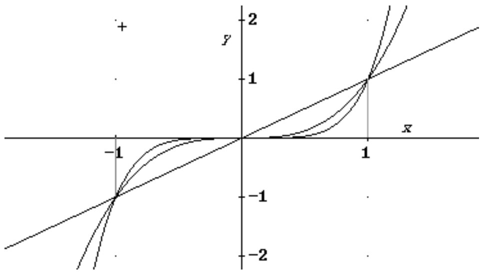
Sea f una función de **R** en **R** definida por $f(x) = x^n$, donde $n \in \mathbf{Z}$, entonces esta función se llama función potencia positiva.

Analizamos el comportamiento de la función, la misma que puede tener potencias impares y potencias pares.

i) **Si n es impar**.

Sea $f(x) = x^n$, entonces $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$.

Gráficamente se representa así:

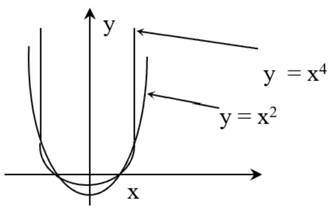


Podemos notar que a medida que n aumenta, la función tiende a los ejes, la función es impar, es biyectiva, es estrictamente creciente.

ii) **Si n es par.**

Sea $f(x) = x^n$, entonces $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^6$.

Su representación gráfica es:



Esta función a medida que **n** aumente también tiende a los ejes, es par, monótona a trazos.

- **Para la potencia negativa:**

Sea f una función de $\mathbf{R}-\{0\}$ en $\mathbf{R}-\{0\}$, definida por $f(x) = x^{-n}$,, donde $n \in \mathbf{Z}^+$, entonces esta función se llama función potencia negativa.

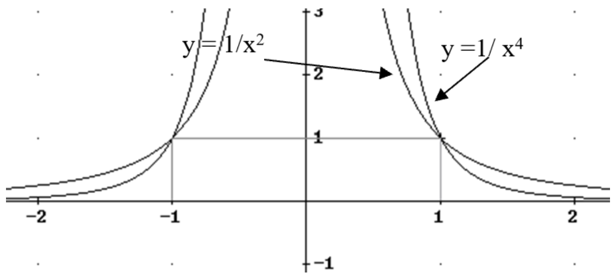
$$f(x) = \mathbf{R}-\{0\} \rightarrow \mathbf{R}-\{0\}$$

$$x \rightarrow f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

i) **Si n es par.**

Sea $f(x) = \frac{1}{x^n}$, entonces $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $f(x) = \frac{1}{x^6}$.

Su representación gráfica es:

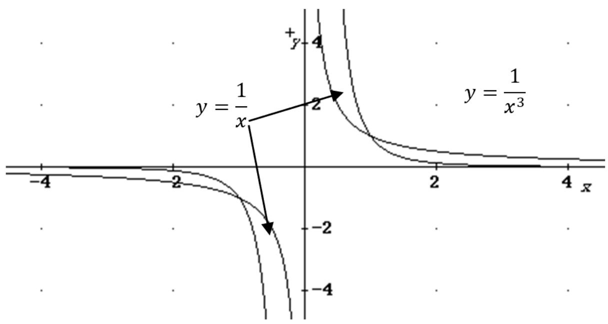


A medida que n aumenta, el gráfico se aleja del eje "y", y se acerca al eje "x", teniendo como referencia x = 1 y x = -1. Esta función es par, es monótona a trazos.

ii) **Si n es impar.**

Sea $f(x) = \frac{1}{x^n}$, entonces $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $f(x) = \frac{1}{x^3}, \ldots$

Su representación gráfica es:



Es una función impar, es biyectiva.

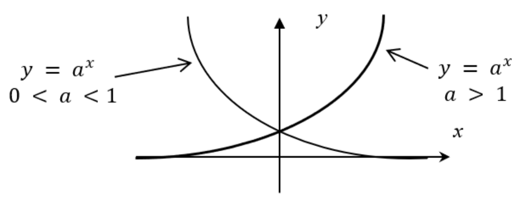
4.9.10. Función Exponencial

Sea f una función de **R** en **R**$^+$ definida por $f(x) = a^x$, esta se llama función exponencial, donde

$a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$, se representa así:

$$\begin{aligned} f(x): \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^+ \\ x &\rightarrow f(x) = a^x. \end{aligned}$$

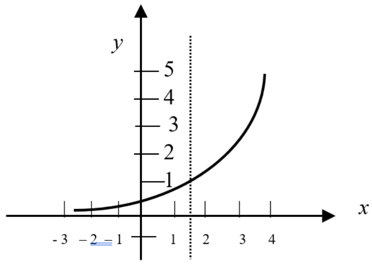
Esta función será de dos tipos: cuando $0 < a < 1$ y cuando $a > 1$. Su gráfico es:



Si $0 < a < 1$ la función es estrictamente decreciente, biyectiva. Si $a > 1$ es estrictamente creciente y biyectiva.

Ejercicios resueltos:

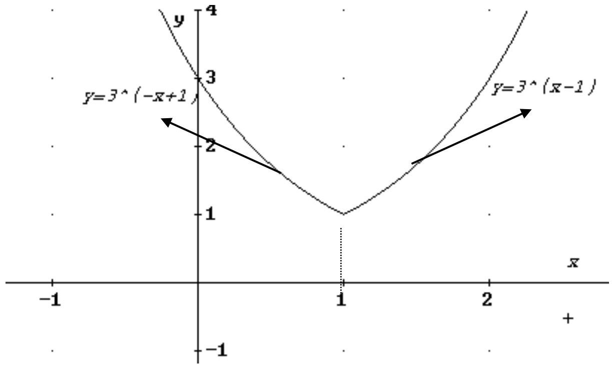
1. Graficar: $y = 2^{2x-3}$



2. Graficar: $y = 3^{|x-1|}$

Por definición: $y = \begin{cases} 3^{x-1}\ ; & x \geq 1 \\ 3^{1-x} & x < 1 \end{cases}$

Obteniendo dos gráficos uno en cada condición.



Ejercicios propuestos:

Graficar

a) $y = 2^{2x-3}$ b) $y = 3^{3x^2+2x-5}$ c) $y = 2^{|x-2|}$ d) $y = 2^{|x^2-x-6|}$

- **Ecuación Exponencial**

En primer lugar, recordaremos las leyes de los exponentes:

1) $a^x\, a^y \ = \ a^{x+y}$

2) $\frac{a^x}{a^y} \ = a^{x-y}$

3) $(a^x)^y \ = \ a^{xy}$

Cuando hablamos de ecuaciones exponenciales estas pueden ser de una o más variables.

Ejercicios resueltos:

Resolver la ecuaciones:

a) $2^{3x^2+11x} = \frac{1}{64}$

Sí: $2^{3x^2+11x} = \frac{1}{64}$

$2^{3x^2+11x} \ = \ 2 - 6$

$3x^2 + 11x \ = \ -6$

b) $2^{2x+8} + 8 = 96\ 2^x$

$2^{2(x+4)} - 6(16)2^x + 8 = 0$

$2^{2(x+4)} - 6\ \ 2^{x+4} + 8 = 0$

$(2^{x+4} - 4)(2^{x+4} - 2) = 0$

$$3x^2 + 11x + 6 = 0$$
$$(3x + 2)(x + 3) = 0$$
$$x = -\frac{2}{3} \qquad x = -3$$

$$2^{x+4} = 4 = 2^2 \qquad 2^{x+4} = 2$$
$$x + 4 = 2 \qquad x + 4 = 1$$
$$x = -2 \qquad x = -3$$

c) $\sqrt{9^{x(x+1)-\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3}$

$$9^{\left[\frac{2x^2+2x-1}{2}\right]\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}}$$
$$3^{2\left[\frac{2x^2+2x-1}{2}\right]\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}}$$
$$\frac{2x^2+2x-1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$4x^2 + 4x - 2 = 1$$
$$4x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$(2x + 3)(2x - 1) = 0$$
$$x = -\frac{3}{2} \quad x = \frac{1}{2}$$

d) $3^{x+1} + 2\,3^{2-x} - 29 = 0$

$$3\,3^{2x} + 2\,3^2\,3^{-x} - 29 = 0$$
$$3\,3^x + \frac{18}{3^x} - 29 = 0$$
$$3\,3^{2x} - 29\,3^x + 18 = 0$$
$$\begin{matrix} 1 & -9 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$
$$(3^x - 9)(3\ 3^x - 2) = 0$$
$$3x = 9 \ \rightarrow\ 3^x = 3^2 \ \text{Þ}x = 2$$
$$3.3^x = 2 \ \rightarrow\ 3^x = \frac{2}{3} \ \rightarrow\ x = \log_3 2 - 1$$

Ejercicios propuestos.

Resolver las ecuaciones.

a) $4^{x-2} - 17.2^{x-4} = -1$

b) $2^{2x+2}(10^{x+1}) - 10(2^{3x})5^x = 1200$

c) $\sqrt[x]{16} = 2^x$

d) $\frac{1}{16^{4x-5}} = 64^{3x-8}$

e) $9^x - 10(3^x) + 9 = 0$

f) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0,8x} = \frac{64}{125}$

g) $(0,785)^{2x} = 3,18$

h) $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$

i) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

j) $4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

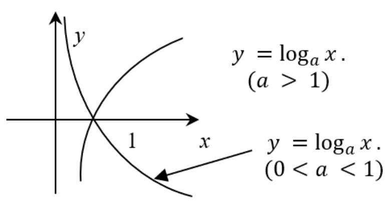
k) $(\frac{5}{4})^{2+4x-x^2} = 0,512$

4.9.11. Función Logaritmo

Esta función es el resultado de calcular la inversa de la función exponencial está definida así:

$$f(x) = \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$$
$$x \ \rightarrow\ f(x) = \log_a x$$

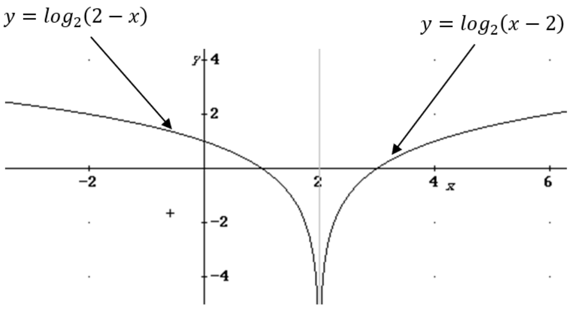
Donde "a" es la base del logaritmo, "x" el número y "y" el valor del logaritmo. De la misma manera que la exponencial la función logaritmo tiene dos gráficos.



Ejercicios resueltos:

1. Graficar: $y = \log_2|2-x|$

Por definición: $\log_2|2-x| = \begin{cases} \log_2(2-x); & 2-x>0 \\ \log_2(x-2); & 2-x<0 \end{cases}$



2. Graficar: $y = \log_2|x^2-5x-4|$

Por definición: $\log_2|x^2-5x-4| = \begin{cases} \log_2 x^2-5x-4, & x^2-5x-4>0 \\ \log_2 -(x^2-5x-4), & x^2-5x-4<0 \end{cases}$

i) Para $x^2-5x-4>0$, tenemos $]-\infty, \frac{5-\sqrt{41}}{2}[\cup]\frac{5+\sqrt{41}}{2}, +\infty[$, en donde los valores $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$, son asíntotas verticales.

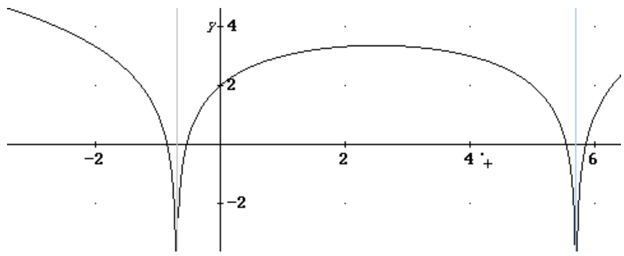
Los puntos de corte con el eje "x" se da cuando $x^2-5x-4=1$, es decir:

$x^2-5x-5=0$ obteniendo los valores $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{45}}{2}$

ii) Para $x^2-5x-4<0$, tenemos: $]\frac{5-\sqrt{41}}{2}, \frac{5+\sqrt{41}}{2}[$

Los puntos de corte con el eje "x" se dan cuando $-(x^2-5x-4)=1$, es decir $x^2-5x-4=-1$, por lo tanto $x^2-5x-3=0$, obteniendo los valores: $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

De esta manera podemos representar el grafico pedido:



Ejercicios propuestos:

Graficar:

a) $y = \log_2(3-|x|)$ b) $y = \log_4(|x-3|)$ c) $y = \log\ (|x-3-2x^2|)$

4.9.12. Ecuaciones Logarítmicas

Para resolver las ecuaciones logarítmicas es necesario conocer las propiedades de los logaritmos, vamos a determinarlas considerando que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial, es decir:

$$y = a^x \qquad \text{entonces la inversa es} \quad x = \log_a y$$

El logaritmo de un número **y** en base **a**, se llama al exponente **x** al que hay que elevar **a** para obtener **y**

Reemplazando el valor de **x** obtenemos: $a^{\log_a y} = y$.

Con esta definición podemos analizar las *propiedades* de los logaritmos:

1. Si la base y el número del logaritmo son iguales, entonces el logaritmo es igual a 1.

   $$\mathbf{\log_a a = 1}$$

Demostración: Sea $y = a$ por definición tenemos que: $a^{\log_a a} = a^1$

De donde: $\log_a a = 1$ **l.q.q.d.**

2. El logaritmo de uno de cualquier base, es igual a cero. $\mathbf{Log_a\ 1 = 0}$

Demostración: Si $y = 1$, entonces $a^{\log_a 1} = 1 = a^0$

Por lo tanto : $\log_a 1 = 0$ **l.q.q.d.**

3. El logaritmo de un producto de números positivos en base a es igual a la suma de los logaritmos de sus factores de la misma base.

   $$\mathbf{\log_a (M_1\, M_2 \ldots M_n) = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \ldots + \log_a M_n}.$$

Demostración: Por la definición:$a^{\log_a (M_1 M_2 \ldots\ldots M_n)} = M1\ M2 \ldots Mn$

$$= a^{\log_a M_1} a^{\log_a M_2} \ldots\ldots a^{\log_a M_n} = a^{og_a M + \log_a M_2 + \ldots\ldots + \log_a M_n}$$

$\log_a (M_1\, M_2 \ldots M_n) = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \ldots + \log_a M_n$ **l.q.q.d.**

4. El logaritmo de una fracción de base a es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador de la misma base.

   $$\text{loga}\ \frac{M}{N} = \log_a M - \log_0 N$$

Demostración: Por definición:$a^{\log_a \frac{M}{N}} = \frac{M}{N} = \frac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}} = a^{\log_a M - \log_a N}$

$\log_a \frac{M}{\rightleftarrows N} = \text{loga}\, M - \text{loga}\, N$. **l.q.q.d.**

5. El logaritmo de un número positivo elevado a un exponente en base a, es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número positivo en base a.

   $$\mathbf{\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M}$$

Demostración:

$$a^{\log_a M^\alpha} = M^\alpha = \left(a^{\log_a M}\right)^\alpha = a^{\alpha \log_a M}$$

$\log_a M^{\alpha} = \alpha \log_a M$ **l.q.q.d.**

6. Si la base de un logaritmo está elevada a un exponente, este es igual al logaritmo dividido para este exponente.

$$\log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M$$

Demostración: Por definición: $(a^n)^{\log_{a^n} M} = M = a^{\log_a M}$

$$a^{n \log_{a^n} M} = a^{\log_a M}$$

$$n \log_{a^n} M = \log_a M$$

$$\log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M \qquad \textbf{l.q.q.d.}$$

7. Si a y M son números positivos y diferentes de uno, entonces: $\mathbf{\log_a M \log_M a = 1}$

Demostración:

$$a^{\log_a M} = M$$

Si le sacamos logaritmo a ambas partes en base M. Obtenemos:

$$\log_M a^{\log_a M} = \log_M M$$

$$\log_a M \log_M a = 1 \qquad \textbf{l.q.q.d.}$$

8. El logaritmo de cambio de base es : $\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$.

Demostración:

$$b^{\log_b M} = M$$

Le sacamos logaritmo en base "a" a ambas partes.

$$\log_a b^{\log_b M} = \log_a M$$

$$\log_b M \log_a b = \log_a M$$

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b} \qquad \textbf{l.q.q.d.}$$

9. Si el número y la base de un logaritmo están al mismo lado del 1 entonces el logaritmo es positivo y si están, en diferentes lados del 1 el logaritmo es negativo.

$$a > 1 \text{ y } M > 1 \Rightarrow \log_a M > 0$$

$$a > 1 \text{ y } M < 1 \Rightarrow \log_a M < 0$$

$$a < 1 \text{ y } M > 1 \Rightarrow \log_a M < 0$$

$$a < 1 \text{ y } M < 1 \Rightarrow \log_a M > 0$$

Demostración:

Sea $a > 1$ y $M > 1$, entonces $a^{\log_a M} = M$

En este caso el exponente no puede ser negativo ni igual a cero, por lo tanto es positivo ($\log_a M > 0$).

Los restantes casos se dejan como tarea.

Ejercicios resueltos.

1. Calcular el valor de los siguientes logaritmos:

i) $\log_{27} 243 = \log_{3^3} 3^5 = \frac{5}{3}\log_3 3 = \frac{5}{3}$ ii) $\log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}}\log_3 3 = 6$

iii) $\log_{a^3} \sqrt[3]{a^4} = \frac{1}{3}\log_a a^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{3}\log_a a = \frac{4}{9}$

2. Encontrar el valor de la base de los siguientes logaritmos:

i) $\log_a 27 = 3$

$a^3 = 27$

$a = 3$

ii) $\log_{a^{-2}} 256 = -2$

$(a^{-2})^{-2} = 256$

$a^4 = 256$

$a = 4$

iii) $\log_{\sqrt[3]{a}} 2 = -1$

$(\sqrt[3]{a})^{-1} = 2$

$\frac{1}{a^{1/3}} = 2$

$a^{1/3} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{8}$

3. Encontrar el número de los siguientes logaritmos:

i) $\log_{\frac{1}{4}} M = 16$

$M = \sqrt[4]{16}$

$M = 2$

ii) $\log_{0,01} M = -2$

$M = (0,01)^{-2}$

$M = \frac{1}{0,0001}$

$M = 10000$

iii) $\log_2 M = \frac{1}{3}\log_2 8 - 2\log_2 \sqrt{3}$

$= 1 - \log_2 3$

$= \log_2 2 - \log_2 3$

$= \log_2 \frac{2}{3}$

$M = \frac{2}{3}$

4. Representar el siguiente ejercicio en un logaritmo de base 2:

$$\log_4 a + \log_8 \sqrt[3]{a} + \log_{1/2} a\sqrt{a} + \frac{1}{\log_a 8} =$$

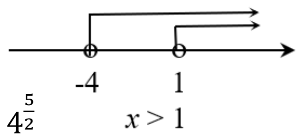
$$= \log_{2^2} a + \log_{2^3} \sqrt[3]{a} + \log_{2^{-1}} a^{\frac{3}{2}} + \log_{2^3} a$$

$$= \frac{1}{2}\log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 a^{\frac{1}{3}} - \log_2 a^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\log_2 a$$

$$= \frac{1}{2}\log_2 a + \frac{1}{9}\log_2 a - \frac{3}{2}\log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 a = -\frac{5}{9}\log_2 a$$

5. Resolver la ecuación:

$\log_{16}(x-1)(\frac{1}{2}\log_4(x+4) = \frac{5}{4}$ Restricción: $x > 1 \wedge x + 4 > 0$



$\log_{4^2}(x-1)\frac{1}{2}\log_4(x+4) = \frac{5}{4}$

$\log_4(x-1) + \log_4(x+4) = \frac{5}{2} = \log_4 4^{\frac{5}{2}}$

$\log_4(x-1)(x+4) = \log_4 4^{\frac{5}{2}}$

$(x-1)(x+4) = 4^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32 \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 32$

$$x^2 + 3x - 36 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(-36)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{153}}{2} = \frac{-3 \pm 12{,}3}{2}$$

$x_1 = 4{,}7$ $\quad$ $x_2 = -7{,}7$ $\quad$ La solución es: $\quad$ $x_1 = 4{,}7$

6. $\log_x(x+2) + \log_{(x+2)} x = \frac{5}{2}$

Restricción: i) $x + 2 > 0$
ii) $x > 0$
iii) $x \neq 1$

$$\log_x(x+2) + \frac{1}{\log_x(x+2)} = \frac{5}{2}$$

$$2\log^2 x(x+2) - 5\log_x(x+2) + 2 = 0$$

1 $\quad$ -2
2 $\quad$ -1

$$[\log_x(x+2) - 2][2\log_x(x+2) - 1] = 0$$

$\log_x(x+2) = 2$ $\qquad$ $\log_x(x+2) = \frac{1}{2}$

$(x+2) = x^2$ $\qquad$ $x + 2 = x^{1/2}$

$x^2 - x - 2 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 4x + 4 = x$

$(x-2)(x+1) = 0$ $\qquad$ $x^2 + 3x + 4 = 0$

$x = 2 \quad x = -1$ $\qquad$ $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-12}}{2}$

Soluciones imaginarias.

Se descarta $x = -1$ como solución por la restricción, pero $x = 2$ si es solución de la ecuación

7. $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

$$\log_2(9^{x-1} + 7) - \log_2(3^{x-1} + 1) = 2$$

$$\log_2 \frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1} = 2 = \log_2 2^2$$

$$\frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1} = 4$$

$$9^{x-1} + 7 = 4.3^{x-1} + 4$$

$$3^{2(x-1)} - 4.3^{x-1} + 3 = 0$$

$$(3^{x-1} - 3)(3^{x-1} - 1) = 0$$

$3^{x-1} - 3 = 0$ $\qquad$ $3^{x-1} - 1 = 0$

$3^{x-1} = 3^1$ $\qquad$ $3^{x-1} = 3^0$

$x - 1 = 1$ $\qquad$ $x - 1 = 0$

$x = 2$ $\qquad$ $x = 1$

Comprobación

Para x = 2

$\log_2(9+7) = 2 + \log_2(3+1)$

$\log_2 16 = 2 + \log_2 4$

Para x = 1

$\log_2(1+7) = 2 + \log_2(1+1)$

$\log_2 8 = 2 + \log_2 2$

$4 = 2 + 2 = 4$ Si es solución $\qquad$ $3 = 2 + 1 = 3$ También es solución

8. Resolver

$$\sqrt{\log_x \sqrt[4]{a/x} + \log_a \sqrt[4]{x/a}} + \sqrt{\log_x \sqrt[4]{ax} + \log_a \sqrt[4]{ax}} = a^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\log_x \frac{a}{x} + \frac{1}{4}\log_a \frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{1}{4}\log_x a\,x + \frac{1}{4}\log_a a\,x} = a^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\log_a \frac{a}{x}}{\log_a x} + \log_a \frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{\log_a ax}{\log_a x} + \log_a a\,x}\right) = a^2 \log_a x$$

	-1	1	$\log_a x$
$\log_a x + 1$	$-$	$+$	$+$
$\log_a x - 1$	$-$	$-$	$+$

$$\sqrt{\frac{\log_a a - \log_a x}{\log_a x} + \log_a x - \log_a a} + \sqrt{\frac{\log_a a + \log_a x}{\log_a x} + \log_a a + \log_a x} = 2a^2$$

$$\sqrt{\frac{1 - \log_a a - \log_a x - \log_a x}{\log_a x}} + \sqrt{\frac{1 - \log_a x - \log_a x - \log_a{}^2 x}{\log_a x}} = 2a^2$$

$$\sqrt{\frac{1 - \log_a a - 2\log_a x + 1}{\log_a x}} + \sqrt{\frac{\log_a{}^2 x + 2\log_a x + 1}{\log_a x}} = 2a^2$$

$$\sqrt{\frac{(\log_a x - 1)^2}{\log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x + 1)^2}{\log_a x}} = 2a^2$$

$$\frac{|\log_a x - 1| + |\log_a x + 1|}{\sqrt{\log_a x}} = 2a^2$$

Restricción $\log_a x > 0$

R1: $]-\infty, -1]$

$$\frac{-\log_a x + 1 - \log_a x - 1}{\sqrt{\log_a x}} = 2a^2$$

$$\frac{-2\log_a x}{\sqrt{\log_a x}} = 2a^2$$

$$\left(\sqrt{\log_a x}\right)^2 = (-a^2)^2$$

$$\log_a x = a^4$$

$$\log_a x = a^4$$

$$x = a^{a^4}$$

$SR_1 = \varnothing$

R2: $]-1, 1[$

$$\frac{-\log_a x + 1 + \log_a x + 1}{\sqrt{\log_a x}} = 2a^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{\log_a x}} = 2a^2$$

$$\sqrt{\log_a x} = \frac{1}{a^2}$$

$$\log_a x = \frac{1}{a^4}$$

$$\log_a x = \frac{1}{a^4}$$

$$x = a^{\frac{1}{a^4}}$$

$SR_2 = a^{\frac{1}{a^4}}$

R3: $]1, +\infty[$

$$\frac{\log_a x - 1 + \log_a x + 1}{\sqrt{\log_a x}} = 2a^2$$

$$\frac{2\log_a x}{\sqrt{\log_a x}} = 2a^2$$

$$\sqrt{\log_a x} = a^2$$

$$\log_a x = a^4$$

$$x = a^{a^4}$$

$SR_3 = a^{a^4}$

Queda como tarea comprobar las soluciones.

Ejercicios propuestos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(0{,}4)^{\ 1+\log^2 x} = \ (0{,}6)^{\ 2-\log x^2}$

b) $\log_4 \log_{16} \log_3(x+11) = \log_4 2 - 1$

c) $\log_5(x-2)^{\log_5(x-2)^3} = 3$

d) $\log_3(16\log^2 x^{x-2} + 7) - 1 = \log_3(4^{x-2} + 1)$

e) $[2(2^{\sqrt{2x}-3})^{\frac{1}{2\sqrt{2x}}}]^{\frac{2}{\sqrt{2x-1}}} = 2$

f) $\log_3 \sqrt{1-4x^2} - 2 = 3\log_3 \sqrt{1-2x} + \log_3 \sqrt{1+2x}$

g) $\dfrac{1}{5-\log x} + \dfrac{2}{1+\log x} = 1$

h) $\log_2 x - \log_4 x + \log_{\sqrt{12}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{15}{2}$

i) $\dfrac{\log(2x+3)}{\log\sqrt{3-4x}} = 2$

j) $2\log_4 \log_2 x + \log_{\frac{1}{4}} \log_{16} 6\,4x = 1$

k) $9^{\log_9 2\ \ x} + x^{\log_9 x} = 54$

l) $4\log_{\sqrt{x}} \sqrt{2}\,[\log_2(10-x)^{1/2}] = \dfrac{4}{\log_4 x} - \log_6 3\,6$

m) $\log_{9x} x + \log_{\frac{x}{\sqrt{3}}} x = 2$

n) $\log_4(4^x - 2)\log_4(x^{x+1} - 8) = 2$

o) $\log_{2x} x - \log_{\frac{x}{2}} 2\,x = 1$

p) $\dfrac{1}{2}\log_4(2x-1) + \log_4 \sqrt{x-9} = 1$

q) $\log_{2x}\left(\dfrac{2}{x}\right)\log^2{}_2 x + \log^4{}_2 x = 1$

r) $\log\sqrt{3x-4} + \dfrac{1}{2}\log(\,x-3) = 1$

s) $\dfrac{1}{2}\log_x 5 + \log_x(\,5x) = \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4}\log^2{}_x 5$

t) $\left[\log_a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/4} + \log_b\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/4}\right]^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{a}{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right) - \dfrac{1}{\left(\log_a \sqrt[4]{a.b} + \log_a \sqrt[4]{a.b}\right)^{-\frac{1}{2}}}$

u) $\dfrac{1}{2}\log_2 x^4 = \sqrt{2\log_2 4\,x \log_{16} 4\,x^3}$

v) $\sqrt{\log_4 8\,x^2 \log_2 4\,x} = \log_2 x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

w) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\log_x\left(x^2+\frac{1}{2}\right)} = 2\log_3 \sqrt{27}$

x) $\log_2 x^2 + 4\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{2}{x}} = 2$

4.9.13. Inecuaciones Exponenciales

Como los gráficos de las funciones exponenciales dependen de su base y siempre su grafico es positivo, lo mismo ocurre en las inecuaciones que pueden ser de dos tipos:

$$a^x > b \quad \text{o} \quad a^x < b$$

Dependiendo del signo de b tenemos que:

1. Sí $b > 0$

   i) b se lo puede representar en función de: $b = a^n,\ n \in \mathbb{R}$.

   Si $a > 1$ se tendrá: $a^x > a^n$ o $a^x < a^m$ y su solución será $x > n$ o $x < m$.

   Si $0 < a < 1$ la solución será: $x < n$ o $x > m$ respectivamente.

ii) Si b no se puede representar en base "a" entonces se saca logaritmo a ambas partes y obtenemos lo siguiente:

$$\text{Para } a^x > b \implies x\log a > \log b \implies \begin{cases} x > \frac{\log b}{\log a}, a > 1 \\ x < \frac{\log b}{\log a}, 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\text{Para } a^x < b \implies x\log a < \log b \implies \begin{cases} x < \frac{\log b}{\log a}, a > 1 \\ x > \frac{\log b}{\log a}, 0 < a < 1 \end{cases}$$

Si en vez de x estuviere cualquier otra función, se procede a resolver algebraicamente hasta obtener el conjunto solución.

2. Sí $b < 0$

i) Para $a^x > b$ se cumple: $\forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Para $a^x < b$ no existe solución.

Ejercicios propuestos:

Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $3^{x^2+3} < 81^x$

$$3^{x^2+3} < 3^{4x}$$

$$x^2 + 3 < 4x$$

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3 \quad x = 1$$

	1	3	
$x^2 - 4x + 3$	+	-	+

Sol:]1,3[

2. $(\frac{1}{2})^{x^2+x-10} < \frac{1}{4}$

$$(\frac{1}{2})^{x^2+x-10} < (\frac{1}{2})^2$$

$$x^2 + x - 10 > 2$$

$$x^2 + x - 12 > 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$x = -4 \quad x = 3$$

	-4	3	
$x^2 + x - 12$	+	-	+

Sol: $]-\infty, -4[\ \cup\ ]3, +\infty[$

3. $4^{x+1} + 32^x - 1 \leq 0$

$$42^{2x} + 32^x - 1 \leq 0$$

Cambiando de variable $\mathbf{2^x = z}$

$$4z^2 + 3z - 1 = 0$$

$$(z+1)(4z-1)=0$$

$$z=-1 \qquad z=\tfrac{1}{4}$$

		-4	3
$4z^2+3z-1$	+	-	+

La solución de la inecuación es: $z \in \left[-1, \frac{1}{4}\right]$ Es decir $-1 \leq 2^x \leq \frac{1}{4}$

Si $2^x \geq -1$ esto es siempre es verdadero. Sí $2^x \leq \frac{1}{4}$ $2^x \leq 2^{-2}$

$x \leq -2$

Solución final es lo común: $]-\infty, -2]$

Ejercicios propuestos:

Resolver las inecuaciones:

a) $2^{|x|-1} \leq |2^x - 1|$

b) $(2^{3x-2}-3)^2 \leq 4^{3x-2} - 87$

c) $\frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{3}{x}}} \leq \left(\frac{16}{9}\right)^2$

d) $(0{,}2)^{x^2+2x-11} > 0{,}0016$

e) $3^{(x-3)\frac{x}{4}} > 3$

f) $x^{1+\log_a x} > a^2x;\ (a>1)$

g) $(0{,}4)^{\log_{0,5}\frac{3x-1}{2x+3}} < 1$

h) $3^{4x+4} - \frac{10}{9}3^{2x+3} < -1$

4.9.14. Inecuaciones Logarítmicas.

Para resolverlas utilizamos la propiedad **9** de los logaritmos, es decir:

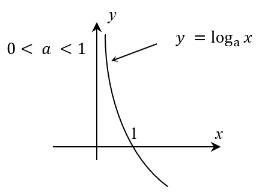
Si: $a > 1$ y $M > 1 \Rightarrow \log_a M > 0$

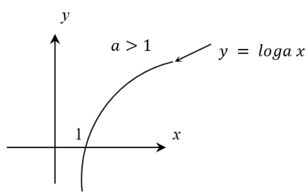
$a > 1$ y $M < 1 \Rightarrow \log_a M < 0$

$a < 1$ y $M > 1 \Rightarrow \log_a M < 0$

$a < 1$ y $M < 1 \Rightarrow \log_a M > 0$

Esto lo podemos analizar gráficamente:





Ejercicios resueltos:

1. $\log_2(x-4) \leq \frac{1}{2}\log_2(x+1) - 2$

Restricción: $x-4>0$ y $x+1>0 \Rightarrow x>4$ y $x>-1$ lo común: $x>4$

Transponemos todo a la izquierda. $\log_2(x-4) - \frac{1}{2}\log_2(x+1) + \log_2 2^2 \leq 0$

$$\log_2 \frac{(x-4)\,4}{\sqrt{x+1}} \leq 0$$

El logaritmo es negativo cuando su número es menor que 1

$$\frac{(x-4)4}{\sqrt{x+1}} \le 1$$

$\frac{(x-4)\,4}{\sqrt{x+1}} \le 1 \Rightarrow 4(x-4) \le \sqrt{x+1} \Rightarrow [4(x-4)]^2 \le [\sqrt{x+1}]^2$

$16x2 - 129x + 255 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad 16x^2 - 129x + 255 = 0$

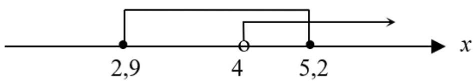
$x_{1,2} = \frac{129 \pm \sqrt{129^2 - 4(16)(255)}}{32} =$

$x_{1,2} = \frac{129 \pm 36,3}{32} =$

$x_1 = 5,2 \qquad x_2 = 2,9$

	2,9 5,2		
$16x^2 - 129x + 255$	+	-	+

Solución ii): [2,9 ; 5,2]La solución del problema es la intersección de la solución y su restricción.



Por lo tanto, la solución final es:] 4; 5,2]

2. $\log_{1/3}(2x + 5) < -2$

Restricción: $2x + 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{5}{2}$

$\log_{1/3}(2x+5) + \log_{1/3}(1/3)^2 < 0$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}(2x+5) < 0$ **Esto ocurre cuando el número es mayor que uno**

$\frac{1}{9}(2x+5) > 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2x + 5 > 9 \quad x > 2$

La solución es la intersección de este resultado con la restricción Sol.: $]2, +\infty[$

3. $\log_3|3 - 4x| > 2$

Restricción: $3 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}$

$\log_3|3-4x| - \log_3 3^2 > 0 \Rightarrow \log_3 \frac{|3-4x|}{9} > 0$

Esto ocurre cuando el número es mayor que uno $\frac{|3-4x|}{9} > 1 \Rightarrow |3-4x| > 9$

$-9 > 3 - 4x > 9 \Rightarrow -12 > -4x > 6 \Rightarrow 12 < 4x < -6$

$-\frac{3}{2} > x > 3$ **Sol.:** $]-\infty, \frac{3}{2}[\cup]\mathbf{3}, +\infty[$

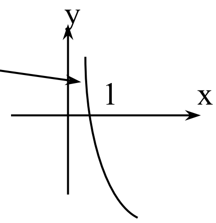
4. $\log_{1/3} \log_3 \log_{1/2} \frac{3-x}{x+1} \le 0$

Restricción: $\log_3 \log_{1/2} \frac{3-x}{x+1} > 0$

Por el gráfico 1: $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x+1} \geq 1$ Esta condición está dentro de la restricción

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Graf. 1

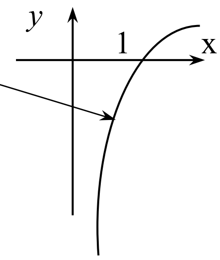


$$\log_3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x+1} - \log_3 3 \geq 0$$

$$\log_3 \frac{\log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x+1}}{3} \geq 0$$

$y = \log_3 x$

Graf. 2

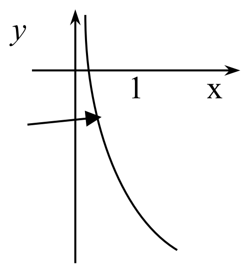


Del Graf. 2 obtenemos:

$$\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x+1} \geq 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x+1} \geq 3$$

Graf. 3



$$\log_{\frac{1}{2}} x \log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{8(3-x)}{x+1} \geq 0$$

Del Graf. 3 obtenemos:

$$0 < \frac{8(3-x)}{x+1} \leq 1$$

a) $\frac{8(3-x)}{x+1} > 0$ $\quad \wedge \quad$ **b)** $\frac{8(3-x)}{x+1} \leq 1$

$$\frac{24-8x-x-1}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{23-9x}{x+1} \leq 0$$

	-1	3	
$x+1$	-	+	+
$3-x$	+	+	-
$\frac{(3-x)}{x+1}$	-	+	-

	-1	$23/9$	
$x+1$	-	+	+
$23-9x$	+	+	-
$\frac{23-9x}{x+1}$	-	+	-

Sol. **a**: $]-1,3[$

Sol **b**: $]-\infty,-1[\ \cup\ [23/9,+\infty[$

Solución General: Sol. a $\cap$ Sol. b $= [23/9, 3[$

Ejercicios propuestos:

Resolver las inecuaciones

a) $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log_2 x - 1} < 1$

b) $\log_{\frac{2}{3}}(5\ 25^{5x-3} + 6) < \log_{\frac{2}{3}}(26\ 5^{5x-3} + 1)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2 - 5)] > 0$

d) $\log(x^2 - 2x + 7) > \log(3x + 1)$

e) $x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > \dfrac{1}{x}$

f) $\log_3(3x + 4) - \log_3(2x - 1) > 1$

g) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_4 x > 1$

h) $\log_2 \dfrac{3 + |x^2 - 3x|}{x^2 + |x - 5|} \geq 0$

i) $\log_x(x + 6) > 2$

j) $\log_x \dfrac{x + 3}{x - 1} > 1$

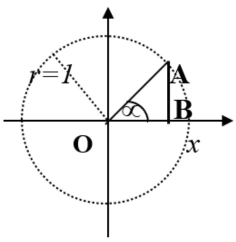
k) $\log_2\left(\left|\dfrac{x - 2}{x - 5}\right| + 7\right) > 3$

l) $\log_{2^{-1}}|2x - 3| > -3$

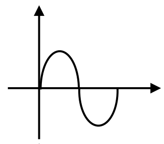
m) $\log_{\log 3} 5\,x > 0$

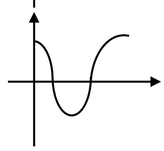
4.9.15. Función Trigonométrica

El análisis lo realizamos dibujando una circunferencia de radio igual a uno y un triángulo OAB



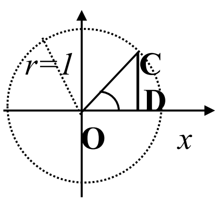
	I	II	III	IV
Sen $a = \frac{AB}{r}$ =AB	$0 \to 1$ Crece	$1 \to 0$ Decrece	$0 \to -1$ Decrece	$-1 \to 0$ Crece
Signos del seno	+	+	−	−
Cos $a = \frac{OB}{r}$ = OB	$1 \to 0$ Decrece	$0 \to -1$ Decrece	$-1 \to 0$ Crece	$0 \to 1$ Crece
Signos del coseno	+	−	−	+



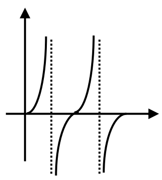


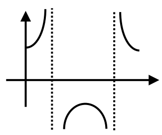
Del triángulo OAB obtenemos: $sen^2 x + cos^2 x = 1$

Dibujamos una nueva circunferencia con un triángulo OCD



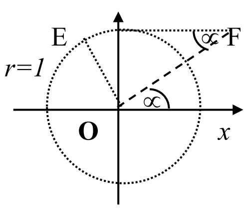
$Tg\ a = \frac{CD}{r}$ = CD	$0 \to +\infty$ Crece	$-\infty \to 0$ Crece	$0 \to +\infty$ Crece	$-\infty \to 0$ Crece
Signos de la tga	+	-	+	-
$Sec\ a = \frac{OD}{r}$ =OD	$1 \to +\infty$ Crece	$-\infty \to -1$ Crece	$-1 \to -\infty$ Decrece	$+\infty \to 1$ Crece
Signos de $seca$	+	-	-	+



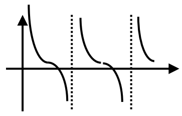


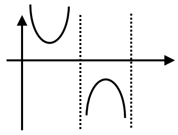
Del triángulo OCD obtenemos $tg^2 x + 1 = sec^2 x$

Dibujamos una nueva circunferencia con un triángulo OEF



$Ctg\ a = \frac{EF}{r} = EF$	$+\infty \to 0$ Decrece	$0 \to -\infty$ Decrece	$+\infty \to 0$ Decrece	$0 \to -\infty$ Decrece
Signos de $ctga$	+	-	+	-
$Csc\ a = \frac{OF}{r} = OF$	$+\infty \to 1$ Decrece	$1 \to +\infty$ Crece	$-\infty \to -1$ Crece	$-1 \to -\infty$ Decrece





Signos de csca + + - -

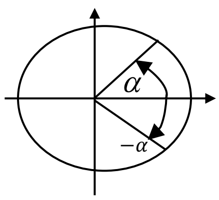
Del triángulo OEF obtenemos $\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \csc^2 x$

De esta manera obtenemos el grafico de cada función, así como los signos de cada una de ellas, por ejemplo el seno depende solo del eje "y", por lo que sus signos serán positivos en el primero y segundo cuadrante y negativo en los restantes, así también la función cosecante; el coseno depende sólo del eje "x", por lo que sus signos serán positivos a la derecha de cero, es decir en el primero y cuarto cuadrante y negativos en los otros dos cuadrantes, al igual que la secante.

Mientras que la tangente depende del eje "x" y del eje "y" por lo que será positiva en el primero y tercer cuadrante y negativo en el segundo y cuarto cuadrante, al igual que la cotangente. Además, podemos deducir todas las funciones de $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ y $360°$

- **Reducción de Funciones Trigonométricas a Funciones de Ángulos Agudos**

Conociendo los signos de las funciones trigonométricas es fácil transformar una función trigonométrica a una de un ángulo agudo, para esto es necesario conocer el ángulo agudo, primeramente, lo realizaremos con respecto al eje "x"



El ángulo positivo se mide en contra de las manecillas del reloj y el negativo a favor de la manecillas del reloj.

Es importante saber transformar una función de un ángulo mayor de 90 a una de primer cuadrante, por ejemplo:

$\operatorname{tag}210° = \operatorname{tag}30°$, ya que el ángulo está en el tercer cuadrante en donde la tangente es positiva y : $210 = 180 + 30$, siendo $\alpha = 30$
$\cos 240 = -\cos 60$, ya que el ángulo está en el tercer cuadrante en donde el coseno es negativo y: $240 = 180 + 60$ siendo $\alpha = 60$.

$\operatorname{sen}315 = -\operatorname{sen}45$, ya que el ángulo está en el cuarto cuadrante en donde el seno es negativo y: $315 = 360 - 45$ siendo $\alpha = 45$.

$\operatorname{ctg}(-210) = -\operatorname{ctg}30$, ya que el ángulo está en el tercer cuadrante en donde la cotangente es negativa y:$-210 = -180 - 30$, siendo $\alpha = 30$.

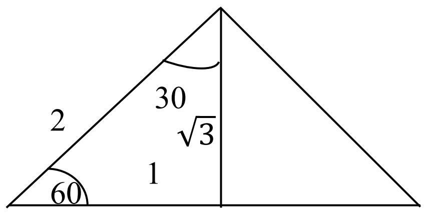
Lo mismo podemos hacerlo con respecto al eje "y", solo que ahora el resultado se obtiene con la cofunción, así:
$\sec 120 = -\csc 30$, ya que el ángulo está en el segundo cuadrante en donde la secante es negativa y: $120 = 90 + 30$, siendo $\alpha = 30$.

$\mathbf{tg(-390) = -ctg60}$, ya que el ángulo está en cuarto cuadrante y la tangente es negativa y: $-390 = -450 + 60$, siendo $\alpha = 60$.

$\cos 250 = -\text{sen}20$, ya que el ángulo está en el tercer cuadrante y el coseno es negativo y: $250 = 270 - 20$, siendo $\alpha = 20$.

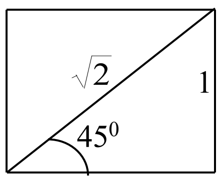
- **Ángulos Notables.**

Son las funciones de ángulos de $30°, 60°$ y $45°$



Para treinta y sesenta grados utilizamos un triángulo equilátero de lado igual a dos y le dividimos por la mitad obteniendo en la base dos segmentos de dimensión uno y en el ángulo superior dos ángulos de treinta.

Con este grafico podemos encontrar todas las funciones trigonométricas de $30°$ y $60°$



Para cuarenta y cinco utilizamos un cuadrado de lado igual a uno, le trazamos la diagonal y dividimos al cuadrado en dos triángulos rectángulos con ángulo igual a $45°$

Ejercicios resueltos:

a) $\cos 120 = -\cos 60 = -\dfrac{1}{2}$

b) $\sec 315 = \sec 45 = \sqrt{2}$

c) $\text{tg}150 = -\text{tg}30 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\csc(-135) = -\csc 45 = -\sqrt{2}$

e) $\text{sen}1680 = \text{sen}240 = -\text{sen}60 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicios propuestos:

Demostrar que:

$a)$ $3\sqrt{2}\cos 135 - 4\sqrt{3}\text{tg}210 - 6\sec 180 = -1$

b) $\text{sen}(180 - \text{x})\cos(90 + \text{x}) - \text{sen}(270 + \text{x})\cos(180 - \text{x}) = -1$

c) $4\text{sen}^2 225 - 5\sec 300 + 3\text{tg}^2 240 = 1$

d) $\text{tg}\dfrac{1}{3}(270 + \text{x}) = -\text{ctg}\dfrac{\text{x}}{3}$

- **Fórmulas Fundamentales**

Si las funciones trigonométricas son reciprocas entre sí, su producto es uno; es decir:

$$\text{senx} \ \csc\text{x} = 1 \qquad \cos\text{x} \ \sec\text{x} = 1 \qquad \text{tgxctgx} = 1 \qquad (1)$$

Además, conocemos algunas relaciones:

$$\text{tgx} = \frac{\text{senx}}{\cos\text{x}} \qquad \text{ctgx} = \frac{\cos\text{x}}{\text{senx}} \qquad (2)$$

Ya obtuvimos las identidades fundamentales:

$$\mathrm{sen}^2x+\cos^2x=1 \quad 1+\mathrm{tg}^2x=\sec^2x \quad 1+\mathrm{ctg}^2x=\csc^2x \tag{3}$$

Tenemos las funciones de la suma y diferencia de dos ángulos:

$$\mathrm{sen}(x\pm y)=\mathrm{sen}x\cos y\pm\mathrm{sen}y\cos x \qquad \cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\mathrm{sen}x\mathrm{sen}y$$

$$\mathrm{tg}(x\pm y)=\frac{\mathrm{tg}x\pm\mathrm{tg}y}{1\mp\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y} \qquad \mathrm{ctg}(x\pm y)=\frac{\mathrm{ctg}x\mathrm{ctg}y\mp1}{\mathrm{ctg}y\pm\mathrm{ctg}x} \tag{4}$$

Tenemos también las fórmulas de las funciones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad. Si el ángulo, $x=y$obtenemos:

$$\mathrm{sen}2x=2\mathrm{sen}x\cos x \quad \cos2x=\cos^2x-\mathrm{sen}^2x=2\cos^2x-1=1-2\mathrm{sen}^2x \tag{5}$$

$$\mathrm{tg}2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x} \qquad \mathrm{ctg}2x=\frac{\mathrm{ctg}^2x-1}{2\mathrm{ctg}x}$$

de la formula del coseno del ángulo doble (5) podemos despejar el seno y el coseno:

$$\mathrm{sen}x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos2x}{2}} \qquad \cos x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2x}{2}} \tag{6}$$

Si el ángulo lo dividimos para la mitad obtenemos las funciones trigonométricas del ángulo mitad:

$$\mathrm{sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \tag{7}$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{\mathrm{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1-\cos x}{\mathrm{sen}x}=\frac{\mathrm{sen}x}{1+\cos x} \tag{8}$$

$$\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\mathrm{sen}\frac{x}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{\mathrm{sen}x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\mathrm{sen}x} \tag{9}$$

Funciones trigonométricas de ángulos múltiples:

$$\mathrm{sen}3x=3\mathrm{sen}x-4\mathrm{sen}^3x \quad \cos3x=4\cos^3x-3\cos x$$

$$\mathrm{tg}3x=\frac{3\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^3x}{1-3\mathrm{tg}^2x} \qquad \mathrm{ctg}3x=\frac{\mathrm{ctg}^3x-3\mathrm{ctg}x}{3\mathrm{ctg}^2x-1} \tag{10}$$

$$\mathrm{sen}4x=4\cos x(\mathrm{sen}x-2\mathrm{sen}^3x)=4\mathrm{sen}x(2\cos^3x-\cos x) \tag{11}$$

$$\cos4x=1-8\mathrm{sen}^2x+8\mathrm{sen}^4x=1-8\cos^2x+\cos^4x \tag{12}$$

$$\mathrm{tg}4x=\frac{4(\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^3x)}{1-6\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x} \qquad \mathrm{ctg}4x=\frac{1-6\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{ctg}^4x}{4(\mathrm{ctg}^3x-\mathrm{ctg}x)} \tag{13}$$

Suma y diferencia de senos y cosenos:

$$\mathrm{sen}x+\mathrm{sen}y=2\mathrm{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \mathrm{sen}x-\mathrm{sen}y=2\mathrm{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \tag{14}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

- **Graficación de Funciones Trigonométricas Compuestas**

En las funciones trigonométricas podemos variar su amplitud su desfase, su periodicidad, para esto nos valemos de la tabla de una función simple, para luego despejar "x" y "y", así:

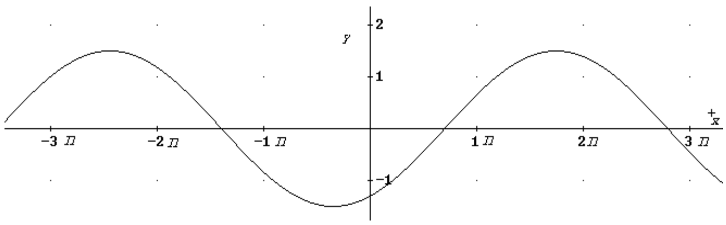
Ejercicios resueltos:

1. $y = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x - 60\right)$

Procedemos a configurar la tabla:

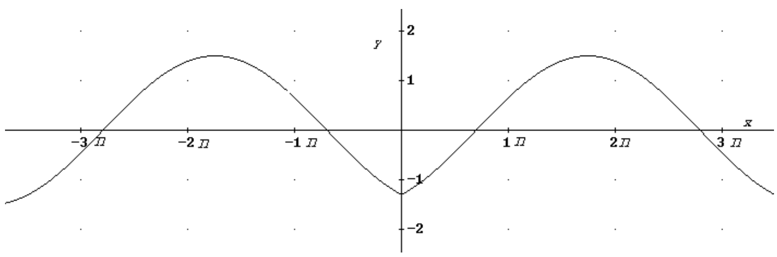
x	$\frac{3}{2}x - 60$	$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x - 60\right)$	$y = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x - 60\right)$
40	0	0	0
100	90	1	1,5
160	180	0	0
220	270	-1	-1,5
280	360	0	0

Los valores del centro de la tabla que están con negrilla se mantienen para todos los gráficos de la función seno. Su gráfico es:



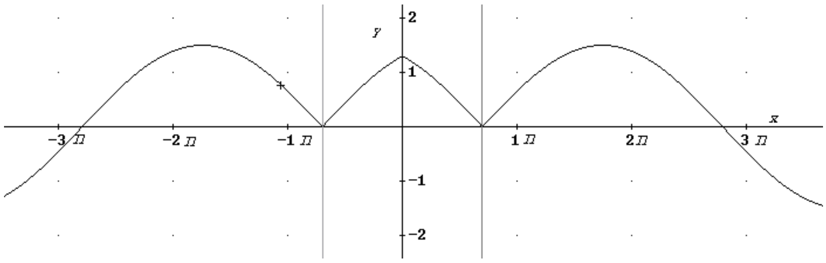
Este gráfico puede tomar la siguiente forma: $y = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}|x| - 60\right)$

En este caso mientras "x" sea positivo el valor absoluto no le afecta, pero para los valores negativos de "x", lo transforma a positivos por lo que el grafico de la derecha de "y" se repite en la izquierda así:



Esta función la podemos representar así: $y = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\left|\frac{3}{2}|x| - 60\right|\right)$

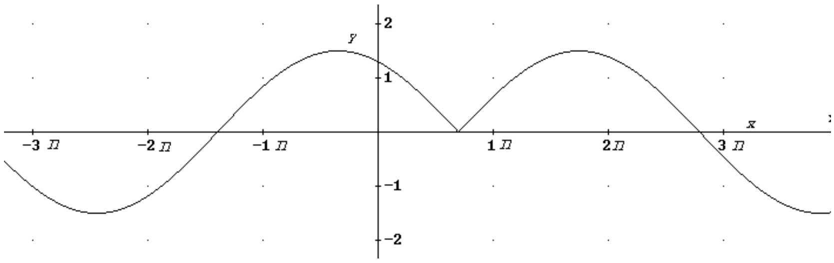
Aquí es necesario saber cuándo el dominio es positivo: $\frac{3}{2}|x| - 60 > 0 \quad \Rightarrow \quad |x| > 40$, el grafico es



Pero si la función es: $y = \frac{3}{2}\text{sen}\left(\left|\frac{3}{2}x - 60\right|\right)$

En este caso es necesario saber cuándo el dominio es positivo: $\frac{3}{2}x - 60 > 0 \;\Rightarrow\; x > 40$

Esto significa que para valores de "x" mayores de 40 el grafico no varía, pero si es menor que 40 el grafico se comporta igual que para mayor de 40, así:



Para el coseno tiene una forma igual de representarse.

Ejercicios propuestos:

Graficar:

a) $y = \frac{4}{5}\text{sen}(3 - 2|x|)$

b) $y = \frac{4}{5}\text{sen}|3 - 2x|$

c) $y = \frac{5}{4}\text{sen}\left|35 - \frac{4}{3}|x|\right|$

d) $y = \frac{3}{4}\cos(3|x| - 60)$

e) $y = 3\cos\left|50 - \frac{2}{3}x\right|$

f) $y = \frac{5}{2}\cos\left|5 - \frac{3}{2}|x|\right|$

4.9.16. Ecuaciones trigonométricas

Al igual que las ecuaciones anteriores tratamos de encontrar valores que satisfagan la igualdad y para ello expresamos la ecuación en un solo ángulo y tramos que quede en una sola función, algebraicamente le transformamos a factores y encontramos las soluciones de la ecuación.

Ejercicios resueltos:

1. $4\text{sen}^2x - 3 = 0$

Despejamos la función: $\quad \text{sen}^2x = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{senx} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Las soluciones serán para los cuatro cuadrantes, en donde el α para $\text{senx} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ es:

$\alpha = 60$

Por lo que las soluciones serán: $60°, \ 120°, \ 240°, \ 300°$

2. $3\text{tg}^2\text{x} - 1 = 0$

Despejamos la función: $\text{tg}^2\text{x} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{tgx} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Así también la solución estará en los cuatro cuadrantes en donde el α para $\text{tgx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ es $\alpha = 30$. Por lo que las soluciones serán: $30°, \ 150°, \ 210°, \ 330°$

3. $\text{ctgx} - \text{tgx} = 2$

Las dos funciones le reemplazamos por sus equivalentes: $\frac{\cos x}{\text{senx}} - \frac{\text{senx}}{\cos x} = 2$

Eliminamos denominadores: $\cos^2 x - \text{sen}^2\text{x} = 2\text{senx}\cos x$

$$\cos 2x = \text{sen2x} \qquad \Rightarrow \quad \text{tg2x} = 1$$

La tangente es positiva en primero y tercer cuadrante y es igual a uno cuando el ángulo es de 45^0. Entonces la solución es: $2\text{x} = 45° \quad \Rightarrow \quad \text{x} = 22{,}5°$

$$2\text{x} = 225° \quad \Rightarrow \quad \text{x} = 122{,}5°$$

4. $2\sec^2 x - \text{tgx} - 3 = 0$

Le transformamos a tangentes: $2(1 + \text{tg}^2\text{x}) - \text{tgx} - 3 = 0$

$2 + 2\text{tg}^2\text{x} - \text{tgx} - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\text{tg}^2\text{x} - \text{tgx} - 1 = 0 \ \Rightarrow (2\text{tgx} + 1)(\text{tgx} - 1) = 0$

Igualamos cada factor a cero:

i) $2\text{tgx} + 1 = 0 \ \Rightarrow \text{tgx} = -\frac{1}{2}$

La tangente es negativa en segundo y cuarto cuadrante y el α cuándo la $\text{tgx} = \frac{1}{2}$ es igual a $\alpha = 26^0 33^0 54{,}18^0$, este valor proyectado a los cuadrantes nos da:

II: $\text{X} = 153^0 26^0 5{,}82^0$ IV: $\text{X} = 333^0 26^0 5{,}82^0$

ii) $\text{tagx} - 1 = 0 \ \Rightarrow \text{tgx} = 1$. La tangente es positiva en I y III cuadrante y el $\alpha = 45°$, proyectando obtenemos:

I: $\text{x} = 45°$ III: $\text{x} = 225°$

5. $\cos 2x = \text{senx}$

Lo dejamos en senos: $1 - 2\text{sen}^2\text{x} = \text{senx} \quad \Rightarrow \quad 2\text{sen}^2\text{x} + \text{senx} - 1 = 0$

$(2\text{senx} - 1)(\text{senx} + 1) = 0$ Igualamos cada factor a cero

$\text{senx} = \frac{1}{2}$

El seno es positivo en primer y segundo cuadrante el $\alpha = 30^0$. Lo proyectamos:

I: $\text{x} = 30°$ II: $\text{x} = 150°$

$\text{senx} = -1$ Esto es posible solo cuando $x = 270^0$

Ejercicios propuestos:

Resolver las ecuaciones:

a) $\text{sen}2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ c) $\text{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\text{ctg}2x = \sqrt{3}$ e) $\sec 3x = -2$ f) $\csc 2x = -\sqrt{2}$

g) $1 - \frac{1}{\cos x} = \text{tg}^2\frac{x}{2}$ h) $\text{senx}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x = -\frac{1}{8}$

i) $4\cos^2 x - 4\text{senx} - 1 = 0$ j) $\text{sen}5x - \cos 4x = \text{sen}3x$

4.9.17. Ecuaciones con funciones trigonométricas inversas

Si tenemos funciones trigonométricas biyectivas podemos calcular su inversa, es decir: $\text{arcsen}(x), \text{arccos}(x), \text{arctg}(x), \text{arcctg}(x)$, y con ellas resolver ecuaciones.

Ejercicios resueltos:

a) $y = \text{sen}(\text{arcsenx}) = x$ b) $y = \cos(\arccos x) = x$

c) $y = \text{tg}(\text{arctgx}) = x$ d) $y = \text{ctg}(\text{arcctgx}) = x$

e) $y = \text{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - [\cos(\arccos x)]^2} = \sqrt{1 - x^2}$

f) $y = \text{sen}(\text{arctgx}) = \sqrt{1 - [\cos(\text{arctgx})]^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{[\sec(\text{arctgx})]^2}} =$

$$\sqrt{\frac{[\sec(\text{arctgx})]^2 - 1}{[\sec(\text{arctgx})]^2}} = \sqrt{\frac{[\text{tg}(\text{arctgx})]^2}{1 + [\text{tg}(\text{arctgx})]^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

g) $\text{arctgx} - \text{arcctgx} = \frac{\pi}{3}$

$A = \text{arctgx} \rightarrow x = \text{tgA}$ $B = \text{arcctgx} \rightarrow x = \text{ctgB}$

Reemplazando los datos: $A - B = \frac{\pi}{3} \rightarrow \text{tg}(A - B) = \text{tg}\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\text{tgA} - \text{tgB}}{1 + \text{tgA tgB}} = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + x\left(\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 2\sqrt{3}$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 4}{2} = \sqrt{3} \pm 2$$

Obtenemos dos valores de x uno con más y otro con menos.

Ejercicios propuestos:

1. Calcular:

a) $y = \text{sen}(\text{arcctgx})]$ b) $y = \text{tg}(\arccos x)$ c) $y = \cos(\text{arctgx})$

2. Resolver las ecuaciones:

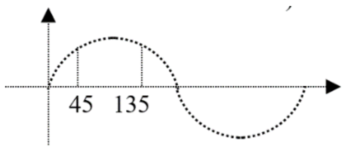
a) $\text{arctg}\frac{2x - 1}{x + 1} - \text{arctg}\frac{x + 1}{2x} = \text{arctg}1$ b) $\text{arcsenx} + \text{arcsen}2x = \frac{\pi}{3}$

4.9.18. Inecuaciones trigonométricas

Para resolver una inecuación trigonométrica vamos a utilizar los gráficos de las funciones trigonométricas relacionadas con el problema, considerando la periodicidad de las funciones seno, coseno que es $\mathbf{2\pi}$ y de la tangente que es $\boldsymbol{\pi}$.

Ejercicios resueltos:

1. Resolver: a) $\operatorname{sen}x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$



Primeramente graficamos la función y encontramos los ángulos para los cuales la función es: $\operatorname{sen}x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

El ángulo es $x = -225{,}45{,}135{,}405$, por lo que la solución es de:

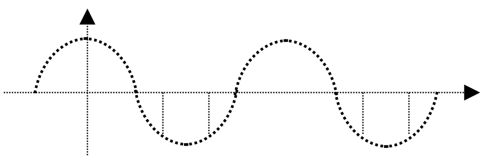
$-225 \leq x \leq 45$ y $135 \leq x \leq 405$

b) $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 < 0$

consideramos como variable a $\cos 2x = z$, entonces:

$$2z^2 - z - 1 < 0$$

Por lo que su solución esta en el intervalo: $-\frac{1}{2} < \cos 2x < 1$



Graficando la función en un intervalo de $0 \leq x \leq 2\pi$

Podemos observar que el $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, cuando

$x = 60{,}120{,}240{,}300$

Por lo que la solución de la inecuación es:

$0 < x < 60,\ 120 < x < 240,\ 300 < x < 360$

Ejercicios propuestos:

a) $\operatorname{sen}2x < \frac{1}{2}$ b) $\cos\frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$ c) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{tg}2x \geq \sqrt{3}$ e) $4\operatorname{sen}^2 2x + (2 - 2\sqrt{3})\operatorname{sen}2x - \sqrt{3} \leq 0$

4.9.13. Funciones Hiperbólicas

A las funciones exponenciales del tipo $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ se las conoce con el nombre de seno y coseno hiperbólicos. Con estas funciones podemos definir:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh}x}{\cosh x} \quad \text{y} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh}x}$$

Por la definición de las funciones senhx y coshx se deducen correlaciones análogas a las conocidas en las funciones trigonométricas:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cosh b + \cosh a \operatorname{senh} b$$

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b$$

$$\operatorname{ctgh}^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x \qquad \tanh(a+b) = \frac{\operatorname{senh} a \cosh b + \cosh a \operatorname{senh} b}{\cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b}$$

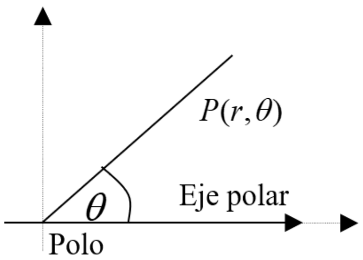
$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \coth(a+b) = \frac{\cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b}{\operatorname{senh} a \cosh b + \cosh a \operatorname{senh} b}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x \qquad \tanh 2x = \frac{\tanh x + \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

$$\cosh 2x = 1 + 2\operatorname{senh}^2 x \qquad \cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$$

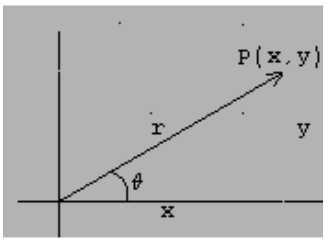
4.10. Coordenadas polares

Para ubicar un punto en un sistema de coordenadas polares se usará, un origen que es el polo (que coincide con el origen en el sistema cartesiano) y un eje polar que es una semirrecta dirigida horizontal (por lo tanto coincidente con el eje positivo de las x).



Un punto P tendrá coordenadas (r, θ), r distancia dirigida al polo, θ ángulo formado por el rayo que va del polo al punto P y el eje polar. θ se mide en radianes

Si se superponen los dos sistemas (el eje y coincide con $\theta = \frac{\pi}{2}$ y se ubica un punto P que en coordenadas polares será $P(r, \theta)$ y en coordenadas rectangulares.



$P(x, y)$ al trazar la perpendicular desde P al eje x

De donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, el ángulo lo calculamos como:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad y \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Con estas fórmulas podemos evaluar cualquier punto de polares a cartesianas:

$$\left(2, \frac{\pi}{3}\right) \quad \rightarrow \quad x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad y = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

También de cartesianas a polares, así:

$$(2, -2) \qquad r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \qquad \theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{2}\right) = \frac{7\pi}{4}$$

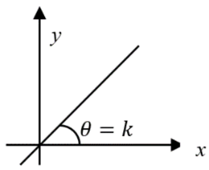
4.10.13. Gráficas en coordenadas polares

Las gráficas en coordenadas polares están dadas en la forma $r = f(\theta)$, donde se considerará únicamente los valores de r positivo. En principio para trazar una curva hay que hacer una tabla dándole valores a θ y encontrando los valores correspondientes de r.

Sin embargo, al igual que en coordenadas rectangulares hay cosas que permiten hacer la gráfica en una forma más racional evitando hacer tantos puntos.

- Comenzaremos analizando las rectas, si estas pasan por el origen, esto es $y = mx$.

  Aquí identificamos el ángulo: $tg\theta = \frac{y}{x} = m \quad \Longrightarrow \theta = arctg\frac{y}{x}$ notamos que el ángulo es una constante: $\theta = k$, es decir que toda x recta que pase por el origen la identificamos conociendo su figura, su ángulo.



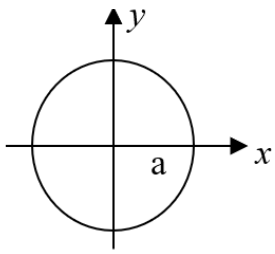
- Si la ecuación es: $x = c$, representa una recta perpendicular al eje x, en polares será:

$$x = r\cos\theta \qquad c = r\cos\theta \qquad r = \frac{c}{\cos\theta}$$

De la misma forma si $y = d$

$$y = r sen\theta \qquad d = r sen\theta \qquad r = \frac{sen\theta}{d}$$

- La circunferencia con centro en el origen $x^2 + y^2 = a^2$

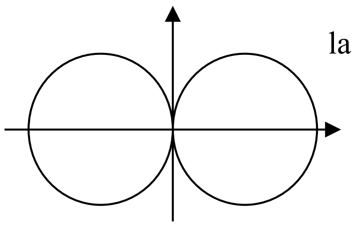


Reemplazamos los valores de x y y.

$$(r\cos\theta)^2 + (rsen\theta)^2 = a^2 \quad r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) = a^2$$

$$r = a$$

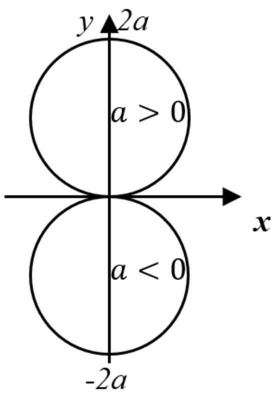
Si el centro de la circunferencia esta sobre el eje x en el punto $(a,0)$ la forma es:



$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

$$r^2 - 2ar\cos\theta = 0$$

$$r = 2a\cos\theta$$



Si el centro de la circunferencia esta sobre el eje y en el punto $(0,a)$ la forma es:

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2 \quad x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

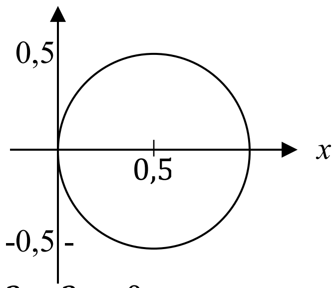
$$r^2 - 2arsen\theta = 0 \qquad r = 2asen\theta$$

Ejercicios resueltos:

1. Hacer la gráfica de la curva cuya ecuación es $r = \cos\theta$. Significa que tenemos una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$, con centro en $(\frac{1}{2}, 0)$

Podemos verificar haciendo una tabla, el coseno es positivo en primero y cuarto cuadrante:

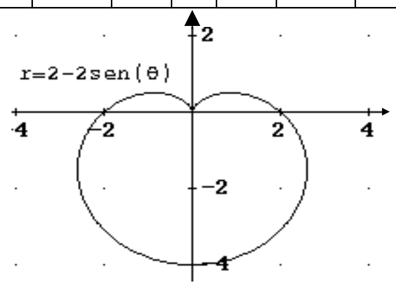
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1



2. Hacer la gráfica de la curva cuya ecuación es $r = 2 - 2\text{sen}\theta$

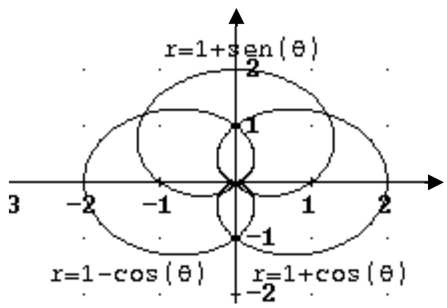
Esta figura es una de las cuatro posibilidades de las cardioides, su tabla y grafico es:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	0	1	0,59	0,27	0	0,27	0,59	1	2	3	3,41	3,73	4	3,73	3,41	3	0



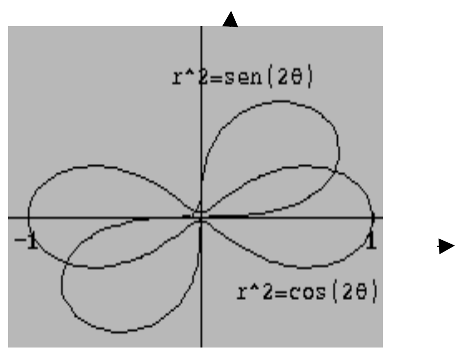
Las cardiodes se las representa así:

$$\begin{cases} r = a(1 \pm \cos\theta) \\ r = a(1 \pm \text{sen}\theta) \end{cases}$$



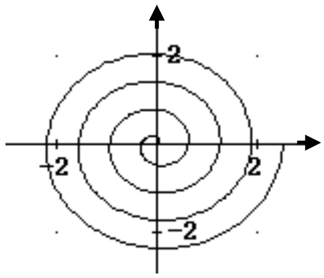
3. Graficar las lemniscatas: $\begin{cases} r^2 = a\cos 2\theta \\ r^2 = a\text{sen}2\theta \end{cases}$

La tabla queda como tarea



4. Graficar la espiral $r = a\theta$

Si $a = \frac{1}{10}$ y $0 \leq \theta \leq 8\pi$ entonces el grafico es:



Ejercicios propuestos:

Graficar:

a) $r = \text{sen}3\theta$ b) $r = \cos 4\,\theta$ c) $r = \cos 5\,\theta$

d) $r = 3 + \text{sen}\theta$ e) $r = 3 + \cos\theta$ f) $r = 3 - \text{sen}\theta$

g) $r = 2 - \cos\theta$ h) $r = 2\sqrt{\cos 2\,\theta}$ i) $r = 2 + 2\text{sen}\theta$

4.11. Preguntas de refuerzo

1. ¿Qué es una relación?

2. ¿A que llamamos función?

3. ¿Cuál es la diferencia entre conjunto imagen y el conjunto de llegada?

4. ¿Qué entiende por imagen directa?

5. ¿Qué es una imagen indirecta?

6. ¿En la propuesta de graficación que es importante?

7. ¿Cómo saber si una función es biyectiva?

8. ¿Cuál es la regla para la composición de funciones?

9. ¿Al sumar funciones que es necesario observar?

10. ¿Cuál es el papel que tienen los coeficientes en la función de primer grado?

11. ¿En la función de segundo grado, de que depende que esta suba o baje?

12. ¿Qué debo de hacer para que el vértice de una parábola este en uno de los cuatro cuadrantes?

13. ¿Cómo saber si una función es creciente o decreciente?

14. ¿Cómo diferenciar una función par de una impar?

15. ¿Como se caracteriza una función exponencial?

16. ¿Cómo se clasifican las funciones potenciales?

17. ¿Cuáles son las propiedades de los exponentes?

18. ¿Explique cómo obtenemos una función logarítmica?

19. ¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos?

20. ¿Cómo resuelve una inecuación logarítmica?

21. Que significa resolver una inecuación exponencial?

22. ¿Haga un análisis de cada función trigonométrica?

23. ¿De que dependen los signos de las funciones trigonométricas?

24. ¿Cómo obtener los valores de Las funciones trigonométricas de los ángulos notables?

25. ¿Cuál es la diferencia entre función y cofunción?

26. ¿Cuáles son los valores de todas las funciones trigonométricas para $0°,\ 90°,\ 180°,\ 270°,\ 360°$?

27. ¿Cómo se resuelve una ecuación trigonométrica?

28. ¿Cuáles son las fórmulas trigonométricas que conoce?

29. ¿Cómo resuelve una ecuación logarítmica?

5. BIBLIOGRAFÍA

Espinoza, E. (2008) Álgebra Pre-Universitaria. Primera edición. Perú

Espinoza, E. (2002) Análisis matemático I. Tercera Edición. Perú

Gonzalez, M. y Mancil J. (2007) Álgebra elemental moderna. Volumen 1. Editorial Libresa. Ecuador

Miller, J. y Gerken, D. (2020) Álgebra universitaria y trigonometría. McGraw-Hill. México

Pérez G., F. (2006) Lógica, Conjuntos, Álgebra y Trigonometría. Editorial Trillas. México

Stewart, J. et al (2012) Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta edición. Cengage Learning Editores. México

Sullivan, M. (2014) Álgebra y trigonometría. Novena edición. Pearson Educación, México

Swokowski, E. y Cole J. (2018) Precálculo. Álgebra y trigonometría. Primera edición. Cengage Learning Editores.

Zill, D. G. y Dewar, J. M. (2012) Álgebra, Trigonometría Y Geometría Analítica. Tercera edición. McGraw-Hill

Freddy Enrique Chávez Vásquez
Ingeniero Geofísico de Minería, Magister en Matemática Básica, Diplomado Superior en Formulación y Evaluación de Proyectos de Investigación, Magister en Docencia Universitaria e Investigación Educativa, Especialista en Computación Aplicada al Ejercicio Docente, Docente Universitario en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Andrés Fernando Morocho
Ingeniero Electrónico en Control y Redes Industriales, Magister en Sistemas de Control y Automatización Industrial, Magister en Matemática mención Modelación y Docencia, docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).

Cristian Luis Inca Balseca
Ingeniero Automotriz, Magister en Métodos y simulación numérica en Ingeniería, docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).

ISBN: 978-9942-33-640-8

9 789942 336408

compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com