

# Comunicaciones analógicas

---



Ing. Fabricio Javier Santacruz Sulca  
Ing. Paúl David Moreno Avilés  
Ing. Diego Fernando Veloz Cherez

# Comunicaciones analógicas

---

Ing. Fabricio Javier Santacruz Sulca  
Ing. Paúl David Moreno Avilés  
Ing. Diego Fernando Veloz Cherrez

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica del mismo.

© Publicaciones Editorial Grupo Compás  
Guayaquil - Ecuador  
compasacademico@icloud.com  
<https://repositorio.grupocompas.com>



Santacruz, F., Veloz, D. (2023) Comunicaciones analógicas. Editorial  
Grupo Compás

©Ing. Fabricio Javier Santacruz Sulca  
Ing. Paúl David Moreno Avilés  
Ing. Diego Fernando Veloz Cherrez

#### Colaboradores

Est. Quiroz Jaramillo Roger Israel  
Est. Regalado Santi Oscar Diego  
Est. Aldas Naranjo Alex Alberto  
Est. Cabezas Sánchez Stive Bladimir  
Est. Fernández Naula Antonio Alexander

**ISBN: 978-9942-33-666-8**

El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones en las leyes, la producción o almacenamiento total o parcial de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de la misma por cualquiera de sus medios, tanto si es electrónico, como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización de los titulares del copyright.

## **PREFACIO**

Querido lector,

Nos complace presentarle este nuevo libro sobre comunicaciones analógicas. En un mundo cada vez más digitalizado, puede parecer que la era de la comunicación analógica está llegando a su fin. Sin embargo, la verdad es que esta forma de comunicación sigue siendo crucial para muchas aplicaciones importantes en nuestra vida diaria, desde la transmisión de señales de radio y televisión hasta la comunicación de voz y datos en sistemas de telefonía.

Este libro está diseñado para ser una guía completa muy didáctica para comprender y aplicar los principios fundamentales de las comunicaciones analógicas. Desde los conceptos básicos de las señales y los sistemas hasta la teoría detrás de los circuitos analógicos, este libro ofrece una visión completa y práctica de cómo funcionan las comunicaciones analógicas y cómo se pueden aplicar en la actualidad.

Los capítulos de este libro están organizados de forma clara y concisa para facilitar su comprensión. Cada capítulo comienza con una introducción clara de los conceptos clave y continúa con ejemplos detallados y casos prácticos para ayudar a ilustrar cómo se aplican los principios y fundamentos teóricos en el mundo real en aplicaciones prácticas.

Ya sea que esté estudiando las comunicaciones analógicas por primera vez o que sea un ingeniero experimentado que busca ampliar sus conocimientos, este libro es una valiosa herramienta de referencia que lo ayudará a entender y aplicar los principios fundamentales de las comunicaciones analógicas.

Espero que encuentre este libro informativo y útil en su trabajo y estudios.

Atentamente,

Los Autores



## SIMBOLOS

$f_c$	frecuencia de la portadora
$A_c$	nivel de la señal modulada de una frecuencia de portadora $f_c$
$B$	ancho de banda de banda base
$B_T$	ancho de banda (pasabanda) de transmisión
$dB$	decibel
$D_f$	constante de ganancia de modulación por frecuencia
$D_p$	constante de ganancia de modulación por fase
$f_i$	frecuencia instantánea
$f_s$	frecuencia de muestreo
$g(t)$	envolvente compleja
$\tilde{g}(t)$	envolvente compleja distorsionada
$m(t)$	forma de onda de mensaje (modulación)
$\tilde{m}(t)$	mensaje distorsionado (recibido con ruido)
$n(t)$	forma de onda del ruido
$R$	resistencia
$R(t)$	envolvente real
$w(t)$	una forma de onda
$W(f)$	espectro (transformada de Fourier) de $w(t)$
$J_n(.)$	función de Bessel del primer tipo, n-ésimo orden
$Im\{ \}$	parte imaginaria de
$Re\{ \}$	parte real de
$\langle [ ] \rangle$	promedio de tiempo
$[\hat{m}]$	Transformada de Hilbert de $m$

## ÍNDICE

CAPÍTULO 1.....	7
SISTEMAS DE COMUNICACIONES Y TÉCNICAS DE SEÑALIZACIÓN EN BANDA BASE .....	7
Introducción .....	8
1.1 Representación de envolventes complejas de formas de onda pasa banda .....	8
1.1.1 <i>Representación de la envolvente compleja</i> .....	10
1.2 Espectro de señales pasa banda.....	12
1.3 Evaluación de potencia .....	13
1.3.1 <i>Potencia Promedio (<math>P_s</math>)</i> .....	13
1.3.2 <i>Potencia Pico de Envolvente (PEP)</i> .....	14
1.3.3 <i>Potencia de la Portadora (<math>P_c</math>)</i> .....	14
1.4 Filtrado pasabanda y distorsión lineal .....	16
1.4.1 <i>Filtrado pasa bajas equivalente</i> .....	16
1.4.2 <i>Distorsión lineal</i> .....	18
1.4.3 <i>Características canal pasa banda sin distorsión</i> .....	18
1.5 Teorema del muestreo pasa banda .....	19
1.5.1 <i>Teorema de la dimensionalidad</i> .....	20
1.6 Señal recibida con ruido .....	21
1.7 Clasificación de filtros y amplificadores .....	22
1.7.1 <i>Amplificadores</i> .....	22
1.7.2 <i>Filtros</i> .....	23
1.7.2.1 <i>Clasificación de los Filtros</i> .....	24
1.8 Distorsión no lineal .....	24
1.9 Limitadores .....	28
1.10 Mezcladores y convertidores .....	29
1.11 Circuitos detectores.....	34
1.11.1 <i>Detector de envolvente</i> .....	34
1.11.2 <i>Detector de producto</i> .....	35
1.11.3 <i>Detector de modulación en frecuencia</i> .....	37
1.11.4 <i>Detector de pendiente</i> .....	37
1.12 Lazos enganchados por fase y sintetizadores de frecuencia .....	38

1.13	Transmisores y receptores generalizados.....	40
1.13.1	<i>Transmisor Generalizados</i> .....	40
1.13.2	<i>Receptor Generalizado</i> .....	42
CAPÍTULO 2.....		44
MODULACIÓN EN AMPLITUD.....		44
2.1	Modulación en Amplitud (AM).....	45
2.1.1	Señal modulada.....	46
2.1.2	Espectro de la señal modulada .....	47
2.1.3	Porcentaje de modulación.....	48
2.1.4	Eficiencia .....	48
2.1.5	Potencia promedio .....	49
2.1.6	Potencia pico de envolvente.....	49
2.2	Modulación de Doble Banda Lateral con Portadora Suprimida (DSB-SC) .....	53
2.2.1	Señal modulada.....	54
2.2.2	Espectro de la señal modulada .....	55
2.2.3	Potencia promedio .....	56
2.2.4	Potencia pico de envolvente.....	56
2.2.5	Demodulación: Lazo de costas y lazo cuadrático .....	56
2.2.5.1	Lazo de costas.....	56
2.2.5.2	Lazo cuadrático.....	58
2.3	Modulación de banda lateral única (Single Sideband – SSB).....	62
2.3.1	Señal modulada.....	63
2.3.2	Espectro de la señal modulada .....	64
2.3.3	Potencia promedio .....	66
2.3.4	Potencia pico de envolvente.....	67
2.3.5	Método de modulación SSB .....	67
2.3.5.1	Método de puesta en fase: .....	67
2.3.5.2	Método de filtrado:.....	68
2.4	Modulación de banda lateral vestigial (Vestigial Sideband – VSB).....	72
CAPITULO 3 .....		76
MODULACION ANGULAR.....		76
3.1	Representación de señales PM y FM .....	77
3.2	Frecuencia instantánea .....	80
3.3	Variación de fase ( $\Delta Fp$ ) .....	82
3.4	Variación de frecuencia ( $\Delta Fp$ ) .....	82

3.5	Desviación pico de frecuencia ( $\Delta\theta p$ ) para PM.....	82
3.6	Desviación pico de frecuencia ( $\Delta\theta f$ ) para FM.....	82
3.7	El índice de modulación.....	82
3.8	Espectro de una señal modulación angular.....	83
3.9	Modulación por PM.....	83
3.10	Modulación por FM.....	83
3.11	Ancho de banda.....	85
	$BT = 2(\beta + 1)B$ .....	85
3.12	Modulación Angular de Banda Angosta.....	87
3.13	Modulación en Frecuencia de Banda Ancha.....	90
3.14	Propiedades importantes de las señales moduladas por ángulo.....	96
CAPÍTULO 4.....		99
RENDIMIENTO DE SISTEMAS DE COMUNICACIONES DISTORSIONADOS POR RUIDO.....		99
2.5	Razón señal ruido de sistemas analógicos.....	100
2.6	Comparación con sistemas banda base.....	101
2.7	Sistema de AM con detector de producto.....	102
2.8	Sistema de AM con detector de envolvente.....	105
2.8.1	Caso 1: Relación ( $S/N$ ) $in \gg 1$ .....	106
2.8.2	Caso 1: Relación ( $S/N$ ) $in < 1$ .....	107
2.8.3	Comparativa de relaciones señal-ruido del detector de producto y detector de envolvente.....	109
2.9	Sistema de DSB-SC.....	109
2.10	Sistemas de SSB.....	111
2.11	Sistemas de PM.....	112
2.12	Sistemas de FM.....	118
2.13	Extensión Umbral.....	121
2.14	Sistemas de FM con deénfasis.....	124
Bibliografía.....		129

**CAPÍTULO 1.**  
**SISTEMAS DE COMUNICACIONES Y TÉCNICAS DE SEÑALIZACIÓN**  
**EN BANDA BASE**

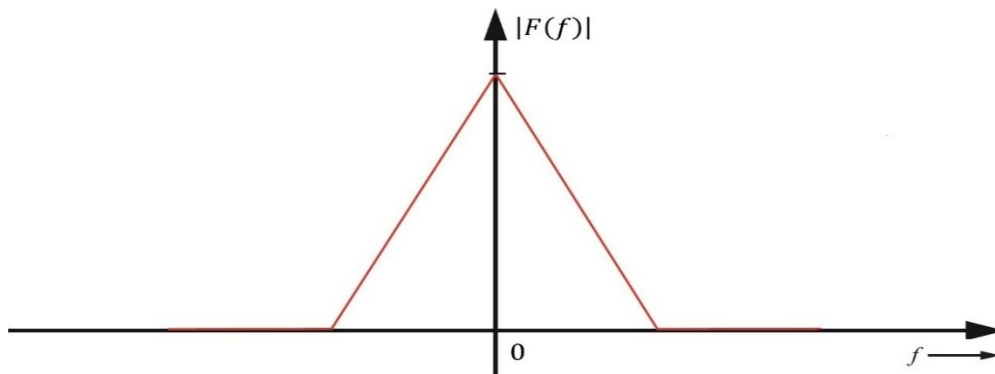
## Introducción

El capítulo 1 del libro de Comunicaciones Analógicas cubre una amplia gama de temas relacionados con la señalización pasabanda, incluyendo la representación de envolventes complejas, el espectro de señales pasabanda, la evaluación de la potencia, el filtrado pasabanda y la distorsión lineal, el teorema del muestreo pasabanda, la clasificación de filtros y amplificadores, la distorsión no lineal, los limitadores, los mezcladores y convertidores, los circuitos detectores, los lazos enganchados por fase y sintetizadores de frecuencia, y los transmisores y receptores generalizados. Cada tema se trata de manera clara y concisa, y se proporcionan ejemplos y figuras ilustrativas para ayudar a comprender los conceptos. En general, el capítulo es una excelente introducción a la señalización bandabase y proporciona una base sólida para la comprensión de la comunicación analógica.

A continuación, se plantean conceptos y definiciones básicas útiles para la terminología y nomenclatura utilizada a lo largo del texto.

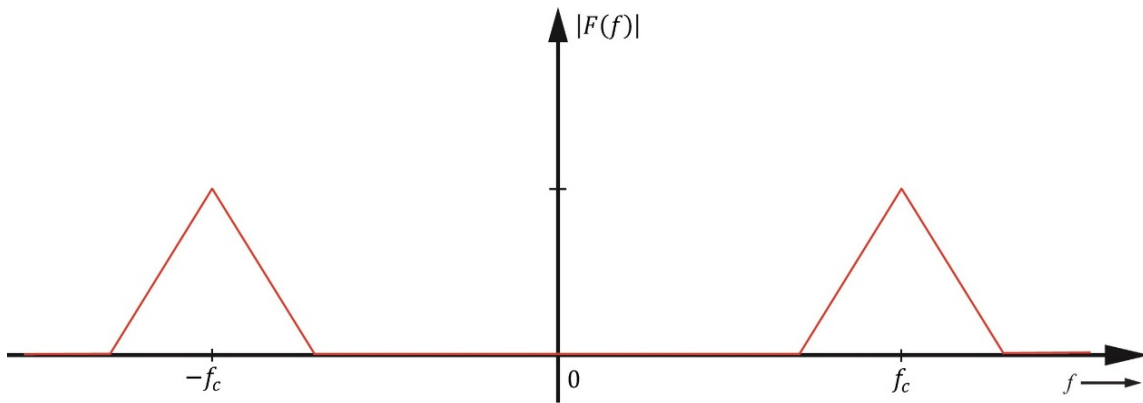
### 1.1 Representación de envolventes complejas de formas de onda pasa banda

**Señal banda base (SBB):** Una señal de banda base es aquella que tiene componentes espectrales en torno a cero o a frecuencias muy bajas, la Figura 1.1 muestra el espectro de una SBB.



**Figura 1.1:** Espectro de una señal banda base.

**Señal pasabanda (SPB):** Una señal pasa banda es aquella que tiene componentes espectrales significativos en torno a una frecuencia relativamente alta que se denomina frecuencia portadora  $f_c$ , la Figura 1.2 muestra el espectro de una SPB.



**Figura 1.2:** Espectro de una señal pasa banda.

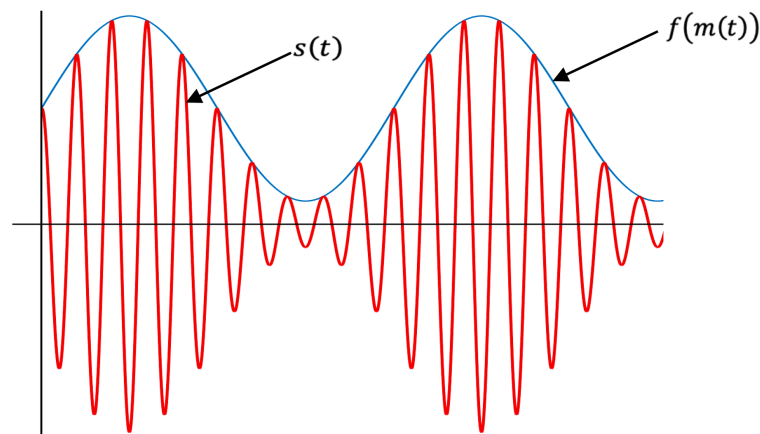
Las señales en banda base son señales de información, cuando se trata de este tipo de señales de información se puede generar ciertos procesos, por ejemplo, si se aplica un filtro se puede eliminar componentes no deseadas, pero el procesamiento de la señal seguirá siendo un proceso banda base. Cualquier proceso que no desplace el espectro a otra frecuencia seguirá siendo un proceso banda base.

Existen procesos donde la señal de información (SBB) se desplaza a una frecuencia más alta, este es un proceso pasa banda, es decir, es un proceso de conversión de frecuencias, esto representa el proceso de modulación.

**Modulación:** Es el proceso de plasmar la señal de información SBB en una señal SPB con una frecuencia portadora  $f_c$ , mediante la introducción de perturbaciones en los parámetros de la señal portadora.

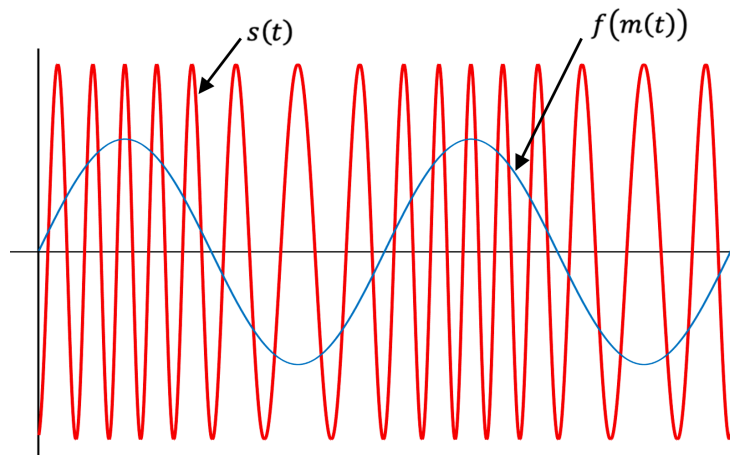
La señal de información se la denomina señal moduladora, se representa mediante  $m(t)$  y es la que provoca cambios en la señal portadora. La señal por modificar es la señal portadora que es la señal pasabanda, la señal resultante del proceso de modulación (al aplicar los cambios o modificaciones en los parámetros de la señal portadora) se la conoce como señal modulada  $s(t)$  y en el presente libro se representará mediante  $v(t)$ .

**Modulación en amplitud:** La amplitud de la señal portadora varía en función de la amplitud de la señal de información  $m(t)$ , tal como se muestra en la Figura 1.3.



**Figura 1.3:** Modulación en Amplitud.

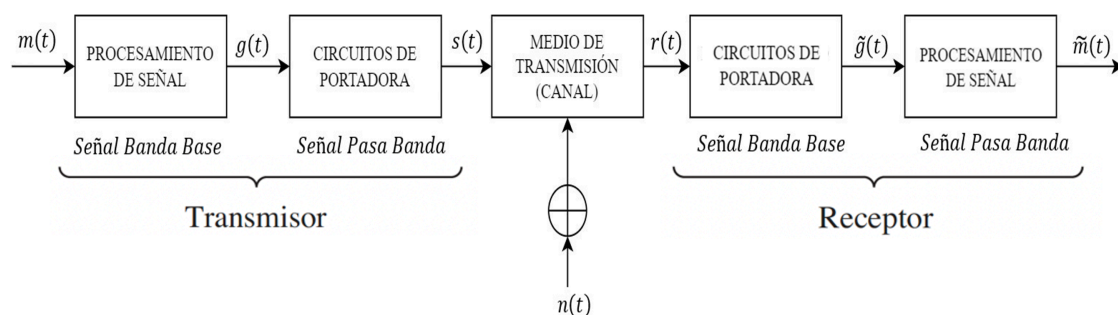
**Modulación en frecuencia:** Consiste en variar la frecuencia de la portadora proporcionalmente a la frecuencia de la señal moduladora, permaneciendo constante su amplitud.



**Figura 1.4:** Modulación en frecuencia.

### 1.1.1 Representación de la envolvente compleja

La Figura 1.5 muestra el esquema del sistema de comunicación, A la entrada del sistema se tiene una señal de información  $m(t)$  misma que se somete a un procesamiento de señal banda base obteniendo a su salida la envolvente compleja  $g(t)$ , mediante los circuitos de portadora se tiene la señal modulada  $s(t)$  siendo esta una señal pasa banda que se distorsiona a causa del ruido denotado como  $n(t)$  conforme atraviesa un canal. Esto da como resultado una señal pasa banda contaminada con ruido a la entrada del receptor denominada  $r(t)$ , el receptor es el encargado de recuperar la información que fue enviada por la fuente, realizando el proceso inverso del transmisor, para lo cual la señal recibida se somete a otro circuito de portadora obteniendo así una envolvente compleja contaminada con ruido en el canal de transmisión  $\tilde{g}(t)$ , para finalmente procesar esta envolvente y obtener la señal banda base de información contaminada  $\tilde{m}(t)$ .



**Figura 1.5:** Sistema de Comunicación.

La envolvente compleja  $g(t)$  depende del tipo de modulación,  $r(t)$  es la suma de la señal modulada  $s(t)$ , el ruido y las señales interferentes que también pueden insertarse en el canal.

La forma de onda pasa banda, se puede expresar como

$$s(t) = v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \quad (1-1)$$



Donde

$R_e\{\cdot\}$  es la parte real de  $\{\cdot\}$  y  $g(t)$  es la envolvente compleja el cual tiene distintas formas de representación como se indica a continuación.

$$g(t) = x(t) + jy(t) \text{ Cartesianas} \quad (1-2)$$

$$g(t) = R(t)|\underline{\theta(t)} \text{ Polares} \quad (1-3)$$

$$g(t) = R(t) e^{j\theta(t)} \text{ Fasoriales} \quad (1-4)$$

Donde:

$R(t)$  representa el módulo de la envolvente compleja como indica en la ecuación (1-5),  $\theta(t)$  representa la fase de la envolvente compleja como indica la ecuación (1-6),  $x(t)$  representa la parte real de la envolvente compleja y  $y(t)$  representa la parte imaginaria de la envolvente compleja como indica la ecuación (1-7) y (1-8) respectivamente.

$$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (1-5)$$

$$\theta(t) = \angle g(t) = \tan^{-1} \left( \frac{y(t)}{x(t)} \right) \quad (1-6)$$

$$x(t) = \text{Re}\{g(t)\} = R(t) \cos(\theta(t)) \quad (1-7)$$

$$y(t) = \text{Im}\{g(t)\} = R(t) \text{sen}(\theta(t)) \quad (1-8)$$

La señal pasa banda en términos de las componentes cartesianas se representa mediante la ecuación (1-9).

$$v(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \text{sen}(2\pi f_c t) \quad (1-9)$$

La señal pasabanda en términos de las componentes polares se representa mediante la ecuación (1-10).

$$v(t) = R(t) \cos(\omega_c + \theta(t)) \quad (1-10)$$

Donde:

$x(t)$  es la modulación en fase.

$y(t)$  es la modulación en cuadratura.

$R(t)$  es la modulación de amplitud.

$\theta(t)$  es la modulación de fase.

Donde  $\omega_c = 2\pi f_c$ , en la cual  $f_c$  es la frecuencia de portadora y  $g(t)$  es el resultado del procesamiento que tuvo la señal de información  $m(t)$ , es decir la envolvente compleja  $g(t)$  esta en función de la señal moduladora  $m(t)$  como se indica a continuación.

$$g(t) = g[m(t)] \quad (1-12)$$

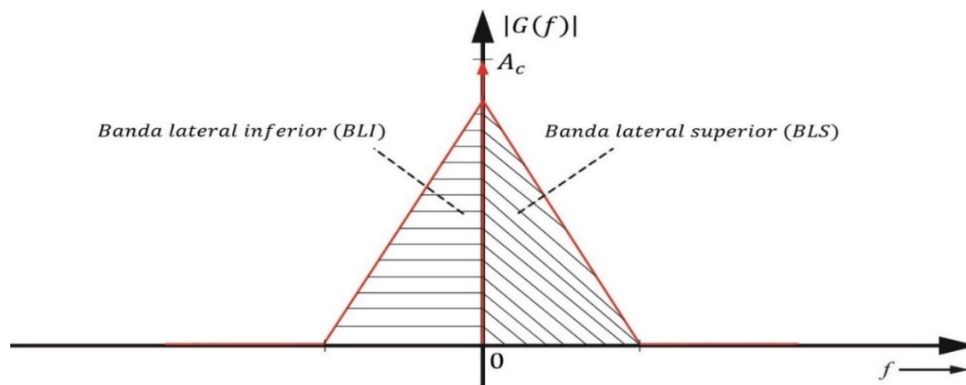
**TABLA 1-1 FUNCIONES DE ENVOLVENTE COMPLEJA PARA DIFERENTES TIPOS DE MODULACIÓN**

<b>Tipos de Modulaci3n</b>	<b>Envolvente Compleja</b>
AM (modulaci3n en Amplitud)	$g(t) = A_c[1 + m(t)]$
DSB-SC (doble banda lateral con portadora suprimida)	$g(t) = A_c m(t)$
SSB (Modulaci3n de banda lateral sencilla)	$g(t) = A_c [m(t) \pm j\hat{m}(t)]$
FM (modulaci3n en frecuencia)	$g(t) = A_c e^{jD_f \int m(t) dt}$
PM (modulaci3n en fase)	$g(t) = A_c e^{jD_p m(t)}$

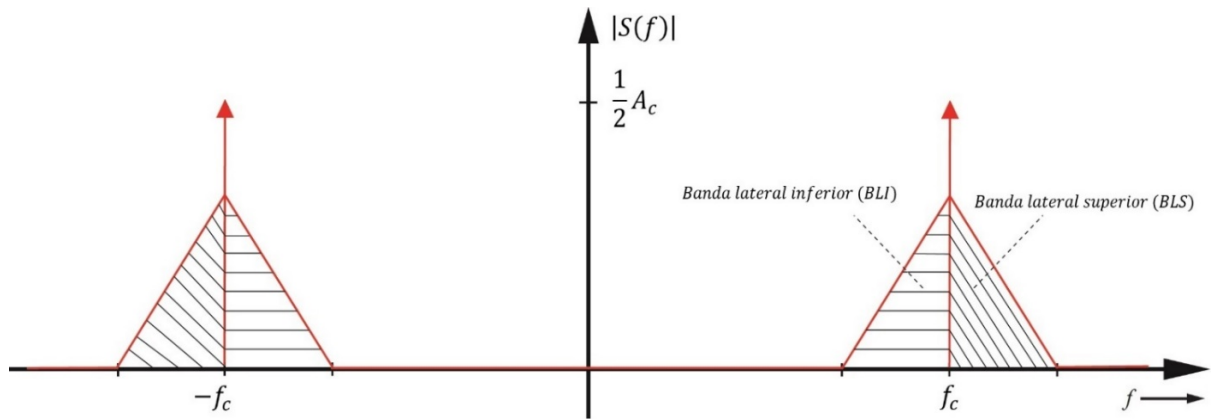
La TABLA 1-1, muestra los tipos de modulaci3n a estudiar, donde cada modulaci3n tiene asociada una envolvente compleja  $g(t)$  que depende de la se1al moduladora  $m(t)$  como indica la ecuaci3n (1-12).

### 1.2 Espectro de se1ales pasa banda

El espectro de una se1al pasa banda se relaciona directamente con el espectro de su envolvente compleja. Al analizar la Figura 1.6a donde muestra el espectro de la SBB, se puede observar que su espectro es el mismo que el de la SPB solamente desplazado a las frecuencias  $f_c$  y  $-f_c$  como indica la Figura 1.6b. Entonces si se conoce el espectro de  $g(t)$  se conocer1 el espectro de la se1al modulada  $s(t)$ .



a) Envlovente compleja de una se1al de AM.



b) Señal modulada mediante AM.

**Figura 1.6:** Espectro de la señal de AM.

La forma de onda pasa banda se representa con la siguiente expresión.

$$s(t) = v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$$

$$v(t) = \frac{1}{2}g(t)e^{j\omega_c t} + \frac{1}{2}g^*(t)e^{-j\omega_c t}$$

$$V(f) = \frac{1}{2}G(f - f_c) + \frac{1}{2}G^*(-f - f_c) \quad \text{ó} \quad V(f) = \frac{1}{2}G(f - f_c) + \frac{1}{2}G^*(f + f_c)$$

Donde el espectro de una señal pasa banda se puede obtener mediante la ecuación

$$V(f) = \frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \quad (1-13)$$

### 1.3 Evaluación de potencia

En un sistema de comunicación se puede determinar las diferentes potencias dependiendo del tipo de modulación de la señal, como son:

- Potencia Promedio
- Potencia de Portadora
- Potencia Envolvente Pico

#### 1.3.1 Potencia Promedio ( $P_s$ )

Es la potencia que se obtendrá al hacer el análisis de una señal oscilatoria en un periodo de tiempo mucho más grande que el de las componentes espectrales que contiene una señal.

La potencia promedio normalizada de una señal pasa banda cualquiera se representa mediante las siguientes ecuaciones.

$$P_v = \langle v^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f) df = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle \quad (1-14)$$

Donde normalizada implica que la carga es igual a  $1\Omega$ .

$$P_v = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle [\text{Watts}] \quad (1-15)$$

### 1.3.2 Potencia Pico de Envolvente (PEP)

Es el valor de la potencia promedio si  $|g(t)|$  se mantuviera constante en su valor máximo a lo largo de todo el tiempo de observación.

Esta potencia es equivalente a la potencia promedio normalizada, la diferencia es que esta trabaja con los valores máximos de  $g(t)$ , donde estos valores son constantes.

$$PEP = \frac{1}{2} [\max(g(t))]^2 [\text{Watts}] \quad (1-16)$$

### 1.3.3 Potencia de la Portadora ( $P_c$ )

Es la potencia de la señal portadora sin modulación como indica la

$$P_c = \langle A_c^2 \cos^2(\omega_c t) \rangle \quad (1-17)$$

ecuación (1-17).

La potencia de la señal portador se puede reducir a la ecuación (1-18)

#### Ejemplo 1:

$$P_c = \frac{1}{2} A_c^2 \quad (1-18)$$

Analizando el espectro de una señal modulada mediante AM:

$$g(t) = A_c [1 + m(t)]$$

la señal modulada es:

$$s(t) = v(t) = A_c [1 + m(t)] \cos(\omega_c t)$$

el espectro podemos obtener de dos formas:

1) Partiendo del espectro de la envolvente compleja:

$$G(f) = A_c \delta(f) + A_c M(f)$$

$$S(f) = \frac{1}{2} G(f - f_c) + \frac{1}{2} G(f + f_c)$$

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c [\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)]$$

2) Partiendo de la señal modulada:

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{1}{2} A_c M(f) * [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

Analizando la potencia promedio de la señal modulada ( $P_s$ ):

$$P_s = \frac{1}{2} A_c^2 [1 + P_m] \quad (1-19)$$

$$P_s = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle$$

$$P_s = \frac{1}{2} \langle |A_c^2 [1 + m(t)]^2 \rangle$$

$$P_s = \frac{1}{2} A_c^2 \langle 1 + 2 m(t) + m^2(t) \rangle$$

$$P_s = \frac{1}{2} A_c^2 [1 + \langle m^2(t) \rangle]$$

Se obtiene la expresión general para la potencia normalizada, para una señal modulada mediante AM como indica la ecuación (1-19), siempre y cuando la señal moduladora  $m(t)$  no tenga componentes en DC y sea senoidal, caso contrario se evaluará con la fórmula propuesta para la potencia normalizada como indica la ecuación 1-15.

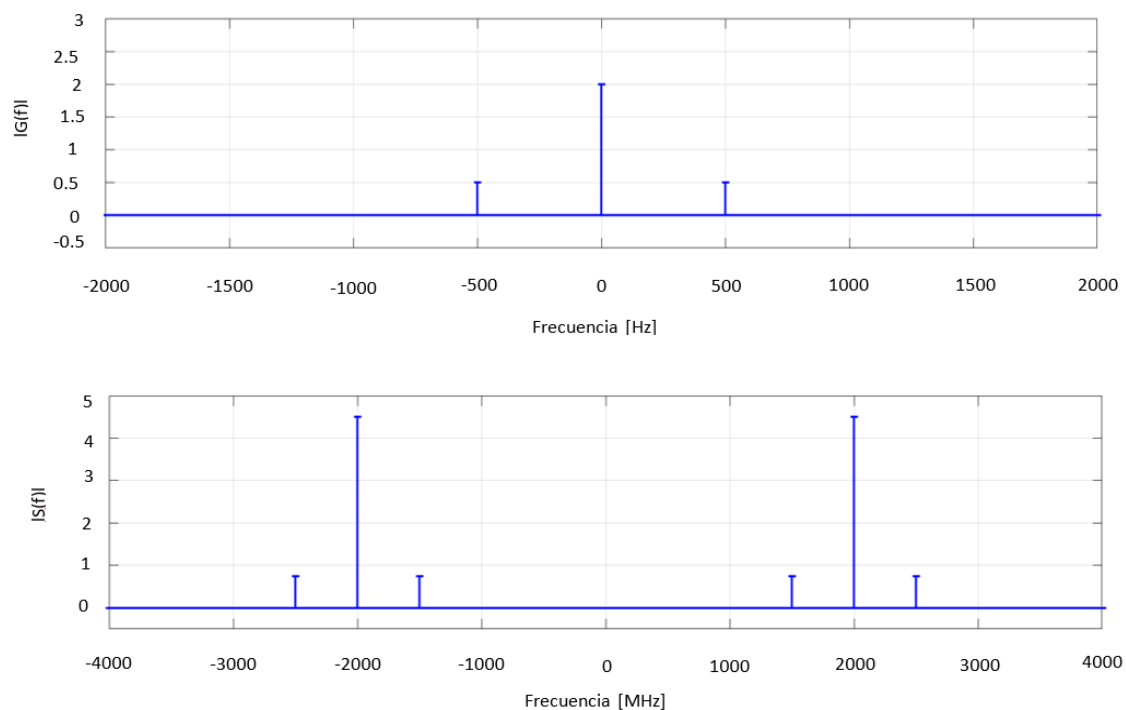
Al analizar la ecuación (1-19), el término de  $P_m$  corresponden a la potencia de la señal moduladora,  $\frac{1}{2} A_c^2$  corresponde a la potencia de la señal portadora y  $\frac{1}{2} A_c^2 P_m$  corresponde a la potencia en las bandas laterales de  $s(t)$ .

### Ejemplo 2:

#### Evalúe el espectro de magnitud para una señal de amplitud modulada (AM).

Considerando la señal moduladora:  $m(t) = \cos(1000\pi t) + 2$

Modular mediante AM considerando una frecuencia de portadora  $f_c = 2000 \text{ MHz}$  y una amplitud  $A_c = 3 \text{ V}$ :

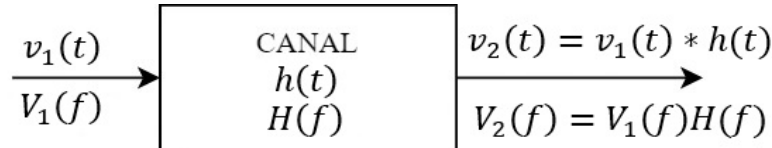


**Figura 1. 7:** Espectro modulada de una señal AM.

## 1.4 Filtrado pasabanda y distorsión lineal

### 1.4.1 Filtrado pasa bajas equivalente

En esta sección se desarrollará una técnica para modelar un filtro pasabanda mediante un filtro pasa bajas equivalente que tiene una respuesta al impulso de valor complejo, la Figura 1.8a detalla el comportamiento del filtro pasabanda.



a) Filtro pasabanda.

Donde

$v_1(t)$  y  $v_2(t)$  son las formas de onda pasa bajas de entrada y salida.

$h(t)$  es la respuesta al impulso del filtro pasabanda.

$H(f)$  representa la función de transferencia.

Las señales pasabanda se pueden representar mediante las siguientes ecuaciones:

$$v_1(t) = \text{Re}\{g_1(t)e^{j\omega_c t}\}$$

$$v_2(t) = \text{Re}\{g_2(t)e^{j\omega_c t}\}$$

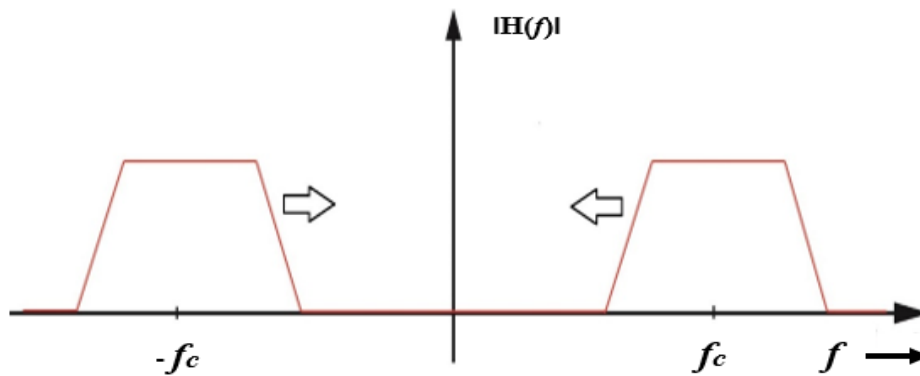
$$h(t) = \text{Re}\{k_1(t)e^{j\omega_c t}\}$$

La función de transferencia para el filtro pasa banda, se puede obtener mediante la ecuación (1-20):

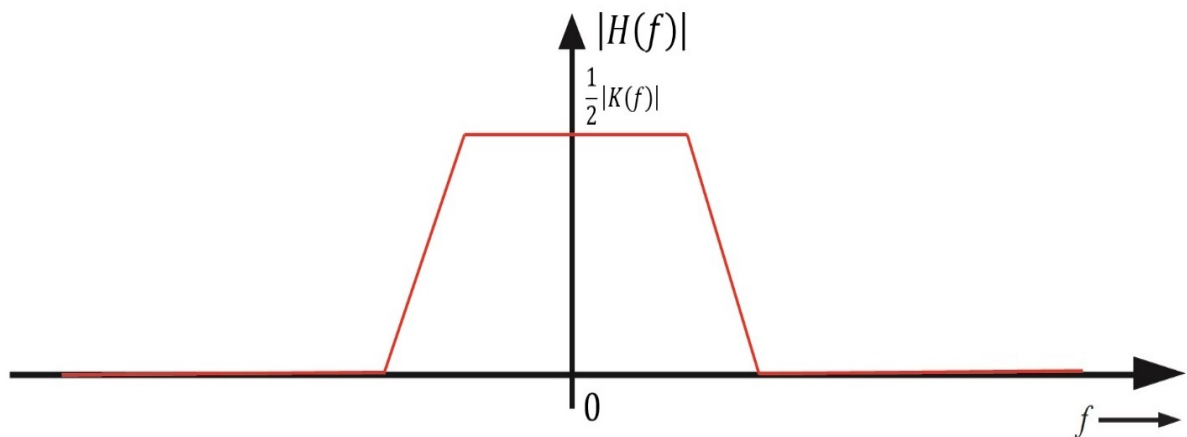
$$H(f) = \frac{1}{2}[K(f - f_c) + K^*(-f - f_c)] \quad (1-20)$$

La descripción en el dominio de frecuencia,  $H(f)$ , puede expresarse en términos de  $K(f)$ .

La representación gráfica de la ecuación (1-20) está descrita en la Figura 1.8b que muestra la respuesta de filtro pasa banda donde la frecuencia central es mucho mayor a cero ya que al tratarse de una señal pasa banda, ésta se encuentra desplazada hacia la frecuencia  $\pm f_c$ .

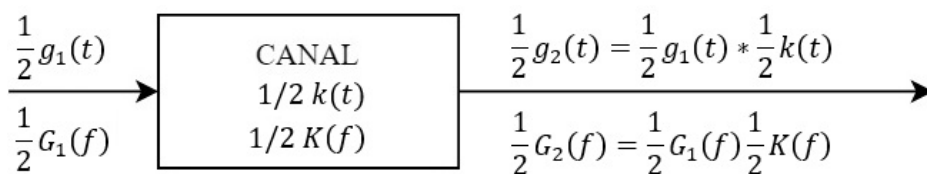


b) Respuesta típica de filtro pasabanda.



c) Respuesta de frecuencia típica del filtro pasa bajas equivalente.

Con ayuda del filtro pasa bajas equivalente, se puede representar la señal pasa banda de la figura 1.8b como una única señal banda base como indica la Figura 1.8c, Esta representación se la hace mediante un filtro pasa bajas en función de su envolvente compleja como indica la Figura 1.8d.



d) 1Filtro pasa bajas equivalente.

**Figura 1. 8:** Filtro pasabanda.

El teorema de filtrado pasa bajas equivalente indica que en lugar de analizar toda la señal en términos pasa banda donde las componentes espectrales serán mucho más altas que las componentes de ancho de banda del filtro correspondiente, se puede analizar en función de las señales banda base.

De esta manera se puede concluir que cualquier sistema de filtro pasa banda puede describirse y analizarse mediante un filtro pasa bajas equivalente.

### 1.4.2 Distorsión lineal

Si un sistema es lineal no existe distorsión, es decir se conserva la representación original del espectro.

Al hablar de un sistema lineal invariante en el tiempo, significa que no produce cambios en la salida, ni en magnitud ni en fase.

Para una transmisión sin distorsión de las señales pasa banda, la función de transferencia de canal,  $H(f) = |H(f)|e^{j\theta(f)}$  se debe satisfacer dos condiciones:

1. El módulo de la función de transferencia debe ser constante como indica en la ecuación (1-21)

$$|H(f)| = A \quad (1-21)$$

2. La derivada de la respuesta de fase es una constante. Es decir,

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df} = T_g \quad (1-22)$$

3. Una distorsión lineal es cuando no hay variación de fase ni de amplitud.

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df} = T_g \quad (1-22)$$

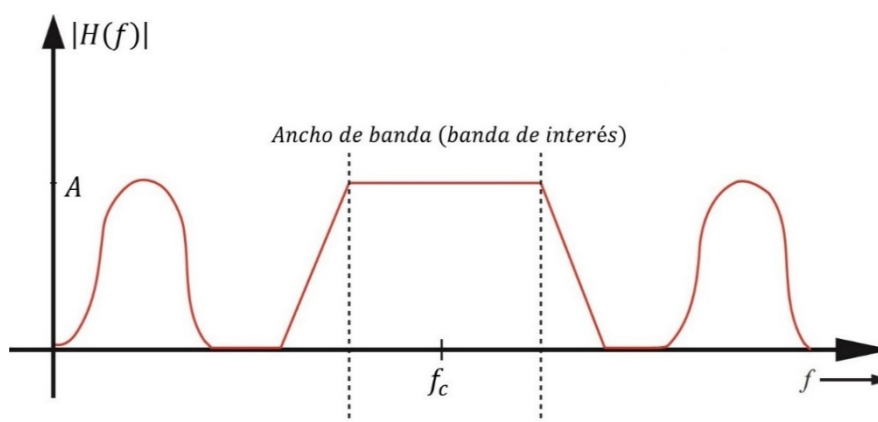
Donde  $T_g$  es una constante llamada el retraso de la envolvente compleja o, de manera más concisa, el retraso de grupo y  $\theta(f) = \angle H(f)$ .

Estas condiciones por cumplir en un sistema pasa banda, tienen que ser validas únicamente dentro de la banda de interés como se observa en la Figura 1.9, para ello se debería aplicar un filtro pasa banda.

### 1.4.3 Características canal pasa banda sin distorsión

Condiciones:

1.  $|H(f)| = A$

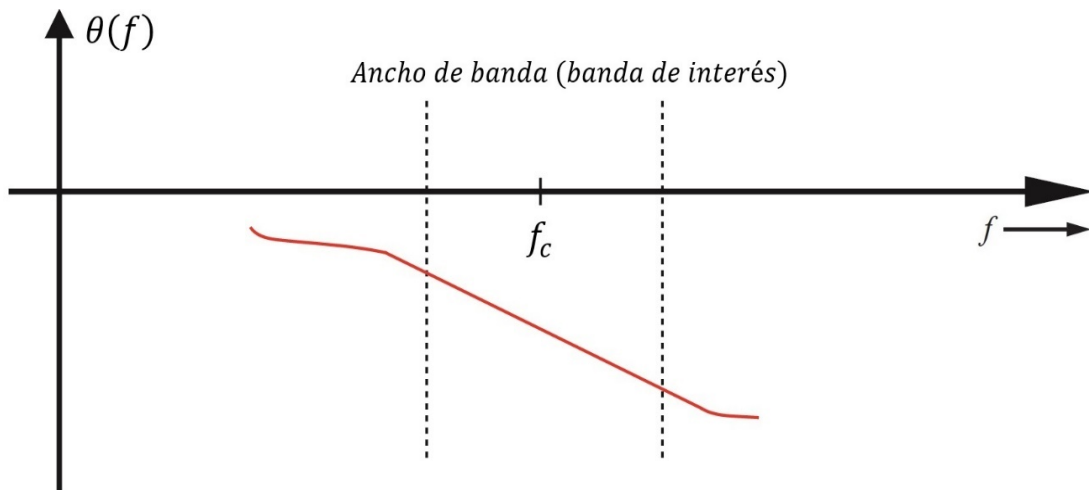


**Figura 1. 9:** Espectro de un canal pasabanda sin distorsión.

Al cumplir con la primera condición descrita en la ecuación (1-21), a la salida del sistema se obtendrá la misma forma que a la entrada del sistema, dependiendo de A siendo este un valor constante en toda la banda de interés, si  $A > 1$  la señal estará amplificada y si  $A < 1$  la señal estará atenuada.



$$2. \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{d[\theta(f)]}{df} = T_g \rightarrow \theta(f) = -2\pi f T_g + \theta_0 \quad (1-23)$$



**Figura 1. 10:** Respuesta de fase de un canal pasabanda sin distorsión.

Al analizar la fase  $\theta(f)$  en la Figura 1.10 se logra observar que existe un comportamiento lineal únicamente en la banda de interés, mientras se cumplan esas condiciones se puede asumir que existe distorsión lineal.

Demostración:

Partimos de la función de transferencia como se denota a continuación:

$$H(f) = A e^{j\theta(f)} = A e^{j(-2\pi f T_g + \theta_0)}$$

$$H(f) = A e^{j\theta_0} e^{-j2\pi f T_g} \quad (1-24)$$

Al ingresar una señal pasa banda la ecuación (1-25) a la función de transferencia de la ecuación (1-24) se obtiene a la salida del sistema una señal con retardo como se muestra en la ecuación (1-26):

$$v_1(t) = x(t) \cos(\omega_c t) - y(t) \sin(\omega_c t) \quad (1-25)$$

A la salida se tiene:

$$v_2(t) = A x(t - T_g) \cos[\omega_c(t - T_g) + \theta_0] - A x(t - T_g) \sin[\omega_c(t - T_g) + \theta_0]$$

$$v_2(t) = A x(t - T_g) \cos[\omega_c t + \theta(f_c)] - A x(t - T_g) \sin[\omega_c t + \theta(f_c)] \quad (1-26)$$

En la ecuación (1-26) se puede observar que las componentes en fase  $x(t)$  y cuadratura  $y(t)$  están retardadas a causa del retardo de grupo  $T_g$

La señal de la envolvente compleja tiene un retardo  $T_g$  denominado retardo de grupo que es el tiempo de retardo de varias componentes espectrales banda base y la portadora tiene un retardo  $T_a$  denominado retraso de tiempo de portadora que es el tiempo de retardo para una única componente espectral.

## 1.5 Teorema del muestreo pasa banda

Se realiza el muestro de señales en la simulación de sistemas de comunicación, ya sea para un proceso de digitalización, discretización o extracción de

información, es decir, en cada uno de estos procesos se debe imponer una etapa de muestreo a una señal analógica continua.

Para que una señal sea reconstruida correcta y adecuadamente, se deben cumplir con una única condición, siendo esta la condición de Nyquist.

La condición de Nyquist establece que la frecuencia de muestreo  $f_s$  debe ser mayor o igual a dos veces la frecuencia más alta de la señal.

Donde B se denota como la frecuencia más alta de la señal y La frecuencia de muestreo  $f_s$  es el número de muestras obtenidas de una señal en un periodo determinado.

$$f_s \geq 2B_T \quad (1-27)$$

Sin embargo, para sistemas pasa banda, las frecuencias a tratar son muy altas, y resulta muy pesado para alguna aplicación de simulación, Afortunadamente, puede mostrarse que la velocidad de muestreo para señales de este tipo (pasabanda) depende solamente de su ancho de banda y no de las frecuencias absolutas involucradas. Esto es equivalente a decir que se puede reproducir la señal a partir de muestras de la envolvente compleja. Entonces la forma de onda puede reproducirse a partir de muestras si la velocidad de muestreo, se representa con la ecuación (1-27), donde el ancho de banda de transmisión  $B_T$  se considera como el ancho de banda absoluto,  $B_T = f_2 - f_1$ .

### 1.5.1 Teorema de la dimensionalidad

Determina la cantidad de muestras necesarias para rehacer una señal con un periodo determinado  $T_0$ .

$$f_s = \frac{N}{T_0}$$
$$N = 2 B_T T_0 \quad (1-28)$$

N es definida como la cantidad necesaria de muestras para reconstruir una señal pasa banda.

#### Ejemplo:

Determine la frecuencia de muestreo necesaria para muestrear una señal de voz modulada por AM con una frecuencia portadora de 20 MHz y el número de muestras para un tiempo de análisis de 2,2 segundos. Considerando que la señal de voz tiene componentes de hasta 4 KHz, y el ancho de banda se duplica en modulación AM, entonces:

$$B_T = f_2 - f_1 = (20M + 4K) - (20M - 4K)$$

$$B_T = 8 \text{ KHz}$$

$$f_s \geq 2B_T$$

$$f_s \geq 2 (8000)$$

$$f_s \geq 16 \text{ KHz}$$

Se debe establecer el número de muestras para un periodo de análisis de 2.2 segundos:

$$N = 2 B_T T_0$$

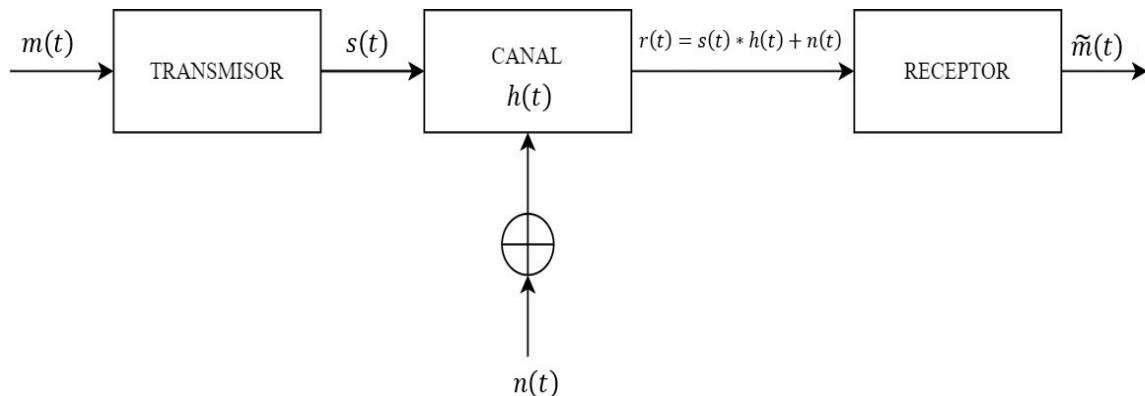
$$N = 2 (8000)(2.2)$$

$N = 35200$  muestras

### 1.6 Señal recibida con ruido

Utilizando la característica pasa banda de transmisión, se analizará el canal de transmisión, que es donde se produce la contaminación con ruido.

La Figura 1.11 muestra que la señal de información  $m(t)$  ingresa al transmisor, donde sufre una serie de operaciones, siendo la modulación la más importante. A la salida del transmisor se tiene la señal modulada  $s(t)$  que será enviada por el canal, si este es lineal e invariante en el tiempo, la señal recibida con ruido en el receptor es  $r(t)$ , esta señal mediante un procesamiento de señales obtiene una señal contaminada de  $m(t)$



**Figura 1. 11:** Inserción de ruido en el canal de transmisión.

La señal a la salida del transmisor se representa como:

$$s(t) = Re\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$$

Si el canal es lineal e invariante en el tiempo, entonces:

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t) \quad (1-29)$$

$h(t)$  respuesta de impulso del canal.

$n(t)$  ruido a la entrada del receptor (pasa banda).

Si el canal no tiene distorsión, la ecuación (1-24) representa su función de transferencia y la señal con ruido a la entrada del receptor es:

$$r(t) = Re\{Ag(t - T_g)e^{j(\omega_c t + \theta(f_c))}\} + n(t) \quad (1-30)$$

Donde, A es la ganancia del canal (número positivo menor a 1)

La mayoría de los circuitos deprecian los retardos para el análisis, entonces:

$$r(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} + n(t) \quad (1-31)$$

## 1.7 Clasificación de filtros y amplificadores

### 1.7.1 Amplificadores

Los amplificadores se pueden clasificar en:

- Lineales
- No Lineales
- Con memoria
- Sin memoria

**Lineales:** Buscan preservar la forma de onda original de la señal de entrada.

Causan la menor cantidad de distorsión.

No son muy eficientes energéticamente porque la mayor parte de la energía que generan se disipa en forma de calor. Los amplificadores de tipo A entran en esta categoría porque solo reproducen la onda de información original amplificada, razón por la cual estos amplificadores se utilizan para la modulación de amplitud.

**No Lineales:** No conservan la forma de onda original de la señal de entrada.

Se utilizan cuando existen variaciones de fase y frecuencia en la señal.

**Con memoria:** Utilizan elementos de almacenamiento de energía como condensadores e inductores, y el valor de salida depende del valor actual y del valor anterior.

**Sin memoria:** el valor de salida actual depende completamente del valor de entrada actual.

Existen varios tipos de amplificadores, los más comunes que se utilizan en los sistemas de comunicación son:

**Tipo A:** Amplifican la polaridad completa de la onda. Se utilizan en sistemas modulados en amplitud porque es necesario conservar la variación de amplitud, ya que es ahí donde se encuentra la información de la señal. Se puede lograr hasta un 50% de eficiencia.

**Tipo B:** Amplifican la polaridad completa de la onda. Son semilineales porque usan polaridad de medio período para la amplificación. Normalmente se utilizan dos amplificadores con polaridad opuesta para AM. Se utilizan para modulación de fase o frecuencia ya que los únicos datos requeridos son los cruces por cero. La eficiencia más alta puede alcanzar el 78,5%.

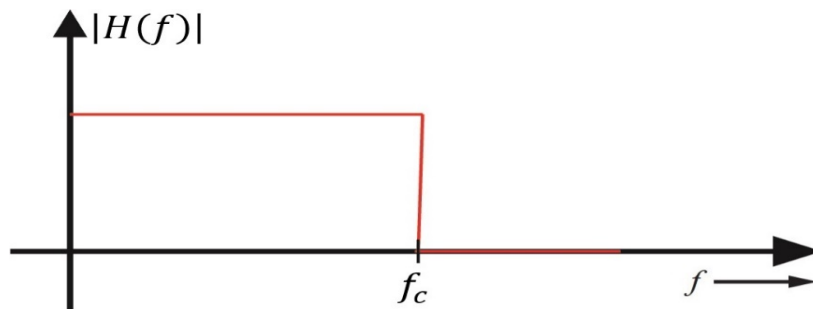
**Tipo C:** Amplifican una parte del bucle, dejando solo el contenido de frecuencia. La eficiencia más alta puede alcanzar el 100%.

### 1.7.2 Filtros

El análisis se realiza en base a la función de transferencia. El orden de los filtros indica la selectividad de los filtros y el orden depende del número de dispositivos utilizados para construir los filtros. Entre los filtros más utilizados en los sistemas de comunicación tenemos:

**Butterworth:** Es un filtro máximamente plano en la banda de frecuencia de interés, lo que significa que hay muy poca distorsión de la señal de información y es un filtro muy selectivo.

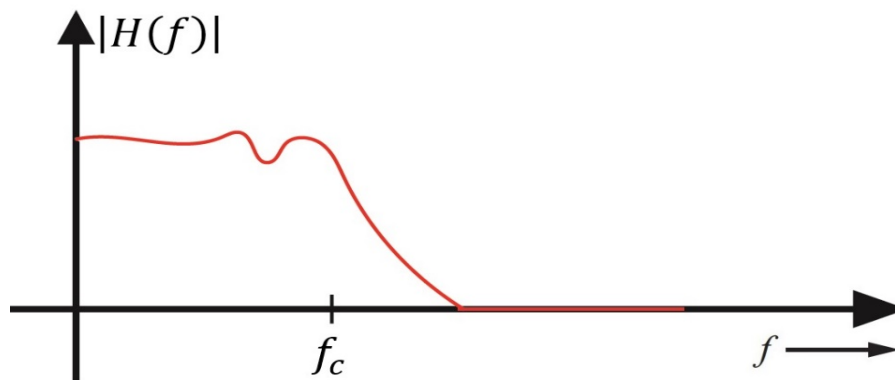
$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_b}\right)^{2n}}}$$



**Figura 1. 12:** Respuesta común de un filtro Butterworth.

**Chebyshev:** este filtro tiene una caída muy pronunciada, que depende del orden del filtro, porque tiene ondas alrededor de la banda de corte, y estas ondas distorsionan la señal de información.

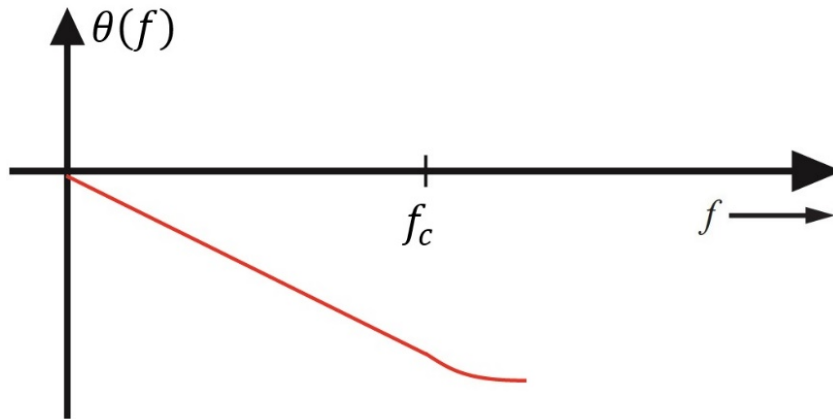
$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left(\frac{f}{f_b}\right)}}$$



**Figura 1. 13:** Respuesta común de un filtro Chebyshev.

**Bessel:** Es un filtro que trata de mantener un cambio de fase lineal sobre la banda de frecuencia de interés y luego minimiza la distorsión de fase en la señal filtrada.

$$|H(f)| = \frac{K_n}{B_n \left(\frac{f}{f_b}\right)}$$



**Figura 1. 14:** Respuesta común de la fase de un filtro Bessel.

### 1.7.2.1 Clasificación de los Filtros

El primer método se basa en la forma de la estructura, equipos o elementos que la componen, en función de los factores de calidad o eficiencia de cada equipo o filtro.

Definimos el factor de calidad de un componente o filtro, que depende de la energía almacenada versus la energía disipada:

$$Q = \frac{2\pi (\text{máxima energía almacenada durante un ciclo})}{\text{energía disipada por ciclo}} \quad (1-32)$$

Esta fórmula se usa principalmente para determinar el factor de calidad de un filtro cuando tiene componentes pasivos como resistencias, capacitores e inductores. El segundo método se basa en la selectividad de frecuencia, y el filtro es más eficiente a mayor selectividad:

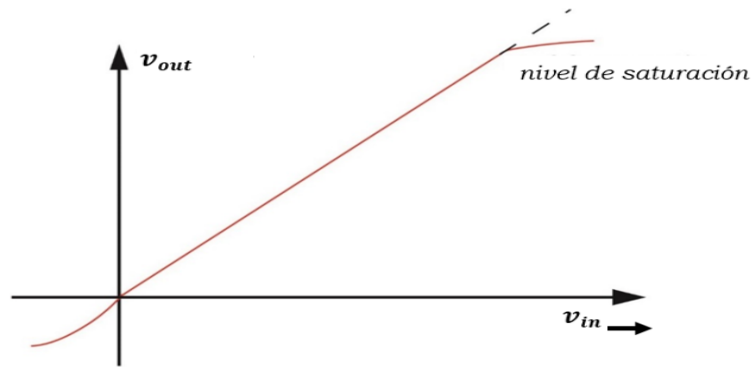
$$Q = \frac{f_0}{B} \quad (1-33)$$

Donde haya un ancho de banda más bajo tendrá un factor de calidad de filtro más alto, y este ancho de banda está en una relación de 3db, es decir, una relación de 2 a 1.

## 1.8 Distorsión no lineal

Ocurre cuando una señal ingresa a un sistema no lineal y modifica el espectro de frecuencia al insertar componentes no deseados, el amplificador es el dispositivo que generalmente exhibe este comportamiento no lineal.

La Figura 1.15 muestra el nivel de amplificación lineal hasta que alcanza el nivel de saturación donde se pierde la condición lineal.



**Figura 1. 15:** Comportamiento de salida con respecto a la entrada de un amplificador no lineal.

Si el amplificador es lineal, entonces la salida del amplificador se representa mediante la ecuación (1-34)

$$v_o(t) = K v_i(t) \quad (1-34)$$

Donde K es la ganancia de voltaje del amplificador.

Debido a la saturación provocada por el amplificador se produce la característica no lineal de salida a entrada mostrada en la Figura 1.15. Una expansión de Taylor alrededor de  $v_i = 0$  puede modelar esta característica de salida a entrada, como se muestra a continuación,

Representación mediante la serie de Taylor:

$$v_o = K_0 + K_1 v_i + K_2 v_i^2 + K_3 v_i^3 + \dots$$

El único término lineal es  $K_1 v_i$ , los demás componentes provocan la distorsión

$$v_o = \sum_{n=0}^{\infty} K_n v_i^n$$

Modelando matemáticamente la serie de Taylor, se tiene la ecuación (1-35):

$$K_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n v_o}{d v_i^n} \right) \Bigg|_{v_i=0} \quad (1-35)$$

En la práctica se realizan los cálculos en función de mediciones, considerando las amplitudes de las componentes insertadas.

### Efectos de la Distorsión No Lineal:

**1) Distorsión Armónica:** Genera componentes espectrales en los armónicos de cada una de las componentes espectrales originales.

Asumiendo un solo tono de prueba a la entrada del amplificador:

$$v_i(t) = A_0 \text{sen}(\omega_0 t)$$

la componente lineal es:

$$K_1 A_0 \text{sen}(\omega_0 t)$$

el término de segundo orden es (aparecen componentes en  $2\omega_0$ ):

$$K_2 A_0^2 \text{sen}^2(\omega_0 t) = \frac{K_2 A_0^2}{2} [1 - \cos(2\omega_0 t)]$$

el término de tercer orden es (aparecen componentes en  $3\omega_0$ ):

$$K_3 A_0^3 \text{sen}^3(\omega_0 t) = \frac{K_3 A_0^3}{2} \text{sen}(\omega_0 t) [1 - \cos(2\omega_0 t)]$$

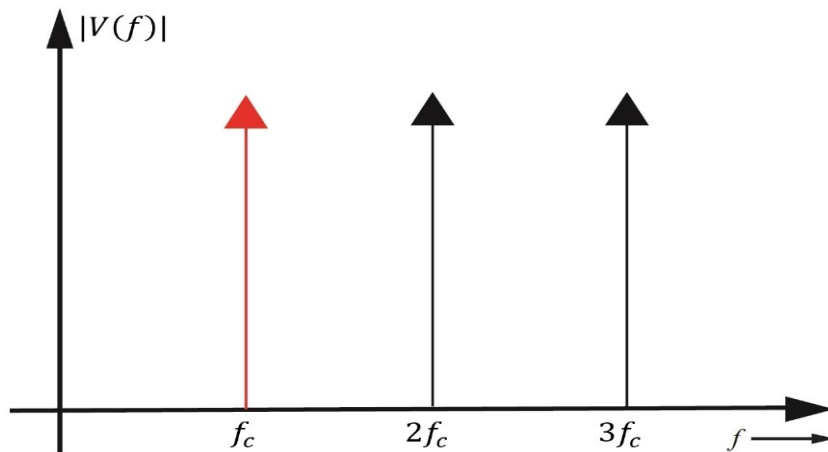
$$v_{out}(t) = v_0 + v_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + v_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + v_3 \cos(3\omega_0 t + \varphi_3)$$

Se aplica un filtro pasa banda para eliminar las componentes que se generan.

La ecuación (1-36) representa, la intensidad de la Distorsión Armónica:

$$THD(\%) = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} v_n^2}}{v_1} \times 100\% \quad (1-36)$$

En la práctica se usa un analizador de distorsión a partir de una señal medida para obtener los valores o a partir de un analizador de espectros, la Figura 1.16 muestra el mismo tono sumados a él, otros tonos de frecuencia llamados armónicos del tono fundamental  $f_c$ .



**Figura 1. 16:** Efecto de la distorsión armónica.

**2) Intermodulación (IMD):** Ocurre cuando hay múltiples componentes espectrales, hace que las frecuencias se mezclen entre sí y aparezcan nuevos componentes espectrales en su respectivo funcionamiento.

Considerando dos tonos:

$$v_i(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t)$$

la componente lineal es:

$$K_1 (A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t))$$

el término de segundo orden es  $(\omega_1 + \omega_2)$  en  $(\omega_1 - \omega_2)$ :

$$\begin{aligned} & K_2 (A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t))^2 \\ &= K_2 [A_1^2 \text{sen}^2(\omega_1 t) + 2A_1 A_2 \text{sen}(\omega_1 t) \text{sen}(\omega_2 t) + A_2^2 \text{sen}^2(\omega_2 t)] \end{aligned}$$

la componente de intermodulación es:

$$2A_1 A_2 \text{sen}(\omega_1 t) \text{sen}(\omega_2 t) = K_2 A_1 A_2 [\cos((\omega_1 - \omega_2)t) - \cos((\omega_1 + \omega_2)t)]$$

el término de tercer orden es (aparecen componentes en  $3\omega_0$ ):

$$K_3 (A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t))^3$$



$$= K_3[A_1^3 \text{sen}^3(\omega_1 t) + 3A_1^2 A_2 \text{sen}^2(\omega_1 t) \text{sen}(\omega_2 t) + 3A_1 A_2^2 \text{sen}(\omega_1 t) \text{sen}^2(\omega_2 t) + A_2^3 \text{sen}^3(\omega_2 t)]$$

las componentes parásitas que caen dentro de la banda de información son las que provocan distorsión y daños en la señal, estas son:

$$3K_3 A_1^2 A_2 \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega_1 t)] \text{sen}(2\omega_2 t)$$

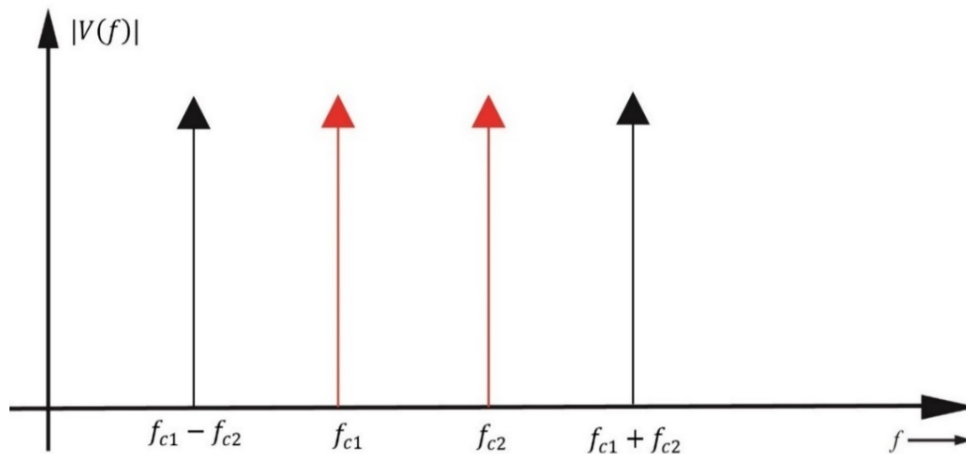
$$= \frac{3}{2} K_3 A_1^2 A_2 \left[ \text{sen}(2\omega_2 t) - \frac{1}{2} (\text{sen}((2\omega_1 + \omega_2)t) - \text{sen}((2\omega_2 - \omega_1)t)) \right]$$

Asumiendo  $A_1 = A_2 = A$

Se obtiene la expresión (1-37), para la Tasa de Intermodulación que relaciona el valor de la intensidad deseada a la salida del amplificador respecto a las señales de la misma banda que pueden llegar a distorsionar:

$$R_{IMD} = \frac{K_1 A}{\frac{3}{4} K_3 A^3} = \frac{4 K_1}{3 K_3 A^2} \quad (1-37)$$

Los términos de la intermodulación sirven para saber de qué forma distorsiona las componentes dentro de la banda de la señal de información,  $K_1$  y  $K_3$  se obtienen mediante mediciones,  $A$  es el valor de alimentación con el que ingresa la señal antes del amplificador, la Figura 1.17 muestra el efecto de la intermodulación.



**Figura 1. 17:** Efecto de la intermodulación.

**3) Modulación Cruzada:** Es otro término de los productos de distorsión a la salida del amplificador lineal. Ocurre cuando se envían dos señales moduladas en paso de banda, cada uno alrededor de una frecuencia portadora  $f_c$ , y si estas dos señales se combinan y amplifican, la señal en la frecuencia portadora  $f_{c1}$  comienza a recibir cierta modulación, es decir, alrededor de  $f_{c2}$ , el componente que modula una señal comienza a filtrarse en la otra, es decir, hay interferencia entre las dos señales, de modo que una señal puede escucharse con componentes de la otra.

Asumiendo dos señales, una modulada en amplitud:

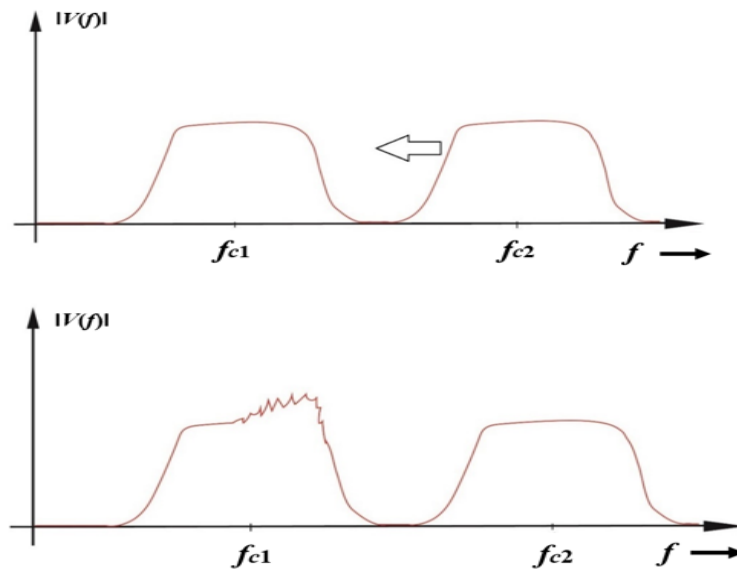
$$v_i(t) = A_1(1 + m(t)) \text{sen}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t)$$

$$\frac{3}{2}K_3A_1^2(1+m(t))^2A_2[1-\cos(2\omega_1t)]\sin(\omega_2t)$$

la modulación de  $f_1$  se cruza a  $f_2$ , la ecuación (1-38) muestra como la modulación de una frecuencia se cruza a otra:

$$\frac{3}{2}K_3A_1^2(1+m(t))^2A_2\sin(\omega_2t) \quad (1-38)$$

La Figura 1.18 muestra el efecto de la modulación cruzada, donde existen dos señales si estas se las combina o las amplifica, la señal que tiene modulación alrededor de  $f_{c1}$ , comienza a recibir otra modulación alrededor de  $f_{c2}$  y esto produce interferencia entre las señales.



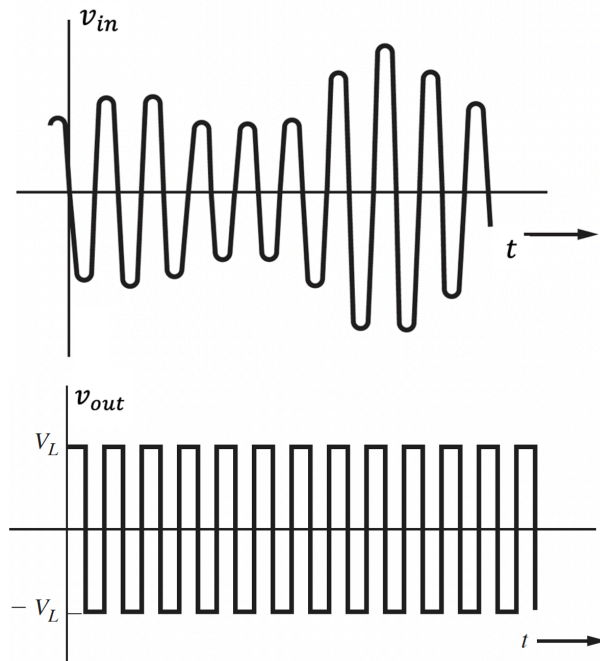
**Figura 1. 18:** Efecto de la modulación cruzada.

## 1.9 Limitadores

Son circuitos no lineales que se utilizan para poder regenerar algún tipo de señal eliminando las componentes de ruido no deseadas, estos circuitos se utilizan principalmente en señales con modulación angular.

Un limitador trabaja como un circuito comparador con valor de un umbral ( $v=0$ ), donde me indica que los valores positivos van a tener un único valor constante positivo y los valores negativos un único valor constante negativo, por lo que, este circuito elimina cualquier variación en amplitud que se pueda producir debido a la interferencia y ruido.

La Figura 1.19 muestra como las variaciones en amplitud de la señal de entrada se eliminan a la salida, donde se tiene las amplitudes constantes y lo único que se mantiene son las variaciones en frecuencia.



**Figura 1. 19:** Señal de salida de un limitador aplicado a una señal modulada mediante FM.

La señal pasa banda se representa mediante la ecuación (1-39):

$$v(t) = R(t) \cos(\omega_c t + \theta(t)) \quad (1-39)$$

A la salida del limitador obtiene, la ecuación (1-40).

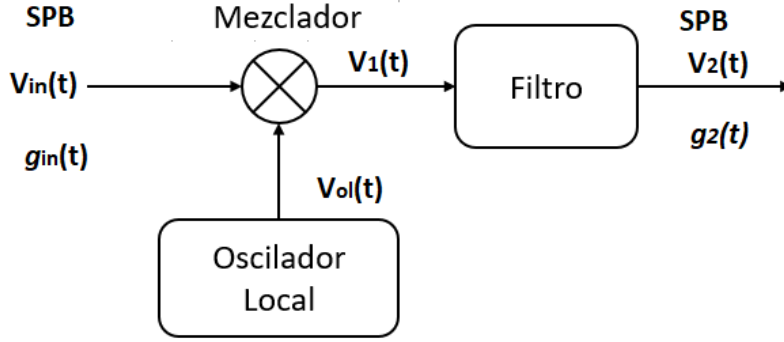
$$v_{limitador} = v_{out} = K V_L \cos(\omega_c t + \theta(t)) \quad (1-40)$$

Para obtener la señal original se aplica un filtro en la banda correspondiente para eliminar armónicos, esta va a volver a regenerar una señal sinusoidal con la misma amplitud, pero con diferentes frecuencias.

Los circuitos de recorte no son adecuados para señales moduladas por AM porque se pierde información y los componentes de información están dentro de la amplitud.

### 1.10 Mezcladores y convertidores

Un mezclador es un circuito electrónico que actúa como un multiplicador matemático para dos señales de entrada. Por lo general, una de estas señales es una forma de onda sinusoidal generada por un oscilador local, como se ilustra en la Figura 1.20.



**Figura 1. 20:** Un mezclador seguido por un filtro para un convertidor elevador o reductor.

Al analizar la Figura 1.20 se tiene a la entrada una señal pasa banda  $v_{in}(t)$  expresada en la ecuación (1-41), donde debido al mezclador, ésta se multiplicará con la señal del oscilador local expresada en la ecuación (1-42), a la salida del mezclador se obtiene la señal  $v_1(t)$  trasladada a una determinada frecuencia debido a que los mezcladores se utilizan para obtener una traslación de frecuencia de la señal de entrada, además el circuito consta de un filtro para lograr obtener un convertidor elevador o reducir, esto depende del filtro a utilizar.

$$v_{in}(t) = \text{Re}\{g_{in}(t)e^{jw_c t}\} \quad (1-41)$$

$$v_{ol}(t) = A_0 \cos(w_0 t) \quad (1-42)$$

Para la traslación de frecuencia de la señal de entrada, existen 3 casos a considerar, siendo estos los siguientes:

- *Caso 1: Si  $f_c > f_0$*

La representación matemática se obtiene a partir de multiplicar las 2 señales de entrada al mezclador que se denota en la ecuación (1-41) y (1-42), el cual se obtiene como resultado a la salida del mezclador la ecuación (1-43) en función de su envolvente compleja.

$$v_1(t) = \text{Re}\{g_{in}(t)e^{jw_c t}\}A_0 \cos(w_0 t)$$

$$v_1(t) = \left[ \frac{1}{2}g_{in}(t)e^{jw_c t} + \frac{1}{2}g_{in}^*(t)e^{-jw_c t} \right] + \left[ \frac{A_0}{2}(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}) \right]$$

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2} \left[ g_{in}(t)e^{j(w_c+w_0)t} + g_{in}^*(t)e^{-j(w_c+w_0)t} + g_{in}(t)e^{j(w_c-w_0)t} + g_{in}^*(t)e^{-j(w_c-w_0)t} \right]$$

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2} \text{Re}\{g_{in}(t)e^{j(w_c+w_0)t}\} + \frac{A_0}{2} \text{Re}\{g_{in}(t)e^{j(w_c-w_0)t}\} \quad (1-43)$$

A partir de esta ecuación (1-43) se puede obtener un circuito convertidor o un circuito reductor al aplicar un filtro.

Para el caso de un convertidor reductor, se aplica un filtro a la salida del mezclador y se obtiene la señal  $v_2(t)$ , como se indica a continuación,

$$v_2(t) = \text{Re}\{g_2(t)e^{j(w_c-w_0)t}\}$$

Donde:

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2} g_{in}(t) \quad (1-44)$$

Finalmente, a la salida del circuito conversor reductor se obtiene la siguiente ecuación (1-45).

$$v_2(t) = \frac{A_0}{2} \text{Re}\{g_{in}(t)e^{j(w_c-w_0)t}\} \quad (1-45)$$

Para el caso de un conversor reductor, se aplica un filtro a la salida del mezclador y se obtiene la señal  $v_2(t)$ , como se indica a continuación,

$$v_2(t) = \text{Re}\{g_2(t)e^{j(w_c-w_0)t}\}$$

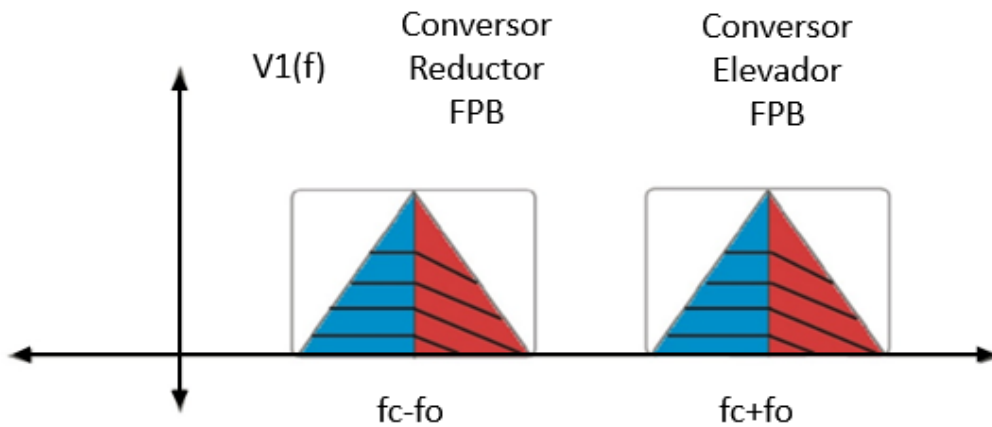
Donde:

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2} g_{in}(t) \quad (1-46)$$

Finalmente, a la salida del circuito conversor reductor se obtiene con la siguiente ecuación (1-47).

$$v_2(t) = \text{Re}\{g_2(t)e^{j(w_c-w_0)t}\} \quad (1-47)$$

La Figura 1.21 indica el espectro  $v_1(t)$  se traslada a dos componentes espectrales, a la componente de la suma y a la componente espectral de la resta, además indica cuando es un conversor elevador y cuando es un conversor reductor al aplicar el filtro.



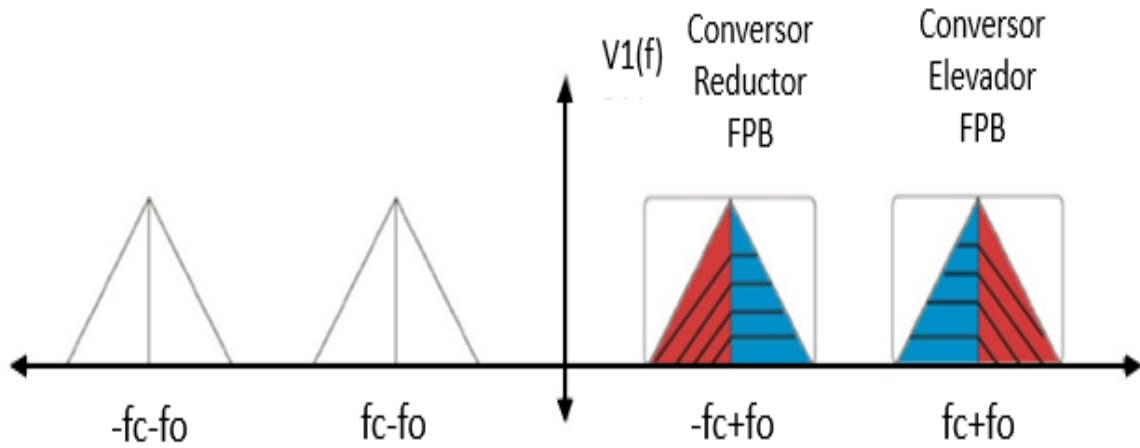
**Figura 1. 21:** Conversor reductor y elevador si  $f_c > f_0$ .

- Caso 2: Si  $f_c < f_0$

Para este caso se reformula la ecuación (1-43) y se tiene la ecuación (1-48)

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2} \text{Re}\{g_{in}(t)e^{j(w_c+w_0)t}\} + \frac{A_0}{2} \text{Re}\{g_{in}^*(t)e^{j(w_0-w_c)t}\} \quad (1-48)$$

En la ecuación (1-48) se obtiene que la envolvente compleja de la señal reducida se ha conjugado, en comparación con la envolvente compleja de entrada lo que es equivalente a decir que las bandas laterales se intercambian. La Figura 1.22 indica dicho comportamiento el cual ocurre debido a que la frecuencia de la señal del oscilador local es más alta que la frecuencia de la señal pasa banda de entrada, además esta figura detalla cuando es un conversor elevador o reductor al aplicar un filtro.



**Figura 1. 22:** Convertor reductor y elevador si  $f_c < f_o$ .

Al aplicar un filtro a la salida del mezclador se obtiene la señal  $v_2(t)$  como indica la ecuación (1-49), en este caso es un convertor reductor.

$$v_2(t) = \text{Re}\{g_2(t)e^{j(\omega_0 - \omega_c)t}\} \quad (1-49)$$

donde

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2} g_{in}^*(t) \quad (1-50)$$

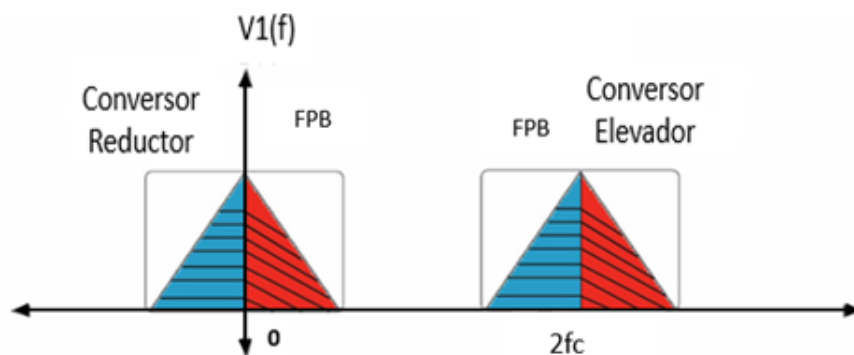
Finalmente, a la salida del circuito convertor reductor se obtiene la siguiente ecuación (1-51)

$$v_2(t) = \frac{A_0}{2} \text{Re}\{g_{in}^*(t)e^{j(\omega_0 - \omega_c)t}\} \quad (1-51)$$

En este caso el convertor reductor toma el nombre de convertor reductor con inyección de lado superior, ya que  $f_o > f_c$ .

- Caso 3: Si  $f_c = f_o$

Debido a que  $f_c = f_o$  las componentes espectrales se desplazan hacia  $2f_c$  por la suma y hacia cero por la resta de estas. La Figura 1.23 muestra dicho comportamiento.



**Figura 1. 23:** Convertor reductor y elevador si  $f_c = f_o$ .

En la práctica, la operación de multiplicación requerida por los mezcladores puede llevarse a cabo mediante uno de los siguientes elementos:

1. Un dispositivo de transconductancia continuamente variable, como un FET de doble compuerta.
2. Un dispositivo no lineal.
3. Un dispositivo lineal con una ganancia discreta variable con el tiempo.

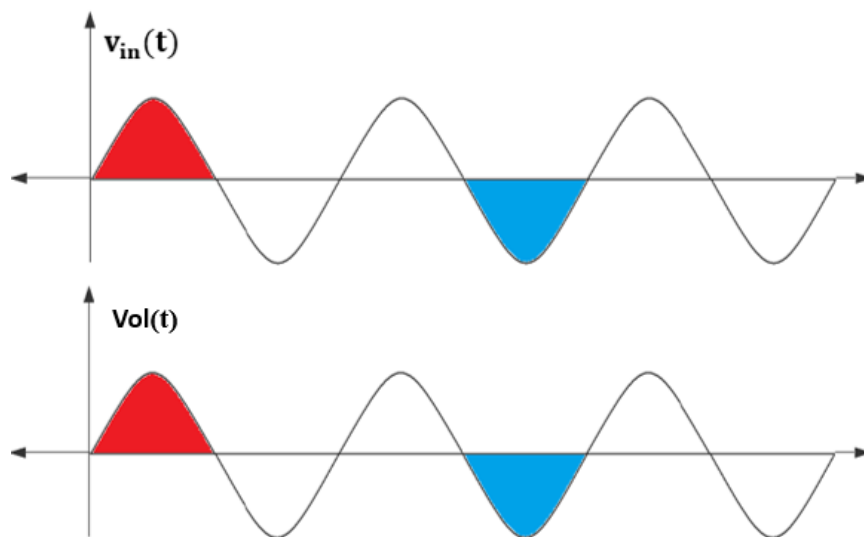
1. A través de un FET de doble compuerta:  $v_{in}(t)$  se conecta a la compuerta 1, y la señal del oscilador local a la compuerta 2. La salida es

$$v_1(t) = K v_{in}(t) v_{ol}(t) \quad (1-52)$$

donde  $K$  es una ganancia específica.

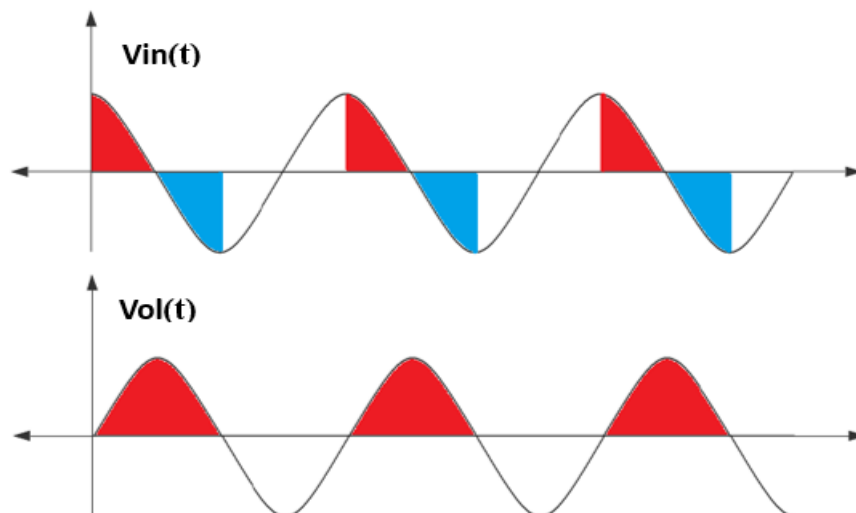
El multiplicador puede ser de los siguientes tipos:

- Multiplicador de 1 cuadrante: Cuando tanto los valores de  $v_{in}(t)$  y  $v_{ol}(t)$  son positivos o ambos negativos.



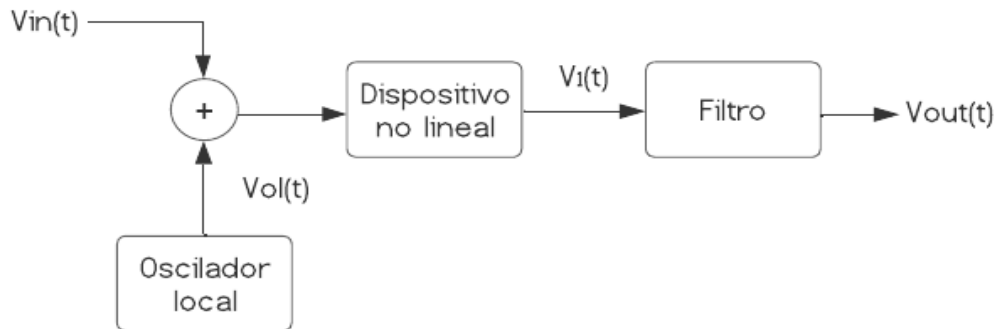
**Figura 1. 24:** Multiplicador de 1 cuadrante.

- Multiplicador de 2 cuadrantes: Cuando  $v_{ol}(t)$  tiene valores positivos y  $v_{in}(t)$  toma cualquier valor.



**Figura 1. 25:** Modulador de 2 cuadrantes.

- Multiplicador de 4 cuadrantes: Se obtiene independientemente del signo de  $v_{in}(t)$  y  $v_{ol}(t)$ .
  - 2. A través de un dispositivo no lineal: Es un dispositivo de cuadratura, es decir eleva al cuadrado la señal de entrada.
- La Figura 1.26 ilustra un dispositivo no lineal para obtener una multiplicación de dos señales de entrada.



**Figura 1. 26:** Dispositivo no lineal utilizado como mezclador.

$$v_1(t) = K_2(v_{in} + v_{ol})^2 + \text{otros términos}$$

$$v_1(t) = K_2(v_{in}^2 + 2v_{in}v_{ol} + v_{ol}^2) + \text{otros términos} \quad (1-53)$$

donde el termino  $2v_{in}v_{ol}$  es necesario para mezclar las señales.

Dicho termino se obtiene aplicando un filtro, tal y como se muestra en el diagrama anterior.

### 1.11 Circuitos detectores

Son circuitos que se utilizan para detectar y extraer información que se puede encapsular o mapear en una señal pasa banda, es decir, extraer información banda base de una señal pasabanda.

Estos circuitos de portadora se utilizan para realizar la demodulación, en esta sección se estudiará como diseñar circuitos detectores para producir  $R(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $x(t)$  o  $y(t)$  a su salida basados en la señal pasabanda.

#### 1.11.1 Detector de envolvente

Un detector de envolvente ideal es un circuito no lineal que produce una forma de onda a su salida proporcional a la envolvente real  $R(t)$  de entrada, es decir, se obtiene una señal proporcional al módulo de la envolvente compleja. De la ecuación (1-10) se obtiene la señal pasabanda que puede representarse como  $v_{in}(t) = R(t)\cos[w_c t + \theta(t)]$ , donde  $R(t) \geq 0$ .

Entonces, la salida del detector de envolvente ideal se representa en la ecuación (1-54).

donde  $K$  indica la constante de proporcionalidad.

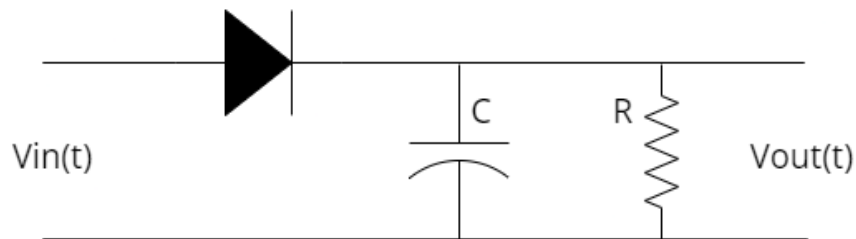
$$v_{out}(t) = KR(t) \quad (1-54)$$

La Figura 1.27 muestra un detector básico utilizando un diodo que se acerca a un detector de envolvente ideal. La corriente del diodo ocurre en pulsos que son proporcionales a la parte positiva de la forma de onda de entrada, los pulsos de



corriente cargan al capacitor para generar una forma de onda a la salida. RC constante de tiempo se selecciona de tal forma que la señal a la salida sea semejante a la envolvente real  $R(t)$  de la señal de entrada.

Este detector de envolvente se utiliza para realizar la demodulación de una señal, donde se obtendrá el módulo de los picos de la señal  $s(t)$  donde extrae  $R(t)$ .



**Figura 1. 27:** Detector de envolvente con diodo.

Para el diseño de este circuito se debe cumplir lo siguiente:

Condición: la frecuencia de corte del filtro pasa baja  $f_0$  requiere ser mucho más pequeña que la de portadora  $f_c$  y mucho mayor que el ancho de banda de la forma de onda de modulación (detectada)  $B$ , esta condición se representa en la ecuación (1-55).

$$B \ll f_0 \ll f_c \quad (1-55)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

donde  $RC$  es la constante de tiempo para el filtro.

El detector de envolvente extrae una señal que es muy similar a  $R(t)$ , lo que resulta en una degradación del rendimiento, es decir, una menor relación señal/ruido, lo que significa que el detector de envolvente es un dispositivo no lineal.

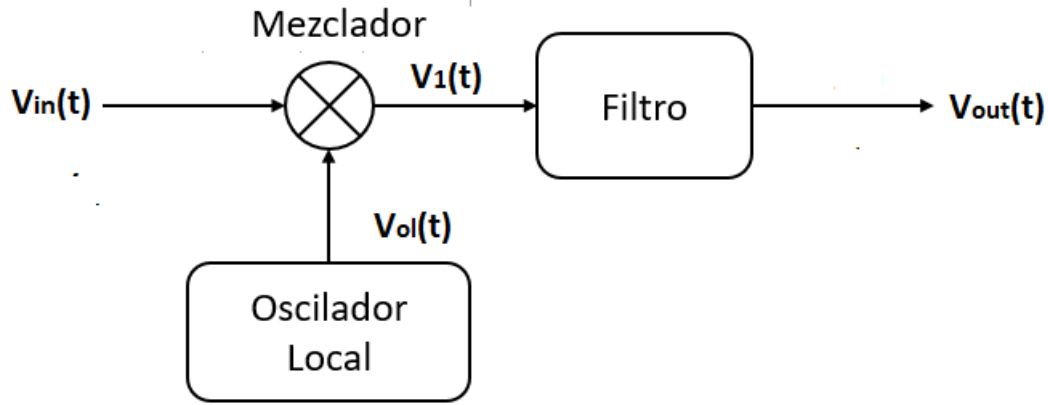
Los detectores de envolvente son muy económicos, pero su análisis matemático es más complejo que el de otros detectores, y son uno de los detectores más utilizados en modulación AM.

### **1.11.2 Detector de producto**

Un detector de producto es un circuito que consta de un mezclador y un filtro pasa bajas que convierte la entrada (una señal de pasa banda con ruido) en banda base.

La Figura 1.28 muestra la señal modulada a la entrada, seguida de un mezclador con un oscilador local que opera a la misma frecuencia que la señal modulada, utilizando un filtro pasa bajas obtenemos la componente en banda base.

Esta técnica de demodulación puede obtener componentes de envolvente compleja de cualquier complejidad, todo depende de la configuración del oscilador local.



**Figura 1. 28:** Detector de producto.

La señal pasabanda en términos de envolvente compleja, se represente con la

$$v_{in}(t) = R(t)\cos[w_c t + \theta(t)] = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \quad (1-56)$$

ecuación (1-56).

El oscilador local genera una señal con una amplitud  $A_0$  se muestra en la ecuación (1-57).

La salida del mezclador y del filtro pasa bajas se representa mediante las ecuaciones (1-58) y (1-59) respectivamente

$$v_{ol}(t) = A_0\cos[w_c t + \theta_0] \quad (1-57)$$

El filtro pasa bajas sólo deja pasar el término reducido por conversión y por lo tanto la salida, se indica en la ecuación (1-60).

$$v_1(t) = \frac{1}{2}A_0R(t)\cos[\theta(t) - \theta_0] + \frac{1}{2}A_0R(t)\cos[2w_c t + \theta(t) + \theta_0] \quad (1-58)$$

(1-59)

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2}A_0R(t)\cos[\theta(t) - \theta_0]$$

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2}A_0R(t)\cos[\theta(t) - \theta_0] \quad (1-60)$$

Debido a que la frecuencia del oscilador es la misma que la de la portadora de la señal de entrada, el oscilador se ha *sincronizado en frecuencia* con la señal de entrada. Además, Si  $\theta_0 = 0$ , se dice que el oscilador se ha *sincronizado en fase* con el componente dentro de fase, y por lo tanto la salida se obtiene con la ecuación (1-61):

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2}A_0R(t)\cos[\theta(t)] = \frac{1}{2}A_0x(t) \quad (1-61)$$

Si  $\theta_0 = 90^\circ$

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2}A_0R(t)\text{sen}[\theta(t)] = \frac{1}{2}A_0y(t) \quad (1-62)$$

Los detectores también pueden clasificarse en dispositivos coherentes o no coherentes. Un detector coherente tiene dos entradas, una para una señal de referencia, como una señal sincronizada del oscilador, y otra para la señal modulada a demodular. Un detector de producto es un ejemplo de un detector coherente. Los detectores no coherentes tienen una sola entrada, principalmente el puerto de señal modulada. Un detector de envolvente es un ejemplo de un detector no coherente.

### 1.11.3 Detector de modulación en frecuencia

Un detector de modulación de frecuencia (FM) ideal es un dispositivo que produce una salida proporcional a la frecuencia instantánea de la entrada. Es decir, si la entrada de pasa banda está representada por  $R(t)\cos[w_c t + \theta(t)]$ , la salida de un detector de FM ideal, se muestra en la ecuación (1-63).

Generalmente el detector de FM está balanceado. Esto significa que el voltaje de DC  $Kw_c$  no aparece en la salida si el detector se sintoniza a la  $f_c$ , en este caso, la salida se muestra en la ecuación (1-64).

$$v_{out}(t) = \frac{Kd[w_c t + \theta(t)]}{dt} = K \left[ w_c + \frac{d\theta(t)}{dt} \right] \quad (1-63)$$

Existen muchas maneras de construir detectores de FM, pero la mayoría se basa en uno de los tres siguientes principios:

$$v_{out}(t) = K \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (1-64)$$

- Conversión de FM a AM.
- Detección de desplazamiento en fase o en cuadratura.
- Detección de cruce por cero.

### 1.11.4 Detector de pendiente

Un detector de pendiente es un ejemplo del principio de conversión de FM a AM. La Figura 1.29 muestra el diagrama de bloques como ejemplo del mismo, donde se tiene a la entrada una señal con ruido, a esta señal se le aplica un limitador pasabanda para eliminar la señal de ruido no deseada, la conversión de FM a AM se realiza mediante un circuito diferenciador produciendo un componente de amplitud que se puede mostrar con un detector de envolvente.



**Figura 1. 29:** Demodulación en frecuencia utilizando detección de pendiente.

El detector de pendiente puede analizarse suponiendo que la entrada es una señal con desvanecimiento con modulación en frecuencia, la ecuación (1-65)

$$V(t) = A(t)\cos[w_c t + \theta(t)] \quad (1-35)$$

representa esta señal FM.

Donde:

$$\theta(t) = D_f \int m(t) dt \quad (1-66)$$

$A(t)$  representa a la envolvente que presenta desvanecimiento y  $m(t)$  la señal moduladora, como, por ejemplo, una señal de audio. Por lo tanto, la ecuación (1-67) deduce que la salida del limitador es proporcional a

$$v_1(t) = V_L \cos[w_c t + \theta(t)] \quad (1-67)$$

La ecuación (1-68) muestra que salida del diferenciador:

$$v_2(t) = -V_L \left[ w_c + \frac{d\theta(t)}{dt} \right] \text{sen}[w_c t + \theta(t)] \quad (1-68)$$

La salida del detector de envolvente es la magnitud de la envolvente compleja para  $v_2(t)$ , debido a que en la práctica  $w_c \gg \frac{d\theta}{dt}$ , esto se convierte en la ecuación (1-69).

$$v_{out}(t) = K \left| -V_L \left[ w_c + \frac{d\theta(t)}{dt} \right] \right|$$

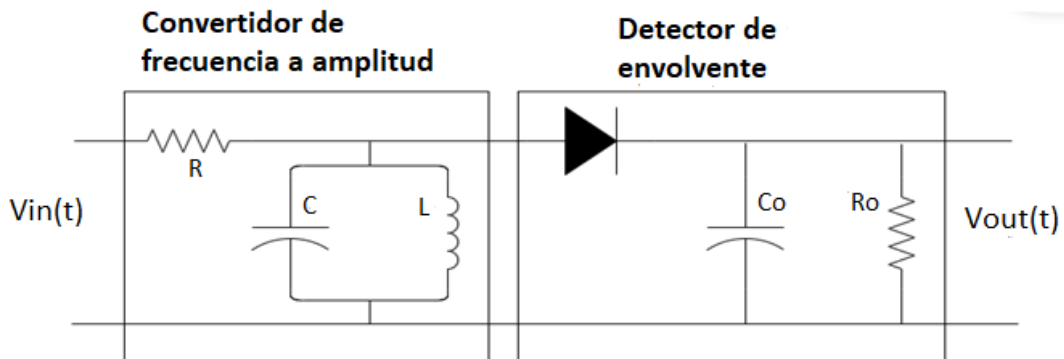
$$v_{out}(t) = K V_L \left[ w_c + \frac{d\theta(t)}{dt} \right] \quad (1-69)$$

Utilizando la ecuación (1-66) se obtiene la ecuación (1-70), donde me indica que la salida consiste en un voltaje de  $D_c V_L w_c$ , además de un voltaje  $A_c V_L D_f m(t)$ , el cual es proporcional a la modulación en señal FM.

$$v_{out}(t) = K V_L w_c + K V_L D_f m(t) \quad (1-70)$$

$$v_{out}(t) = K V_L [w_c + D_f m(t)] \quad (1-71)$$

En la Figura 1.30 muestra cómo debe emplearse un circuito detector de pendiente como convertidor de frecuencia a amplitud, el diferenciador formado por los componentes pasivos muestra que además de tener modulación de fase y frecuencia también tiene en amplitud, esa modulación se extrae con el detector de envolvente.



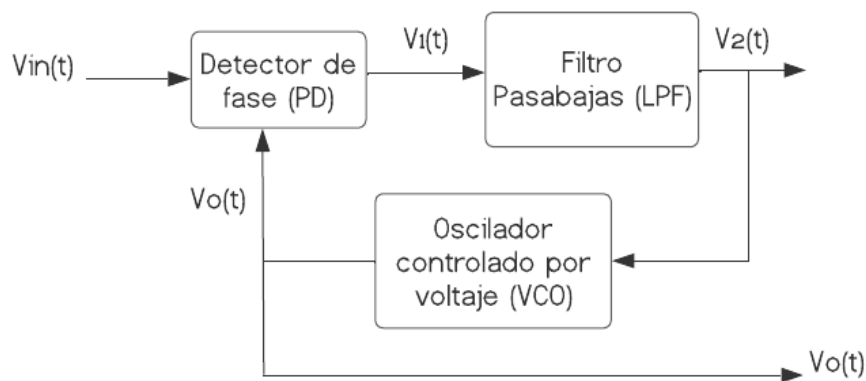
**Figura 1. 30:** Diagrama de circuito de un detector de pendiente.

### 1.12 Lazos enganchados por fase y sintetizadores de frecuencia

Un lazo enganchado por fase (PLL) tiene numerosas aplicaciones en los sistemas de comunicaciones, incluyendo (1) detección de FM, (2) generación de señales FM altamente estables, (3) detección coherente de AM, (4) multiplicación de frecuencia, (5) síntesis de frecuencia y (6) su utilización como bloque de

construcción en sistemas digitales complicados para proporcionar sincronización de bit y detección de datos.

La Figura 1.31 muestra la configuración de un circuito PLL, el cual consta de tres componentes básicos: (1) un detector de fase, (2) un filtro pasa bajas y (3) un oscilador controlado por voltaje (VCO). El VCO es un circuito capaz de generar una forma de onda periódica con una frecuencia que puede variar alrededor de una frecuencia de recorrido libre  $f_0$  de acuerdo al voltaje aplicado  $v_2(t)$ . La frecuencia de recorrido libre es la frecuencia de salida del VCO cuando  $v_2(t)$  es cero. El detector de fase produce una señal de salida que es una función de la diferencia de fase entre la señal entrante  $v_{entrada}(t)$  y la del oscilador  $v_0(t)$ . La señal filtrada  $v_2(t)$  es la señal de control empleada para cambiar la frecuencia de la salida del VCO.



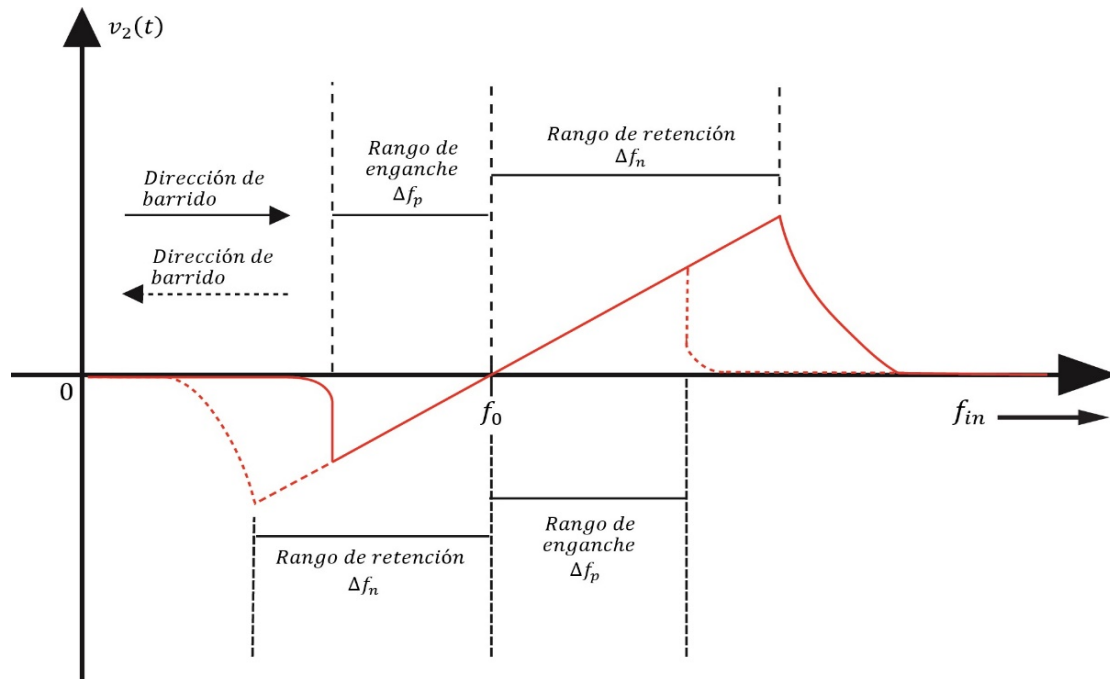
**Figura 1. 31:** Circuito básico de PLL.

La configuración de un circuito PLL puede diseñarse de tal forma que actúe como un filtro de seguimiento de banda estrecha cuando el filtro pasabajas también es un filtro de banda estrecha, a continuación, se presenta modos de operación del VCO.

- Si a la entrada del VCO se tiene cero voltios, a la salida se obtendrá una señal oscilatoria que trabaja a una frecuencia igual que  $f_c$  de  $v_{entrada}(t)$ .
- Si se alimenta al VCO con un voltaje positivo, a la salida se obtendrá una señal con una frecuencia superior a la  $f_c$ .
- Si se alimenta al VCO con un voltaje negativo, a la salida se obtendrá una señal con una frecuencia inferior a  $f_c$ .

En resumen, es un dispositivo que permite seguir una frecuencia en función de la señal de ingreso con un rango de retención o de enganche el cual no se puede captar en cualquier frecuencia. Un lazo enganchado por fase (PLL) lo que trata de hacer es seguir una frecuencia en función de la señal de alimentación.

La Figura 1.32 muestra los rangos de frecuencia de enganche y retención las cuales dependen de la ganancia del filtro correspondiente, además muestra la velocidad de barrido en cual indica la velocidad con la que puede cambiar una señal sus componentes de frecuencia.



**Figura 1. 32:** Voltaje de control para el VCO de PLL para un barrido de una señal senoidal de entrada.

Una especificación del PLL importante es la *máxima velocidad de barrido enganchado*, la cual se define como la máxima razón de cambio de la frecuencia de entrada a la cual el lazo permanecerá enganchado. Si la frecuencia de entrada cambia más rápido que esta velocidad, el lazo se desenganchará.

Otra especificación importante para que el PLL se enganche es que las señales deben estar en cuadratura, es decir desfasadas en  $90^\circ$ .

### 1.13 Transmisores y receptores generalizados

#### 1.13.1 Transmisor Generalizados

Los transmisores generan la señal modulada a la frecuencia de portadora  $f_c$  para la señal moduladora  $m(t)$ . Estos circuitos pueden enviar cualquier tipo de señal cambiando uno de sus parámetros de sus configuraciones.

De las ecuaciones (1-1) y (1-2) se demostró que cualquier señal modulada puede representarse mediante la siguiente ecuación (1-71)

Existen dos formas canónicas para representar un transmisor generalizado, las

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \quad (1-72)$$

cuales se muestran en la ecuación (1-73) y (1-74) respectivamente

La envolvente compleja, se representa en la ecuación (1-75)

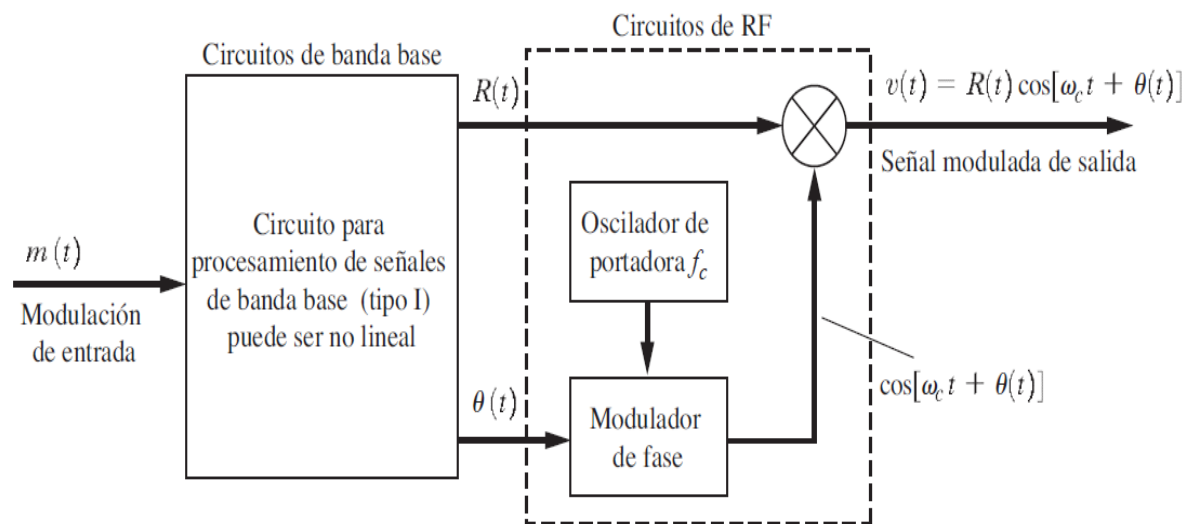
$$v(t) = R(t) \cos [wct + \theta(t)] \quad (1-73)$$

$$v(t) = x(t) \cos wct - y(t) \text{sen } wct \quad (1-74)$$

$$g(t) = R(t)e^{j\omega_c t} = x(t) + jy(t) \quad (1-75)$$

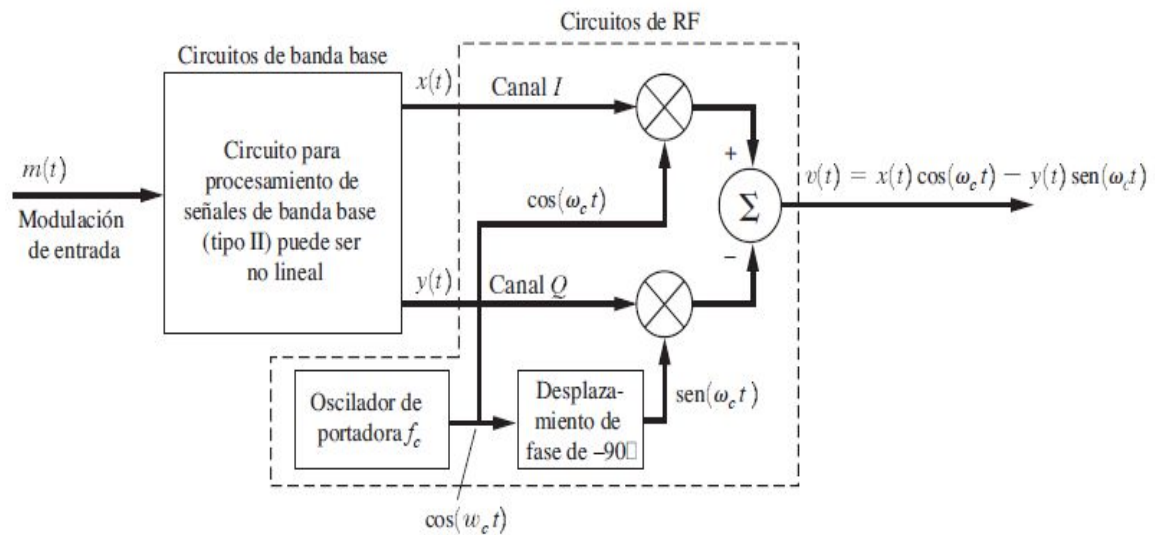
Un enfoque generalizado puede tomarse para obtener modelos universales de transmisores que pueden reducir para aquellos que utilizan un tipo de modulación, para ello existen dos técnicas: de generación en cuadratura y de generación.

La Figura 1.33 muestra un transmisor generalizado utilizando la técnica de generación el cual es un circuito de tipo AM-PM, el circuito de procesamiento de señales de banda base genera  $R(t)$  y  $\theta(t)$  a partir de la señal moduladora  $m(t)$ , el procesamiento de señales puede implementarse utilizando circuitos analógicos o digitales de tal manera que añade los algoritmos para  $R$  y  $\theta$  bajo un software, el resto de componentes requieren de un circuito RF, circuito donde se realiza el proceso de modulación.



**Figura 1. 33:** Transmisor generalizado utilizando técnica de generación.

La segunda técnica utiliza el procesamiento de fase y cuadratura de manera que  $m(t)$  se relacione con  $x(t)$  y  $y(t)$ , estas señales de banda base se implementa con un hardware sea esta analógica o digital y el resto de componentes utiliza un circuito RF. La Figura 1.34 muestra el transmisor generalizado utilizando la técnica de generación en cuadratura.

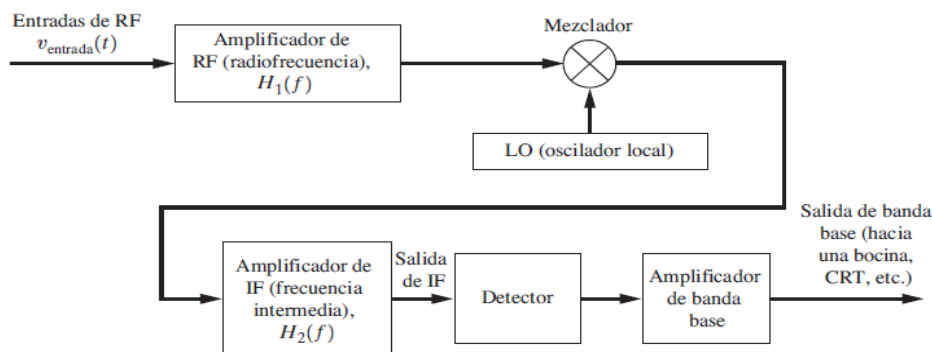


**Figura 1. 34:** Transmisor generalizado utilizando técnica de generación en cuadratura.

### 1.13.2 Receptor Generalizado

El receptor es el encargado de extraer la información fuente de una señal pasa banda recibida que puede estar contaminada por ruido.

La Figura 1.35 muestra un esquema del receptor superheterodino, la técnica consiste en una conversión descendente o ascendente de la señal de entrada a una frecuencia conveniente llamada frecuencia intermedia (IF), después se extrae la información empleando el detector apropiado. El amplificador RF posee una característica pasabanda por donde pasa la señal deseada y proporciona una amplificación para eliminar la mayor parte de componentes no deseadas que se generen en la etapa del mezclador, a partir de esa frecuencia (IF) se hace el traslado a la frecuencia en banda base.



**Figura 1. 35:** Receptor Superheterodino.

La frecuencia de IF se escoge con base a tres consideraciones.

- La frecuencia de IF debe alcanzar una ganancia estable de la manera más económica posible.
- La frecuencia de IF requiere ser lo suficientemente bajo para que los elementos prácticos del circuito, puedan alcanzar valores de  $Q$  que proporcione una característica de atenuación fuera del ancho de banda de la señal de IF.



- La frecuencia de IF requiere ser lo suficientemente alto para que la respuesta de imagen pueda ser aceptablemente pequeña.

La respuesta de imagen es la recepción de una señal no deseada ubicada en la frecuencia de imagen debido a una atenuación insuficiente de la señal de imagen por el filtro amplificador de RF.

La ecuación (1-76) representa la respuesta de imagen

$$f_{imagen} = f_c + 2f_{LO} \quad (1-76)$$

**CAPÍTULO 2.**  
**MODULACIÓN EN AMPLITUD.**

La modulación es una técnica utilizada en las comunicaciones para transmitir información a través de una señal portadora donde se varía determinados aspectos, combinándola con una señal moduladora en los cuales se modificarán parámetros como la amplitud, la frecuencia y la fase. Existen varios tipos de modulación, cada uno con sus propias características y aplicaciones. Los sistemas de modulación que se analizarán son: AM, DSB-SC, SSB y VSB; que son la base para los sistemas de modulación digitales.

En general, la elección del tipo de modulación depende de la aplicación y de los requisitos para el sistema de comunicación como el ancho de banda, calidad de señal y eficiencia de la transmisión, etc.

## 2.1 Modulación en Amplitud (AM)

La modulación en amplitud (AM) es una de las más comunes, consiste en variar la amplitud de una señal portadora, en proporción con el valor instantáneo de voltaje de la señal moduladora. En la modulación AM, la señal moduladora cambia la amplitud de la señal de portadora. La señal modulada resultante contiene una componente discreta en la frecuencia portadora ( $f_c$ ) y dos bandas laterales que contienen la información transmitida. La modulación de AM es ampliamente utilizada en radiodifusión, y también se utiliza en la transmisión de señales de voz y música. Años atrás era una de las modulaciones más populares para este tipo de transmisión, sin embargo, en la actualidad se ha cambiado por sistemas que son más eficientes y económicos.

La envolvente compleja para una modulación AM se presenta en la ecuación (2-1):

$$g(t) = A_c[1 + m(t)] \quad (2-4)$$

donde la modulación en fase corresponde a la expresión de la envolvente compleja en AM y se presenta en la ecuación (2-2) y la modulación en cuadraturas igual a 0 ya que la envolvente compleja para una modulación am es puramente real y al no contener una parte imaginaria ( $y(t)=0$ ):

$$x(t) = A_c[1 + m(t)] \quad (2-5)$$

por lo tanto, la envolvente compleja de la modulación en amplitud se determina como se muestra en la ecuación (2-3):

$$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = A_c[1 + m(t)] \quad (2-6)$$

La modulación en fase será igual a la modulación en amplitud siempre y cuando  $g(t)$  sea positivo y se cumpla que  $m(t) \geq -1$ .

En la Figura 2.1 se muestra el ejemplo de un tono sinusoidal para la señal de información, que tiene la forma  $V_p \cos(2\pi f_m t)$  que se modula mediante AM, la forma de onda de la envolvente compleja y la señal modulada  $s(t)$  se muestra en la Figura 2.2, donde el valor de  $A_c$  es la componente DC de  $g(t)$  y los valores pico de la señal corresponden a:  $A_{\min} = A_c[1 + \text{mín}[m(t)]]$  y  $A_{\max} = A_c[1 + \text{máx}[m(t)]]$

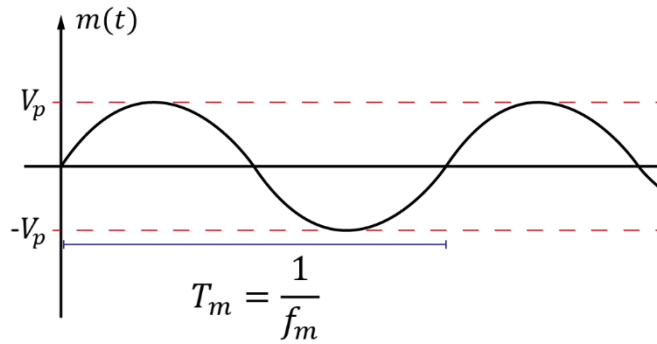


Figura 2.1: Señal moduladora

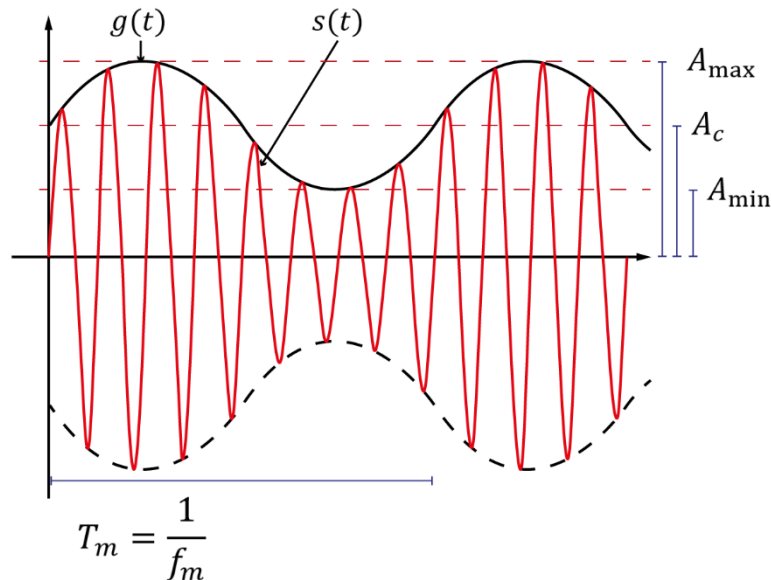


Figura 2.2: Señal modulada y envolvente compleja para AM

### 2.1.1 Señal modulada

La representación de la señal modulada para AM se puede demostrar a partir de la (definición de la señal banda base):

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$$

donde

$$e^{j\omega_c t} = \cos(\omega_c t) + j \text{sen}(\omega_c t)$$

$$s(t) = \text{Re}\{A_c[1 + m(t)][\cos(\omega_c t) + j \text{sen}(\omega_c t)]\}$$

$$s(t) = A_c \text{Re}\{\cos(\omega_c t) + j \text{sen}(\omega_c t) + m(t) \cos(\omega_c t) + jm(t) \text{sen}(\omega_c t)\}$$

solo al tomar las partes reales la expresión de la señal modulada se muestra en la ecuación (2-4),

$$s(t) = A_c[\cos(\omega_c t) + m(t) \cos(\omega_c t)]$$

$$s(t) = A_c[1 + m(t)] \cos(\omega_c t) \quad (2-4)$$

Como se observó en la figura 2.2, la señal modulada tiene una variación únicamente en el módulo, puesto que está en función de la moduladora, mientras que su frecuencia es constante de acuerdo a la portadora ( $\omega_c = 2\pi f_c$ ).

### 2.1.2 Espectro de la señal modulada

Se determina el espectro de la envolvente compleja que se representa la ecuación (2-5):

$$G(f) = A_c[\delta(f) + M(f)] \quad (2-5)$$

Y al aplicar la definición del espectro de una señal pasa banda

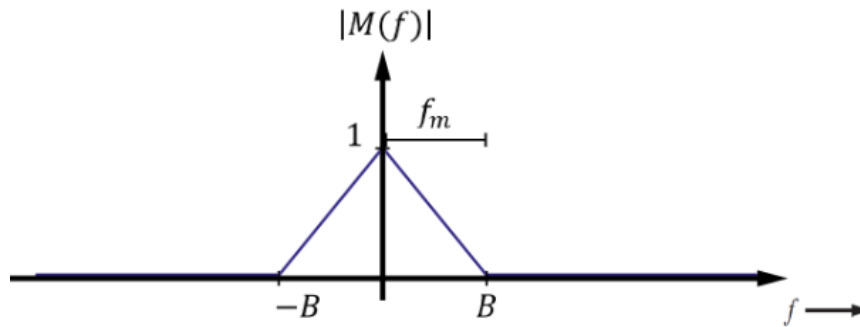
$$S(f) = \frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$$

$$S(f) = \frac{1}{2}\{A_c[\delta(f - f_c) + M(f - f_c)] + A_c[\delta^*(-f - f_c) + M^*(-f - f_c)]\}$$

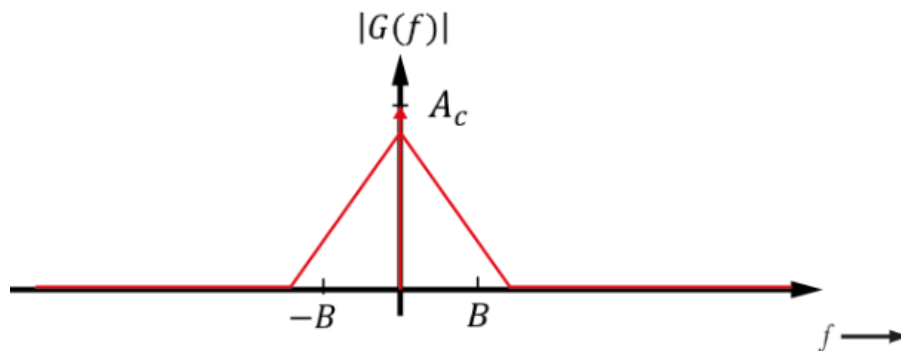
Al considerar que  $\delta^*(-f - f_c) = \delta^*(f + f_c) = \delta(f + f_c)$  y la señal moduladora es puramente real,  $M^*(-f - f_c) = M(f + f_c)$ , la representación del espectro se presenta en la ecuación (2-6):

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)] \quad (2-6)$$

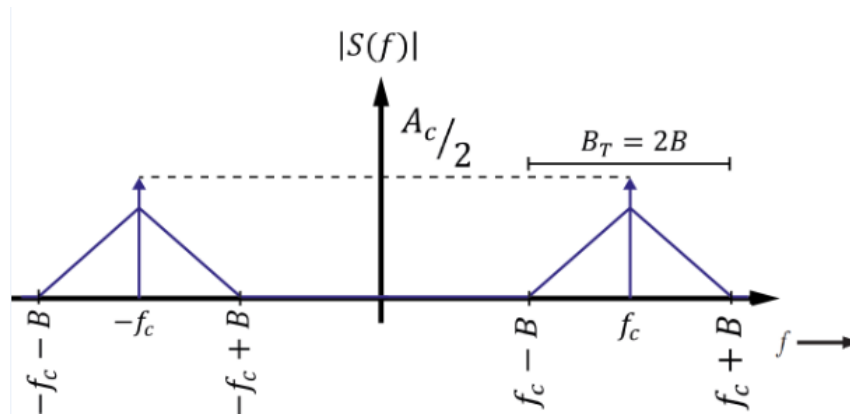
La Figura 2.3 muestra el proceso espectral que sufre la modulación AM donde el espectro de la señal AM que se muestra en la Figura 2.3c es tan sólo una versión trasladada del espectro de la envolvente compleja hacia  $f_c$  como se observa en la Figura 2.3b. El ancho de banda total de la señal  $s(t)$  será dos veces más amplio que la señal de información  $m(t)$ , es decir  $B_T = 2B$ .



(a) Espectro de la señal banda base (señal de información).



(b) Espectro de la envolvente compleja para una señal AM.



(c) Espectro de una señal AM.

**Figura 2.3:** Espectro de la señal moduladora, envolvente compleja y señal modulada para AM.

### 2.1.3 Porcentaje de modulación

El porcentaje de modulación en AM es una medida que indica cuánto se ha modificado la amplitud de la señal portadora en función de la amplitud de la señal moduladora o de información. De esta forma se puede calcular el valor de porcentaje de modulación positiva y negativa, a partir de estas dos el porcentaje de modulación total.

- El porcentaje de modulación positiva se muestra en la ecuación (2-7):

$$\%MOD(+)=\frac{A_{\max}-A_c}{A_c}\times 100\%=\max[m(t)]\times 100\% \quad (2-7)$$

- El porcentaje de modulación negativa se observa en la ecuación (2-8):

$$\%MOD(-)=\frac{A_c-A_{\min}}{A_c}\times 100\%=-\min[m(t)]\times 100\% \quad (2-8)$$

- El porcentaje de modulación total se puede expresar de dos maneras como se muestra en la ecuación (2-9) y en la ecuación (2-10):

$$\%MOD_{TOTAL}=\frac{A_{\max}-A_{\min}}{2A_c}\times 100\% \quad (2-9)$$

$$\%MOD_{TOTAL}=\frac{\max[m(t)]-\min[m(t)]}{2}\times 100\% \quad (2-10)$$

Cuando el porcentaje de modulación es superior al 100% se presenta el efecto de sobre modulación, es decir que la señal de salida del transmisor será una señal distorsionada.

### 2.1.4 Eficiencia

Es el porcentaje de potencia total de la señal modulada que suministra información. Se puede hablar de una eficiencia de modulación como la relación entre la potencia útil de señal y la potencia total de la señal modulada, la eficiencia se muestra en la ecuación (2-11):

$$E = \frac{1/2 A_c^2 P_m}{1/2 A_c^2 [1 + P_m]} \times 100\%$$

$$E = \frac{P_m}{1 + P_m} \times 100\% \quad (2-11)$$

Donde  $P_m$  es la potencia promedio de la señal moduladora.

Para una señal moduladora sinusoidal sin sobre modulación (es decir cuando el voltaje máximo de la señal moduladora es  $V_p = 1$  la potencia promedio es  $P_m = \frac{1}{2}$ ), se tiene una eficiencia máxima del 33.33%. Y para una señal cuadrada (con un voltaje de 1, la potencia promedio es  $P_m = 1$ ), entonces la eficiencia es del 50%.

### 2.1.5 Potencia promedio

Al utilizar la ecuación general de la potencia promedio, se obtiene que la potencia promedio normalizada de la señal AM, la cual se presenta en la ecuación (2-12),

$$P_s = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle$$

$$P_s = \frac{1}{2} \langle |A_c [1 + m(t)]|^2 \rangle = \frac{1}{2} |A_c|^2 \langle |[1 + m(t)]|^2 \rangle$$

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} \langle 1 + 2m(t) + m^2(t) \rangle$$

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} [1 + 2\langle m(t) \rangle + \langle m^2(t) \rangle] \quad (2-12)$$

donde  $\langle m^2(t) \rangle = P_m$ . Si la señal de información tiene una componente en DC, entonces  $\langle m(t) \rangle = DC$ . De forma general si no se tiene componente en DC entonces  $\langle m(t) \rangle = 0$  y la potencia promedio se muestra en la ecuación (2-13),

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} [1 + P_m] \quad (2-13)$$

Para casos particulares con tonos de pruebas sinusoidales, la potencia promedio de la moduladora se presenta en un tono en la ecuación (2-14) y con dos tonos en la ecuación (2-15):

- Con un tono:  $P_m = V_p^2 / 2$  (2-14)

- Con dos tonos:  $P_m = V_p^2 / 2 + V_p^2 / 2$  (2-15)

- 

### 2.1.6 Potencia pico de envolvente

Al evaluar la definición de la potencia pico envolvente que se presenta en la ecuación del primer capítulo, se muestra la potencia envolvente pico de la señal AM en la ecuación (2-16):

$$P_{ep} = \frac{1}{2} [\text{máx } |g(t)|]^2$$

$$P_{ep} = \frac{1}{2} [\text{máx } |A_c[1 + m(t)]|]^2 = \frac{A_c^2}{2} [\text{máx } [1 + m(t)]]^2$$

$$P_{ep} = \frac{A_c^2}{2} [\text{máx } [1] + \text{máx } [m(t)]]^2$$

$$P_{ep} = \frac{A_c^2}{2} [1 + \text{máx } [m(t)]]^2 \quad (2-16)$$

### Ejemplo 2.1

Suponga que un transmisor de AM se modula con una señal de prueba de video dada por  $m(t) = -0.2 + 0.6 \sin \omega_1 t$ , donde  $f_1 = 100\text{KHz}$ ,  $A_c = 100$ ,  $f_c = 600\text{KHz}$ .

- Evalué y grafiqué la señal modulada y moduladora en tiempo y frecuencia.
- ¿Cuáles son los porcentajes de modulación?

Desarrollo:

$$m(t) = -0.2 + 0.6 \sin \omega_1 t = -0.2 + 0.6 \sin(2\pi f_1 t) = -0.2 + 0.6 \sin(200000\pi t)$$

Para encontrar la señal modulada a partir de la envolvente compleja se usa la ecuación (2-1):

$$g(t) = A_c [1 + m(t)]$$

$$g(t) = 100[1 - 0.2 + 0.6 \sin \omega_1 t] = 100[0.8 + 0.6 \sin \omega_1 t]$$

$$g(t) = 80 + 60 \sin \omega_1 t$$

$$s(t) = g(t) \cos(\omega_c t) = A_c [1 + m(t)] \cos(\omega_c t)$$

$$s(t) = g(t) \cos(\omega_c t) = [80 + 60 \sin \omega_1 t] \cos(\omega_c t)$$

$$s(t) = 80 \cos(\omega_c t) + 60 \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_c t)$$

Aplicando la identidad trigonométrica:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)t + \sin(\alpha - \beta)t],$$

$$s(t) = 80 \cos(\omega_c t) + \frac{60}{2} [\sin(\omega_1 + \omega_c)t + \sin(\omega_1 - \omega_c)t]$$

donde  $\omega_1 + \omega_c = 2\pi(700\text{KHz})$  y  $\omega_1 - \omega_c = 2\pi(-500\text{KHz})$

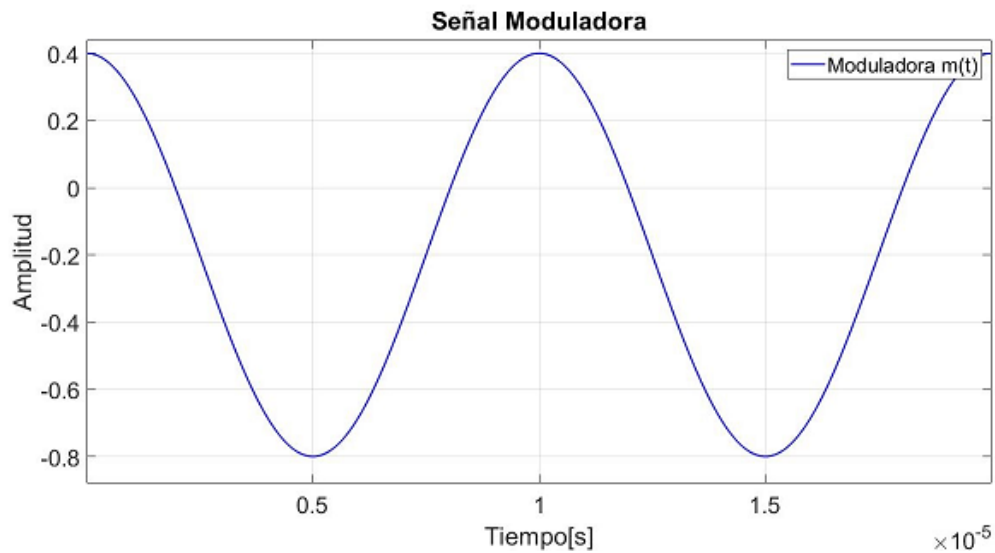
$$s(t) = 80 \cos(\omega_c t) + 30[\sin 2\pi(700\text{KHz})t + \sin 2\pi(-500\text{KHz})t]$$

ya la función seno es impar  $\sin 2\pi(-500\text{KHz})t = -\sin 2\pi(500\text{KHz})t$

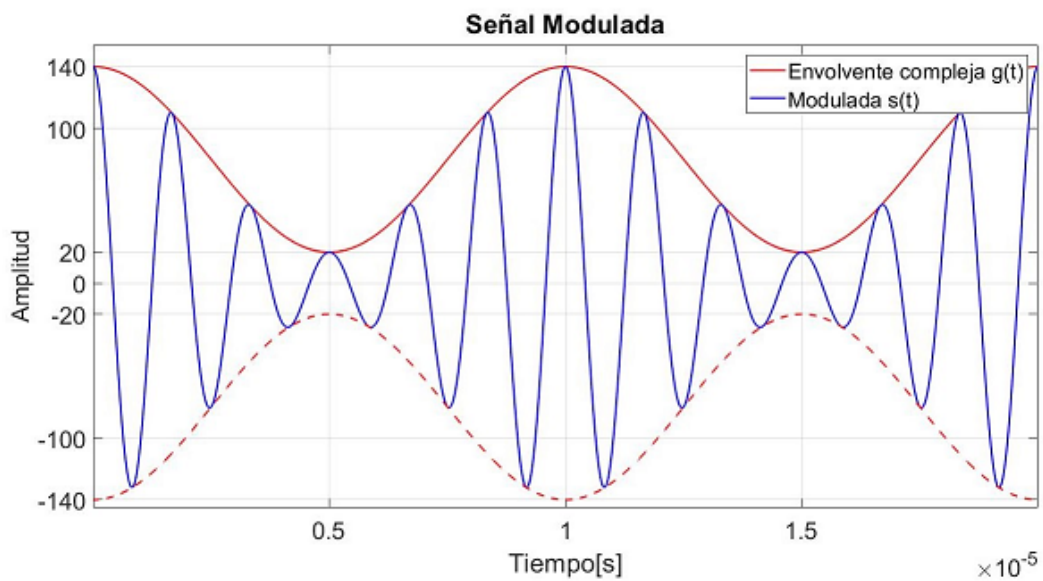
$$s(t) = 80 \cos(\omega_c t) + 30[\sin 2\pi(700\text{KHz})t - \sin 2\pi(500\text{KHz})t]$$

La gráfica en tiempo de la señal moduladora generada a través de Matlab se muestra en la Figura 2.4a. y la señal modulada en la Figura 2.4b.





a) Señal moduladora  $m(t)$



b) Señal modulada  $s(t)$  y envolvente compleja real  $g(t)$

**Figura 2.4:** Forma de onda de la señal moduladora, envolvente compleja y señal AM resultante.

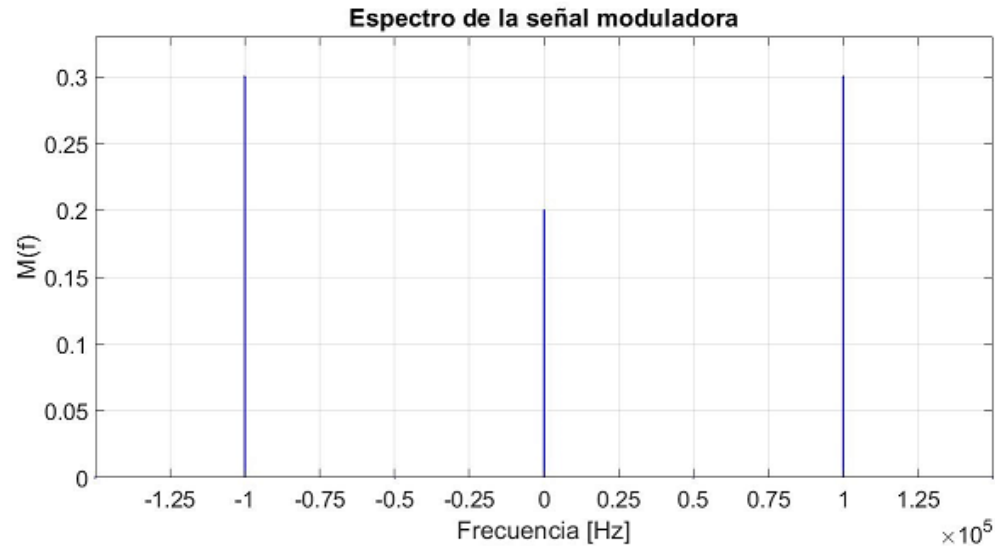
Para evaluar el espectro se usa la ecuación (2-6):

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)]$$

Donde, el espectro de la señal moduladora se muestra en la Figura 2.5 y la representación matemática es:

$$M(f) = \mathcal{F}\{m(t)\} = \mathcal{F}\{-0.2 + 0.6 \sin(2\pi f_1 t)\}$$

$$M(f) = -0.2\delta(f) - 0.3j[\delta(f - 100\text{KHz}) + \delta(f + 100\text{KHz})]$$



**Figura 2.5:** Espectro de la señal moduladora.

entonces,

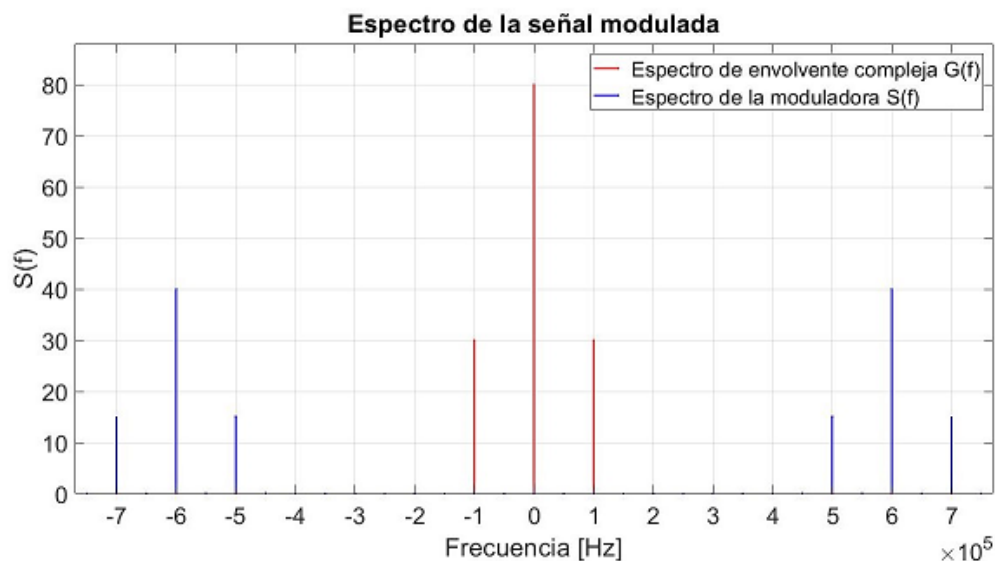
$$S(f) = \frac{100}{2} \{ \delta(f - f_c) - 0.2\delta(f - f_c) - 0.3j[\delta(f - f_c - f_1) + \delta(f - f_c + f_1)] + \delta(f + f_c) - 0.2\delta(f + f_c) - 0.3j[\delta(f + f_c - f_1) + \delta(f + f_c + f_1)] \}$$

$$S(f) = 40\delta(f - f_c) - 15j[\delta(f - f_c - 100\text{KHz}) + \delta(f - f_c + 100\text{KHz})] + 40\delta(f + f_c) - 15j[\delta(f + f_c - 100\text{KHz}) + \delta(f + f_c + 100\text{KHz})]$$

Por conveniencia se ha puesto  $f_c = 600\text{KHz}$

$$S(f) = 40\delta(f - 600\text{KHz}) - 15j[\delta(f - 700\text{KHz}) + \delta(f - 500\text{KHz})] + 40\delta(f + 600\text{KHz}) - 15j[\delta(f + 500\text{KHz}) + \delta(f + 700\text{KHz})]$$

La grafica resultante del espectro de la señal modulada generada por Matlab se muestra en la Figura 2.6.



**Figura 2.6:** Espectro de la señal modulada AM, y envoltura compleja del ejemplo 2.1.

Se determina las potencias promedio, pico y eficiencias, primero con la potencia promedio se usa la ecuación (2-12) ya que la señal moduladora contiene una componente en DC.

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} [1 + 2\langle m(t) \rangle + \langle m^2(t) \rangle]$$

donde la potencia promedio para la moduladora para un tono con componente DC es:

$$\langle m(t) \rangle = DC = -0.2$$

$$P_m = \langle m^2(t) \rangle = DC^2 + V_p^2/2$$

$$P_m = (-0.2)^2 + (0.6)^2/2 = 0.22$$

$$P_s = \frac{100^2}{2} [1 + 2(-0.2) + (0.22)] = 4100 \text{ W}$$

La ecuación 2-16 sirve para determinar la potencia envolvente pico.

$$P_{ep} = \frac{A_c^2}{2} [1 + \text{máx} [m(t)]]^2$$

donde  $\text{máx} [m(t)] = -0.2 + 0.6 = 0.4$

$$P_{ep} = \frac{100^2}{2} [1 + 0.4]^2 = 9800$$

Los porcentajes de modulación se obtienen con las ecuaciones (2-7), (2-8), (2-10) y la eficiencia con la ecuación (2-11).

$$\%MOD(+) = \text{máx}[m(t)] \times 100\% = 0.4 \times 100\% = 40\%$$

$$\%MOD(-) = -\text{mín}[m(t)] \times 100\% = -(-0.8) \times 100\% = 80\%$$

$$\%MOD_{TOTAL} = \frac{\text{máx} [m(t)] - \text{mín} [m(t)]}{2} \times 100\% = \frac{0.4 - (-0.8)}{2} \times 100\% = 60\%$$

$$E = \frac{P_m}{1 + P_m} \times 100\%$$

$$E = \frac{0.22}{1 + 0.22} \times 100\% = 18.03\%$$

## 2.2 Modulación de Doble Banda Lateral con Portadora Suprimida (DSB-SC)

La modulación DSB-SC es una variante de AM, en esta modulación se suprime la portadora y se transmiten solo las bandas laterales. La señal DSB-SC se utiliza en la transmisión de señales de voz y música de alta calidad, así como en la transmisión de televisión de alta definición.

La principal diferencia entre la modulación AM y DSB-SC consiste en que la envolvente compleja no tiene componente DC, esto provoca que carezca una componente discreta en su frecuencia portadora  $f_c$ , como resultado tiene una mejora en la eficiencia y menor desperdicio de energía que AM. La modulación de DSB-SC requiere un detector de producto, el cual es más costoso que un detector de envolvente para la demodulación pues la modulación en fase no es

igual a la modulación en amplitud ( $x(t) \neq R(t)$ ), ya que la moduladora  $m(t)$  puede contener valores negativos  $x(t) = A_c m(t)$  y  $R(t) = A_c |m(t)|$ , esto implica que el módulo es 100% real y netamente positivo.

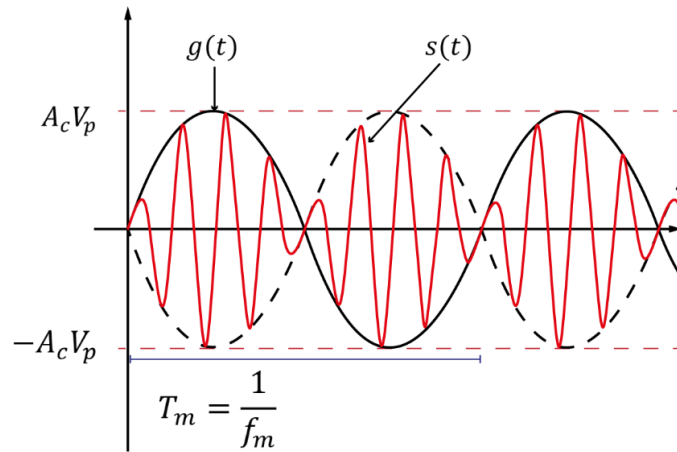
La envolvente compleja se representa:

$$g(t) = A_c m(t) \quad (2-17)$$

donde las modulaciones en fase y en cuadratura correspondiente son:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_c m(t) \\ y(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2-18)$$

Al tomar el mismo ejemplo de la Figura 2.1, se obtiene los valores pico de la envolvente compleja  $g(t)$  que se muestra en la Figura 2.7 son:  $A_{\min} = A_c \text{mín}[m(t)]$  y  $A_{\max} = A_c \text{máx}[m(t)]$ . Y de igual forma mantiene la frecuencia de la moduladora  $f_m$ . La forma de la envolvente compleja se muestra en la Figura 2.7:



**Figura 2.7:** Señal modulada y envolvente compleja para DSB-SC

### 2.2.1 Señal modulada

La representación de la señal modulada para DSB-SC se determina con la siguiente ecuación vista en el capítulo anterior junto con su envolvente compleja:

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \\ s(t) &= \text{Re}\{A_c m(t)[\cos(\omega_c t) + j \text{sen}(\omega_c t)]\} \\ s(t) &= A_c \text{Re}\{m(t) \cos(\omega_c t) + jm(t) \text{sen}(\omega_c t)\} \end{aligned}$$

solo se toma las partes reales,

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c [m(t) \cos(\omega_c t)] \\ s(t) &= A_c m(t) \cos(\omega_c t) \end{aligned} \quad (2-19)$$

donde,  $\omega_c = 2\pi f_c$

### 2.2.2 Espectro de la señal modulada

Al tomar el espectro de la envolvente compleja tal que:

$$G(f) = A_c[M(f)] \quad (2-20)$$

Y se aplica la definición del espectro de una señal pasa banda

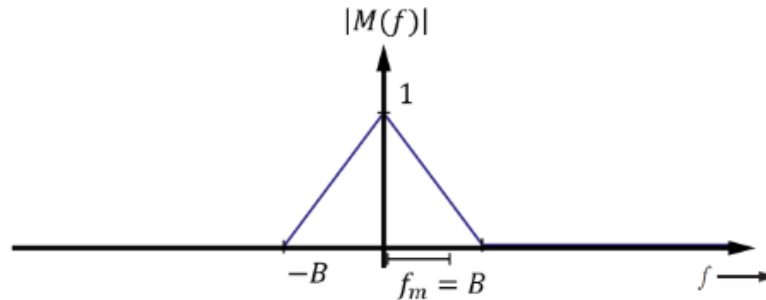
$$S(f) = \frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$$

$$S(f) = \frac{1}{2}\{A_c[M(f - f_c) + M^*(-f - f_c)]\}$$

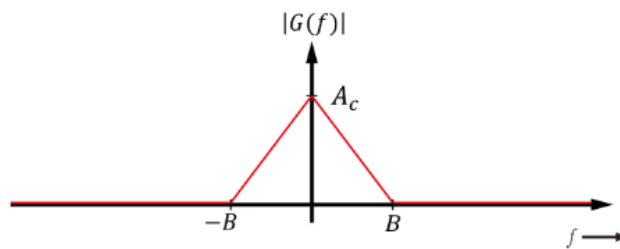
Se considera que la señal moduladora es puramente real,  $M^*(-f - f_c) = M(f + f_c)$ , la representación del espectro es:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)] \quad (2-21)$$

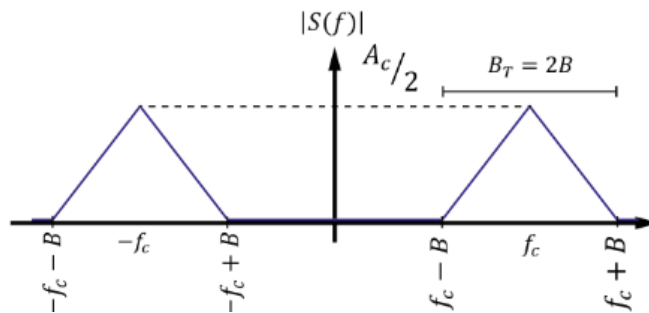
El espectro es idéntico al de AM, a excepción de las componentes discretas (impulsos unitarios) en  $f_c$  que están ausentes. El ancho de banda total de la señal  $s(t)$  es dos veces más amplio que la señal  $m(t)$ , es decir  $B_T = 2B$



(a) Espectro de la señal banda base (señal de información).



(b) Espectro de la envolvente compleja para una señal DSB-SC.



(c) Espectro de una señal DSB-SC.

**Figura 2.8:** Espectro de la señal moduladora, envolvente compleja y señal modulada para DSB-SC

El proceso de modulación DSB-SC se muestra en la Figura 2.8, donde se observa que la forma espectral entre la señal moduladora, envolvente compleja y señal modulada es la misma, lo que nos indica linealidad, sin embargo, este proceso se debe a que la relación entre la señal de entrada y la señal de salida es constante, es decir, no hay ningún elemento en el proceso de modulación que introduzca una no linealidad.

El porcentaje de modulación en una señal DSB-SC es infinito, ya que no existe una componente discreta en  $f_c$  como se muestra en la Figura 2.6. La eficiencia de modulación de esta señal es del 100% debido a que no se gasta potencia en una portadora discreta.

### 2.2.3 Potencia promedio

Se obtiene que la potencia promedio normalizada de la señal DSB-SC a través de la ecuación ya planteada en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned}
 P_s &= \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle \\
 P_s &= \frac{1}{2} \langle |A_c[m(t)]|^2 \rangle \\
 P_s &= \frac{1}{2} |A_c|^2 \langle |[m(t)]|^2 \rangle \\
 P_s &= \frac{A_c^2}{2} \langle m^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} P_m
 \end{aligned} \tag{2-22}$$

donde  $P_m = \langle m^2(t) \rangle$

### 2.2.4 Potencia pico de envolvente

Se evalúa la definición de la potencia pico envolvente:

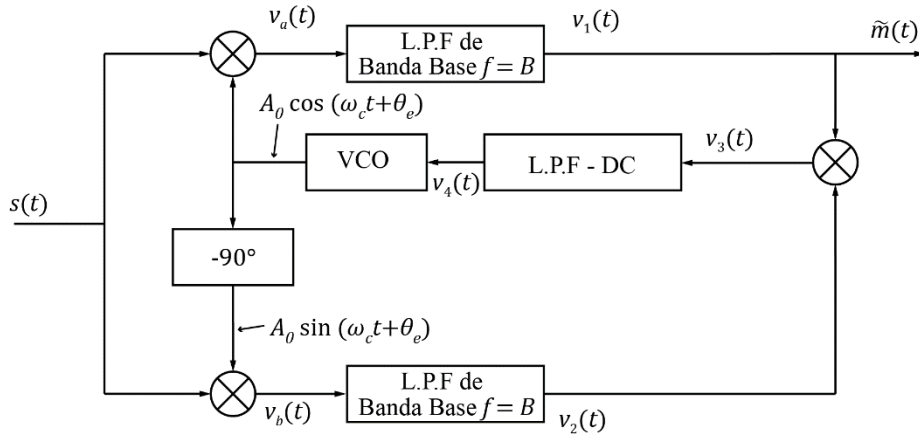
$$\begin{aligned}
 P_{ep} &= \frac{1}{2} [\text{máx } |g(t)|]^2 \\
 P_{ep} &= \frac{1}{2} [\text{máx } |A_c[m(t)]|]^2 = \frac{A_c^2}{2} [\text{máx } [m(t)]]^2 \\
 P_{ep} &= \frac{A_c^2}{2} \text{máx } [m(t)]^2
 \end{aligned} \tag{2-23}$$

### 2.2.5 Demodulación: Lazo de costas y lazo cuadrático

Para demodular una señal DSB-SC que tiene el espectro simétrico respecto a la frecuencia portadora se usa el lazo a costas o lazo cuadrático ya que ambos tienen el mismo rendimiento frente al ruido, las opciones de implementación se enfocan en el coste y construcción de los mismos.

#### 2.2.5.1 Lazo de costas

El funcionamiento de un circuito lazo de costas se basa en un lazo enganchado en fase (PLL, por sus siglas en inglés) tal y como se muestra en la Figura 2.9.



**Figura 2.9:** Diagrama de bloques para un lazo de costas.

El sistema usa retroalimentación con el funcionamiento de un oscilador controlado por voltaje (VCO) que provoca que se enganche a la frecuencia portadora suprimida de entrada con cierto error de fase denotado  $\theta_e$ .

Para comprender mejor el proceso de demodulación se analiza lo que sucede a la salida de los mezcladores ( $v_a(t)$  y  $v_b(t)$ ) en el primer instante de retroalimentación suponiendo que ingresa la señal DSB-SC  $s(t)$ .

$$s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t)$$

$$v_a(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t) A_0 \cos(\omega_c t + \theta_e)$$

$$v_a(t) = A_c A_0 m(t) \left( \frac{\cos(\omega_c t + \omega_c t + \theta_e) + \cos(\omega_c t - \omega_c t + \theta_e)}{2} \right)$$

$$v_a(t) = A_c A_0 m(t) \left( \frac{\cos(2\omega_c t + \theta_e) + \cos(\theta_e)}{2} \right) \quad (2-24)$$

$$v_b(t) = A_c m(t) \sin(\omega_c t) A_0 \sin(\omega_c t + \theta_e)$$

$$v_b(t) = A_c A_0 m(t) \left( \frac{\sin(2\omega_c t + \theta_e) + \sin(\theta_e)}{2} \right) \quad (2-25)$$

Donde las componentes con frecuencias altas ( $2\omega_c t + \theta_e$ ) son eliminadas por el filtro pasabajos, por lo que a la salida de los mismos se obtiene:

$$v_1(t) = \frac{A_c A_0}{2} m(t) \cos(\theta_e) \quad (2-26)$$

$$v_2(t) = \frac{A_c A_0}{2} m(t) \sin(\theta_e) \quad (2-27)$$

Las señales  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  que ingresan al tercer mezclador

$$v_3(t) = \left[ \frac{A_c A_0}{2} m(t) \cos(\theta_e) \right] \left[ \frac{A_c A_0}{2} m(t) \sin(\theta_e) \right]$$

$$v_3(t) = \left( \frac{A_c A_0}{2} \right)^2 m^2(t) \cos(\theta_e) \sin(\theta_e)$$

Con identidades trigonométricas la señal  $\sin(2\theta_e) = 2 \cos(\theta_e) \sin(\theta_e)$

$$v_3(t) = \left(\frac{A_c A_0}{2}\right)^2 m^2(t) \frac{\sin(2\theta_e)}{2} \quad (2-28)$$

El filtro LPF-DC, que tiene una frecuencia de corte cercana al valor DC, se comporta como un integrador y se encarga de generar el voltaje de control de DC necesario para mantener el VCO sincronizado con  $f_c$ . Aunque puede existir un pequeño error en fase ( $\theta_e$ ), el voltaje generado es suficiente para mantener la sincronización.

$$v_4(t) = k \sin(2\theta_e) \quad (2-29)$$

Donde  $k = \frac{1}{2} \left(\frac{A_c A_0}{2}\right)^2 \langle m^2(t) \rangle$ . Si  $\theta_e = 0$  entonces  $\sin(\theta_e) = 0$  y  $\cos(\theta_e) = 1$ , significa que esta enganchado y la frecuencia del VCO es igual a la frecuencia de la señal DSB-SC por lo que  $v_1(t)$  es proporcional a  $m(t)$

$$v_1(t) = \tilde{m}(t) = \frac{A_c A_0}{2} m(t) \cos(0)$$

$$v_1(t) = \tilde{m}(t) = \frac{A_c A_0}{2} m(t) \quad (2-30)$$

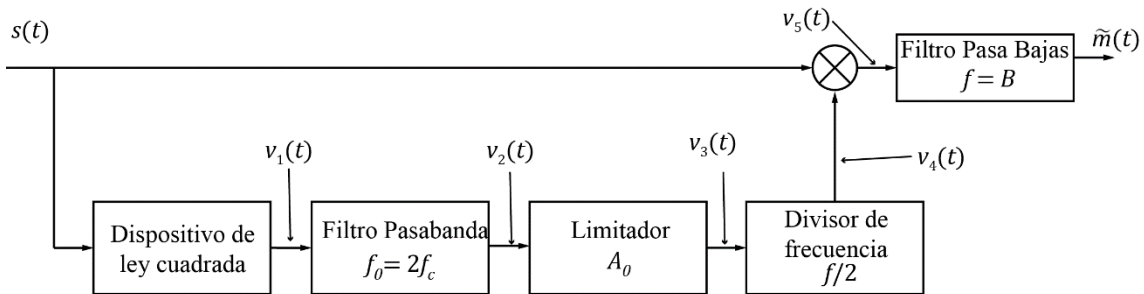
### 2.2.5.2 Lazo cuadrático

El lazo cuadrático usa varios dispositivos que juntos provocan una recuperación de la señal DSB-SC tal y como se muestra en la Figura 2.10. Al analizar los diferentes puntos en el diagrama de bloques se consigue una respuesta proporcional a  $m(t)$  igual que el lazo de costas.

$$v_1(t) = A_c^2 m^2(t) \cos^2(\omega_c t)$$

Al aplicar identidades trigonométricas,  $\cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_c t)]$

$$v_1(t) = A_c^2 m^2(t) \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_c t)] \quad (2-31)$$



**Figura 2.10:** Diagrama de bloques para un lazo cuadrático.

Después de pasar por el filtro pasa banda que elimina las componentes de frecuencias bajas, solo conservando componentes a ( $f_0=2f_c$ ), el limitador provoca un recorte de amplitud a  $A_0$  y después pasa por un divisor de frecuencias tal que el proceso es:



$$v_2(t) = \frac{1}{2} A_c^2 m^2(t) \cos(2\omega_c t) \quad (2-32)$$

$$v_3(t) = A_0 \cos(2\omega_c t) \quad (2-33)$$

$$v_4(t) = A_0 \cos(\omega_c t) \quad (2-34)$$

La señal  $v_4(t)$  de la ecuación (2-34) pasa por el mezclador junto con la señal DSB-SC siendo la salida  $v_5(t)$ :

$$\begin{aligned} v_5(t) &= s(t)v_4(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t) A_0 \cos(\omega_c t) \\ v_5(t) &= A_c A_0 m(t) \left( \frac{\cos(\omega_c t + \omega_c t) + \cos(\omega_c t - \omega_c t)}{2} \right) \\ v_5(t) &= \frac{A_c A_0}{2} m(t) [\cos(2\omega_c t) + \cos(0)] \\ v_5(t) &= \frac{A_c A_0}{2} m(t) [\cos(2\omega_c t) + 1] \end{aligned} \quad (2-35)$$

El filtro pasabajos elimina componentes a frecuencias altas y solo dejando componentes de banda base.

$$\tilde{m}(t) = \frac{A_c A_0}{2} m(t) \quad (2-36)$$

Las ecuaciones (2-30) y (2-36) muestran que la señal recuperada desde DSB-SC es matemáticamente la misma, ambos circuitos tienen sus ventajas y desventajas, donde la elección del circuito dependerá de las características de la señal modulada y de los requisitos de aplicación.

### 2.2.6 Ejemplo 2.2

Una señal DSB-SC se modula por  $m(t) = 0.5 \cos \omega_1 t$ , donde  $f_1 = 200\text{KHz}$ ,  $A_c = 16$ ,  $f_c = 900\text{KHz}$  y se hace pasar por una carga de  $75 \Omega$ .

- Escriba una expresión para la señal DSB-SC y haga un diagrama de esta forma de onda.
- Evalúe y haga un diagrama del espectro para esta señal DSB-SC.
- Encuentre los valores de porcentaje de modulación
- Obtenga la eficiencia del sistema
- Encuentre el valor de la potencia promedio y la PEP.

Desarrollo:

Para el literal a se determina la envolvente compleja a partir de la ecuación (2-13)

$$g(t) = A_c m(t) = 15[0.5 \cos \omega_1 t] = 8 \cos \omega_1 t$$

$$s(t) = g(t) \cos(\omega_c t)$$

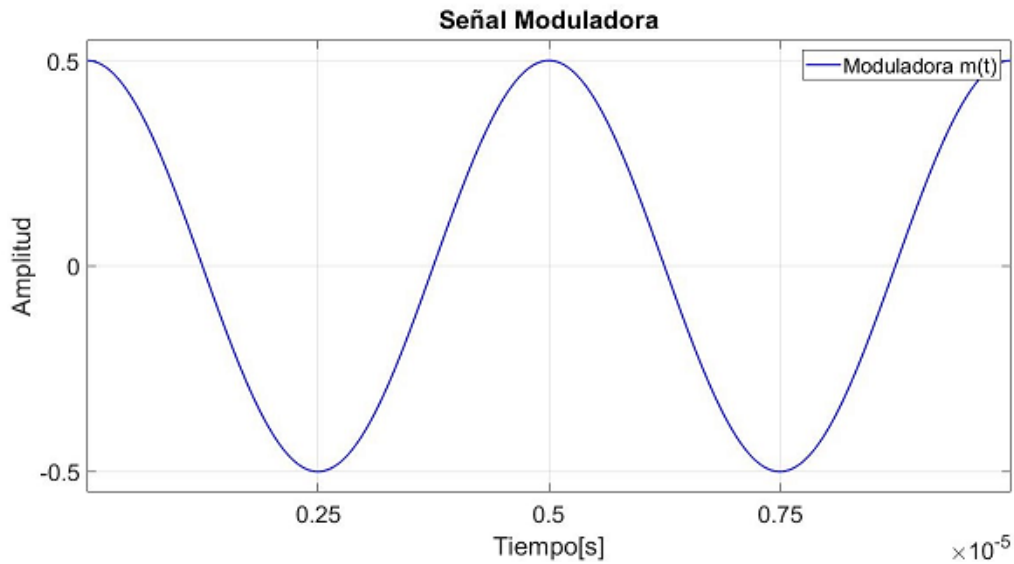
$$s(t) = 8 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_c t)$$

$$s(t) = 8 \left( \frac{1}{2} \right) [\cos(\omega_1 + \omega_c)t + \cos(\omega_1 - \omega_c)t]$$

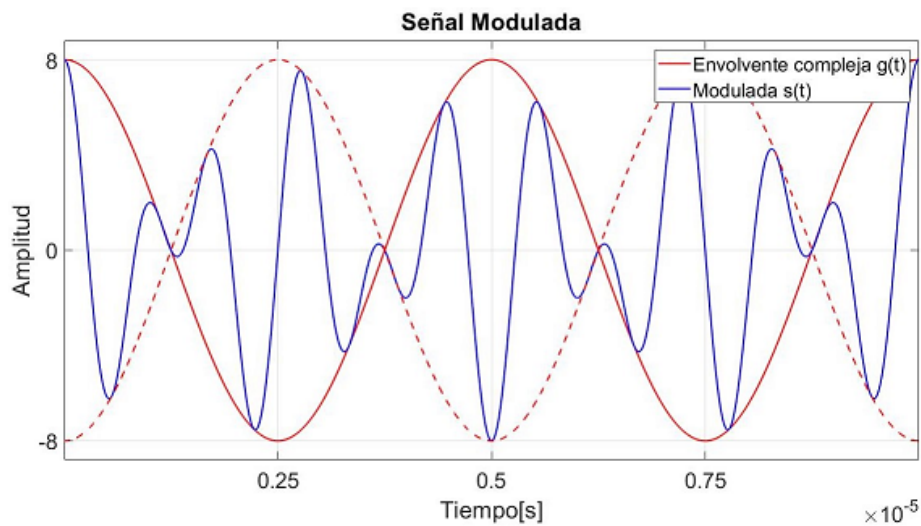
donde  $\omega_1 + \omega_c = 2\pi(1100\text{KHz})$  y  $\omega_1 - \omega_c = 2\pi(700\text{KHz})$

$$s(t) = 4\{\cos[2\pi(1100\text{KHz})t] + \cos[2\pi(700\text{KHz})t]\}$$

En la Figura 2.11 se tiene el diagrama de la forma de onda tanto de la señal moduladora como el de la señal modulada.



(a) Señal moduladora  $m(t)$  del ejemplo 2.2



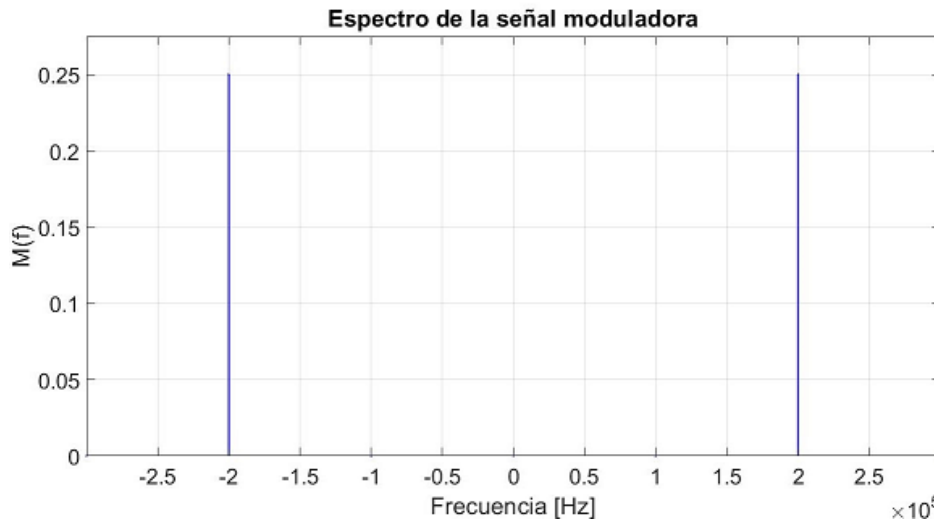
(b) Señal modulada  $s(t)$  y envolvente compleja real  $g(t)$

**Figura 2.11:** Forma de onda de la señal moduladora, señal de la envolvente compleja y señal DSB-SC resultante del ejemplo 2.2.

para el literal b primero se evalúa el espectro de la señal moduladora y su gráfica generada en Matlab se muestra en la Figura 2.12:

$$M(f) = \mathcal{F}\{m(t)\} = \mathcal{F}\{0.5 \cos \omega_1 t\}$$

$$M(f) = 0.25[\delta(f + 200\text{KHz}) + \delta(f - 200\text{KHz})]$$



**Figura 2.12:** Forma de espectro de la señal moduladora del ejemplo 2.2.

entonces, el espectro de la envolvente compleja según la ecuación (2-22) es:

$$G(f) = A_c[M(f)] = 16 * 0.25[\delta(f + 200\text{KHz}) + \delta(f - 200\text{KHz})]$$

$$G(f) = 4[\delta(f + 200\text{KHz}) + \delta(f - 200\text{KHz})]$$

y el espectro de la señal modulada según la ecuación (2.23) es:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

$$S(f) = \frac{16}{2} [0.25[\delta(f - f_c + 200\text{KHz}) + \delta(f - f_c - 200\text{KHz})]$$

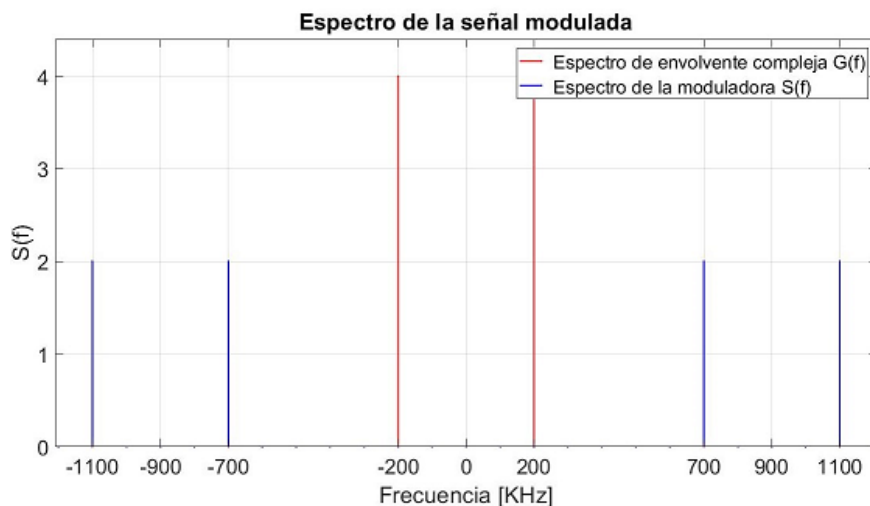
$$+ 0.25[\delta(f + f_c + 200\text{KHz}) + \delta(f + f_c - 200\text{KHz})]]$$

$$S(f) = 2[\delta(f - 900\text{KHz} + 200\text{KHz}) + \delta(f - 900\text{KHz} - 200\text{KHz})]$$

$$+ 2[\delta(f + 900\text{KHz} + 200\text{KHz}) + \delta(f + 900\text{KHz} - 200\text{KHz})]$$

$$S(f) = 2[\delta(f - 700\text{KHz}) + \delta(f - 1100\text{KHz})]$$

$$+ 2[\delta(f + 1100\text{KHz}) + \delta(f + 700\text{KHz})]$$



**Figura 2.13:** Espectro de la envolvente compleja, y señal AM resultante del ejemplo 2.3

El literal c y d, requiere el porcentaje de modulación y eficiencia, pero se sabe que para DSB-SC estos valores son  $\infty$  y 100% respectivamente. De igual manera para las potencias del literal e, se aplican las ecuaciones (2.25) para la potencia promedio y (2.26) para la potencia envolvente pico con la diferencia que al tener una carga diferente de 1 el valor de esta potencia se tiene que dividir para la carga, es decir  $R = 75 \Omega$ .

$$P_s = \frac{A_c^2}{2R} P_m$$

donde  $P_m = V_p^2 / 2 = (0.5^2) / 2 = 0.125W$

$$P_s = \frac{(16)^2}{2(75)} (0.125) = 0.2133W$$

$$P_{ep} = \frac{A_c^2}{2R} \text{máx} [m(t)]^2 = \frac{(16)^2}{2(75)} (0.5)^2 = 0.4267W$$

### 2.3 Modulación de banda lateral única (Single Sideband – SSB)

La modulación de banda lateral única (SSB) en la cual se elimina una de las bandas laterales, lo que resulta en una señal de ancho de banda más estrecha que la modulación DSB-SC. La modulación SSB se utiliza en la transmisión de señales de voz y música de alta calidad en aplicaciones de radiodifusión de larga distancia, así también en la transmisión de televisión de alta definición.

Su característica principal es que el ancho de banda de la señal modulada es el mismo que la señal moduladora, es decir que es la mitad del ancho de banda que una señal AM o DSB-SC. En términos de eficiencia espectral SSB es mejor.

Dentro de SSB existe dos casos que dependerán de la banda seleccionada:

- Superior (USSB)
- Inferior (LSSB)

La banda lateral única superior (USSB) tiene componentes espectrales únicamente superiores a la frecuencia portadora, es decir que solo existe en  $|f| > f_c$ .

La banda lateral única inferior (LSSB) tiene componentes espectrales únicamente inferiores a la frecuencia portadora, es decir que solo existe en  $|f| < f_c$ .

De cualquier forma, la envolvente compleja y la señal modulada dependen de la transformada de Hilbert de la señal moduladora  $m(t)$ ,

**Transformada de Hilbert:** Se define como un desfase ( $-90^\circ$ ) de cada componente armónica de la señal  $m(t)$ , se denota de la forma  $\hat{m}(t)$ , la cual se obtiene:

$$\hat{m}(t) = m(t) * h(t) \tag{2-37}$$

**Figura 2.14:** Diagrama de bloques de la transformada de Hilbert.

Donde  $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ , y si se analiza de forma espectral  $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$ , implica a una red con corrimiento de fase de  $-90^\circ$ .

$$H(f) = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} \quad (2-38)$$

Tomando de ejemplo los tonos sinusoidales, sus transformadas de Hilbert son:  $\sin(\omega_m t - 90^\circ) = -\cos(\omega_m t)$  y  $\cos(\omega_m t - 90^\circ) = \sin(\omega_m t)$ .

La envolvente compleja:

$$g(t) = A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)] \quad (2-39)$$

donde el signo (+) corresponde a USSB, y el signo (-) a LSSB, y las modulaciones en fase y en cuadratura son:

$$x(t) = A_c m(t) \quad (2-40)$$

$$y(t) = \pm A_c \hat{m}(t) \quad (2-41)$$

Y las modulaciones en amplitud y de fase son:

$$R(t) = |g(t)| = A_c \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)} \quad (2-42)$$

$$\theta(t) = \angle g(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{\pm \hat{m}(t)}{m(t)} \right] \quad (2-43)$$

Ya que la ecuación (2-41) es diferente de cero, se obtiene una componente compleja donde indica las señales SSB son en parte modulación por amplitud como modulación por fase, sin embargo, la envolvente "real" corresponde a la componente de AM, es decir  $R(t) = |g(t)|$ .

### 2.3.1 Señal modulada

La representación de la señal modulada para SSB se obtiene a partir de la definición de la ecuación analizada en el capítulo anterior:

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$$

donde  $e^{j\omega_c t} = \cos(\omega_c t) + j \text{sen}(\omega_c t)$

$$s(t) = \text{Re}\{A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)][\cos(\omega_c t) + j \text{sen}(\omega_c t)]\}$$

$$s(t) = \text{Re}\{A_c m(t) \cos(\omega_c t) \pm j A_c \hat{m}(t) \cos(\omega_c t) + j A_c m(t) \text{sen}(\omega_c t) \pm jj A_c \hat{m}(t) \text{sen}(\omega_c t)\}$$

donde  $jj = j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ .

$$s(t) = \text{Re}\{A_c m(t) \cos(\omega_c t) \pm j A_c \hat{m}(t) \cos(\omega_c t) + j A_c m(t) \text{sen}(\omega_c t) \mp A_c \hat{m}(t) \text{sen}(\omega_c t)\}$$

$$s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t) \quad (2-44)$$

donde  $\omega_c = 2\pi f_c$ .

### 2.3.2 Espectro de la señal modulada

Se toma el espectro de la envolvente compleja tal que:

$$G(f) = A_c M(f) \pm j A_c \widehat{M}(f) \quad (2-45)$$

donde  $\widehat{M}(f) = M(f)H(f)$

$$G(f) = A_c M(f) \pm j A_c M(f)H(f)$$

$$G(f) = A_c M(f)[1 \pm jH(f)] \quad (2-46)$$

$G(f)$  tomara el valor dependiendo la banda seleccionada, es decir si se selecciona la banda superior USSB (+) o la banda inferior LSSB (-). Al trabajar con la respuesta al impulso de la transformada de Hilbert, se puede demostrar el resultado de las envolventes complejas para cada caso, y la ecuación 2-46 se transforma en:

- Envoltente compleja para USSB

$$G(f) = \begin{cases} A_c M(f)[1 + j(-j)], & f > 0 \\ A_c M(f)[1 + j(j)], & f < 0 \end{cases}$$

$$G(f) = \begin{cases} A_c M(f)[1 - j^2], & f > 0 \\ A_c M(f)[1 + j^2], & f < 0 \end{cases}$$

$$G(f) = \begin{cases} A_c M(f)[1 - (-1)], & f > 0 \\ A_c M(f)[1 + (-1)], & f < 0 \end{cases}$$

$$G(f) = \begin{cases} A_c M(f)[2], & f > 0 \\ A_c M(f)[0], & f < 0 \end{cases}$$

$$G(f) = \begin{cases} 2A_c M(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (2-47)$$

- Envoltente compleja para LSSB

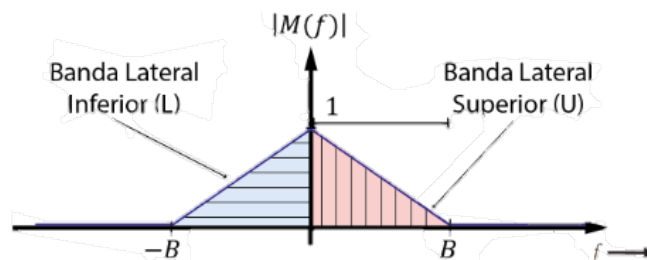
$$G(f) = \begin{cases} A_c M(f)[1 - j(-j)], & f > 0 \\ A_c M(f)[1 - j(j)], & f < 0 \end{cases}$$

$$G(f) = \begin{cases} A_c M(f)[1 + j^2], & f > 0 \\ A_c M(f)[1 - j^2], & f < 0 \end{cases}$$

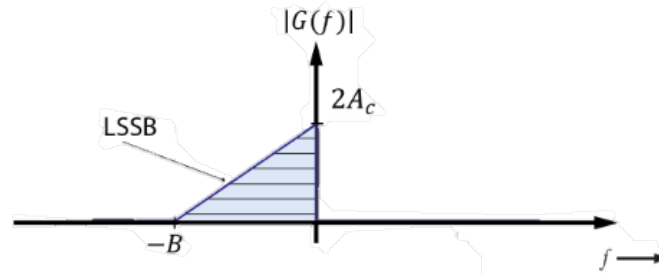
$$G(f) = \begin{cases} A_c M(f)[0], & f > 0 \\ A_c M(f)[2], & f < 0 \end{cases}$$

$$G(f) = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ 2A_c M(f), & f < 0 \end{cases} \quad (2-48)$$

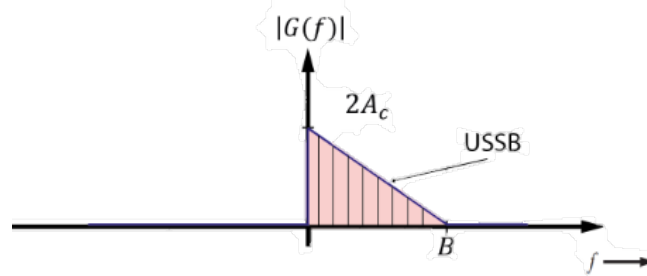
En la Figura 2.15b y 2.15c, se muestra que el espectro de la envolvente compleja solo tiene una banda lateral tanto para USSB como para LSSB.



(a) Señal moduladora.



(b) Envoltura compleja para LSSB.



(c) Envoltura compleja para USSB.

**Figura 2.15:** Envoltura para modulación SSB.

Y al aplicar la definición del espectro de una señal pasa banda

$$S(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$$

- Señal modulada para USSB:

Donde la conjugada de  $G^*(f)$  corresponde a un cambio de signo de la parte compleja, es decir:

$$G^*(f) = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ 2A_c M(f), & f < 0 \end{cases} \quad (2-49)$$

Por lo tanto

$$S(f) = \frac{1}{2} \begin{cases} 2A_c M(f - f_c), & f - f_c > 0 \\ 0, & f - f_c < 0 \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} 0, & f + f_c > 0 \\ 2A_c M(f + f_c), & f + f_c < 0 \end{cases}$$

$$S(f) = A_c \begin{cases} M(f - f_c), & f > f_c \\ 0, & f < f_c \end{cases} + A_c \begin{cases} 0, & f > -f_c \\ M(f + f_c), & f < -f_c \end{cases} \quad (2-50)$$

- Señal modulada para LSSB:

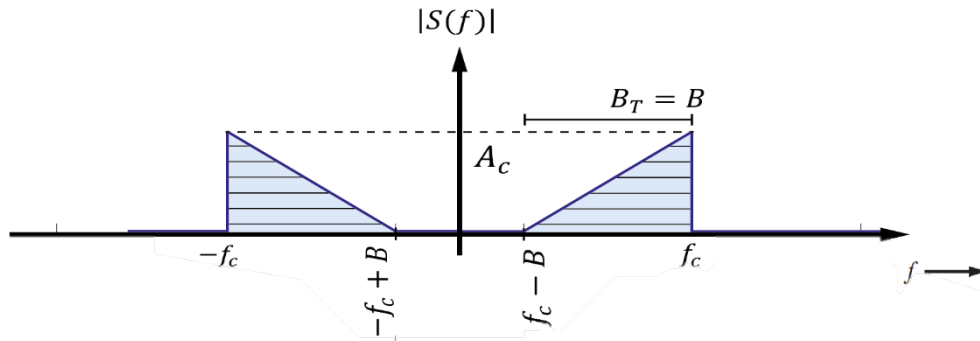
$$G^*(f) = \begin{cases} 2A_c M(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (2-51)$$

Por lo tanto

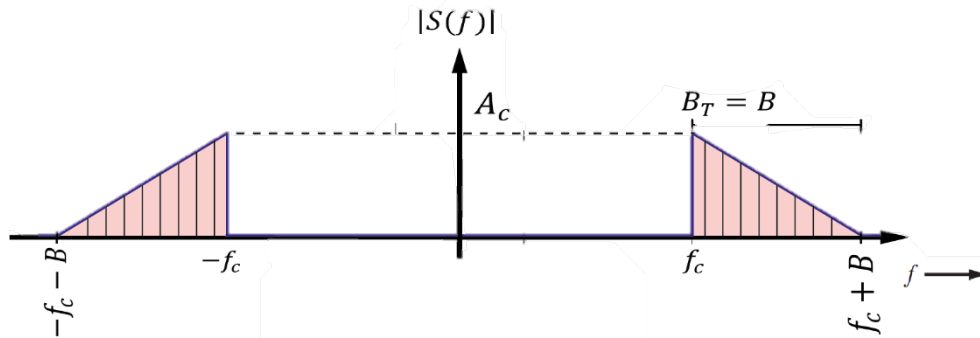
$$S(f) = \frac{1}{2} \begin{cases} 0, & f - f_c > 0 \\ 2A_c M(f - f_c), & f - f_c < 0 \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} 2A_c M(f + f_c), & f + f_c > 0 \\ 0, & f + f_c < 0 \end{cases}$$

$$S(f) = A_c \begin{cases} 0, & f > f_c \\ M(f - f_c), & f < f_c \end{cases} + A_c \begin{cases} M(f + f_c), & f > -f_c \\ 0, & f < -f_c \end{cases} \quad (2-52)$$

Como se muestran en las Figuras 2.16a y 2.16b el ancho de banda se mantiene, es decir es igual al de la modulada para cualquiera de la selección de bandas  $B_T = B$ .



(a) Espectro de la señal modulada LSSB



(b) Espectro de la señal modulada USSB

**Figura 2.16:** Espectro de la modulada para SSB de banda lateral única inferior y superior.

### 2.3.3 Potencia promedio

Se obtiene que la potencia promedio normalizada de la señal SSB por medio de la ecuación:

$$P_s = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle$$

$$P_s = \frac{1}{2} \langle R(t)^2 \rangle$$

$$P_s = \frac{1}{2} \langle [A_c \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)}]^2 \rangle$$

$$P_s = \frac{1}{2} \langle A_c^2 [\sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)}]^2 \rangle$$

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} \langle m^2(t) + \hat{m}^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} [\langle m^2(t) \rangle + \langle \hat{m}^2(t) \rangle] \quad (2-53)$$

donde  $P_m = \langle m^2(t) \rangle$  y ya que la transformada de Hilbert corresponde únicamente a un desplazamiento en fase, la potencia se mantiene, es decir  $P_m = \langle m^2(t) \rangle = \langle \hat{m}^2(t) \rangle$ .

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} [P_m + P_m] = \frac{A_c^2}{2} [2P_m]$$

$$P_s = A_c^2 P_m \quad (2-54)$$



### 2.3.4 Potencia pico de envolvente

Al evaluar la definición de la potencia pico envolvente

$$\begin{aligned}P_{ep} &= \frac{1}{2} [\text{máx } |g(t)|^2] \\P_{ep} &= \frac{1}{2} [\text{máx } R(t)^2] \\P_{ep} &= \frac{1}{2} \text{máx } \left[ A_c \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)} \right]^2 = \frac{A_c^2}{2} \text{máx } \left[ \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)} \right]^2 \\P_{ep} &= \frac{A_c^2}{2} \text{máx } [m^2(t) + \hat{m}^2(t)]\end{aligned}\tag{2-55}$$

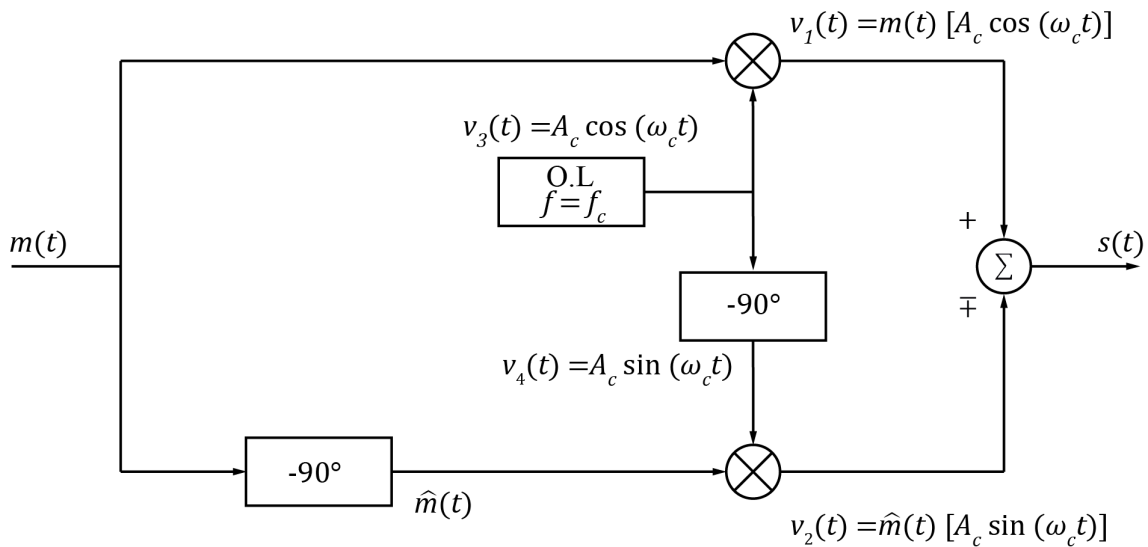
### 2.3.5 Método de modulación SSB

Para generar una señal SSB se puede optar por dos métodos: método de puesta en fase, y el método del filtrado que es un caso especial, en el cual se utiliza un procesamiento de RF, con un filtro de banda lateral, para formar el  $g(t)$  equivalente, en lugar de recurrir a un procesamiento de banda base para generar  $g[m]$  directamente.

#### 2.3.5.1 Método de puesta en fase:

Consiste en usar dos dispositivos de corrimientos de fase ( $-90^\circ$ ), uno para encontrar la transformada de Hilbert, y otro para generar la componente sinusoidal del oscilador local, esto se nota en los puntos  $v_3(t)$  y  $\hat{m}(t)$  del diagrama de bloques mostrado en la Figura 2.17.

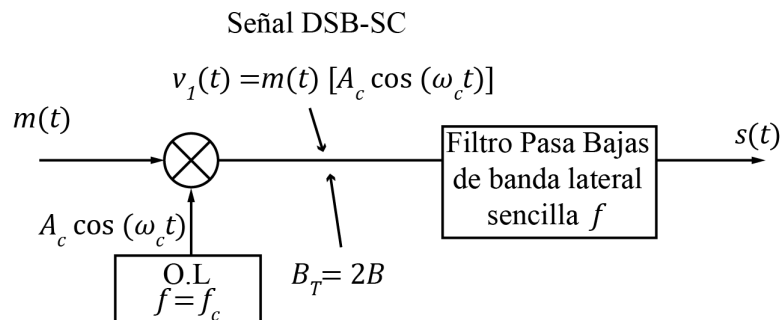
$$\begin{aligned}v_1(t) &= m(t)[A_c \cos(\omega_c t)] \\v_2(t) &= \hat{m}(t)[A_c \sin(\omega_c t)] \\v_3(t) &= A_c \cos(\omega_c t) \\v_4(t) &= A_c \sin(\omega_c t) \\\hat{m}(t) &= m(t) * h(t) \\s(t) &= A_c m(t) \cos(\omega_c t) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t)\end{aligned}$$



**Figura 2.17:** Diagrama de bloques para generar SSB por método de fase

### 2.3.5.2 Método de filtrado:

Se puede aplicar el método de filtrado para frecuencias bajas como señales de voz, además los filtros de cristal que son recomendados por eliminar la banda lateral de forma eficiente, son económicos a frecuencias estándar de IF. La generación de la señal SSB por este método se muestra en la Figura 2.18, donde lo importante es identificar el ancho de banda y la frecuencia central de la señal del filtro ( $f = f_c + \frac{B}{2}$ ).



**Figura 2.18:** Diagrama de bloques para generar SSB por método de filtrado

### Ejemplo 2.3

Se desea trasladar una señal moduladora  $m(t) = 0.6 \cos 600\text{KHz}\pi t + 0.5 \cos 1000\text{KHz}\pi t$  con USSB, a una frecuencia portadora de  $f_c = 1200\text{KHz}$ ,  $A_c = 100$  y se hace pasar por una carga de  $50 \Omega$ .

a) Encontrar la señal modulada en tiempo y frecuencia con sus gráficas correspondientes.

Desarrollo:

Para este tipo de modulación lo primero que se debe considerar es la transformada de Hilbert de la señal moduladora, se puede realizar el proceso de la convolución, sin embargo, como los tonos de prueba son sinusoidales y la transformada de Hilbert implica un desplazamiento de  $(-90^\circ)$ , es decir  $\cos(\omega_m t - 90) = \sin(\omega_m t)$ :

$$\begin{aligned}\cos(600\text{KHz}\pi t - 90) &= \sin(600\text{KHz}\pi t) \\ \cos(1000\text{KHz}\pi t - 90) &= \sin(1000\text{KHz}\pi t)\end{aligned}$$

entonces:

$$\hat{m}(t) = 0.6 \sin 600\text{KHz}\pi t + 0.5 \sin 1000\text{KHz}\pi t$$

luego se aplica la ecuación (2-39) para encontrar su envolvente compleja con la selección del signo superior para USSB:

$$\begin{aligned}g(t) &= A_c [m(t) + j\hat{m}(t)] \\ g(t) &= 100[0.6 \cos 600\text{KHz}\pi t + 0.5 \cos 1000\text{KHz}\pi t \\ &\quad + j(0.6 \sin 600\text{KHz}\pi t + 0.5 \sin 1000\text{KHz}\pi t)]\end{aligned}$$

y para encontrar su gráfica correspondiente se encuentra el módulo de la envolvente:

$$R(t) = |g(t)| = A_c \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)}$$

$$\begin{aligned}|g(t)| &= 100 \sqrt{(0.6 \cos 600\text{KHz}\pi t + 0.5 \cos 1000\text{KHz}\pi t)^2 + (0.6 \sin 600\text{KHz}\pi t + 0.5 \sin 1000\text{KHz}\pi t)^2}\end{aligned}$$

Se realiza un cambio de variables solo para simplificar los cálculos:

$$x_1 = \cos 600\text{KHz}\pi t \wedge x_2 = \cos 1000\text{KHz}\pi t$$

$$y_1 = \sin 600\text{KHz}\pi t \wedge y_2 = \sin 1000\text{KHz}\pi t$$

$$|g(t)| = 100 \sqrt{(0.6x_1 + 0.5x_2)^2 + (0.6y_1 + 0.5y_2)^2}$$

$$|g(t)| = 100 \sqrt{0.36x_1^2 + 0.6x_1x_2 + 0.25x_2^2 + 0.36y_1^2 + 0.6y_1y_2 + 0.25y_2^2}$$

$$|g(t)| = 100 \sqrt{0.36(x_1^2 + y_1^2) + 0.6(x_1x_2 + y_1y_2) + 0.25(x_2^2 + y_2^2)}$$

Por identidades trigonométricas se sabe que:

$$x_1^2 + y_1^2 = \cos^2 600\text{KHz}\pi t + \sin^2 600\text{KHz}\pi t = 1$$

$$x_2^2 + y_2^2 = \cos^2 1000\text{KHz}\pi t + \sin^2 1000\text{KHz}\pi t = 1$$

$$x_1x_2 = (\cos 600\text{KHz}\pi t)(\cos 1000\text{KHz}\pi t) = \frac{\cos 400\text{KHz}\pi t + \cos 1600\text{KHz}\pi t}{2}$$

$$y_1y_2 = (\sin 600\text{KHz}\pi t)(\sin 1000\text{KHz}\pi t) = \frac{\cos 400\text{KHz}\pi t - \cos 1600\text{KHz}\pi t}{2}$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \cos 400\text{KHz}\pi t$$

por lo tanto;

$$|g(t)| = 100 \sqrt{0.36(1) + 0.6(\cos 400\text{KHz}\pi t) + 0.25(1)}$$

$$|g(t)| = 100 \sqrt{0.61 + 0.6 \cos 400\text{KHz}\pi t}$$

Para la señal modulada se utiliza la ecuación (2-44) con el signo superior para USSB:

$$s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t)$$

$$s(t) = 100[(0.6 \cos 600\text{KHz}\pi t + 0.5 \cos 1000\text{KHz}\pi t) \cos(\omega_c t) - (0.6 \sin 600\text{KHz}\pi t + 0.5 \sin 1000\text{KHz}\pi t) \sin(\omega_c t)]$$

aplicando identidades trigonométricas que ya se han usado anteriormente, se obtiene:

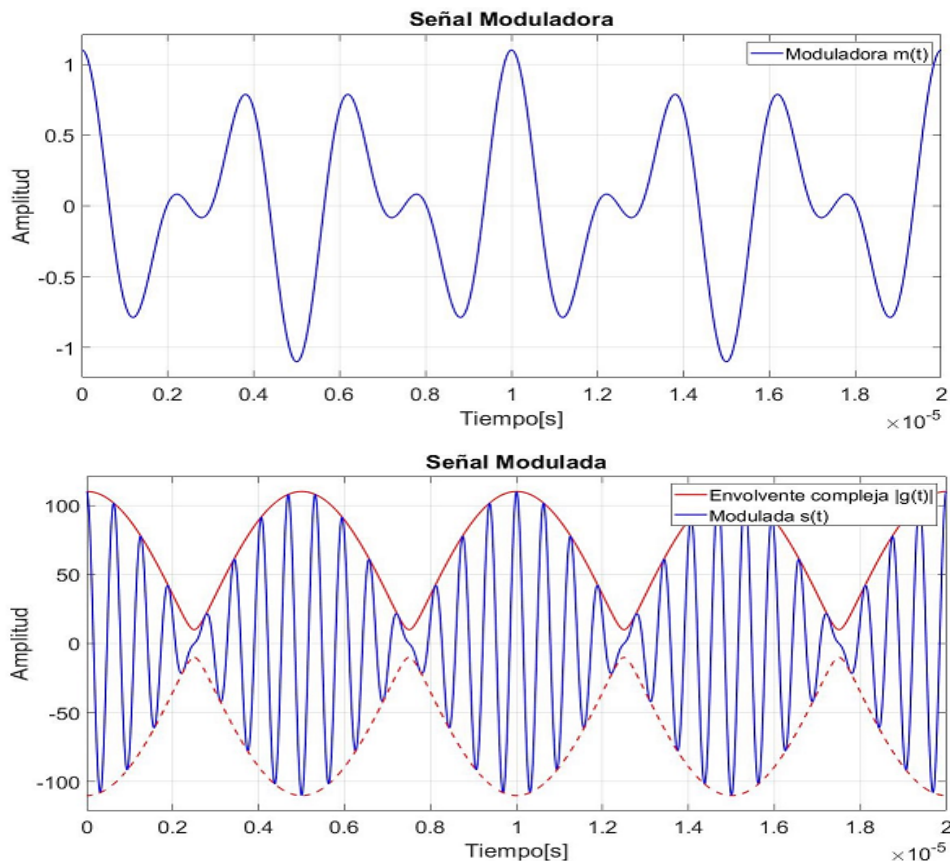
$$s(t) = 100\{[0.3 \cos(600\text{KHz}\pi - \omega_c)t + 0.3 \cos(600\text{KHz}\pi + \omega_c)t + 0.25 \cos(1000\text{KHz}\pi - \omega_c)t + 0.25 \cos(1000\text{KHz}\pi + \omega_c)t] - [0.3 \cos(600\text{KHz}\pi - \omega_c)t - 0.3 \cos(600\text{KHz}\pi + \omega_c)t + 0.25 \cos(1000\text{KHz}\pi - \omega_c)t - 0.25 \cos(1000\text{KHz}\pi + \omega_c)t]\}$$

$$s(t) = 100[0.6 \cos(600\text{KHz}\pi + \omega_c)t + 0.5 \cos(1000\text{KHz}\pi + \omega_c)t]$$

donde  $\omega_c = 2\pi(1200\text{KHz}) = 2400\text{KHz}\pi$

$$s(t) = 60 \cos 3000\text{KHz}\pi t + 50 \cos 3400\text{KHz}\pi t$$

En el tiempo esta composición de tonos junto a este tipo de modulación es de cierto modo complicadas de graficar, sin embargo, con la ayuda del software Matlab se logra obtener estos resultados. La Figura 2.19 muestra las formas de ondas de la señal moduladora y señal modulada. Se aprecia que para USB solo han quedado las frecuencias superiores a  $f_c$ , es decir que los impulsos se han desplazado a las frecuencias de  $\omega_1 + \omega_c = 3000\text{KHz}\pi$  ( $f_1 + f_c = 1500\text{KHz}$ ) y  $\omega_2 + \omega_c = 3400\text{KHz}\pi$  ( $f_1 + f_c = 1700\text{KHz}$ ). Esto es más notorio en su análisis espectral



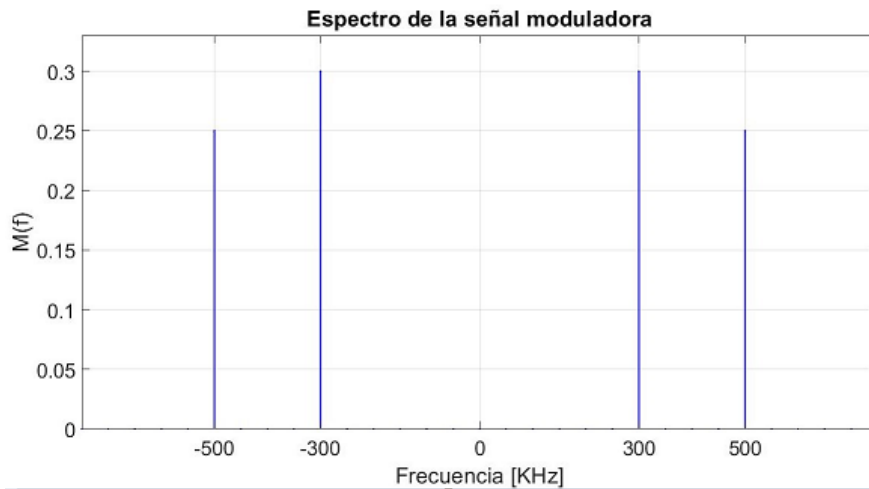
**Figura 2.19:** Forma de onda de la señal moduladora, señal de la envolvente compleja y señal USB resultante del ejemplo 2.3.

Para el análisis espectral de la envolvente compleja se usa la ecuación (2-47), pero primero es necesario encontrar el espectro de la señal moduladora:

$$M(f) = \mathcal{F}\{m(t)\} = \mathcal{F}\{0.6 \cos 600\text{KHz}\pi t + 0.5 \cos 1000\text{KHz}\pi t\}$$

$$M(f) = 0.3[\delta(f + 300\text{KHz}) + \delta(f - 500\text{KHz})]$$

$$+ 0.25[\delta(f + 300\text{KHz}) + \delta(f - 500\text{KHz})]$$



**Figura 2.20:** Forma de espectro de la señal moduladora del ejemplo 2.3.

La ecuación (2-50) indica que existe el espectro únicamente para las frecuencias  $f > 0$ , por lo tanto, las componentes espectrales de la señal moduladora que se conservan son  $f - 300\text{KHz}$  y  $f - 500\text{KHz}$ :

$$G(f) = \begin{cases} 2A_c M(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

$$G(f) = 200 \begin{cases} 0.3\delta(f - 300\text{KHz}) + 0.25\delta(f - 500\text{KHz}), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

$$G(f) = \begin{cases} 60\delta(f - 300\text{KHz}) + 50\delta(f - 500\text{KHz}), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

de igual forma la ecuación (2-53), para el espectro de la señal modulada solo se conservan las frecuencias que cumplan,  $f > f_c$  y  $f < -f_c$

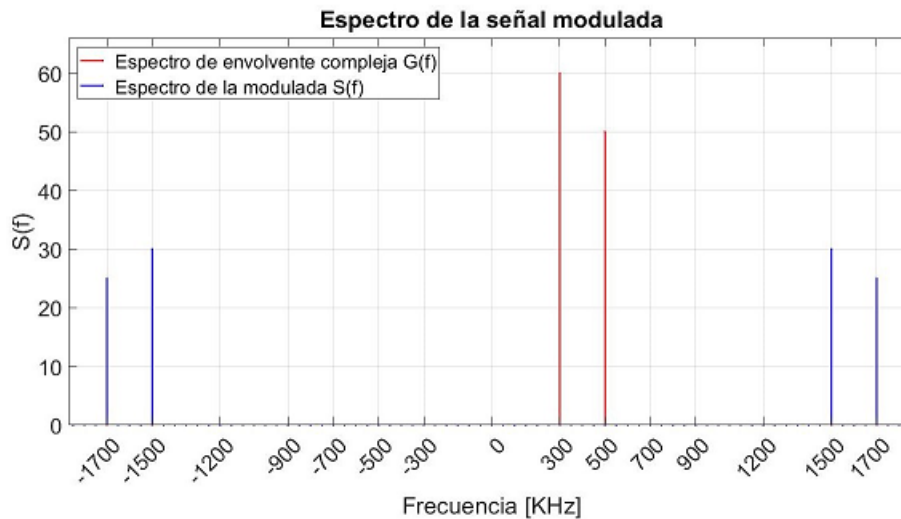
$$S(f) = A_c \begin{cases} M(f - f_c), & f > f_c \\ 0, & f < f_c \end{cases} + A_c \begin{cases} 0, & f > -f_c \\ M(f + f_c), & f < -f_c \end{cases}$$

$$S(f) = 100 \begin{cases} 0.3\delta(f - 1500\text{KHz}) + 0.25\delta(f - 1700\text{KHz}), & f > f_c \\ 0, & f < f_c \end{cases}$$

$$+ 100 \begin{cases} 0, & f > -f_c \\ 0.3\delta(f + 1500\text{KHz}) + 0.25\delta(f + 1700\text{KHz}), & f < -f_c \end{cases}$$

$$S(f) = \begin{cases} 30\delta(f - 1500\text{KHz}) + 25\delta(f - 1700\text{KHz}), & f > f_c \\ 0, & f < f_c \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 0, & f > -f_c \\ 30\delta(f + 1500\text{KHz}) + 25\delta(f + 1700\text{KHz}), & f < -f_c \end{cases}$$



**Figura 2.21:** Espectro de la envoltura compleja, y señal USSB resultante del ejemplo 2.3.

## 2.4 Modulación de banda lateral vestigial (Vestigial Sideband – VSB)

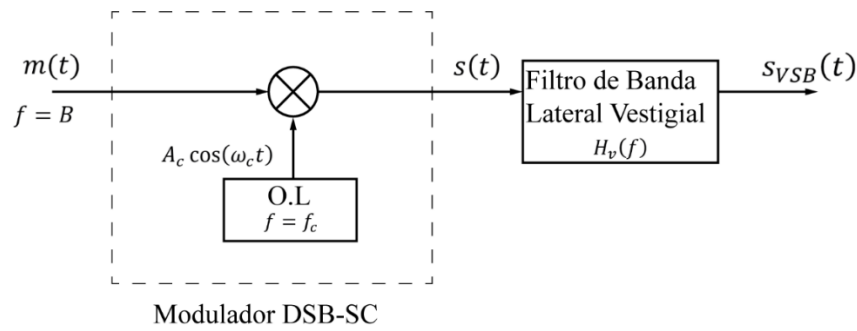
La Modulación de Banda Lateral Vestigial (VSB, por sus siglas en inglés) es una técnica de modulación que se utiliza para transmitir señales de televisión en formato analógico. Esta técnica fue desarrollada para permitir la transmisión de señales de televisión de alta calidad, mientras se utiliza un ancho de banda de transmisión limitado.

En la modulación de banda lateral vestigial, se utiliza una señal DSB-SC para transmitir la información de video, y se suprime una de las bandas laterales y la portadora, dejando solo una banda lateral vestigial a través de un filtro especial como se muestra en la Figura 2.22. Esta modulación permite reducir el ancho de banda de la señal modulada, mientras se mantiene una calidad de imagen y sonido aceptable.

En la recepción de la señal VSB, se utiliza un filtro especial que permite recuperar la información suprimida y reconstruir la señal original de video. Debido a la capacidad de VSB para reducir el ancho de banda necesario para la transmisión de señales de televisión analógica, se convirtió en la técnica de modulación más comúnmente utilizada para la transmisión de señales de televisión

Es un punto intermedio entre la doble banda lateral y banda lateral sencilla. El principio es a partir de una DSB-SC eliminando una de sus bandas laterales, pero para aplicaciones como video no se puede aplicar un filtro debido a su espectro.

Entonces el filtro a utilizar es un filtro de banda lateral vestigial el cual tiene una respuesta asimétrica.



**Figura 2.22:** Diagrama de bloques de generación de una señal VSB

La señal VSB resultante es:

$$s_{VSB}(t) = s(t) * h_v(t) \quad (2-56)$$

Donde  $h_v(f)$ , es la respuesta al impulso del filtro de VSB, y su forma espectral viene dada por:

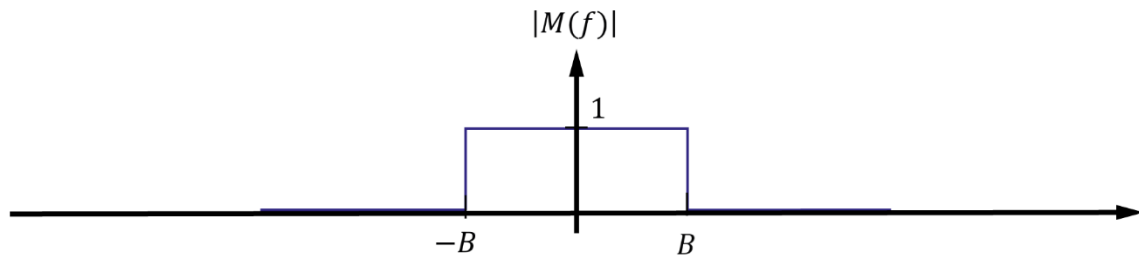
$$S_{VSB}(f) = S(f)H_v(f) \quad (2-57)$$

Donde  $S(f)$  es el espectro de la señal DSB, es decir toma la forma de la ecuación (2-23), entonces la ecuación (2-57) se convierte en:

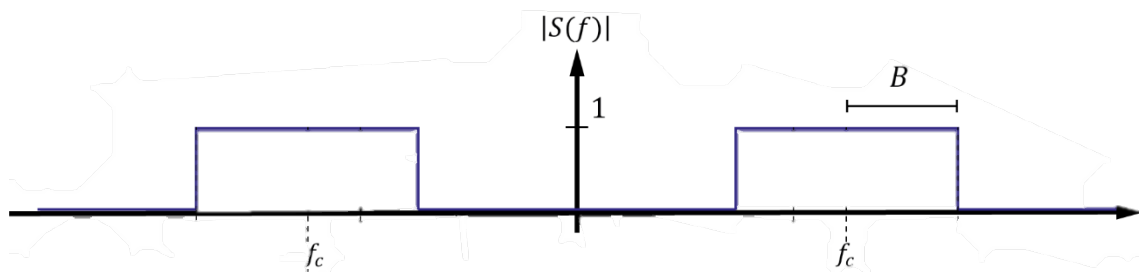
$$S_{VSB}(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]H_v(f)$$

$$S_{VSB}(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c)H_v(f) + M(f + f_c)H_v(f)] \quad (2-58)$$

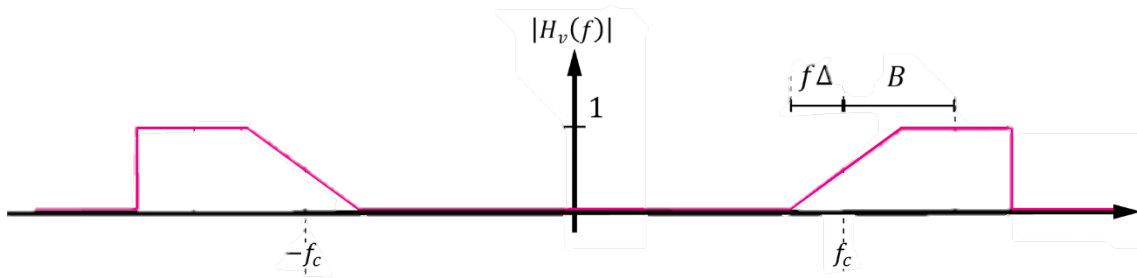
Este proceso de modulación se puede analizar de forma espectral en la Figura 2.23



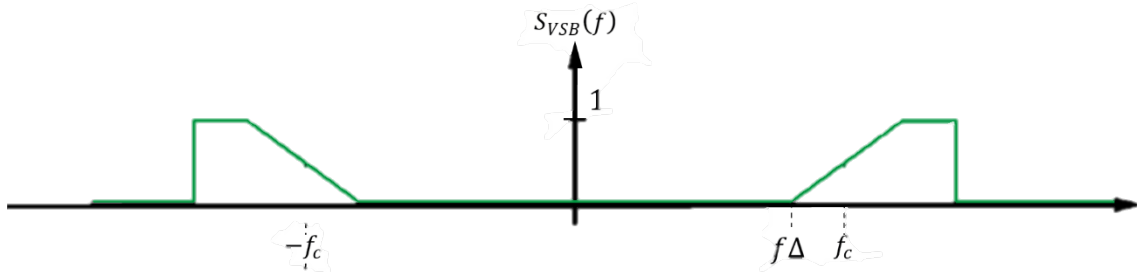
(a) Señal Moduladora



(b) Señal DSB-SC



(c) Respuesta de Filtro de Banda Vestigial



(d) Señal resultante VSB

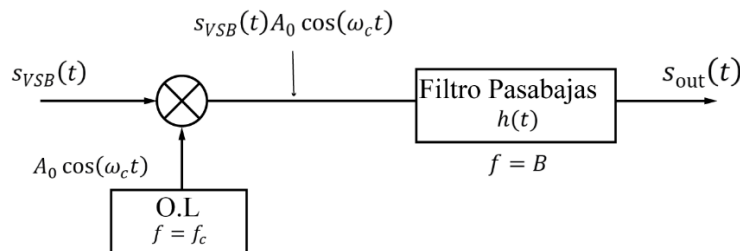
**Figura 2.23:** Proceso espectral de generación de señal SVB

En la demodulación se puede usar un detector de producto, o en caso de que la señal  $s(t)$  posea una portadora considerable se puede optar por un detector de envolvente Figura 2.24. Sin embargo, para una correcta demodulación se debe cumplir la condición de:

$$H_v(f - f_c) + H_v(f + f_c) = C \rightarrow \text{Constante } |f| \leq B \quad (2-59)$$

De cumplirse esta condición se puede aplicar un detector de producto tal que,

$$s_{out}(t) = s_{VSB}(t)A_0 \cos(\omega_c t) * h(t) \quad (2-60)$$



**Figura 2.24:** Diagrama de bloques de la demodulación VSB por detector de producto

Para facilitar el análisis la ecuación (2-60) se lo realiza de forma espectral (dominio de frecuencia).

$$S_{out}(f) = A_0 \left[ S_{VSB}(F) * \frac{\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)}{2} \right] H(f) \quad (2-61)$$

$$S_{VSB}(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c)H_v(f) + M(f + f_c)H_v(f)]$$

$$S_{out}(f) = A_0 \left[ \frac{A_c}{2} [M(f - f_c)H_v(f) + M(f + f_c)H_v(f)] * \frac{\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)}{2} \right] H(f)$$



Se puede aplicar la propiedad de la convolución,  $x(f) * \delta(f - f_c) = x(f - f_c)$

$$S_{out}(f) = \frac{A_0 A_c}{4} [M(f - f_c)H_v(f) * \delta(f - f_c) + M(f + f_c)H_v(f) * \delta(f - f_c) + M(f - f_c)H_v(f) * \delta(f + f_c) + M(f + f_c)H_v(f) * \delta(f + f_c)]H(f)$$

$$S_{out}(f) = \frac{A_0 A_c}{4} [M(f - f_c - f_c)H_v(f - f_c) + M(f - f_c + f_c)H_v(f - f_c) + M(f + f_c - f_c)H_v(f + f_c) + M(f + f_c + f_c)H_v(f + f_c)]H(f)$$

$$S_{out}(f) = \frac{A_0 A_c}{4} [M(f - 2f_c)H_v(f - f_c) + M(f)H_v(f - f_c) + M(f)H_v(f + f_c) + M(f + 2f_c)H_v(f + f_c)]H(f)$$

donde la respuesta del filtro pasabajas tiene una forma “idealizada” tal que,

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| < B \\ 0, & \text{para otro caso} \end{cases} \quad (2-62)$$

por lo que las componentes de  $-2f_c$  y  $2f_c$  las elimina el filtro.

$$S_{out}(f) = \frac{A_0 A_c}{4} [M(f)H_v(f - f_c) + M(f)H_v(f + f_c)]$$

$$S_{out}(f) = \frac{A_0 A_c}{4} M(f)[H_v(f - f_c) + H_v(f + f_c)]$$

$$S_{out}(f) = \frac{A_0 A_c}{4} M(f)[c]$$

$$S_{out}(f) = \frac{c A_0 A_c}{4} M(f)$$

$$S_{out}(f) = kM(f) \quad (2-63)$$

$$s_{out}(t) = km(t) \quad (2-64)$$

donde  $k = \frac{c A_0 A_c}{4}$ , lo cual demuestra que la salida del detector de producto no presenta distorsión cuando se satisface la ecuación.

**CAPITULO 3**  
**MODULACION ANGULAR**

### 3.1 Representación de señales PM y FM

La modulación en fase PM y la modulación en frecuencia FM son modulaciones angulares. La envolvente compleja se representa mediante la ecuación (3-1).

$$g(t) = A_c e^{j\theta t} \quad (3-1)$$

La envolvente compleja se expresa como  $R(\mathbf{t}) = |\mathbf{g}(\mathbf{t})| = A_c$ , siendo una constante y la fase  $\theta(t)$  es una función lineal de la señal moduladora, sin embargo, la envolvente compleja es una función no lineal de la modulación.

Para PM la fase es directamente proporcional a la señal de modulación como se representa en la ecuación (3-2).

$$\theta(t) = D_p m(t) \quad (3-2)$$

Donde  $D_p$  es la constante de sensibilidad de fase del modulador, que tiene unidades de radianes por voltios  $\left[\frac{rad}{v}\right]$  y se asume que  $m(t)$  es una forma de onda de voltaje.

Para FM la fase es proporcional a la integral de la moduladora, como se indica en la ecuación (3-3).

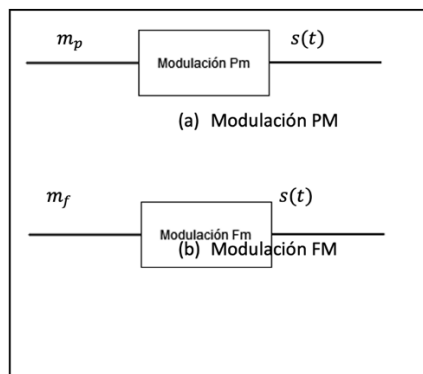
$$\theta(t) = D_f \int m(t) dt \quad (3-3)$$

Donde  $D_f$  es la constante de desviación de frecuencia, que tiene unidades de radianes/volt-segundo  $\left[\frac{rad}{v*s}\right]$ . Se utiliza la ecuación (3-1) para encontrar la señal modulada por ángulo, entonces se obtiene la forma canónica como se muestra en la ecuación (3-6).

$$s(t) = A_c \cos(w_c t + \theta(t)) \quad (3-3)$$

$$s(t) = A_c \cos(w_c t + D_p m_p(t)) , para PM \quad (3-4)$$

$$s(t) = A_c \cos(w_c t + D_f \int m_f(t) dt) , para FM \quad (3-5)$$



**Figura 3.1:** Modulación angular

En la Figura 3.1 se muestra el diagrama de bloques de la modulación de FM y PM en función a sus moduladoras de forma directa. Si se comparan las dos últimas ecuaciones (3-2) y (3-3), se tiene una señal PM modulada por  $m_p(t)$  y también hay FM en la señal, correspondiente a una forma de onda de modulación diferente, se obtiene a partir de:

$$\theta_f(t) = \theta_p(t)$$

$$D_f \int m_f(t) dt = D_p m_p(t)$$

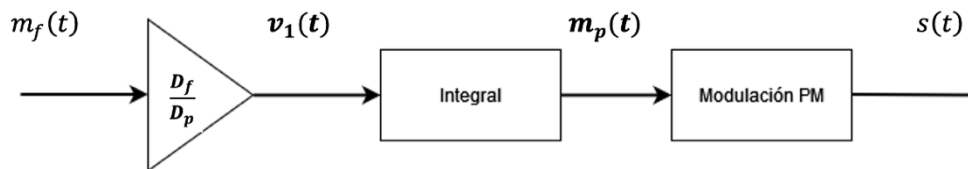
Al despejar  $m_p$  en función de  $m_f$ , da como resultado la siguiente ecuación:

- $m_p(t) = \frac{D_f}{D_p} \int m_f(t) dt$  **(3- 6)**

Después  $m_f$  en función de  $m_p$ , da como resultado la siguiente ecuación:

- $m_f(t) = \frac{D_p}{D_f} \frac{d}{dt} m_p(t)$  **(3- 7)**

Se analizan los diagramas de cada relación:



**Figura 3.2:** Generación de FM utilizando modulador de fase

En la Figura 3.2 se muestra a la salida una modulación FM con un modulador PM, agregando una ganancia  $\frac{D_f}{D_p}$  y un integrador que, al ser modulada por PM, se obtiene una modulación FM.

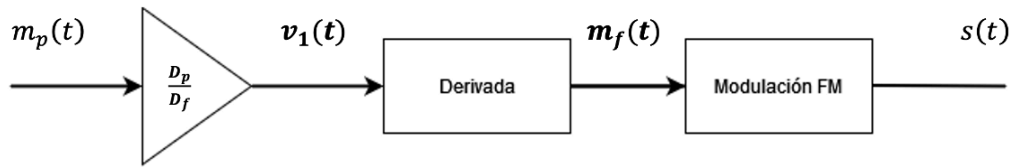
$$v_1(t) = \frac{D_f}{D_p} m_p(t)$$

$$m_p(t) = \frac{D_p}{D_f} \int m_p(t) dt, \text{ es la nueva fase } m_p(t)$$

$$\theta_p(t) = D_p m_p(t)$$

$$\theta_p(t) = D_p \frac{D_f}{D_p} \int m_p(t) dt$$

$$s(t) = A_c \cos \left( \omega_c t + D_f \int m_p(t) dt \right),$$



**Figura 3.3:** Generación de PM utilizando un modulador de frecuencia

En la Figura 3.3, se muestra a la salida una modulación PM con un modulador FM, agregando una ganancia  $\frac{D_p}{D_f}$  y un integrador, en donde se obtiene una modulación PM.

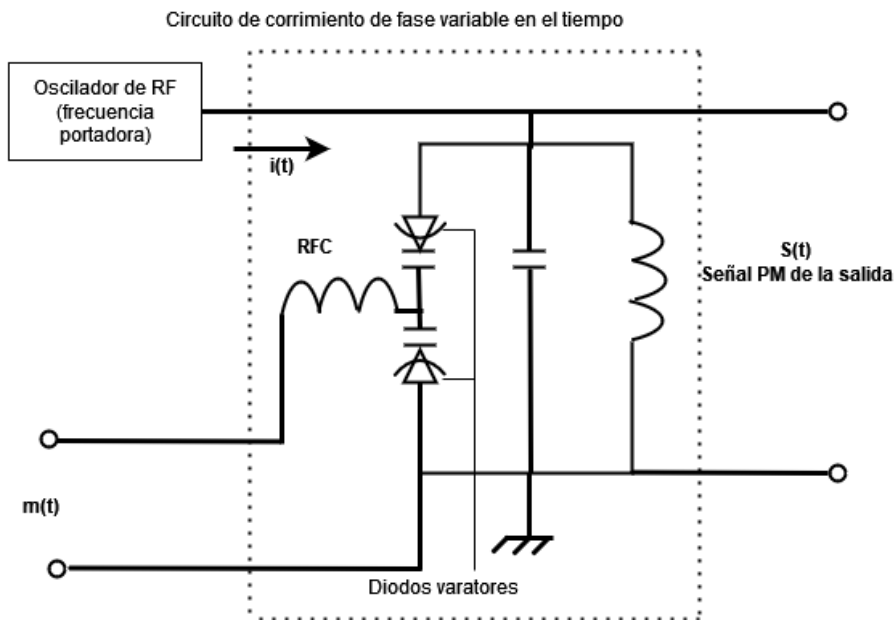
$$v_1(t) = \frac{D_p}{D_f} m_f(t)$$

$m_f(t) = \frac{D_p}{D_f} \frac{d}{dt} m_f(t)$  , es la nueva  $m_f(t)$

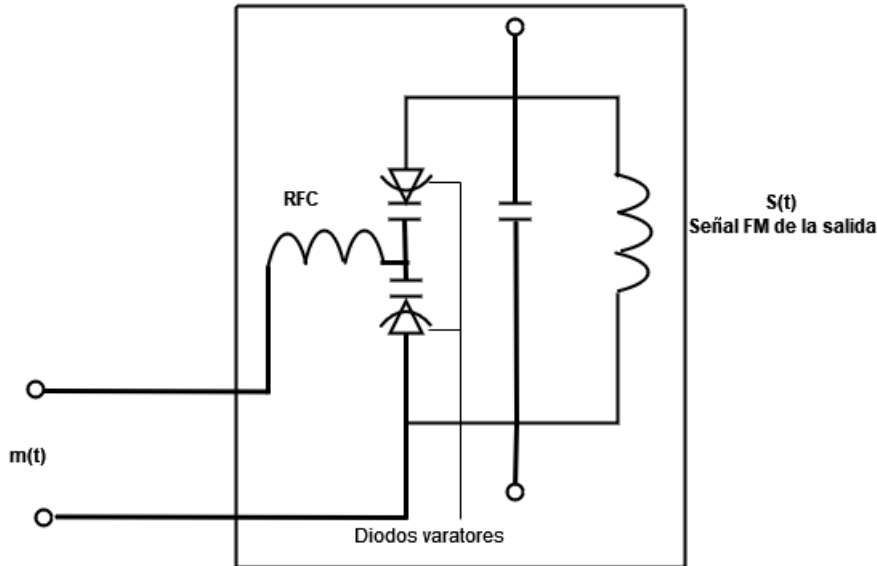
$$\theta_f(t) = D_f \int m_f(t) dt$$

$$\theta_f(t) = D_f \frac{D_p}{D_f} \int \frac{d}{dt} m_f(t) dt$$

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + D_f m_f(t))$$



**Figura 3.4:** Un circuito modulador de fase



**Figura 3.5:** Un circuito modulador de frecuencia

La señal moduladora para una modulación angular, provoca un desfase o variación de fase en la señal portadora, esto se genera en función de un circuito tanque como se muestra en la Figura 3.4, se tiene con una distribución con diodos varactores que es la combinación de un diodo y capacitor para generar esta condición de retardo, si se analiza las componentes de funcionamiento esto en conjunto con un capacitor y una inductancia en paralelo, son los que van a generar o determinar este retardo o variación de fase y si se conecta en paralelo con el oscilador la salida correspondiente será de PM, porque todo el circuito tanque es el que va provocar esta variación en fase adelanto o retardo de fase en función de los valores de  $m(t)$ , esto es general lo que se provoca y en FM como en se muestra en la Figura 3.5 es en esencia el mismo pero en este caso lo que provoca la frecuencia propiamente dicha es  $m(t)$ , en este caso se consideran los valores adecuados de la bobina y capacitores se puede generar directamente en función de  $m(t)$  los incrementos o decrementos de frecuencia en torno a una frecuencia establecida, entonces es la misma  $m(t)$  que provoca la variación de frecuencia.

### 3.2 Frecuencia instantánea

Si una señal pasa banda se representa mediante:

$$s(t) = R(t) \cos(\psi(t)) \quad (3-8)$$

Se utiliza la ecuación (3-4) para obtener:

$$\psi(t) = w_c t + \theta(t) \quad (3-9)$$

La frecuencia instantánea angular se halla de la derivada del argumento de la portadora como se representa de la siguiente forma:

$$w_i(t) = \frac{d}{dt} \psi(t)$$

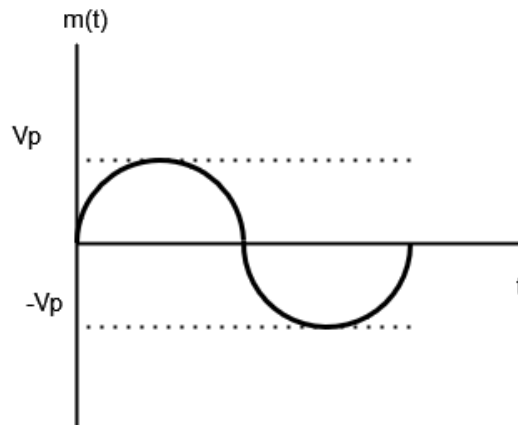
$$2\pi f_i(t) = \frac{d}{dt} (w_c t + \theta(t))$$

$$2\pi f_i(t) = \frac{d}{dt} \omega_c t + \frac{d}{dt} \theta(t)$$

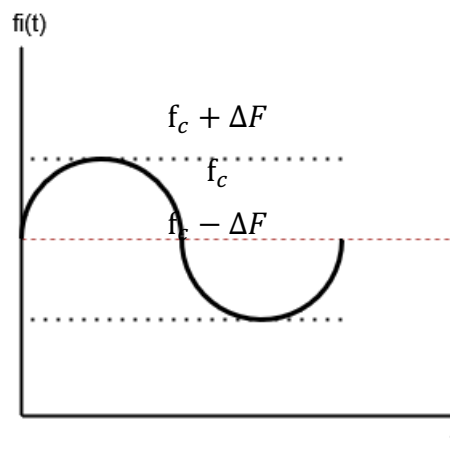
$$2\pi f_i(t) = \frac{d}{dt} 2\pi f_c t + \frac{d}{dt} \theta(t)$$

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t) \quad (3-10)$$

Si se analiza la ecuación (3-11) se observa que trabaja en un instante de tiempo, alrededor de la frecuencia portadora como se muestra en la Figura 3.7.



**Figura 3.6:** Gráfica de la modulación



**Figura 3.7:** Gráfica de la frecuencia instantánea

La variación de frecuencia es la forma en como oscila en la función, para PM y FM se define de la siguiente forma:

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \max(\theta(t)) \quad (3-11)$$

### 3.3 Variación de fase ( $\Delta F_p$ )

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \max(D_p m(t))$$

- La variación de fase depende de la derivada y no solo de la moduladora.

$$\Delta F = \frac{D_p}{2\pi} \frac{d}{dt} \max(m(t)) , \quad \text{para PM} \quad (3-12)$$

### 3.4 Variación de frecuencia ( $\Delta F_p$ )

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \max\left(D_f \int m(t) dt\right)$$

$$\Delta F = \frac{D_f}{2\pi} \max\left(\frac{d}{dt} \int m(t) dt\right)$$

$$\Delta F = \frac{D_f}{2\pi} \max(m(t))$$

- Para  $V_p = \max(m(t))$
- La variación de fase depende solo de la moduladora:

$$\Delta F = \frac{D_f}{2\pi} V_p \quad (3-13)$$

### 3.5 Desviación pico de frecuencia ( $\Delta\theta_p$ ) para PM

$$\Delta\theta = \max(\theta(t))$$

$$\Delta\theta = \max(D_p m(t))$$

- Para  $V_p = \max(m(t))$
- La desviación pico de frecuencia para PM depende solo de la moduladora:

$$\Delta\theta = D_p V_p \quad (3-14)$$

### 3.6 Desviación pico de frecuencia ( $\Delta\theta_f$ ) para FM

$$\Delta\theta = \max(\theta(t))$$

$$\Delta\theta = \max\left(D_f \int m(t) dt\right) \quad (3-15)$$

La desviación pico de frecuencia para FM depende de la integral y no solo de la moduladora.

### 3.7 El índice de modulación

La señal modulada no es lineal con respecto a la señal moduladora, el nivel de amplitud de la componente de la portadora depende del índice de modulación ( $\beta$ ). El índice de modulación en fase se obtiene a partir de:

$$\beta_p = \Delta\theta \quad (3-16)$$

Al remplazar la ecuación (3-15):

$$\beta_p = D_p V_p \quad (3-17)$$



El índice de modulación en frecuencia se obtiene a partir de:

$$\beta_f = \frac{\Delta F}{B} \quad (3-18)$$

- Donde B es el ancho de banda de la señal moduladora.
- $\Delta F$  es la desviación de frecuencia pico.

Se sustituye la ecuación (3-14):

$$\beta_f = \frac{D_f V_p}{2\pi B} \quad (3-20)$$

En el caso de la modulación angular poseen la misma desviación de frecuencia pico, siendo  $\beta_p = \beta_f$ . Este concepto se utilizará más adelante para graficar los espectros debido a que la información se encuentra en la fase de la señal modulada y dependerá del índice de modulación para una mayor muestra de espectros.

### 3.8 Espectro de una señal modulación angular

En la ecuación (3-1) el espectro que se ha analizado en las diferentes modulaciones AM, DSB-SC y SSB, depende de la señal moduladora. La modulación angular se encuentra en la fase por lo que no depende de la señal moduladora, ya que  $g(t)$  es una función no lineal de  $m(t)$  por tanto no se puede obtener una fórmula general que relacione a  $G(f)$  con  $M(f)$ .

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[A_c e^{j\theta(t)}]$$

$$M(f) = \mathcal{F}[m(t)]$$

### 3.9 Modulación por PM

Se utiliza la ecuación (3-2):

$$\theta(t) = D_p m(t)$$

$$\theta(t) = \underline{D_p V_p} \text{ sen}(w_m t)$$

Se utiliza el índice de modulación como se muestra en la ecuación (3-18).

$$\theta(t) = \underline{\beta_p} \text{ sen}(w_m t)$$

Por último, al sustituir en la ecuación (3-4):

$$s(t) = A_c \cos(w_c t + \theta(t))$$

$$s(t) = A_c \cos(w_c t + \beta_p \text{ sen}(w_m t))$$

### 3.10 Modulación por FM

Se utiliza la ecuación (3-3):

$$\theta(t) = D_f \int m(t) dt$$

$$\theta(t) = D_f \int V_p \text{ sen}(w_m t) dt$$

$$\theta(t) = D_f V_p \int \text{ sen}(w_m t) dt$$

$$\theta(t) = D_f V_p \left( -\frac{\cos(w_m t)}{w_m} \right)$$

$$\theta(t) = D_f V_p - \frac{\cos(w_m t)}{2\pi f_m}$$

$$\theta(t) = -\frac{\mathbf{D}_f \mathbf{V}_p}{\mathbf{2\pi f}_m} \cos(w_m t)$$

Se utiliza el índice de modulación, como se muestra en la ecuación (3-19).

$$\theta(t) = -\underline{\beta}_f \cos(w_m t)$$

Por último, al sustituir en la ecuación (3-4):

$$s(t) = A_c \cos(w_c t + \theta(t))$$

$$s(t) = A_c \cos\left(w_c t + \left(-\underline{\beta}_f \cos(w_m t)\right)\right)$$

$$s(t) = A_c \cos\left(w_c t - \underline{\beta}_f \cos(w_m t)\right)$$

Se realiza un solo análisis para el espectro dado que  $\beta_f$  es igual a  $\beta_p$  y se toma como ejemplo  $\theta(t)$  de PM para sustituir en la ecuación (3-1)

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)}$$

$$g(t) = A_c e^{j\beta_p \text{sen}(w_m t)}$$

Se aplica la transformada de Fourier que es periódica en  $T_m = \frac{1}{f_m}$ .

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{-inw_m t} \quad (3-21)$$

En consecuencia,  $g(t)$  se puede representar mediante una serie de Fourier que sea válida todo el tiempo ( $-\infty < t < +\infty$ ).

$$C_n = \frac{A_c}{T_m} \int_{-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} e^{j\beta_p \text{sen}(w_m t)} e^{-inw_m t} dt \quad (3-22)$$

Se hace un cambio de variable en  $\theta$ , donde  $w_m$  es una constante.

$$\theta = w_m t$$

$$dt = \frac{d\theta}{w_m} \quad (3-23)$$

Por lo tanto, se establecen nuevos límites cuando  $t = \frac{T_m}{2}$  dando como resultado:

$$\theta = \pi \quad (3-24)$$

Al remplazar las ecuaciones (3-22) y (3-23) en la ecuación (3-21) se obtiene:

$$C_n = \frac{A_c}{T_m} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta_p \text{sen}(w_m t)} e^{-inw_m t} \frac{d\theta}{w_m}$$

$$C_n = \frac{A_c}{\frac{1}{f_m}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta_p \text{sen}(w_m t) - inw_m t} \frac{d\theta}{2\pi f_m}$$

$$C_n = A_c * f_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta_p \text{sen}(w_m t) - inw_m t} \frac{d\theta}{2\pi f_m}$$

$$C_n = A_c * \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta_p \text{sen}(w_m t) - inw_m t} d\theta$$

$$C_n = A_c \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta_p \text{sen}(w_m t) - inw_m t} d\theta \right]$$

Reduciéndola a una nueva integral conocida como la función de Bessel de primer tipo del n-ésimo  $J_n(\beta)$ ,

$$C_n = A_c J_n(\beta) \quad (3-25)$$

Al remplazar en la ecuación (3-21)

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_c J_n(\beta) e^{-inw_m t} \quad (3-26)$$

Esta función representa un espectro de línea en función de  $\delta(n)$ , aplicando la transformada de Fourier:

$$G(f) = A_c \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(\beta) \delta(f - nf_m) \quad (3-27)$$

y la representación de la modulación angular en función del espectro:

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(\beta) [(f - f_c - nf_m) + (f + f_c - nf_m)]$$

En la función de Bessel  $J_n(\beta)$  se representan valores tabulados como se muestra en la tabla 3-1 que son funciones especiales con múltiples aplicaciones en ecuaciones diferenciales, matemática aplicada y física matemática.

### 3.11 Ancho de banda

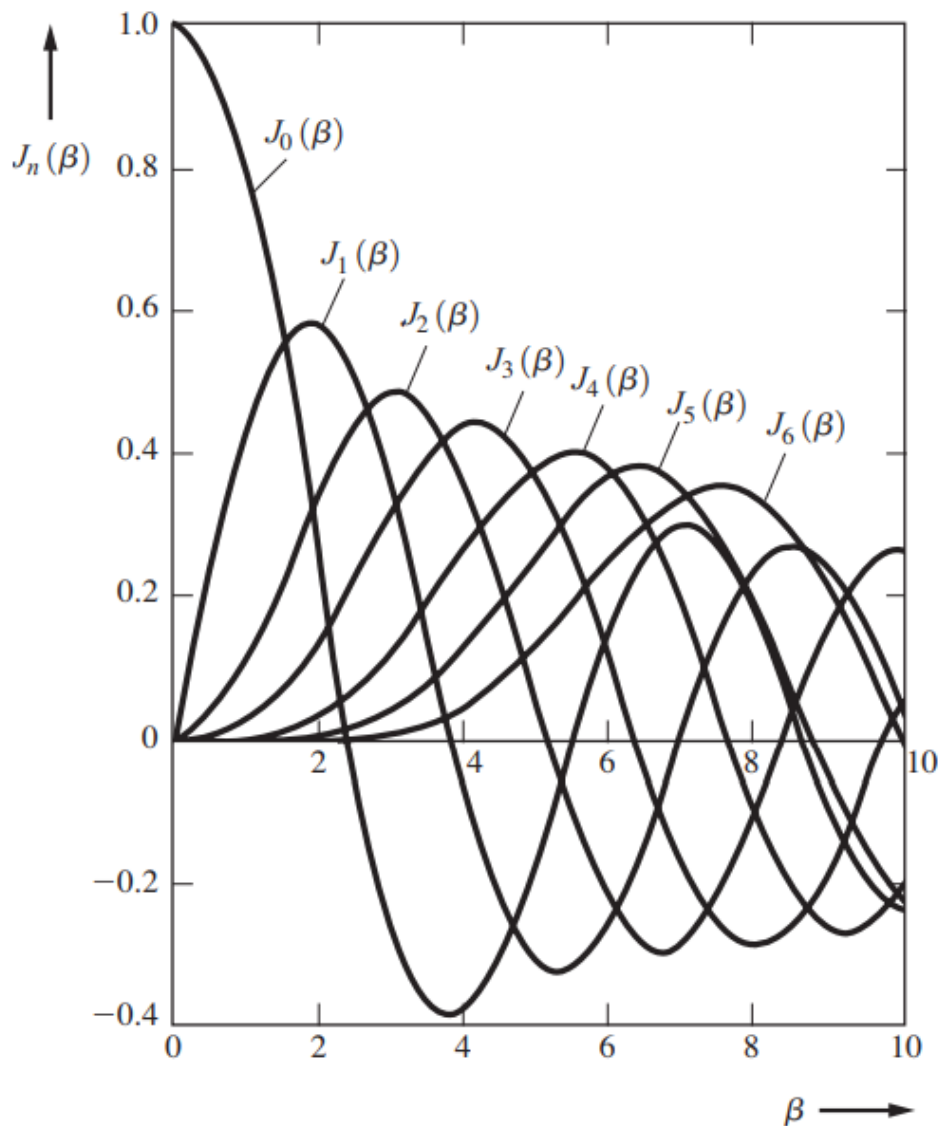
En las modulaciones angulares FM y PM, dependen fundamentalmente de su índice de modulación, ya que a partir de este se puede obtener el ancho de banda mediante la ecuación de Carson donde el 98% de la potencia total está contenido en el ancho de banda.

$$B_T = 2(\beta + 1)B \quad (3-28)$$

Donde B es el ancho de banda de la señal moduladora (para una señal senoidal será  $f_m$ ), y  $\beta$  es el índice de modulación en fase o el índice de modulación en frecuencia.

Tabla 3.1: TABLA DE BESSEL  $J_n(\beta)$

$n/\beta$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.9385 9	0.7652	0.2239	-0.2601	-0.3971	-0.1776	-0.1506	0.3001	0.1717	-0.09033	-0.245
1	0.2423	0.4401	0.5767	0.3391	0.06604	-0.3276	-0.2767	- 0.004683	-0.2346	0.2453	0.04347
2	0.03060	0.1149	0.3528	0.4861	0.3641	0.04657	-0.2429	-0.3014	0.1130	0.1448	0.2546
3	0.002564	0.01956	0.1289	0.3091	0.4302	0.3648	0.1148	-0.1676	-0.2911	-0.1809	0.05838
4		0.002477	0.03400	0.1320	0.2811	0.3912	0.3576	0.1578	-0.1054	-0.2655	-0.2196
5			0.007040	0.04303	0.1321	0.2611	0.3621	0.3479	0.1858	0.05504	-0.231
6			0.001202	0.01139	0.04909	0.1310	0.2458	0.3392	0.3376	0.2043	-0.01446



**Figura 3.8:** Funciones de Bessel para  $n=0$  a  $n=6$

Debido a que en general es muy difícil evaluar el espectro exacto de señales moduladas por ángulo, las fórmulas de aproximación a los espectros son de gran utilidad. Algunas relativamente simples se pueden obtener cuando la desviación pico de fase es pequeña y el índice de modulación es grande.

### 3.12 Modulación Angular de Banda Angosta

Dependiendo de cuánto sea el valor de  $\beta$  se puede diferenciar a las señales moduladas angularmente en:

- NBFM (modulación en frecuencia de banda angosta)
- WBFM (modulación en frecuencia de banda ancha).

Si el índice de modulación es mucho menor que 1, se asume que el módulo de la desviación de fase  $\theta(t)$  en general es igual a la amplitud que acompaña al seno o

coseno ( $\beta$ ) pero si oscila entre valores inferiores a 0.2, se expresa como una señal modulada de banda angosta.

$$\beta \ll 1 \quad (3-30)$$

$$|\theta(t)| = \beta < 0.2$$

La envolvente compleja de la modulación FM está definida en la ecuación (3-1), y  $\theta(t)$  oscila únicamente entre valores relativamente inferiores de 0.2 a -0.2, la exponencial puede ser sustituida por una expansión de Taylor, en donde, se puede utilizar únicamente los dos primeros términos.

La expansión de Taylor plantea que:

$$e^x = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Pero cuando el valor de “x” es relativamente pequeño se puede reemplazar con la expresión:

$$e^x = 1 + x$$

De forma que la envolvente compleja para una señal NBFM se convierte en:

$$g(t) = A_c(1 + x) \quad (3-11)$$

Donde “x” representa  $j\theta(t)$ , es decir:

$$g(t) = A_c(1 + j\theta(t)) \quad (3-32)$$

De forma que la envolvente compleja se convierte en una función lineal, esta aproximación es válida únicamente cuando se cumple la condición  $\beta < 0.2$  por otro lado, cuando  $\beta > 0.2$  no se puede realizar esta aproximación.

Ahora la envolvente compleja ( $g(t)$ ) va a tener una parte real y una parte imaginaria donde, la parte real es la componente en fase:

$$x(t) = A_c$$

Y la parte imaginaria será la componente en cuadratura:

$$y(t) = A_c\theta(t)$$

Mientras tanto,  $\theta(t)$  dependerá del tipo de modulación que se va a realizar:

$$\theta(t) = D_p * m(t) \quad \text{para PM}$$

$$\theta(t) = D_f \int m(t) \quad \text{para FM}$$

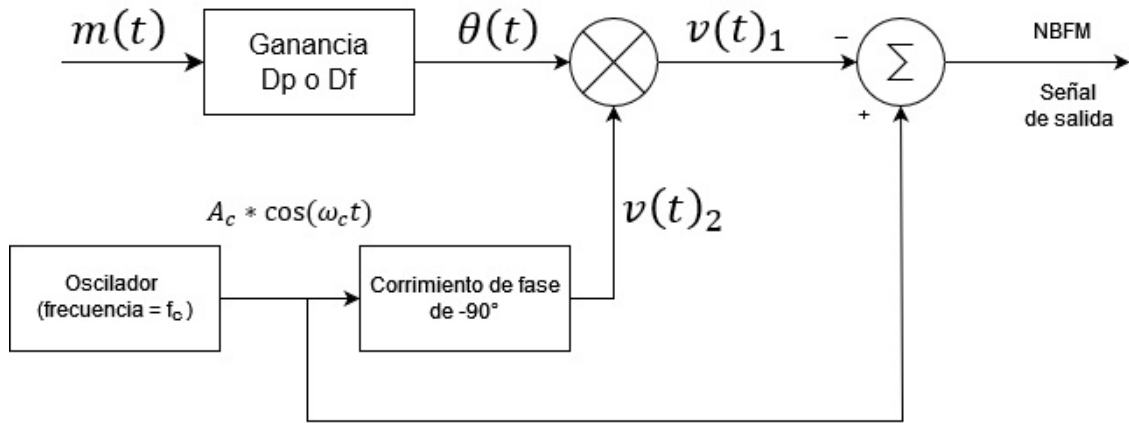
Como resultado la señal modulada  $s(t)$  puede ser expresada como:

$$s(t) = x(t)\cos(\omega_c t) - y(t)\text{sen}(\omega_c t) \quad (3-33)$$

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t) - A_c \theta(t) \text{sen}(\omega_c t) \quad (3-34)$$

Al analizar la ecuación (3-34) está compuesta por dos términos, uno que tiene únicamente la componente de la portadora y otro donde se encuentra la información correspondiente de la modulación, ya que  $\theta(t)$  depende de  $m(t)$ , y se representarán las bandas laterales.

Bajo estas condiciones, se puede asumir que la señal  $s(t)$  es similar a una modulación AM, con la diferencia que la portadora y la banda lateral se encuentran en desfase. El ancho de banda total obtenido en este caso va a ser igual a  $B_T = 2B$  al igual que la modulación AM.



**Figura 3.9:** Generación de NBFM utilizando un modulador simétrico.

De forma esquemática, la generación de una modulación NBFM se representa en la Figura 3.9 donde la señal de información definida por  $m(t)$  a la entrada del sistema realiza el procesamiento para generar la modulación correspondiente, es decir  $\theta(t)$ , ya sea para FM o PM.

Para PM se tiene solamente una amplificación con un valor de  $D_p$ , siendo:

$$\theta(t) = K * m(t), \quad \text{donde } k = \begin{cases} D_p \\ D_f \end{cases}$$

$$v(t)_1 = A_c * \text{sen}(\omega_c t)$$

$$v(t)_2 = v(t)_1 * \theta(t) \tag{3-35}$$

$$v(t)_2 = A_c * \theta(t) * \text{sen}(\omega_c t)$$

$$s(t) = A_c * \cos(\omega_c t) - v(t)_2 \tag{3-36}$$

$$s(t) = A_c * \cos(\omega_c t) - A_c * \theta(t) * \text{sen}(\omega_c t)$$

Se requiere un oscilador  $A_c * \cos(\omega_c t)$  a una frecuencia portadora  $f_c$ , para multiplicar por  $\theta(t)$  que debe estar en cuadratura, por lo que se aplica un retardo de  $-90^\circ$  a su salida, obteniendo así  $v(t)_1$ , el cual se multiplica por la componente  $\theta(t)$ , y da como resultado  $v(t)_2$ , a esto se suma la señal  $A_c * \cos(\omega_c t)$  para finalmente obtener el esquema que representa la expresión matemática  $s(t)$  como se muestra en la Figura 3.9.

En términos del dominio de la frecuencia se tiene el espectro de la señal  $s(t)$  o el espectro de  $g(t)$  desplazado. Por ejemplo, el espectro  $G(f)$  será:

$$G(f) = A_c * \delta(f) + j * A_c * \theta(f) \tag{3-37}$$

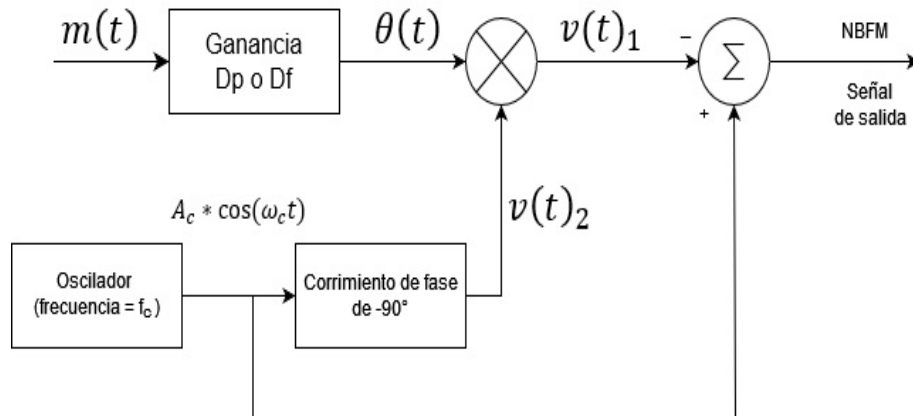
Para obtener  $S(f)$  a partir de  $G(f)$  se va a desplazar  $-f_c$  y  $f_c$  a cada término y dividirlo para dos, por tanto:

$$s(t) = A_c \left( \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + j(\theta(f - f_c) + \theta(f + f_c)) \right) \tag{3-38}$$

Para una modulación PM  $\theta(f)$  es:

$$\theta(f) = D_p * M(f)$$

Al reemplazar se obtiene directamente el espectro y la relación lineal entre  $S(f)$  y  $M(f)$ .



**Figura 3.10:** Generación de NBFM utilizando un modulador simétrico para FM.

La señal de banda estrecha puede generarse empleando un modulador simétrico (multiplicador), como se muestra en la Figura 3.10 para el caso de una frecuencia modulada de banda estrecha (NBFM, por sus siglas en inglés). Para obtener  $\theta(t)$  en FM, se tendrá:

$$\theta(t) = D_f \int m(t)$$

Donde la transformada de Fourier  $\theta(f)$  será igual a:

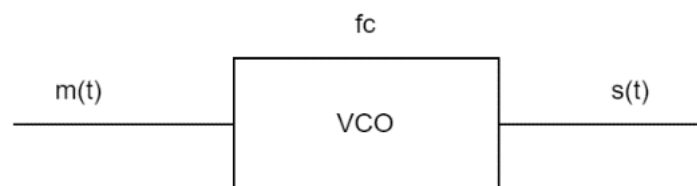
$$\theta(f) = \frac{D_f * M(f)}{j * 2 * \pi * f}$$

Se sustituye en la ecuación (3-9) de esta forma, ya se tiene la evaluación correspondiente del espectro.

### 3.13 Modulación en Frecuencia de Banda Ancha

Para generar la señal WBFM se puede tener varias posibilidades la más sencilla es mediante un oscilador controlado por voltaje (VCO) como se muestra en la Figura 3.11 donde se tiene una  $m(t)$  que ingresa a un VCO para obtener una señal  $s(t)$  en la cual la frecuencia central de VCO es la frecuencia portadora ( $f_c$ ) es decir, la señal correspondiente de entrada es la que controla la frecuencia del oscilador, este es un método directo.

Si se considera al índice de modulación  $\beta > 1$  se asume que es una señal FM de banda ancha en donde existe una relación no lineal entre la señal moduladora y la señal modulada.



**Figura 3.11:** Método directo



Otro procedimiento es el método indirecto a partir de una señal NBFM. Se conoce que una señal de banda angosta genera básicamente una componente de modulación en amplitud, pero cuando se aplica la modulación FM las componentes deben estar en la fase, en el ángulo o en la frecuencia.

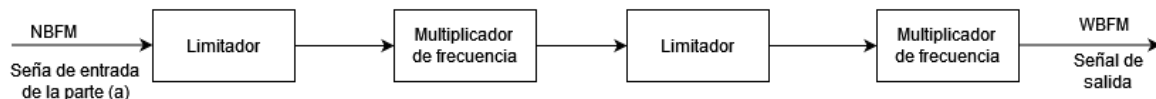
Si se analiza el módulo de la envolvente compleja NBFM a causa de la aproximación se genera una modulación en amplitud como se muestra en la ecuación (3-32) para tener un  $R(t)$  igual a:

$$x(t) = A_c$$

$$y(t) = A_c * \theta(t)$$

$$R(t) = \sqrt{A_c^2 + A_c^2 * \theta^2(t)}$$

Existe una inserción de modulación AM que es una modulación no deseada entonces es necesario eliminar esta modulación en amplitud. En este caso si se tiene una señal NBFM original lo primero que se aplica es un limitador para eliminar o para evitar las componentes de AM no deseadas, después se utiliza un multiplicador de frecuencias el cual primero traslada toda la banda al múltiplo correspondiente de la frecuencia central y luego expande o amplifica el ancho de banda correspondiente. Sin embargo, el multiplicador de frecuencias también genera una modulación en amplitud distorsionada por lo tanto a la salida se aplica un limitador; así continua el proceso como se puede ver en la Figura 3.13 hasta obtener la señal WBFM requerida.



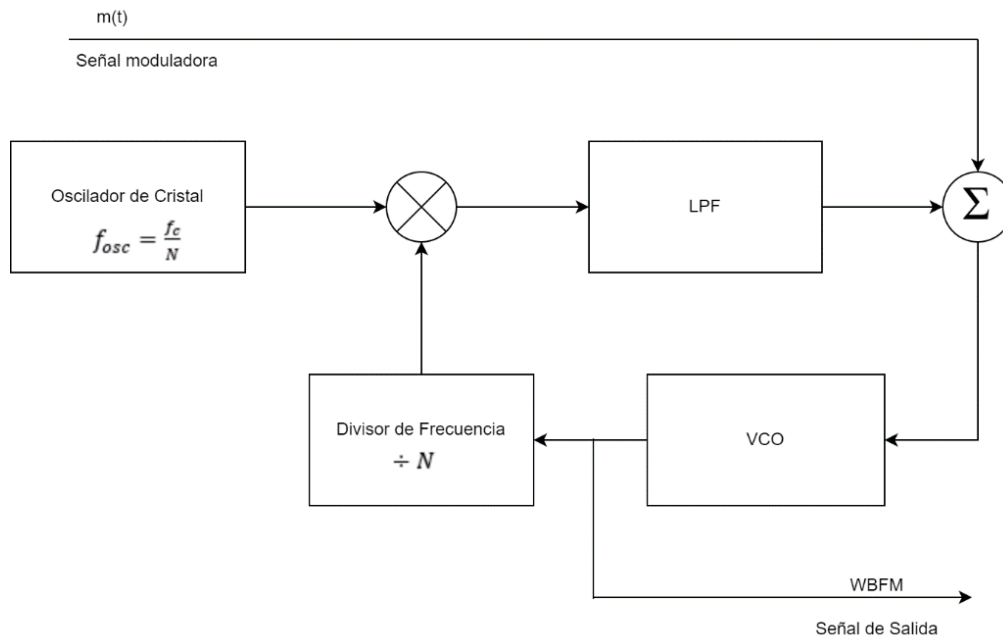
**Figura 3.12:** Método indirecto de generación de WBFM (Método de Armstrong)

Cuando el índice de modulación es demasiado grande las componentes espectrales se alejan de la frecuencia portadora por lo tanto el ancho de banda crece. En estos casos de componentes espectrales alejadas de la portadora provoca una gran desviación de frecuencia lo que genera cierta inestabilidad en la frecuencia de portadora del VCO. Esto implica que la frecuencia portadora o la frecuencia central de toda la banda de la señal modulada no este centrada en  $f_c$ , sino que se desplace ligeramente hacia uno de sus lados y esto puede ser porque el oscilador que se utiliza no es de gran eficiencia por este motivo se utiliza un PLL que se encarga de la generación de señales FM altamente estable.

La Figura 3.14 muestra que la señal  $m(t)$  va alimentar a una de las etapas del PLL. En esencia el PLL se va a enganchar con un oscilador de cristal que trabaja a la frecuencia  $f_c$  la cual no será la misma que la modulada, sino  $f_{osc} = \frac{f_c}{N}$  entonces el divisor de frecuencia provoca reducción en la banda para generar una estabilidad más grande respecto a la frecuencia portadora; se conoce que el PLL está conformado por un mezclador y un filtro pasa bajas que es el que va a dar la señal de control correspondiente al VCO sin embargo, la señal pasa bajas representa un nivel de DC, ya que la señal a la salida es una señal de banda angosta.

Las componentes de DC van a sumarse con la señal  $m(t)$  a partir de aquí se obtiene el nivel de control permitido para VCO, en función de esto se va a generar los valores de frecuencia a la salida de la señal WBFM por último para el enganche del PLL se utiliza el divisor de frecuencia  $\div N$  en el cual se provoca la reducción

de la banda y se aplica el enganche solamente en esa portadora, ya que mientras más angosta la señal FM correspondiente más alta la portadora y más fácil el enganche.



**Figura 3.13:** Método directo para la generación de WBFM

La densidad espectral de potencia (PSD) de una señal WBFM se puede aproximar mediante la función de densidad de probabilidad (PDF) de la señal moduladora, la frecuencia instantánea varía directamente con la señal moduladora de voltaje para el caso de FM. Si la señal moduladora permanece más tiempo en un valor de voltaje que en otro, la frecuencia instantánea se mantendrá al nivel correspondiente y el espectro de potencia tendrá un valor pico a dicha frecuencia.

En términos matemáticos:

La señal modulada en FM es:

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + D_f m(t))$$

Si se considera una señal WBFM  $\beta > 1$

$$\beta = \frac{D_f \max(m(t))}{2\pi B} > 1$$

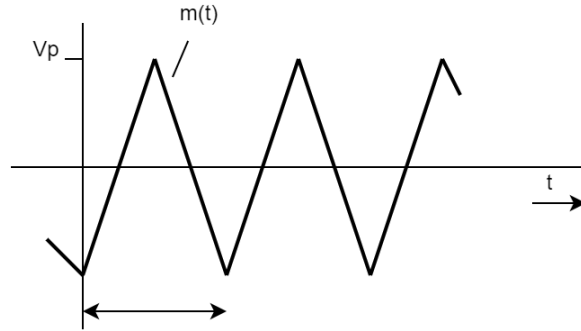
De acuerdo al teorema la función de densidad espectral de potencia va a depender de la función de densidad de probabilidad.

$$P(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f} \left[ f_m \left( \frac{2\pi}{D_f} (f - f_c) \right) + f_m \left( \frac{2\pi}{D_f} (-f - f_c) \right) \right] \quad (3-39)$$

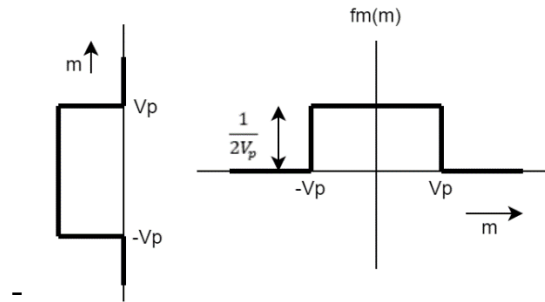
Donde  $f_m()$  es la función de densidad de probabilidad de la señal moduladora evaluada en cierto valor correspondiente.

**Ejemplo 1:** Espectro para WBFM con modulación triangular

Se evalúa el espectro para una señal WBFM con una señal moduladora triangular como se observa en la Figura 3.15:



**Figura 3.14:** Forma de Onda triangular moduladora  
 La PDF asociada para este tipo de modulación se muestra en la Figura 3.16:



**Figura 3.15:** PDF de la modulación triangular  
 Por lo tanto, la PDF es:

$$f_m(m) = \begin{cases} \frac{1}{2Vp}, & |m| < Vp \\ 0, & m \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3-40)$$

Donde  $Vp$  es el voltaje pico de la forma de onda triangular. Sustituyendo la ecuación (3-39) se obtiene:

$$P(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f} \left[ \begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2Vp}, \quad \left| \frac{2\pi}{D_f} (f - f_c) \right| < Vp \right\} \\ & 0, \quad f \text{ en cualquier otro caso} \\ & + \left\{ \frac{1}{2Vp}, \quad \left| \frac{2\pi}{D_f} (f + f_c) \right| < Vp \right\} \\ & 0, \quad f \text{ en cualquier otro caso} \end{aligned} \right]$$

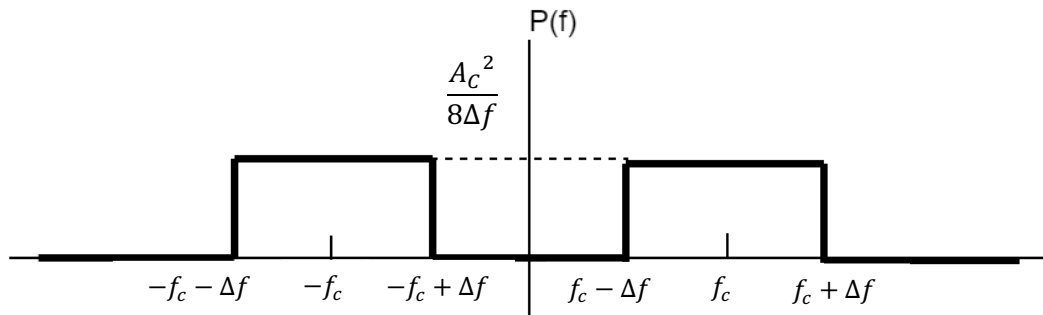
La PSD de la señal WBFM se convierte en:

$$P(f) = \begin{aligned} & \left\{ \frac{A_c^2}{8\Delta f}, \quad (f_c - \Delta F) < f < (f_c + \Delta F) \right\} \\ & 0, \quad \text{en cualquier otro caso} \\ & + \left\{ \frac{A_c^2}{8\Delta f}, \quad (-f_c - \Delta F) < f < (-f_c + \Delta F) \right\} \\ & 0, \quad \text{en cualquier otro caso} \end{aligned} \quad (3-41)$$

Donde la desviación pico de frecuencia es:

$$\Delta F = \frac{D_f V_p}{2\pi}$$

La PSD se puede observar en la Figura 3.17. Se conoce que este resultado es una aproximación de la PSD actual.



**Figura 3.16:** PSD de la señal WBFM con modulación triangular,  $\Delta F = \frac{D_f V_p}{2\pi}$

En este ejemplo, la modulación es periódica en  $T_m$ , el espectro actual es un espectro de línea con las funciones delta separadas cada  $f_m = \frac{1}{T_m}$  Hertz una de la otra.

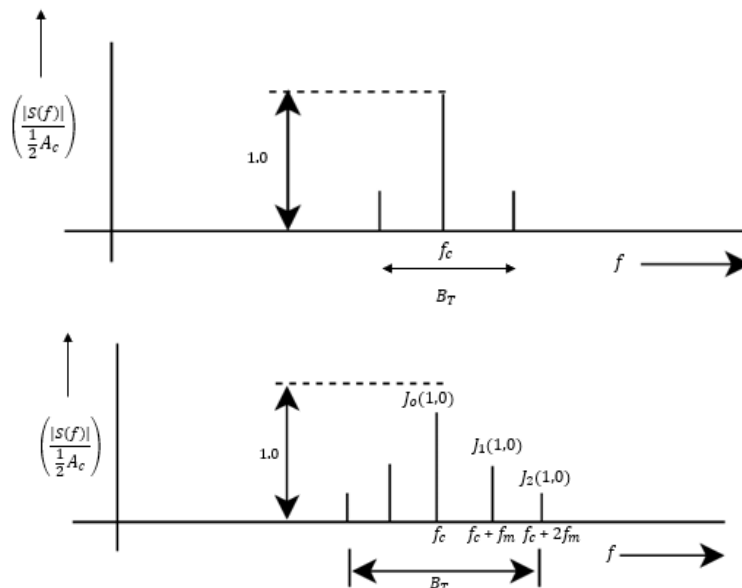
### Ejemplo 2:

En una modulación senoidal periódica, se sabe que la PSD exacta contiene componentes de línea con ponderaciones de:

$$\frac{[A_c J_n(\beta)]^2}{2}$$

Las cuales se encuentran ubicadas en las frecuencias de:

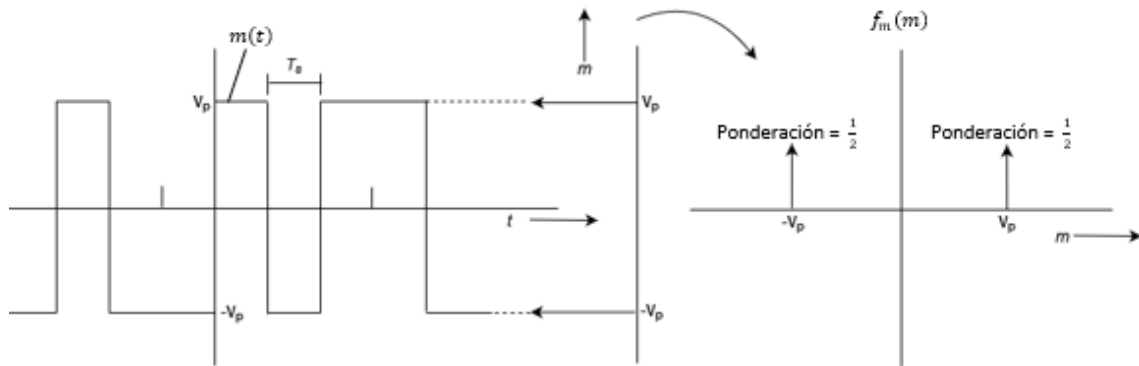
$$f = f_c + n f_m$$



**Figura 3.17:** Espectros de magnitud para FM o PM con modulación senoidal para índices de modulación 1.0 y 2.0 respectivamente.

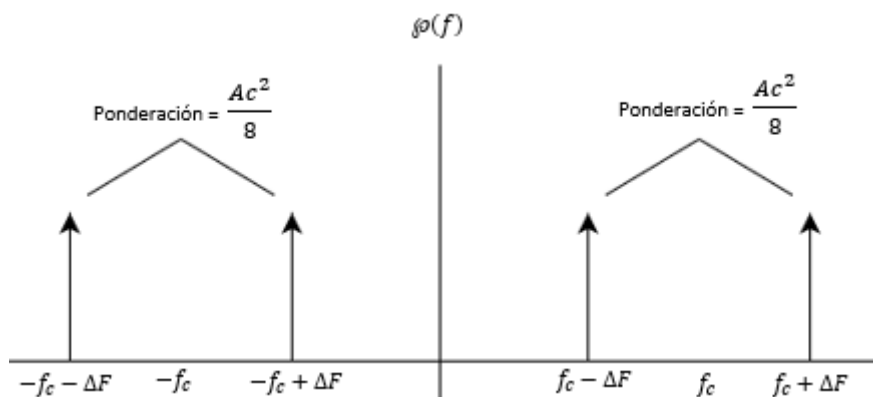
Para el caso de un índice alto, el envolvente de estas ponderaciones se aproxima a la PDF de una senoidal. Para la modulación digital con formas de pulso

rectangulares, la PDF del voltaje de modulación,  $m(t)$ , consiste en funciones delta ubicadas en niveles discretos de voltaje. En consecuencia, la PSD para la FM digital de banda ancha se aproxima mediante funciones delta. Esta aproximación se ilustra en la Figura 3.19 para una modulación por corrimiento de frecuencia binaria de banda ancha (FSK).



(a) Forma de onda rectangular moduladora (con 1 y 0 binarios igualmente probables)

(b) PDF para una modulación digital



(c) PDF de la FSK de banda ancha con modulación binaria  $\Delta F = D_f V_p / 2\pi$

**Figura 3.18:** Espectro aproximado de una FSK binaria de banda ancha

### 3.14 Propiedades importantes de las señales moduladas por ángulo

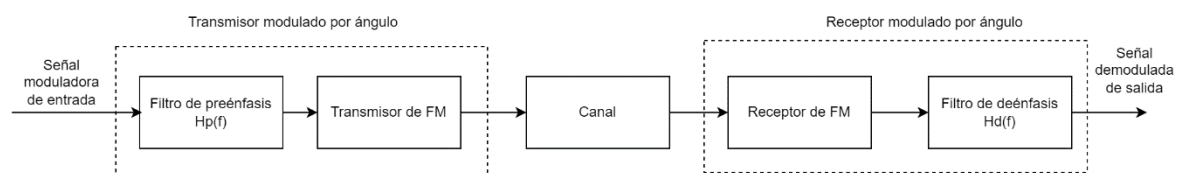
Una señal modulada por ángulo es una función no lineal de la modulación, su ancho de banda de la señal aumenta conforme se incrementa el índice de modulación.

El nivel de la portadora discreta cambia dependiendo de la señal moduladora, es igual a cero para ciertos tipos de formas de onda moduladoras.

1. El ancho de banda de una señal modulada por ángulo de banda estrecha es dos veces el ancho de banda de la señal moduladora, igual que para el caso de una modulación AM.
2. La envolvente real de una señal modulada por ángulo es constante y no depende del nivel de la señal moduladora.

### 3.15 Preénfasis y Deénfasis en sistemas modulados por ángulo

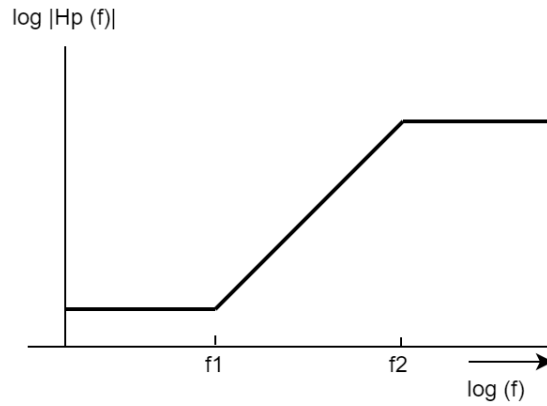
El preénfasis es el proceso de amplificar mediante un filtro las componentes de más alta frecuencia de una señal analógica, principalmente una señal de audio, y si también se atenúa el nivel a altas frecuencias a la salida del receptor, se le llama deénfasis. Esto se puede realizar con la combinación de preénfasis en el transmisor y Deénfasis en el receptor como se puede ver en la Figura 3.20. La FM preenfatisada es una combinación de FM y PM, y combina las ventajas de ambas en relación con el rendimiento del ruido.



**Figura 3.19:** Diagrama de Bloques general

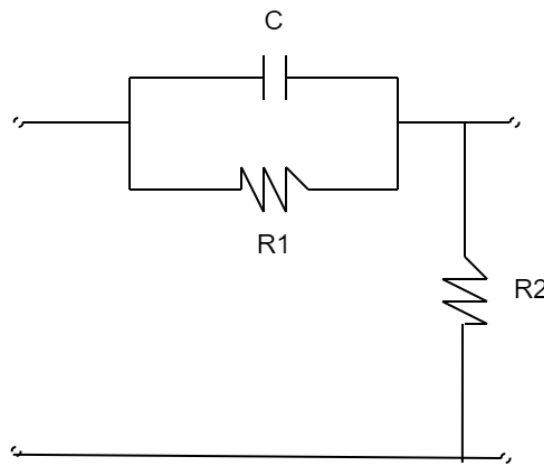
La voz humana tiene componentes espectrales que pueden oscilar entre los 300 Hz hasta los 3000 Hz, la mayor concentración de componentes espectrales dependerá de la persona que está hablando.

Si la señal de información se contamina con ruido, ya sea a frecuencias bajas o altas, el ruido tendrá una amplitud espectral constante. Al analizar en frecuencia bajas la relación de señal a ruido que se va a tener entre la potencia de la señal y la potencia del ruido es alta porque la relación es significativa, pero en las componentes de más alta frecuencia no ocurre esto porque la potencia de la señal de información puede ser similar a la potencia de ruido y eso puede generar distorsiones sobre todo en las componentes de alta frecuencia de la información, por tanto, se utiliza el filtro de preénfasis que consiste en darle un comportamiento constante en el primer rango de frecuencias y en el siguiente rango de frecuencias ocurre una amplificación como se observa en la Figura 3.21.



**Figura 3.20:** Gráfico de Bode de la respuesta en frecuencia de preénfasis

El filtro de preénfasis como se observa en la Figura 3.22 está diseñado para tener las dos componentes de baja frecuencia y de más alta frecuencia.



**Figura 3.21:** Filtro de preénfasis

Función de transferencia del filtro de preénfasis es:

$$H_p(f) = K \frac{1 + j\left(\frac{f}{f_1}\right)}{1 + j\left(\frac{f}{f_2}\right)}$$

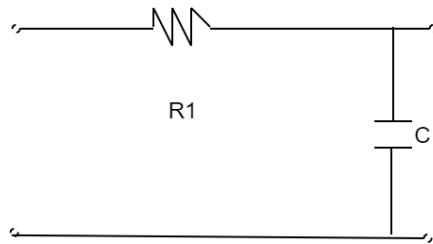
Donde  $K$  es constante de ganancia del filtro,  $f_1$  es la frecuencia más baja y  $f_2$  es la frecuencia más alta.

Además, que  $f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} = \frac{1}{2\pi R_1 C}$  y  $\tau$  es la constante de tiempo:

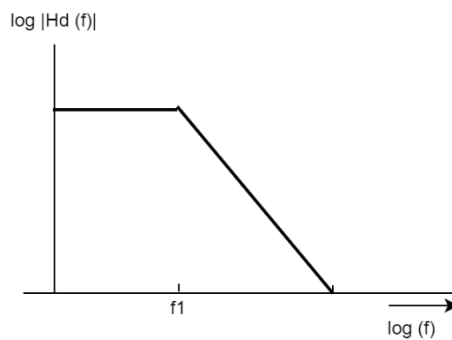
$$\begin{aligned} \tau_1 &= R_1 C \\ f_2 &= \frac{1}{2\pi\tau_2} = \frac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 C} \\ \tau_2 &= \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Al despejar se obtiene  $R_2 = \frac{R_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}$

Si se quiere volver a reproducir la señal se deberá regresar a la señal original por lo cual se usa el filtro de Deénfasis como se puede ver en la Figura 3.23 que tiene una amplitud correspondiente constante hasta la frecuencia ( $f_1$ ) y a partir de ahí se tendrá la pendiente de decaimiento como en el filtro de preénfasis de tal forma que la amplificación que se tiene se anula con la atenuación como se muestra en la Figura 3.24. El filtro de Deénfasis es un dispositivo no lineal.



**Figura 3.22:** Filtro de Deénfasis



**Figura 3.23:** Gráfico de Bode de la característica de Deénfasis

La función de transferencia del filtro de Deénfasis es:

$$H_d(f) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{f}{f_1}\right)}$$

Donde  $f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} = \frac{1}{2\pi R_1 C}$

$$\tau_1 = R_1 C$$

Si se aplica la combinación de los dos filtros en un proceso se convierte en un dispositivo lineal. Cuando se diseñan estos tipos de filtros se debe establecer la ubicación de cada una de las frecuencias como en el caso del filtro de preénfasis que necesita una frecuencia ( $f_1$ ) donde empieza a subir el comportamiento de amplificación y ( $f_2$ ) donde finaliza este comportamiento correspondiente.

En resumen, el filtro de preénfasis se considera como un amplificador en un rango de frecuencias y el filtro de Deénfasis desenfatisa las frecuencias altas que fueron enfatizadas en el transmisor.

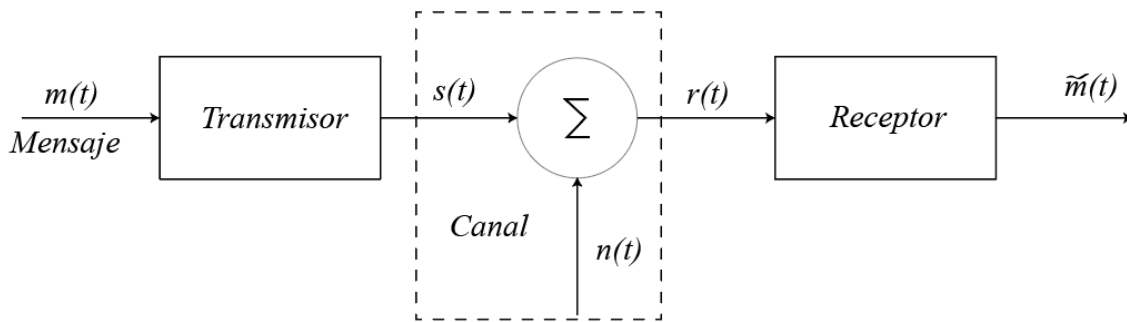


**CAPÍTULO 4.**  
**RENDIMIENTO DE SISTEMAS DE**  
**COMUNICACIONES DISTORSIONADOS POR RUIDO**

## 2.5 Razón señal ruido de sistemas analógicos

El rendimiento de un sistema de comunicaciones se puede medir a través de dos indicadores importantes: la eficiencia espectral y la relación señal a ruido. La eficiencia espectral mide la cantidad de información que se puede transmitir en una banda determinada de frecuencia. La relación señal a ruido mide la relación entre la potencia de la señal y la potencia del ruido en un sistema dado. En términos sencillos, un sistema de comunicación es de mayor rendimiento cuando la señal de salida en el receptor es lo más parecida posible a la señal de entrada en el transmisor.

En la Figura 3.1 se muestra el diagrama de bloques, el cual describe como se transmite la información a través de un sistema de comunicación, además se puede evaluar la  $\left(\frac{S}{N}\right)_{out}$  para estos sistemas en función de la  $\left(\frac{S}{N}\right)_{in}$ , ruido y los parámetros del sistema, refiriéndose a este último como el tipo de modulación que es aplicado en el sistema de comunicación.



**Figura 3.1:** Sistema de comunicación.

La entrada del receptor para sistemas de comunicación que presenten la integración del ruido se expresa mediante la ecuación (3-1):

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (3-7)$$

La señal a la entrada del receptor se puede expresar en función de la envolvente compleja total, siendo esta la suma de la envolvente compleja de la señal modulada ( $g_s$ ) y la envolvente compleja del ruido ( $g_n$ ), como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} r(t) &= \text{Re}\{g_s(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} + \text{Re}\{g_n(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} \\ &= \text{Re}\{[g_s(t) + g_n(t)]e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} \\ r(t) &= \text{Re}\{g_T(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} \end{aligned}$$

Donde la envolvente compleja total  $g_T(t)$  que está presente en la entrada del receptor se expresa como:

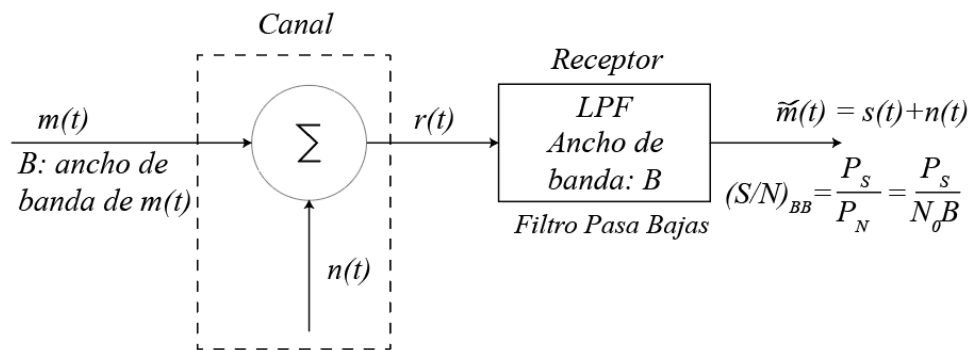
$$g_T(t) = g_s(t) + g_n(t)$$

$$\begin{aligned}
g_T(t) &= [x_s(t) + jy_s(t)] + [x_n(t) + jy_n(t)] \\
g_T(t) &= [x_s(t) + x_n(t)] + j[y_s(t) + y_n(t)] \\
g_T(t) &= x_T(t) + jy_T(t) \\
g_T(t) &= R_T(t)e^{j\theta_T(t)}
\end{aligned}$$

## 2.6 Comparación con sistemas banda base

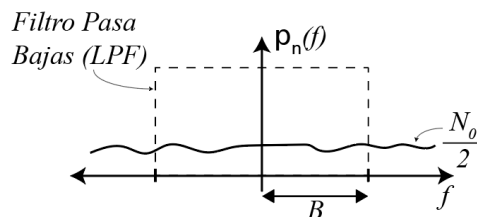
El análisis con un sistema banda base requiere que la señal de mensaje  $m(t)$  no utilice un tipo de modulación específico previa a su transmisión.

La Figura 3.2 muestra un sistema de comunicación banda base, donde la señal de mensaje  $m(t)$  no tiene ningún proceso de modulación y este pasa por un canal contaminado por ruido, además de un filtro pasa bajas. Si se evalúa la  $\left(\frac{S}{N}\right)_{out}$  para cada sistema como función de  $\left(\frac{S}{N}\right)_{BB} = \frac{P_S}{N_0B}$ , la potencia de la señal ( $P_S$ ) se obtiene considerando el tipo de modulación a la entrada del receptor, donde el ruido de entrada es blanco y el nivel espectral es igual a  $\frac{N_0}{2}$



**Figura 3.2:** Sistema de comunicación banda base.

En la Figura 3.3, se muestra en detalle la densidad espectral de potencia del ruido en un sistema banda base, la cual se toma en consideración para obtener la expresión de la potencia del ruido que está en función de la DSP y el ancho de banda de la señal de entrada, como se muestra en la ecuación (3-2)



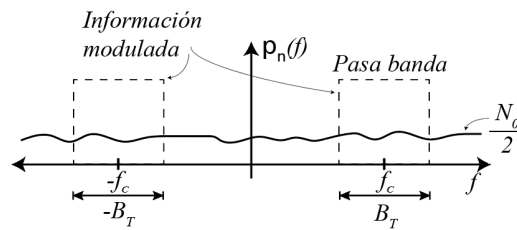
**Figura 3.3:** DSP del ruido en sistema banda base.

$$P_N = \int_{-B}^B \rho_n(f) df = (2B) \left( \frac{N_0}{2} \right) = N_0 B \quad (3-8)$$

La relación señal-ruido presente en la salida del receptor se obtiene con la ecuación (3-3).

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{BB} = \frac{P_{Sin}}{P_{NBB}} = \frac{P_{Sin}}{N_0 B} \quad (3-9)$$

Para obtener la expresión de la potencia de ruido en sistemas de comunicación pasa banda, es necesario analizar la Figura 3.4, donde se considera una señal modulada, obteniendo así la señal banda base trasladada a una frecuencia portadora específica, en base a este análisis se obtiene la potencia del ruido en función de  $B_T$  que es el ancho de banda de la señal pasa banda a la entrada del receptor.



**Figura 3.4:** DSP del ruido en sistema pasa banda.

$$P_{NBB} = (2B_T) \left( \frac{N_0}{2} \right) = N_0 B_T$$

La relación señal ruido a la entrada del receptor está dada por la siguiente expresión:

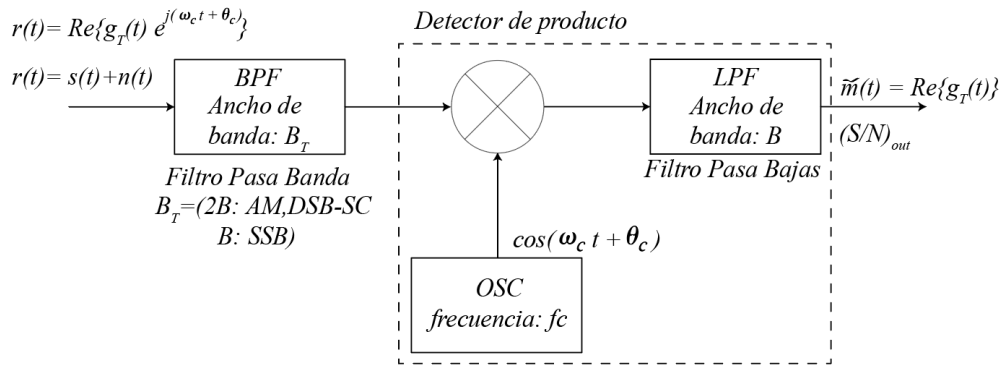
$$\left( \frac{S}{N} \right)_{in} = \frac{P_{Sin}}{P_{Nin}} = \frac{P_{Sin}}{N_0 B_T} \quad (3-4)$$

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{in} = \frac{P_{Sin}}{N_0 B_T} \left( \frac{B}{B} \right) = \left( \frac{S}{N} \right)_{BB} \left( \frac{B}{B_T} \right) \quad (3-5)$$

Donde  $P_{Sin}$  en la ecuación (3-5) no cambia en comparación a sistemas de comunicación banda base.

## 2.7 Sistema de AM con detector de producto

En la Figura 3.5 se observa el análisis de un receptor de AM con detector coherente.



**Figura 3.5:** Detector coherente

Es importante tener presente que la envolvente compleja de AM solo tiene componente real, siendo la parte imaginaria igual a cero, es decir  $y_s(t) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 g_s(t) &= A_c(1 + m(t)) = x_s(t) \\
 g_n(t) &= x_n(t) + jy_n(t) \\
 g_T(t) &= g_s(t) + g_n(t) \\
 g_T(t) &= [x_s(t) + x_n(t)] + j[y_n(t)] \\
 g_T(t) &= \underbrace{[A_c + A_c m(t) + x_n(t)]}_{x_T(t)} + j \underbrace{[y_n(t)]}_{y_T(t)}
 \end{aligned}$$

El detector de producto indicado en la figura 3-5 entrega una señal proporcional al módulo de la envolvente compleja total, siendo este la parte real de la envolvente compleja, siempre y cuando se cumplan las condiciones de sintonización y sincronización, correspondientes. Para este caso en particular la sintonización es a la frecuencia de portadora y la sincronización es en fase, para obtener una señal proporcional a  $x(t)$ . Si se analiza con la envolvente compleja total, la expresión a la salida del detector coherente es:

$$\tilde{m}(t) = x_T(t) = A_c + A_c m(t) + x_n(t) \quad (3-6)$$

Al analizar la ecuación (3-6), se observa que se tienen tres componentes fundamentales:

- Componente DC:  $A_c$
- Componente de información:  $A_c m(t)$
- Componente de ruido:  $x_n(t)$

Para calcular la relación señal a ruido a la salida del detector, obtiene la potencia de la componente de información sobre la potencia de la componente de ruido. La potencia de la componente de información y la potencia de la componente de ruido se obtienen mediante las ecuaciones (3-7) y (3-8) respectivamente.

$$P_{S_{out}} = \langle |A_c m(t)|^2 \rangle = A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle = A_c^2 P_m \quad (3-7)$$

$$P_{N_{out}} = N_0 B_T = 2N_0 B \quad (3-8)$$

La relación señal ruido presente en la salida esta expresada por la ecuación (3-9):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{P_{S_{out}}}{P_{N_{out}}} = \frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{2N_0 B} \quad (3-9)$$

Se realiza un análisis para determinar la relación señal ruido a la entrada del receptor, teniendo presente que, a la entrada del receptor, la señal se encuentra modulada, por ende, para encontrar la potencia de la señal, se ocupan expresiones desarrolladas en capítulos anteriores:

$$P_{S_{in}} = \frac{A_c^2}{2} (1 + \langle m(t)^2 \rangle)$$

$$P_{N_{in}} = N_0 B_T = 2N_0 B$$

La relación señal ruido presente en la entrada del sistema está expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{P_{S_{in}}}{P_{N_{in}}} = \frac{\frac{A_c^2}{2} (1 + \langle m(t)^2 \rangle)}{2N_0 B} \quad (3-10)$$

Al realizar un análisis comparativo entre la relación señal-ruido de las salidas con las entradas y de la salida respecto a banda base:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}} = \frac{\frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{2N_0 B}}{\frac{\frac{A_c^2}{2} (1 + \langle m(t)^2 \rangle)}{2N_0 B}} = \frac{2 \langle m(t)^2 \rangle}{1 + \langle m(t)^2 \rangle} \quad (3-11)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{BB}} = \frac{\frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{2N_0 B}}{\frac{\frac{A_c^2}{2} (1 + \langle m(t)^2 \rangle)}{N_0 B}} = \frac{\langle m(t)^2 \rangle}{1 + \langle m(t)^2 \rangle} \quad (3-12)$$

Para realizar un análisis de las relaciones señal ruido, es importante seguir las siguientes consideraciones:

- Si la relación señal-ruido es  $>1$ , se considera que el sistema tiene un buen rendimiento y sucede cuando el numerador, en este caso la potencia de la señal modulada es mayor que la potencia de la señal ruido que lo denota el denominador, el análisis es independiente de la magnitud total de las señales. La

relación señal-ruido alta es una situación donde la potencia de la señal modulada es mayor que la potencia de la señal de ruido en un sistema de comunicación. Esto se traduce en una mejor calidad de la señal y una menor probabilidad de errores en la transmisión de datos.

- Si la relación señal-ruido es  $<1$ , se considera que el sistema tiene un rendimiento deficiente y sucede cuando la potencia de la señal de ruido es superior a la potencia de la señal modulada. La relación señal-ruido baja es una situación donde la potencia de la señal de ruido es mayor que la potencia de la señal modulada en un sistema de comunicación. Esto resulta en una calidad inferior de la señal y una mayor incidencia de errores en la transmisión de información.

## 2.8 Sistema de AM con detector de envolvente

Partiendo de un detector de producto el cual otorga una señal proporcional al módulo de la envolvente compleja total, siendo este la parte real de la envolvente compleja se denota que:

$$\begin{aligned}
 g_s(t) &= A_c(1 + m(t)) = x_s(t) \\
 g_n(t) &= x_n(t) + jy_n(t) \\
 g_T(t) &= g_s(t) + g_n(t) \\
 g_T(t) &= x_T(t) + jy_T(t) = [A_c + A_cm(t) + x_n(t)] + j[y_n(t)]
 \end{aligned}$$

Considerando la envolvente compleja general en formato polar:

$$g(t) = R(t)e^{j\theta(t)}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 R(t) &= |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \\
 \theta(t) &= \angle g(t) = \tan^{-1} \left( \frac{y(t)}{x(t)} \right)
 \end{aligned}$$

Al aplicar este concepto en la envolvente compleja total de AM para encontrar el módulo de la envolvente a quien se denota por  $R(t)$ , donde el módulo de la envolvente compleja se representa por la ecuación (3-13):

$$\begin{aligned}
 R_T(t) &= |g_T(t)| = \sqrt{x_T^2(t) + y_T^2(t)} & (3-13) \\
 R_T(t) &= \sqrt{(A_c + A_cm(t) + x_n(t))^2 + (y_n(t))^2}
 \end{aligned}$$

El detector de envolvente entrega a su salida, una señal proporcional al módulo de la envolvente total de la señal modulada  $R_T(t)$ , donde se obtiene una señal modulada reconstruida tal como se observa en la ecuación (3-14):

$$\tilde{m}(t) = kR_T(t) = k\sqrt{(A_c + A_c m(t) + x_n(t))^2 + (y_n(t))^2} \quad (3-14)$$

Si se realiza un análisis de la potencia total a la salida del detector no coherente:

$$P_s = \langle |kR_T(t)|^2 \rangle$$

$$P_{s_{out}} = k^2 \langle [(A_c + A_c m(t) + x_n(t))^2 + (y_n(t))^2] \rangle$$

$$P_{s_{out}} = k^2 A_c^2 \langle \left[ \left( 1 + m(t) + \frac{x_n(t)}{A_c} \right)^2 + \left( \frac{y_n(t)}{A_c} \right)^2 \right] \rangle$$

Suponiendo la posibilidad de tener dos casos de relación señal-ruido en la entrada del detector no coherente, se tiene:

### 2.8.1 Caso 1: Relación (S/N) in >> 1

El valor de potencia de la señal de información sin considerar otros parámetros importantes, dependen directamente de  $A_c$ , mediante una relación directamente proporcional. Si aumenta el valor de  $A_c$ , aumenta el valor de la potencia de la señal y viceversa. De manera análoga los parámetros que inciden en la potencia del ruido se relacionan con  $x_n(t)$  y  $y_n(t)$ , donde mantienen una relación directamente proporcional.

Si se considera una relación señal-ruido a la entrada mucho mayor que 1, es decir, si la potencia de la señal de información es superior a la potencia del ruido:

$$\left( \frac{y_n(t)}{A_c} \right)^2 \approx 0$$

$$P_s = k^2 A_c^2 \langle \left[ \left( 1 + m(t) + \frac{x_n(t)}{A_c} \right)^2 \right] \rangle$$

$$P_s = \langle [(kA_c + kA_c m(t) + kx_n(t))^2] \rangle$$

Resolviendo el trinomio correspondiente, considerando que el valor medio de algunas componentes es cero, asumiendo que los parámetros significativos como  $m(t)$  y las componentes del ruido, no tienen componente DC, teniendo como resultante:

$$P_{s_{out}} = \langle (kA_c)^2 \rangle + \langle (kA_c m(t))^2 \rangle + \langle (kx_n(t))^2 \rangle$$

$$P_{s_{out}} = \langle k^2 A_c^2 \rangle + \langle k^2 A_c^2 m^2(t) \rangle + \langle k^2 x_n^2(t) \rangle \quad (3-15)$$



Al analizar la ecuación (3-15), se observa que se tienen tres componentes fundamentales:

- Componente DC:  $\langle (kA_c)^2 \rangle$
- Componente de información:  $\langle k^2 A_c^2 m^2(t) \rangle$
- Componente de ruido:  $\langle k^2 x_n^2(t) \rangle$

La ecuación (3-16) denota la relación señal-ruido a la salida de un receptor con un detector de envolvente.

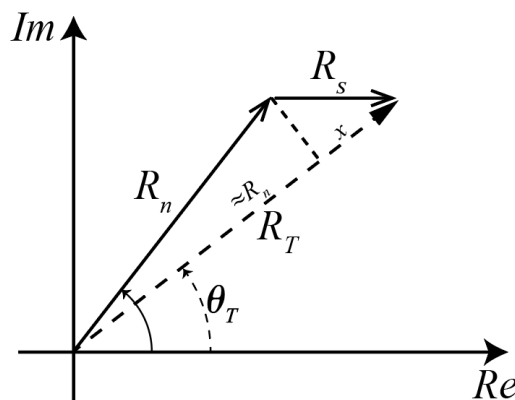
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{P_{s_{out}}}{P_{N_{out}}} = \frac{k^2 A_c^2 \langle m^2(t) \rangle}{k^2 \langle x_n^2(t) \rangle} = \frac{A_c^2 \langle m^2(t) \rangle}{2N_0 B} \quad (3-16)$$

Se observa que la ecuación (3-9) perteneciente a la expresión de la relación señal-ruido a la salida de un detector de producto es igual a la ecuación (3-16) de un detector de envolvente, considerando una relación señal-ruido de entrada alta.

### 2.8.2 Caso 1: Relación (S/N) in < 1

Para pequeños valores de  $\left(\frac{S}{N}\right)_{in}$ , el rendimiento del detector de envolvente es muy inferior que el detector de producto, esto quiere decir que la potencia de la señal es menor a la potencia del ruido, siendo que la  $\left(\frac{S}{N}\right)_{in} < 1$ . A pesar de que el detector de envolvente es muy inferior al detector de producto para una pequeña  $\left(\frac{S}{N}\right)_{in}$ , a menudo esta deficiencia pasa desapercibida en la práctica para aplicaciones de difusión por AM.

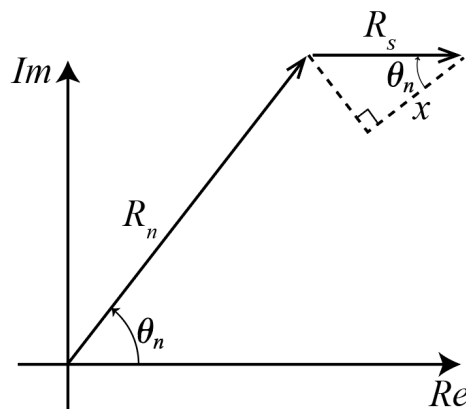
$$\begin{aligned} \tilde{m}(t) &= kR_T(t) = k|g_T(t)| \\ \tilde{m}(t) &= k|R_s + R_n(t)e^{j\theta_n(t)}| \\ \tilde{m}(t) &= k|A_c(1 + m(t)) + R_n(t)e^{j\theta_n(t)}| \end{aligned}$$



**Figura 3.6:** Diagrama fasorial de la aproximación de AM.

Cuando la  $\left(\frac{S}{N}\right)_{in} < 1$ , se realiza una aproximación de la señal, para ello se analiza la Figura 3.6, que detalla el diagrama fasorial de la aproximación de AM donde se grafica el módulo de las envolventes complejas de la señal  $R_s$ , del ruido  $R_n$  y de la envolvente compleja total  $R_T$ . El ruido tiene componentes reales e imaginarios, a diferencia de la señal de información que al ser una modulación AM solo dispone de parte real. EL módulo de la envolvente compleja total se obtiene mediante una aproximación, donde se considera que es la suma del valor del módulo de la envolvente compleja del ruido y el valor de una constante desconocida ( $x$ ).

En la Figura 3.7 muestra el análisis trigonométrico de la figura 3-6 para obtener el valor de  $x$ , de esta manera conseguir el  $R_T$  correspondiente.



**Figura 3.7:** Análisis del diagrama fasorial.

En base a la Figura 3.7, mediante el análisis fasorial se obtiene que:

$$\cos(\theta_n) = \frac{x}{R_s}$$

$$x = R_s \cos(\theta_n)$$

$$x = A_c(1 + m(t)) \cos(\theta_n)$$

Se realiza la aproximación de la señal:

$$R_T \approx R_n + x$$

$$R_T \approx R_n + A_c(1 + m(t)) \cos(\theta_n)$$

Utilizando la ecuación (3-14) y la figura 3-6 se obtiene la siguiente aproximación:

$$\tilde{m}(t) = kR_T(t)$$

$$\tilde{m}(t) \approx k[R_n + A_c(1 + m(t)) \cos(\theta_n)] \quad (3-17)$$

Al analizar la ecuación (3-17), se observa que se tienen tres componentes fundamentales:

- Componente  $R_n$ : Ruido (Distribución de Rayleigh).
- Componente  $A_c(1 + m(t))$ : Información.
- Componente  $\cos(\theta_n)$ : Distorsión significativa (Distribución Uniforme).

### 2.8.3 Comparativa de relaciones señal-ruido del detector de producto y detector de envolvente.

Si la relación señal-ruido es mucho mayor que 1, el detector de envolvente tendrá un rendimiento similar al detector de producto, siendo iguales. Por esa razón, si las características del canal y la relación señal-ruido de entrada alta, es recomendable utilizar el detector de envolvente, debido a que es más económico.

Si la relación señal-ruido es menor que 1, el detector de envolvente tiene un rendimiento muy por debajo de lo que se obtendría con el detector de producto con las mismas características, esto debido a que la relación señal-ruido a la entrada es baja. Se recomienda en este caso, utilizar un detector de producto.

## 2.9 Sistema de DSB-SC

La recuperación de la señal moduladora para una modulación en DSB-SC, se realiza mediante un detector de producto (coherente), analizando el caso anterior con una modulación AM se tiene para la modulación de doble banda lateral el siguiente análisis:

$$\begin{aligned}
 g_s(t) &= A_c m(t) = x_s(t) \\
 g_n(t) &= x_n(t) + jy_n(t) \\
 g_T(t) &= g_s(t) + g_n(t) \\
 g_T(t) &= [x_s(t) + x_n(t)] + j[y_n(t)] \\
 g_T(t) &= [A_c m(t) + x_n(t)] + j[y_n(t)]
 \end{aligned}$$

Donde la señal moduladora recuperada a la salida del detector coherente es:

$$\tilde{m}(t) = x_T(t) = A_c m(t) + x_n(t) \quad (3-18)$$

Al analizar la ecuación (3-18), se observa que se tienen dos componentes fundamentales:

- Componente de información:  $A_c m(t)$
- Componente de ruido:  $x_n(t)$

Donde se observa un factor de ganancia para la señal de información  $m(t)$  que depende de  $A_c$  y el ruido presente. Al analizar la potencia de la señal y la potencia del ruido a la salida del receptor:

$$\begin{aligned}
 P_{S_{out}} &= \langle |A_c m(t)|^2 \rangle = A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle = A_c^2 P_m \\
 P_{N_{out}} &= N_0 B_T = 2N_0 B
 \end{aligned}$$

La relación señal ruido presente en la salida esta expresada por la ecuación (3-19)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{P_{Sout}}{P_{Nout}} = \frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{2N_0B} \quad (3-19)$$

Para determinar la relación señal ruido a la entrada del receptor, teniendo presente que a la entrada la señal aún se encuentra modulada con DSB-SC, la potencia de la señal es obtenida por definiciones obtenidas es capítulos anteriores:

$$P_{Sin} = \frac{A_c^2}{2} \langle m(t)^2 \rangle$$

$$P_{Nin} = N_0B_T = 2N_0B$$

La relación señal ruido presente en la entrada del sistema está expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{P_{Sin}}{P_{Nin}} = \frac{\frac{A_c^2}{2} \langle m(t)^2 \rangle}{2N_0B} \quad (3-20)$$

La relación señal ruido considerando un sistema banda base esta expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BB} = \frac{P_{SBB}}{P_{NBB}} = \frac{\frac{A_c^2}{2} \langle m(t)^2 \rangle}{N_0B} \quad (3-21)$$

Al realizar un análisis comparativo entre la relación señal-ruido de la salida con respecto a la entrada y de la salida respecto a banda base:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}} = \frac{\frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{2N_0B}}{\frac{\frac{A_c^2}{2} \langle m(t)^2 \rangle}{2N_0B}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad (3-22)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{BB}} = \frac{\frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{2N_0B}}{\frac{\frac{A_c^2}{2} \langle m(t)^2 \rangle}{N_0B}} = 1 \quad (3-23)$$

La relación de salida y entrada tal como indica la ecuación (3-22), es igual a 2, debido a que con la modulación DSB-SC no se desperdicia potencia en una componente de portadora, como sucede con la modulación de AM. Respecto a la

relación de salida y banda base como indica la ecuación (3-23), tiene un valor de 1, el cual muestra que la eficiencia espectral es mejor en banda base.

### 2.10 Sistemas de SSB

La recuperación de la señal moduladora para una modulación en SSB se realiza mediante un detector de producto (coherente):

$$\begin{aligned} g_s(t) &= A_c(m(t) \pm j\hat{m}(t)) \\ g_n(t) &= x_n(t) + jy_n(t) \\ g_T(t) &= g_s(t) + g_n(t) \\ g_T(t) &= [A_c m(t) + x_n(t)] + j[y_n(t)] \\ g_T(t) &= [A_c m(t) + x_n(t)] + j[\pm A_c \hat{m}(t)y_n(t)] \end{aligned}$$

Donde la señal moduladora recuperada a la salida del detector coherente es:

$$\tilde{m}(t) = x_T(t) = A_c m(t) + x_n(t) \quad (3-24)$$

Si se analiza la ecuación (3-24), que es la expresión de la señal recuperada, se puede observar que es idéntica a la ecuación (3-18) de la modulación DSB-SC, y cuenta con dos componentes fundamentales:

- Componente de información:  $A_c m(t)$
- Componente de ruido:  $x_n(t)$

Al analizar la potencia de la señal y la potencia del ruido a la salida del receptor:

$$\begin{aligned} P_{S_{out}} &= \langle |A_c m(t)|^2 \rangle = A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle = A_c^2 P_m \\ P_{N_{out}} &= N_0 B_T = N_0 B \end{aligned}$$

La relación señal ruido presente en la salida esta expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{P_{S_{out}}}{P_{N_{out}}} = \frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{N_0 B} \quad (3-25)$$

Para determinar la relación señal ruido a la entrada del receptor, teniendo presente que a la entrada la señal aún se encuentra modulada con SSB, la potencia de la señal es obtenida por definiciones obtenidas es capítulos anteriores:

$$\begin{aligned} P_{S_{in}} &= A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle \\ P_{N_{in}} &= N_0 B_T = N_0 B \end{aligned}$$

La relación señal ruido presente en la entrada del sistema está expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{P_{sin}}{P_{Nin}} = \frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{N_0 B} \quad (3-26)$$

La relación señal ruido considerando un sistema banda base esta expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BB} = \frac{P_{sBB}}{P_{NBB}} = \frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{N_0 B} \quad (3-27)$$

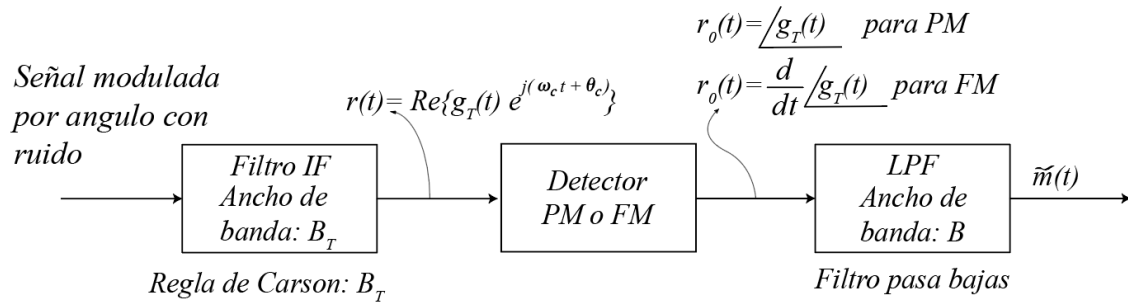
Al realizar un análisis comparativo que relaciona la relación señal-ruido de las salidas con las entradas y de la salida respecto a banda base:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}} = \frac{\frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{N_0 B}}{\frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{N_0 B}} = 1 \quad (3-28)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{BB}} = \frac{\frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{N_0 B}}{\frac{A_c^2 \langle m(t)^2 \rangle}{N_0 B}} = 1 \quad (3-29)$$

## 2.11 Sistemas de PM

La modulación de una señal en PM se recupera mediante un receptor que emplea un detector de fase como se muestra en la Figura 3.8. La envolvente compleja de la señal con ruido a la entrada del detector coherente es:



**Figura 3.8:** Receptor para señales moduladas por ángulo.

$$g_s(t) = A_c e^{j\theta_s(t)} \quad (3-30)$$

$$\theta_s(t) = \begin{cases} D_f \int m(t) & , FM \\ D_p m(t) & , PM \end{cases} \quad (3-31)$$

$$g_n(t) = R_n(t) e^{j\theta_n(t)}$$

$$g_T(t) = |g_T(t)| e^{j\theta_T(t)} \quad (3-32)$$

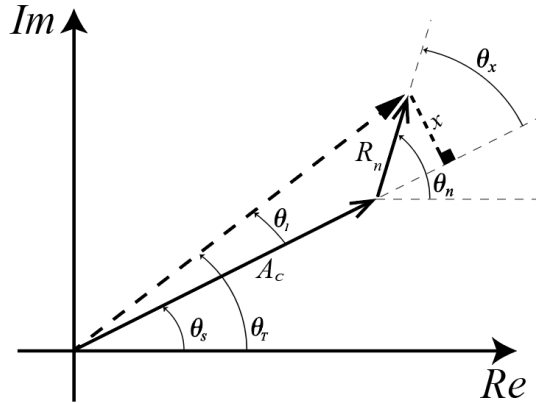
$$g_T(t) = g_s(t) + g_n(t)$$

$$g_T(t) = A_c(t)e^{jD_p m(t)} + R_n(t)e^{j\theta_n(t)}$$

Analizando el ruido, cuando la entrada presenta solamente ruido gaussiano, el módulo  $R_n(t)$  tiene una distribución de Rayleigh, mientras que la fase  $\theta_n(t)$  tiene una distribución uniforme. La salida del detector de fase entrega una señal proporcional a la fase de la envolvente compleja total expresada en la ecuación (3-30):

$$r_0 = \angle g_T(t) = k\theta_T(t) \quad (3-33)$$

Donde  $k$  es una constante que representa la ganancia del detector empleado. La expresión de  $\theta_T(t)$  puede aproximarse con la ayuda del diagrama vectorial como se muestra en la Figura 3.9, asumiendo que se tiene una  $\left(\frac{S}{N}\right)_{in} \gg 1$ , entonces la magnitud de sus componentes se relaciona como:  $A_c \gg R_n(t)$ , expresado gráficamente como:



**Figura 3.9:** Diagrama vectorial para modulación por ángulo,  $\left(\frac{S}{N}\right)_{in} \gg 1$ .

Análisis matemático:

$$\begin{aligned} \theta_n &= \theta_s + \theta_x \\ \sin(\theta_x) &= \frac{x}{R_n} \\ x &= R_n \sin(\theta_x) \\ \sin(\theta_1) &= \frac{R_n \sin(\theta_x)}{R_T} \end{aligned}$$

Donde se asume que:

$$\begin{aligned} R_T &\approx A_c \\ \sin(\theta_1) &\approx \theta_1 \end{aligned}$$

Entonces

$$\theta_T = \theta_s + \theta_1$$

$$\theta_T = \theta_s + \frac{1}{A_c} R_n \sin(\theta_n - \theta_s)$$

$$\theta_T = \theta_s + \frac{1}{A_c} R_n \sin(\theta_n) \quad (3-34)$$

La expresión  $\theta_n - \theta_s$  puede expresarse como  $\theta_n$ , debido a que la información presente se modifica completamente, transformándose en ruido, en su totalidad. Realizando un análisis de las expresiones de la envolvente compleja en cuadratura y la expresión general de la señal modulada  $s(t)$ :

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_c t) - y(t) \text{sen}(\omega_c t)$$

$$g(t) = x(t) + jy(t)$$

Si se realiza un análisis comparativo con la ecuación (3-34):

$$\theta_T = \theta_s + \frac{1}{A_c} y_n(t)$$

La expresión de la señal proporcional a la salida del detector de fase, expresada en la ecuación (3-33) es:

$$r_0 = k\theta_T(t)$$

$$r_0 = k \left[ \theta_s + \frac{1}{A_c} y_n(t) \right] \quad (3-35)$$

Donde  $\theta_s$  para una modulación PM se expresa en la ecuación (3-31):

$$r_0 = k \left[ D_p m(t) + \frac{1}{A_c} y_n(t) \right] \quad (3-36)$$

Si se analiza la ecuación (3-36), se observa que se tienen dos componentes fundamentales:

- Componente de información:  $D_p m(t)$
- Componente de ruido:  $\frac{1}{A_c} y_n(t)$
- Ganancia del detector PM:  $k$

La parte relevante de la salida del detector de PM se aproxima mediante:

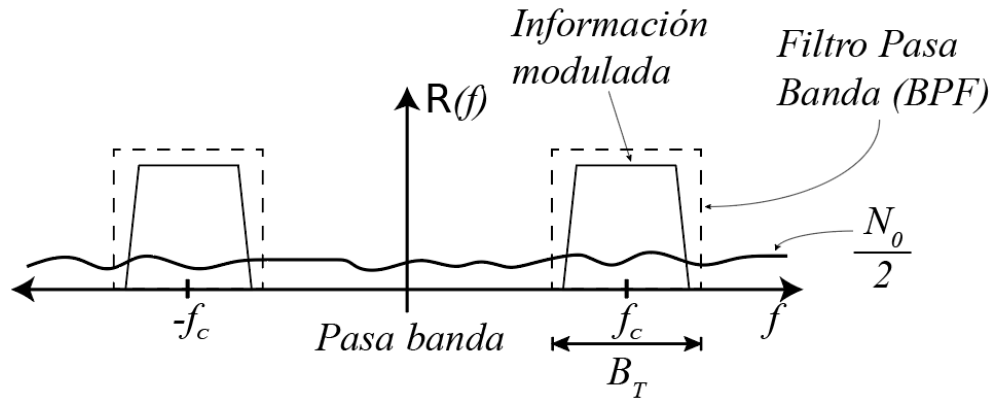
$$r_0 \approx s_0(t) + n_0(t) \quad (3-37)$$

$$s_0(t) = k D_p m(t) \quad (3-38)$$

$$n_0(t) = \frac{k}{A_c} y_n(t) \quad (3-39)$$



Donde la componente del ruido  $y_n(t)$  pasa banda tiene una densidad espectral de potencia igual a  $\rho_n = \frac{N_0}{2}$  :



**Figura 3.10:** DSP de ruido en sistema pasa banda.

La densidad espectral de potencia del ruido a la salida del detector de PM, basándose en la ecuación (3-39) es:

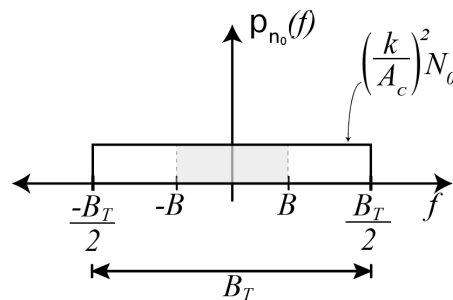
$$\rho_{n_0} = \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 DSP\{y_n(t)\}$$

$$\rho_{n_0} = \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 \frac{N_0}{2} \quad (3-40)$$

La ecuación (3-40) tiene que sumarse por sí mismo, debido a que, al momento de demodular, la información presente en  $-f_c$  y  $f_c$ , se trasladan a banda base, ocasionando un solapamiento:

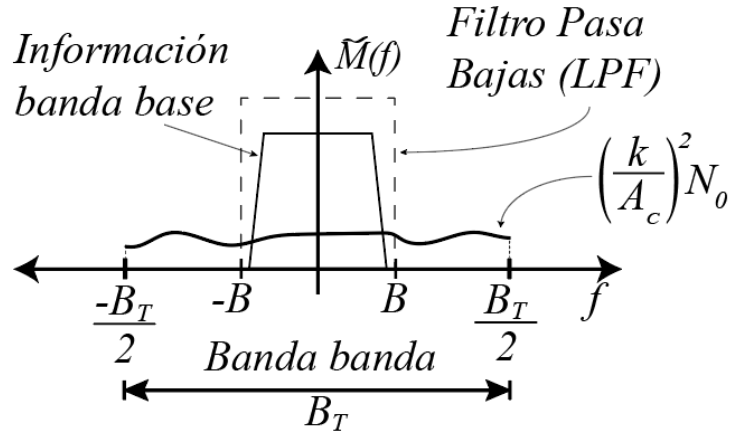
$$\rho_{n_0} = \begin{cases} \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0, & \text{para } |f| \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3-41)$$

Representando de forma gráfica la ecuación (3-41), se obtiene la figura 3-11, donde se denota que la porción del espectro pasa por un filtro pasa bajas.



**Figura 3.11:** DSP para el ruido a la salida del detector para el receptor de señal modulada en PM.

En la Figura 3.10 se observa la presencia de ruido en todo el espectro de frecuencias en el cual se modula la información, para demodular se realiza un filtrado previo con un filtro pasa banda de ancho de banda  $B_T$ , la densidad espectral de potencia resultante del ruido en banda base, esta expresada por la ecuación (3-41):



**Figura 3.12:** DSP de ruido en sistema banda base.

En la Figura 3.12 se muestra la presencia de la información y de ruido, con un comportamiento expresado por las ecuaciones (3-38) y (3-39). Al filtrar la información con un filtro pasa bajas de ancho de banda  $B$ , que es donde se encuentra la información fundamental, se observa que la potencia total de ruido a considerar será únicamente la que presente dentro del ancho de banda  $B$ .

La potencia del ruido y de la señal a la salida del receptor esta expresada por:

$$P_{N_{out}} = \int_{-B}^B \rho_{n_0}(f) df = (2B) \left[ \left( \frac{k}{A_c} \right)^2 N_0 \right] = \frac{2k^2 N_0 B}{A_c^2} \quad (3-42)$$

$$P_{S_{out}} = k^2 D_p^2 \langle m(t)^2 \rangle \quad (3-43)$$

La relación señal ruido presente en la salida esta expresada por:

$$D_p = \frac{\beta}{V_p}$$

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{P_{S_{out}}}{P_{N_{out}}} = \frac{k^2 D_p^2 \langle m(t)^2 \rangle}{\frac{2k^2 N_0 B}{A_c^2}} = \frac{A_c^2 D_p^2 \langle m(t)^2 \rangle}{2N_0 B}$$

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{A_c^2 \beta^2}{2N_0 B} \left\langle \left( \frac{m(t)}{V_p} \right)^2 \right\rangle \quad (3-44)$$

Si se divide  $m(t)$  por su valor máximo  $V_p$ , se obtiene la normalización de  $m(t)$ . Con la normalización, si se realiza un análisis del valor medio, si y solo si,  $m(t)$  es una sinusoidal tendrá un valor de  $1/2$ :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{A_c^2 \beta^2}{4N_0 B}, \text{ si } m(t) \text{ es sinusoidal} \quad (3-45)$$

Para determinar la relación señal ruido a la entrada del receptor, teniendo presente que a la entrada la señal aún se encuentra modulada con PM, la potencia de la señal es obtenida por definiciones obtenidas en capítulos anteriores:

$$P_{sin} = \frac{A_c^2}{2}$$

$$P_{Nin} = N_0 B_T = N_0 [2(\beta + 1)B]$$

La relación señal ruido presente en la entrada del sistema está expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{P_{sin}}{P_{Nin}} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{N_0 [2(\beta + 1)B]} = \frac{A_c^2}{4N_0 B(\beta + 1)} \quad (3-46)$$

La relación señal ruido considerando un sistema banda base esta expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BB} = \frac{P_{SBB}}{P_{NBB}} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{N_0 B} = \frac{A_c^2}{2N_0 B} \quad (3-47)$$

Al realizar un análisis comparativo entre la relación señal-ruido de la salida con respecto a la entrada y de la salida respecto a banda base:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}} = \frac{\frac{A_c^2 \beta^2}{2N_0 B} \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle}{\frac{A_c^2}{4N_0 B(\beta + 1)}} = 2(\beta + 1)\beta^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle \quad (3-48)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}} = (\beta + 1)\beta^2, \text{ si } m(t) \text{ es sinusoidal} \quad (3-49)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{BB}} = \frac{\frac{A_c^2 \beta^2}{2N_0 B} \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle}{\frac{A_c^2}{2N_0 B}} = \beta^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle \quad (3-50)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{BB}} = \frac{\beta^2}{2}, \text{ si } m(t) \text{ es sinusoidal} \quad (3-51)$$

## 2.12 Sistemas de FM

La modulación de una señal en FM se recupera de manera análoga a un sistema PM, como se muestra en la Figura 3.8, con la excepción que la señal a la salida del detector FM es proporcional a la derivada de la variación de la fase. La envolvente compleja de la señal con ruido a la entrada:

$$\begin{aligned}\theta_s(t) &= D_f \int m(t) \\ g_s(t) &= A_c e^{j\theta_s(t)} \\ g_n(t) &= R_n(t) e^{j\theta_n(t)} \\ g_T(t) &= |g_T(t)| e^{j\theta_T(t)} = g_s(t) + g_n(t)\end{aligned}$$

La expresión de la señal a la salida del detector de FM es proporcional a la derivada de la fase compuesta a la entrada:

$$r_0 = k \frac{d}{dt} [\angle g_T(t)] \quad (3-52)$$

En la ecuación (3-52) debe agregarse la consideración de la frecuencia instantánea:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\theta_s(t)] \quad (3-53)$$

Reformulando la ecuación (3-52) en complemento con la ecuación (3-53), la expresión de la señal a la salida del detector de FM se obtiene a partir de la ecuación (3-54)

$$r_0 = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dt} [\theta_s(t)] \quad (3-54)$$

Donde  $k$  representa la ganancia del detector de FM. Asumiendo que la señal de entrada está por encima del umbral,  $\left(\frac{S}{N}\right)_{in} \gg 1$ , la salida del detector puede aproximarse como la ecuación (3-39):

$$r_0 \approx s_0(t) + n_0(t)$$

La expresión de la información  $s_0(t)$  se obtiene a partir de la ecuación (3-55).

$$\begin{aligned}s_0(t) &= \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dt} [\theta_s(t)] \\ s_0(t) &= \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[ D_f \int m(t) \right]\end{aligned}$$

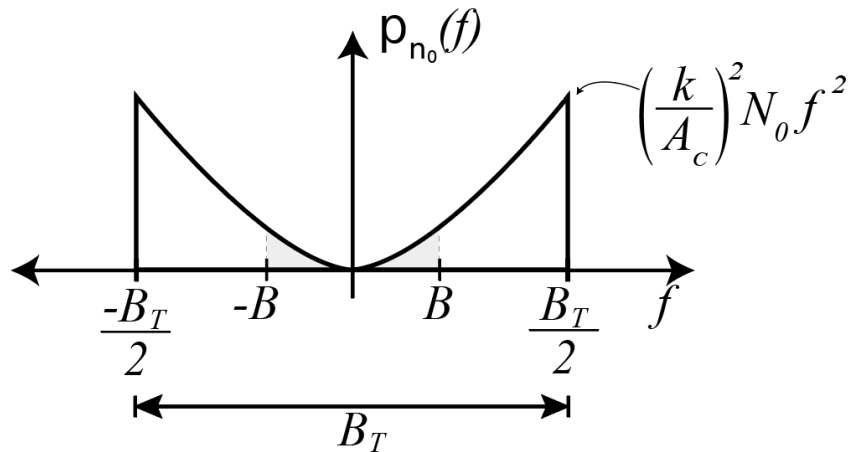
$$s_0(t) = \frac{k}{2\pi} D_f m(t) \quad (3-55)$$

Para obtener la expresión del ruido a la salida del detector coherente, se ocupa la expresión de  $n_0(t)$  presente en la ecuación (3-39) obtenido para PM:

$$\begin{aligned} n_0(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[ \frac{k}{A_c} y_n(t) \right] \\ n_0(t) &= \frac{k}{2\pi A_c} \frac{d}{dt} [y_n(t)] \end{aligned} \quad (3-56)$$

La componente del ruido  $y_n(t)$  pasa banda tiene una densidad espectral de potencia igual a  $\rho_n = \frac{N_0}{2}$ . Si se obtiene la transformada de Fourier de la ecuación (3-56), y posteriormente se calcula la densidad espectral de potencia (DSP), se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{n_0(t)\} &= \frac{k}{2\pi A_c} \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}[y_n(t)]\right\} \\ N_0(f) &= \frac{k}{2\pi A_c} Y_n(f) |j2\pi f| \\ \rho_{n_0}(f) &= \left(\frac{k}{2\pi A_c}\right)^2 \rho_{Y_n}(f) |j2\pi f|^2 \\ \rho_{n_0}(f) &= \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 f^2 \rho_{Y_n}(f) \\ \rho_{n_0}(f) &= \begin{cases} \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 f^2 N_0, & \text{para } |f| \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & \text{f cualquier otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (3-57)$$



**Figura 3.13:** DSP para el ruido a la salida del detector para el receptor de señal modulada en FM.

En la Figura 3.13 se encuentra la representación gráfica de la ecuación (3-57) al tener la frecuencia cuadrática, le entrega a la DSP una forma parabólica, donde las magnitudes espectrales aumentan de forma directamente proporcional con la frecuencia.

La potencia del ruido a la salida del receptor esta expresada por:

$$\begin{aligned}
 P_{N_{out}} &= \int_{-B}^B \rho_{n_0}(f) df = \int_{-B}^B \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 f^2 N_0 df \\
 P_{N_{out}} &= \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 \left[\frac{f^3}{3}\right]_{-B}^B = \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 \frac{1}{3} [B^3 + B^3] \\
 P_{N_{out}} &= \frac{2}{3} \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 B^3 \tag{3-58}
 \end{aligned}$$

La potencia de la señal a la salida del receptor esta expresada por:

$$P_{S_{out}} = \left(\frac{kD_f}{2\pi}\right)^2 \langle m(t)^2 \rangle \tag{3-59}$$

La relación señal ruido presente en la salida esta expresada por:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{D_f V_p}{2\pi B} \\
 \left(\frac{S}{N}\right)_{out} &= \frac{P_{S_{out}}}{P_{N_{out}}} = \frac{\left(\frac{kD_f}{2\pi}\right)^2 \langle m(t)^2 \rangle}{\frac{2}{3} \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 B^3} = \frac{3}{2} A_c^2 \left(\frac{D_f}{2\pi B}\right)^2 \frac{\langle m(t)^2 \rangle}{N_0 B} \\
 \left(\frac{S}{N}\right)_{out} &= \frac{3}{2} A_c^2 \left(\frac{\beta}{V_p}\right)^2 \frac{\langle m(t)^2 \rangle}{N_0 B} = \frac{3 A_c^2 \beta^2}{2 N_0 B} \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle \\
 \left(\frac{S}{N}\right)_{out} &= \frac{3 A_c^2 \beta^2}{2 N_0 B} \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle \tag{3-60}
 \end{aligned}$$

Si  $m(t)$  es una función sinusoidal de un solo tono la ecuación (3-60) se reduce:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{3 A_c^2 \beta^2}{2 N_0 B}, \text{ si } m(t) \text{ es sinusoidal} \tag{3-61}$$

Para determinar la relación señal ruido a la entrada del receptor, teniendo presente que a la entrada la señal aún se encuentra modulada con FM, la potencia de la señal se obtiene por ecuaciones definidas anteriormente.

$$P_{S_{in}} = \frac{A_c^2}{2}$$

$$P_{N_{in}} = N_0 B_T = N_0 [2(\beta + 1)B]$$

La relación señal ruido presente en la entrada del sistema está expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{P_{s_{in}}}{P_{N_{in}}} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{N_0 [2(\beta + 1)B]} = \frac{A_c^2}{4N_0 B(\beta + 1)} \quad (3-62)$$

La relación señal ruido considerando un sistema banda base esta expresada por:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BB} = \frac{P_{s_{BB}}}{P_{N_{BB}}} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{N_0 B} = \frac{A_c^2}{2N_0 B} \quad (3-63)$$

Al realizar un análisis comparativo que relaciona la relación señal-ruido de las salidas con las entradas y de la salida respecto a banda base:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}} = \frac{\frac{3 A_c^2 \beta^2}{2 N_0 B} \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle}{\frac{A_c^2}{4N_0 B(\beta + 1)}} = 6(\beta + 1)\beta^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle \quad (3-64)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}} = 3(\beta + 1)\beta^2, \text{ si } m(t) \text{ es sinusoidal} \quad (3-65)$$

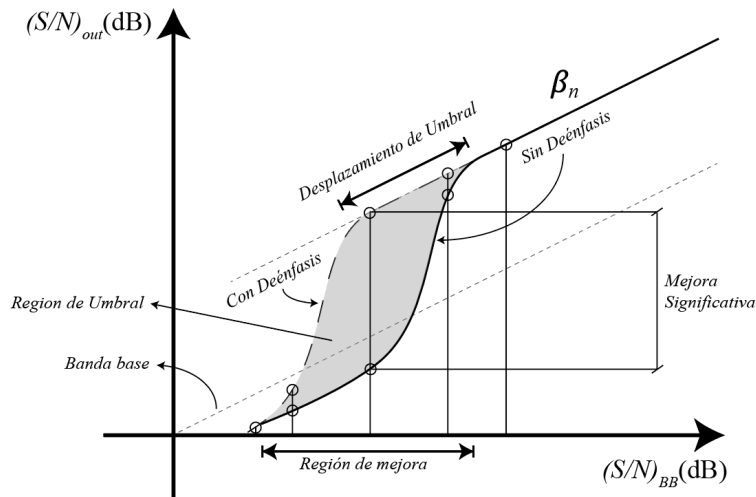
$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{BB}} = \frac{\frac{3 A_c^2 \beta^2}{2 N_0 B} \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle}{\frac{A_c^2}{2N_0 B}} = 3\beta^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle \quad (3-66)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{BB}} = \frac{3}{2}\beta^2, \text{ si } m(t) \text{ es sinusoidal} \quad (3-67)$$

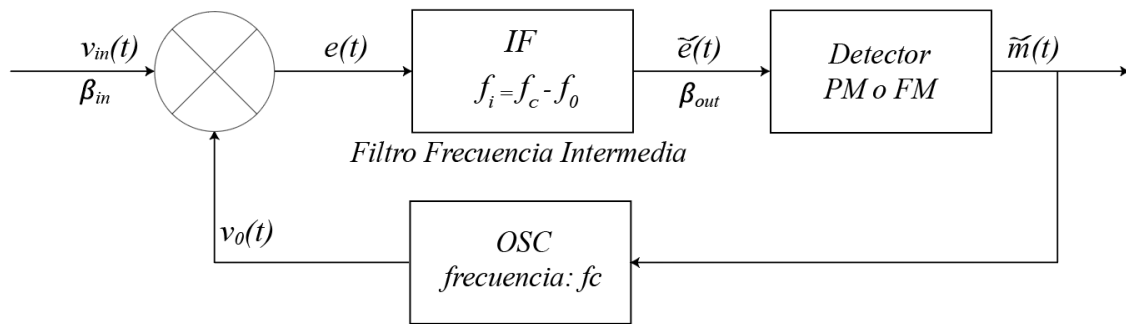
### 2.13 Extensión Umbral

El receptor de FMFB genera una extensión de umbral al disminuir el índice de modulación que se aplica a la entrada para la señal FM.

1. La Figura 3.12 muestra la comparativa de rendimiento del ruido de un discriminador FM, donde se ilustra que existe una mejora sustancial del rendimiento del ruido de FM con deénfasis en comparación con un sistema FM sin deénfasis. Por su puesto estos resultados son valido cuando la señal FM a la entrada del receptor esta por encima del umbral.



**Figura 3.14:** Comparativa de rendimiento del ruido de un discriminador de FM para una señal senoidal FM modulada con ruido gaussiano con deénfasis y sin deénfasis.



**Figura 3.15:** Receptor de FMFB.

En la Figura 3.15 se muestra un receptor de FM con retroalimentación (FMFB), la cual es otra técnica de extensión umbral, sin embargo, el receptor FMFB provee una extensión de umbral al disminuir el índice de modulación para la señal FM que se aplica en la entrada del detector.

$$v_{in}(t) = A_c \cos(\omega_c t + \theta_{in}(t))$$

$$\theta_{in}(t) = D_f \int m(t) \quad (3-68)$$

$$v_o(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0(t))$$

$$\theta_0(t) = D_v \int \tilde{m}(t) \quad (3-69)$$

A la salida del mezclador de la figura 3-15 se tiene una señal  $e(t)$ :

$$e(t) = [A_c \cos(\omega_c t + \theta_{in}(t))] [A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0(t))]$$



$$e(t) = \frac{A_c A_0}{2} \left[ \cos((\omega_c - \omega_0)t + \theta_{in}(t) - \theta_0(t)) + \cos((\omega_c + \omega_0)t + \theta_{in}(t) + \theta_0(t)) \right] \quad (3-70)$$

La señal  $e(t)$  presente en la ecuación (3-70) al entrar en el filtro de frecuencia intermedia, elimina la componente alta, debido a que esta fuera de su ancho de banda de respuesta, obteniendo una señal  $\tilde{e}(t)$ :

$$\tilde{e}(t) = \frac{A_c A_0}{2} \left[ \cos((\omega_c - \omega_0)t + \theta_{in}(t) - \theta_0(t)) \right] \quad (3-71)$$

$$f_{IF} = f_c - f_0 \quad (3-72)$$

$$\theta_T(t) = \theta_{in}(t) - \theta_0(t) \quad (3-73)$$

$$\tilde{e}(t) = \frac{A_c A_0}{2} \left[ \cos(\omega_{IF}t + \theta_T(t)) \right] \quad (3-74)$$

Al utilizar las ecuaciones (3-68) y (3-69) en la ecuación (3-73), se obtiene la expresión de la fase total:

$$\theta_T(t) = \int [D_f m(t) - D_v \tilde{m}(t)] dt \quad (3-75)$$

La ecuación (3-54) representa la señal a la salida del detector de FM:

$$\begin{aligned} \tilde{m}(t) &= \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dt} [\theta_T(t)] \\ \tilde{m}(t) &= \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int [D_f m(t) - D_v \tilde{m}(t)] dt \right] \\ \tilde{m}(t) &= \frac{k}{2\pi} [D_f m(t) - D_v \tilde{m}(t)] \\ \tilde{m}(t) \left( \frac{2\pi}{k} + D_v \right) &= D_f m(t) \\ \tilde{m}(t) &= \frac{D_f}{\left( \frac{2\pi}{k} + D_v \right)} m(t) \\ \tilde{m}(t) &= \frac{k D_f}{2\pi + k D_v} m(t) \end{aligned} \quad (3-76)$$

Al reemplazar la ecuación (3-76) en la ecuación (3-75):

$$\theta_T(t) = \int \left[ D_f m(t) - D_v \frac{k D_f}{2\pi + k D_v} m(t) \right] dt$$

$$\begin{aligned}\theta_T(t) &= \left[1 - \frac{kD_v}{2\pi + kD_v}\right] D_f \int m(t) dt \\ \theta_T(t) &= \left[\frac{2\pi}{2\pi + kD_v}\right] \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{2\pi}}\right) D_f \int m(t) dt \\ \theta_T(t) &= \left[\frac{1}{1 + \frac{kD_v}{2\pi}}\right] D_f \int m(t) dt\end{aligned}\quad (3-77)$$

La ecuación (3-77) indica que el valor presente en los corchetes siempre va a ser inferior a 1, por ende, la multiplicación de ese valor con  $D_f$ , atenúa el valor de  $D_f$  provocando una atenuación en el índice de modulación  $\beta$  que depende de  $D_f$ :

$$\beta = \frac{D_f V_p}{2\pi B}$$

Por esta razón se provoca la reducción de valor del índice de modulación de entrada a la salida del receptor de FMFB, cumpliendo la relación:

$$\beta_{out} < \beta_{in}$$

Al reemplazar la ecuación (3-77) en la ecuación (3-74):

$$\tilde{e}(t) = \frac{A_c A_0}{2} \left[ \cos \left( \omega_{IF} t + \underbrace{\left[ \frac{1}{1 + \frac{kD_v}{2\pi}} \right] D_f \int m(t) dt}_{\theta_T(t)} \right) \right] \quad (3-78)$$

La reducción en el índice de modulación  $\beta$  provoca implícitamente una extensión de umbral, que puede mejorar hasta 7dB solamente en la región del umbral.

## 2.14 Sistemas de FM con deénfasis

Se puede mejorar el rendimiento del ruido en un sistema de FM si se deenfatan las frecuencias más altas de la señal de modulación en la entrada del transmisor y en la salida del receptor. Esta mejora se debe a que la densidad espectral de potencia del ruido en la salida del detector de FM tiene una forma de parábola. La función de transferencia del filtro pasa bajas (LPF) de deénfasis:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j \left(\frac{f}{f_1}\right)} \quad (3-79)$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\tau}$$

De la ecuación (3-57) se observa que la potencia de ruido a la salida del receptor con deénfasis esta expresada por:

$$P_{N_{out}} = \int_{-B}^B |H(f)|^2 \rho_{n_0}(f) df$$

$$|H(f)|^2 = \left| \frac{1}{1 + j\left(\frac{f}{f_1}\right)} \right|^2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}} \right]^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}$$

$$P_{N_{out}} = \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 \int_{-B}^B \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2} \right] f^2 df$$

$$P_{N_{out}} = \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 \left[ 2f_1^3 \left( \frac{B}{f_1} - \tan^{-1} \left( \frac{B}{f_1} \right) \right) \right]$$

$$P_{N_{out}} = 2 \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^3 \left( \frac{B}{f_1} - \tan^{-1} \left( \frac{B}{f_1} \right) \right) \quad (3-80)$$

Si a la ecuación (3-80) se realiza un arreglo algebraico:

$$P_{N_{out}} = 2 \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^3 \left( \frac{B}{f_1} - \tan^{-1} \left( \frac{B}{f_1} \right) \right) \cdot \left( \frac{B}{f_1} \frac{f_1}{B} \right)$$

$$P_{N_{out}} = 2 \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^2 B \underbrace{\left( \frac{f_1}{B} \left( \frac{B}{f_1} - \tan^{-1} \left( \frac{B}{f_1} \right) \right) \right)}_C$$

$$C = \left( \frac{f_1}{B} \right) \left( \frac{B}{f_1} - \tan^{-1} \left( \frac{B}{f_1} \right) \right)$$

$$P_{N_{out}} = 2 \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^2 BC \quad (3-81)$$

Donde la ecuación (3-81) es la expresión real de la potencia de ruido a la salida del receptor con deénfasis.

Si a la ecuación (3-81) se aplica una aproximación, asumiendo:

$$\frac{B}{f_1} \gg 1$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{B}{f_1}\right) \approx \frac{\pi}{2}$$

Volviendo despreciable a  $\tan^{-1}\left(\frac{B}{f_1}\right)$  en comparación con  $\frac{B}{f_1}$ . Por lo tanto, la ecuación (3-81) se convierte:

$$P_{N_{out}} = 2 \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^2 B \left(\frac{f_1}{B}\right) \left(\frac{B}{f_1} - 0\right)$$

$$P_{N_{out}} = 2 \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^2 B \quad (3-82)$$

Donde la ecuación (3-82) es la expresión aproximada de la potencia de ruido a la salida del receptor con deénfasis. Es importante considerar que, a la expresión real, ecuación (3-81) se le realizó un arreglo algebraico para asemejarse a la expresión aproximada, englobando los términos en una constante C, siendo el término que diferencia ambas ecuaciones para un análisis algebraico uniforme.

La potencia de la señal a la salida del receptor esta expresada por la ecuación (3-59):

$$P_{S_{out}} = \left(\frac{kD_f}{2\pi}\right)^2 \langle m(t)^2 \rangle$$

Para el análisis de las relaciones señal ruido, se utiliza la expresión real de la potencia de ruido para mayor precisión del cálculo. La relación señal ruido presente en la salida esta expresada por:

$$\beta = \frac{D_f V_p}{2\pi B}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{P_{S_{out}}}{P_{N_{out}}} = \frac{\left(\frac{kD_f}{2\pi}\right)^2 \langle m(t)^2 \rangle}{2 \left(\frac{k}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^2 B C} = A_c^2 \left(\frac{\beta B}{V_p}\right)^2 \frac{\langle m(t)^2 \rangle}{2N_0 f_1^2 B C}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{A_c^2 \beta^2}{2N_0 B C} \left(\frac{B}{f_1}\right)^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle \quad (3-83)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{A_c^2 \beta^2}{4N_0 B C} \left(\frac{B}{f_1}\right)^2, \text{ si } m(t) \text{ es sinusoidal} \quad (3-84)$$

Para determinar la relación señal ruido a la entrada del receptor, teniendo presente que a la entrada la señal aún se encuentra modulada con FM, la potencia de la señal se obtiene por ecuaciones definidas anteriormente.

$$P_{sin} = \frac{A_c^2}{2}$$

$$P_{Nin} = N_0 B_T = N_0 [2(\beta + 1)B]$$

La relación señal ruido presente en la entrada del sistema está expresada por la ecuación (3-85):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{P_{sin}}{P_{Nin}} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{N_0 [2(\beta + 1)B]} = \frac{A_c^2}{4N_0 B(\beta + 1)} \quad (3-85)$$

La relación señal ruido considerando un sistema banda base esta expresada por la ecuación (3-86):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BB} = \frac{P_{SBB}}{P_{NBB}} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{N_0 B} = \frac{A_c^2}{2N_0 B} \quad (3-86)$$

Al realizar un análisis comparativo que relaciona la relación señal-ruido de las salidas con las entradas y de la salida respecto a banda base:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}} = \frac{\frac{A_c^2 \beta^2 \left(\frac{B}{f_1}\right)^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle}{2N_0 BC}}{\frac{A_c^2}{4N_0 B(\beta + 1)}} = \frac{2(\beta + 1)\beta^2 \left(\frac{B}{f_1}\right)^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle}{C} \quad (3-87)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}} = \frac{(\beta + 1)\beta^2 \left(\frac{B}{f_1}\right)^2}{C}, \text{ si } m(t) \text{ es sinusoidal} \quad (3-88)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{BB}} = \frac{\frac{A_c^2 \beta^2 \left(\frac{B}{f_1}\right)^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle}{2N_0 BC}}{\frac{A_c^2}{2N_0 B}} = \frac{\beta^2 \left(\frac{B}{f_1}\right)^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle}{C} \quad (3-89)$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{BB}} = \frac{\beta^2 \left(\frac{B}{f_1}\right)^2}{2C}, \text{ si } m(t) \text{ es sinusoidal} \quad (3-90)$$

En el caso que la señal moduladora es sinusoidal la relación  $\frac{(\frac{S}{N})_{out}}{(\frac{S}{N})_{in}}$  y  $\frac{(\frac{S}{N})_{out}}{(\frac{S}{N})_{BB}}$  se reducen a las ecuaciones (3-88) y (3-90), donde se define que estas ecuaciones van a depender únicamente del índice de modulación, el ancho de banda y de la frecuencia correspondiente al deénfasis.

## Bibliografia

1. Couch, L. W. (2019). Digital and Analog Communication Systems (9th Ed.). Pearson.
2. Tomasi, W. (2015). Electronic Communication Systems: Fundamentals Through Advanced (5th Ed.). Pearson.
3. Couch, L.W. Digital and Analog Communication Systems. Pearson Education, 2007.
4. Haykin, S. Communication Systems. Wiley, 2009.
5. Proakis, J.G. Digital Communications. McGraw-Hill, 2008.
6. Simon, M.K. Digital Communication Techniques: Signal Design and Detection. Prentice Hall, 2000.
7. Saleh, A.A.M. Digital Communications: Fundamentals and Applications. Pearson Education, 2015.
8. Sklar, B. Digital Communications: Fundamentals and Applications. Pearson Education, 2001.
9. Tomasi, W. Advanced Electronic Communications Systems. Pearson Education, 2002.
10. Lee, W.C.Y. Mobile Cellular Telecommunications: Analog and Digital Systems. McGraw-Hill, 1995.
11. Couch, L.W. Digital and Analog Communication Systems. Pearson Education, 2015.
12. Lathi, B.P. Modern Digital and Analog Communication Systems. Oxford University Press, 1998.
13. Simon, M.K., and Hinedi, S.M. Digital Communication over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis. Wiley, 2004.
14. Rice, M. Digital Communications: A Discrete-Time Approach. Prentice Hall, 2008.
15. Tse, D., and Viswanath, P. Fundamentals of Wireless Communication. Cambridge University Press, 2005.

### **Ing. Fabricio Javier Santacruz Sulca:**

El Ing. Fabricio Javier Santacruz Sulca nacido en Riobamba, Ecuador, realizó sus estudios de grado en la prestigiosa Universidad de la Calabria en Italia, donde obtuvo el título de Ingeniero Electrónico y más tarde, un postgrado en la misma universidad, alcanzando el título de Máster en Ingeniería de las Telecomunicaciones. Con su amplia experiencia en el campo de las telecomunicaciones, es actualmente docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en la facultad de Informática y Electrónica, donde comparte sus conocimientos y habilidades con las futuras generaciones de ingenieros y técnicos en el área de las telecomunicaciones. Su experiencia y formación han contribuido significativamente al desarrollo y avance de las comunicaciones en el ámbito académico y profesional, siendo este libro una importante fuente de conocimiento para aquellos interesados en el campo de las telecomunicaciones.

### **Ing. Paúl David Moreno Avilés**

El Ing. Paúl David Moreno Avilés nacido en la ciudad de Riobamba, Ecuador, obtuvo su título universitario de tercer nivel como Ingeniero Electrónico en Telecomunicaciones en la Escuela superior Politécnica del Ejército ESPE, posteriormente logró una beca estudiantil para cursar sus estudios de doctorado en la Universidad de la Calabria en Italia en el laboratorio uwaveLab especializándose en temas de radares, antenas y sistemas de comunicaciones. Ha desempeñado varios cargos en instituciones públicas como en empresas privadas en el ámbito de las Telecomunicaciones, por lo que cuenta con una vasta experiencia profesional. Actualmente labora como docente titular en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo ESPOCH dictando las materias de Comunicaciones y Radioenlaces, ha sido autor de varios artículos científicos participado en numerosos congresos internacionales, dirigido y participado en varios proyectos de Investigación

### **Ing. Diego Fernando Veloz Chérrez**

Diego Fernando Veloz Chérrez, Máster en Tecnologías de la Información con especialidad de Seguridad y redes de la Universidad de Griffith Australia. Nació en Riobamba – Ecuador y se mudó a Quito para estudiar Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones en la Escuela Politécnica Nacional. Siempre estuvo involucrado en el ámbito de las comunicaciones inalámbricas y aplicación de tecnologías innovadoras, siendo uno de los pioneros en el uso e implementación de la tecnología NFC en Ecuador. Tiene experiencia en la empresa privada llegando a ocupar cargos directivos. Postuló en becas nacionales obteniendo una beca para estudiar su postgrado en Australia. Actualmente es docente de la Facultad de Informática y Electrónica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en donde se desempeña en diferentes ámbitos: Coordinador de la sección estudiantil IEEE. Coordinador de proyecto de Vinculación ESPOCH-GADM Riobamba. Miembro del Grupo de Investigación de Comunicaciones inalámbricas de la carrera de Telecomunicaciones. Director de proyectos de tesis de pregrado y postgrado. Coordinador de convenio ESPOCH-CNT. Tiene amplia experiencia en el campo de las redes, seguridad de redes, tecnologías inalámbricas, ethical hacking, implementación de sistemas de gestión y en el Internet de las Cosas.

ISBN: 978-9942-33-666-8



9

7 8 9 9 4 2 | 3 3 6 6 6 8

**compAs**  
Grupo de capacitación e investigación pedagógica



@grupocompas.ec

compasacademico@icloud.com